



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 6

Abgabe: Montag 3. Juni 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 21

Sei A ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A .

- (a) Die Abbildung $I \mapsto IA_{\mathfrak{m}}$ ist eine Bijektion zwischen den $\mathfrak{m}$ -primären Idealen von A und den $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ -primären Idealen von $A_{\mathfrak{m}}$.
- (b) Sei I ein $\mathfrak{m}$ -primäres Ideal von A . Für jeden A -Modul M besteht ein kanonischer Isomorphismus $M_{\mathfrak{m}}/IM_{\mathfrak{m}} \cong M/IM$ von A -Moduln.

Aufgabe 22

Sei k ein Ring, seien A und B zwei k -Algebren, und seien $S \subseteq A$ und $T \subseteq B$ multiplikative Teilmengen. Dann besteht ein kanonischer Ringisomorphismus

$$A_S \otimes_k B_T = (A \otimes_k B)_{S \otimes T}$$

mit $S \otimes T := \{s \otimes t : s \in S, t \in T\}$ (eine multiplikative Teilmenge von $A \otimes_k B$).

Aufgabe 23

Für jeden Ring A sei $A[[x]]$ der Ring aller formalen Potenzreihen $f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ mit $a_n \in A$ ($n \geq 0$).

- (a) Ist A integer bzw. reduziert, so gilt dasselbe für $A[[x]]$.
- (b) $x \in \text{Rad } A[[x]]$.
- (c) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{q}$ von $A[[x]]$ ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ ein maximales Ideal von A , und $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + \langle x \rangle$.
- (d) Ist A noethersch, so gilt $A[[x]] \otimes_A A/I \cong (A/I)[[x]]$ für jedes Ideal $I \subseteq A$.

Aufgabe 24

Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, sei $\varphi: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ der kanonische Homomorphismus. Für $n \geq 1$ ist die n -te *symbolische Potenz* von $\mathfrak{p}$ definiert als das Ideal

$$\mathfrak{p}^{(n)} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}})$$

von A . Zeige:

- (a) $\mathfrak{p}^{(n)} = \{a \in A : \exists s \in A \text{ mit } s \notin \mathfrak{p} \text{ und } sa \in \mathfrak{p}^n\}$.
- (b) Das Radikal von $\mathfrak{p}^{(n)}$ ist $\mathfrak{p}$.
- (c) $\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{p}^{(n)}$, mit Gleichheit für $n = 1$ oder für $\mathfrak{p} \in \text{Max}(A)$.
- (d) $\mathfrak{p}^{(n)}$ ist das kleinste $\mathfrak{p}^n$ enthaltende $\mathfrak{p}$ -primäre Ideal von A .