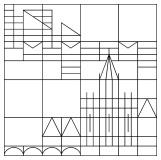
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
SS 2019



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 3

Abgabe: Montag 13. Mai 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 9

Sei $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(M/IM)} \;=\; \sqrt{I + \mathrm{Ann}(M)}$$

(*Hinweis*: Lemma 3.7).

Aufgabe 10

Sei $(K_i)_{i\in I}$ eine Familie von Körpern mit $|I| = \infty$, sei $A = \prod_{i\in I} K_i$. Zeige:

(a) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein Körper.
(b) Der Ring A ist nicht noethersch.

Hinweis zu (a): Für jedes $a \in A$ gilt $\langle a\rangle = \langle a^2\rangle$.

Aufgabe 11

Sei M ein A-Modul, und seien a, $b \in A$ so, daß M/abM endliche Länge hat. Ist b kein Nullteiler von M, so gilt

$$\ell(M/abM) \;=\; \ell(M/aM) + \ell(M/bM).$$

Insbesondere haben dann auch M/aM und M/bM endliche Länge.

Aufgabe 12

Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein integrer lokaler Ring, sei $K = \mathrm{Quot}(A)$, und sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Ist $\dim_k(M \otimes_A k) = \dim_K(M \otimes_A K) = d$, so ist M frei vom Rang d. (*Anleitung*: Zeige, daß M von d Elementen erzeugt wird, und untersuche die zugehörige exakte Sequenz $0 \to N \to A^d \to M \to 0$ von A-Moduln.)