



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 10

Abgabe: Montag 8. 7. 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 37

Sei A ein Ring.

- (a) Ein A -Modul Q ist genau dann injektiv, wenn für jedes Ideal $I \subseteq A$ und jede A -lineare Abbildung $f: I \rightarrow Q$ eine A -lineare Fortsetzung $g: A \rightarrow Q$ von f existiert.
- (b) Ist A integer, so ist $K = \text{Quot}(A)$ ein injektiver A -Modul.
- (c) Ist A ein Hauptidealring, so ist ein A -Modul Q genau dann injektiv, wenn er divisibel ist, d.h. wenn $aQ = Q$ für alle $0 \neq a \in A$ ist.

Aufgabe 38

Sei k ein Körper, sei $A = k[x, y, z]$. Betrachte die Elemente $a_1 = x(y-1)$, $a_2 = y$, $a_3 = z(y-1)$ in A . Entscheide für jede der beiden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (a_1, a_3, a_2) , ob sie A -regulär sind.

Aufgabe 39

Sei $0 \rightarrow U \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A -Moduln, und sei $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Folge in A , welche U -regulär und N -regulär ist. Zeige, daß $\mathbf{a}$ auch M -regulär ist.

Aufgabe 40

Sei M ein A -Modul und $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ eine M -Folge in A .

- (a) Ist auch $(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$ eine M -Folge, so ist auch $(a_1, \dots, a_i a'_i, \dots, a_n)$ eine M -Folge.
- (b) Für beliebige $k_1, \dots, k_n \geq 1$ ist $(a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n})$ eine M -Folge.

Hinweis zu (a): Der wesentliche Fall ist $i = 1$. Verwende Aufgabe 39.