



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 4

Abgabe: Montag 20. Mai 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 13

Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A -Modul und $I = \text{Ann}(M)$.

- (a) Für $a \in A$ ist $\text{Ann}(aM) = (I : a)_A$.
- (b) $\text{Ass}(A/I) \subseteq \text{Ass}(M)$, und beide Mengen haben dieselben minimalen Elemente.
- (c) Zeige durch ein Beispiel, daß in (b) im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 14

Sei A ein noetherscher Ring, seien M, N A -Moduln, und sei M endlich erzeugt. Zeige

$$\text{Ass}(\text{Hom}_A(M, N)) = \text{supp}(M) \cap \text{Ass}(N)$$

und folgere $\text{Ass}((0 : I)_N) = \text{Ass}(N) \cap V(I)$ für jedes Ideal $I \subseteq A$.

Aufgabe 15

Sei A ein Hauptidealring, sei M ein endlich erzeugter A -Modul, also $M = F \oplus T$ mit F frei von endlichem Rang und $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ mit $T_i = \bigoplus_j A/\langle \pi_i^{e_{ij}} \rangle$, wobei $\pi_1, \dots, \pi_n$ paarweise nichtassozierte Primelemente sind und $e_{ij} \geq 1$ gilt.

- (a) Finde eine irredundante Primärzerlegung des Untermoduls $\{0\}$ von M .
- (b) Zeige: Ist $F \neq \{0\}$ und $T \neq \{0\}$, so gibt es noch andere irredundante Primärzerlegungen von $\{0\}$.

Aufgabe 16

Sei k ein Körper, betrachte die Ideale $\mathfrak{p} = \langle x \rangle$, $\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle$ und $I = \langle x^2, xy \rangle$ in $k[x, y]$. Zeige:

- (a) $I = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{p} \cap \langle x^2, y \rangle$.
- (b) Beide Zerlegungen (a) sind irredundante Primärzerlegungen von I , und ihre $\mathfrak{m}$ -primären Komponenten sind verschieden.