Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
SS 2019

Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 2

Abgabe: Montag 6. Mai 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 5

Sei A ein Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Sei $B = A/I$ bzw. $B = A_S$, und sei $\varphi\colon A \to B$ der kanonische Homomorphismus. Dann ist $\varphi^*\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ ein Homöomorphismus von $\operatorname{Spec}(B)$ auf den Teilraum $\operatorname{im}(\varphi^*)$ von $\operatorname{Spec}(A)$.

Aufgabe 6

Zu jedem kommutativen Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[r, "\beta"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

gibt es einen (natürlichen) Homomorphismus $\delta\colon \ker(f'') \to \operatorname{coker}(f')$ so, daß die induzierte Sequenz

$$\ker(f') \to \ker(f) \to \ker(f'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(f') \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(f'')$$

exakt ist.

Aufgabe 7

Sei A ein Ring, und sei P ein endlich präsentierter und lokal freier A-Modul. (P lokal frei heißt, für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ ist $P_\mathfrak{m}$ ein freier $A_\mathfrak{m}$-Modul.)

(a) Für A-Moduln M, N mit M endlich präsentiert, und für jede multiplikative Teilmenge S von A, ist die kanonische Abbildung

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \otimes_A A_S \;\to\; \operatorname{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$$

ein Isomorphismus der A_S-Moduln.

(b) Der A-Modul P ist projektiv.

Hinweise: In (a) benutze man eine exakte Sequenz $G \to F \to M \to 0$ mit endlich erzeugten freien A-Moduln F, G und jage ein geeignetes Diagramm. In (b) zeige man für surjektives $f\colon N \to P$ die Surjektivität von $f_*\colon \operatorname{Hom}_A(P, N) \to \operatorname{Hom}_A(P, P)$ mittels Lokalisierung (beachte B5 Aufgabe 41(d), WS 18/19).

Aufgabe 8

Sei A ein Dedekindring. Zeige: Jedes Ideal von A ist ein projektiver A-Modul.