



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 11

Abgabe: Montag 15. 7. 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 41

Sei A ein Ring, sei $\cdots \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0 \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A -Moduln, und sei $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Folge in A . Ist $\mathbf{a}$ N_i -regulär für alle $i \geq 0$, so ist auch die Sequenz

$$\cdots \rightarrow N_2/\mathbf{a}N_2 \rightarrow N_1/\mathbf{a}N_1 \rightarrow N_0/\mathbf{a}N_0 \rightarrow 0$$

exakt.

Aufgabe 42

Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring und $f: M \rightarrow N$ eine lineare Abbildung zwischen endlichen A -Moduln, sei $\bar{f}: M \otimes k \rightarrow N \otimes k$ die induzierte Abbildung.

- (a) $\bar{f}$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv und $\ker(f) \subseteq \mathfrak{m}M$.
- (b) Sind M, N frei, so ist $\bar{f}$ ein Isomorphismus genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 43

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, M ein endlicher A -Modul und $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. Laut Vorlesung Satz IV.3.7 gilt $\text{depth}_A(\mathfrak{p}, M) \leq \text{depth}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. Finde ein Beispiel, wo die Ungleichung strikt und die rechte Tiefe endlich ist.

Aufgabe 44

Sei A ein noetherscher Ring. Für jede A -Folge $(a_1, \dots, a_n)$ hat das Ideal $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ in A die Höhe n . Für jedes Ideal $I \neq \langle 1 \rangle$ von A ist also $\text{depth}(I, A) \leq \text{ht}(I)$.