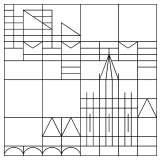
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
SS 2019



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 5

Abgabe: Montag 27. Mai 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 17

Sei A ein integrer Ring mit Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(A)$. Zeige $\bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}} = A$ (Durchschnitt in K) und folgere: Genau dann ist A ganz abgeschlossen, wenn $A_{\mathfrak{m}}$ ganz abgeschlossen ist für jedes $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$.

Aufgabe 18

Sei k ein unendlicher Körper, sei $0 \neq q \in k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$, und sei $A = k[x, q^{-1}]$, ein Teilring von $k(x) = k(x_1, \ldots, x_n)$. Finde eine Noethersche Normalisierung von A.

Aufgabe 19

Sei k ein Körper, $\mathrm{char}(k) \neq 2$, sei $f \in A = k[x_1, \ldots, x_n]$ ein quadratfreies nichtkonstantes Polynom, und sei $A' := A[t]/\langle t^2 - f\rangle$.

(a) Für den von A und $\sqrt{f}$ erzeugten Teilring B von $K(\sqrt{f})$ gilt $A' \cong B$.
(b) A' ist ganz abgeschlossen.

Aufgabe 20

Sei A ein integrer Ring und $K = \mathrm{Quot}(A)$. Ein Element $x \in K$ heißt *fast ganz* über A, falls es $0 \neq a \in A$ mit $ax^n \in A$ für alle $n \geq 1$ gibt. Liegt jedes über A fast ganze Element aus K in A, so heißt A *vollständig ganz abgeschlossen*.

(a) Jedes über A ganze Element aus K ist auch fast ganz über A. Ist A noethersch, so gilt davon auch die Umkehrung.
(b) A vollständig ganz abgeschlossen $\Rightarrow$ A ganz abgeschlossen, und für noethersches A gilt auch die Umkehrung.
(c) Die über A fast ganzen Elemente bilden einen Teilring von K.
(d) Ist A vollständig ganz abgeschlossen, so sind auch $A[x]$ und $A[\![x]\!]$ vollständig ganz abgeschlossen.