



Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 7

Abgabe: Montag 10. 6. 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 25

Die regulären lokalen Ringe von Dimension ≤ 1 sind genau die diskreten Bewertungsringe. (*Anleitung:* Zeige, daß jeder reguläre lokale Ring von Dimension eins ein Hauptidealring ist.)

Aufgabe 26

Sei A ein Ring.

- (a) Sei B eine A -Algebra, sei $n := \sup\{\dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A)\}$. Dann ist

$$1 + \dim(B) \leq (n + 1) \cdot (1 + \dim(A)).$$

- (b) $1 + \dim(A) \leq \dim A[x] \leq 1 + 2 \dim(A)$.

Aufgabe 27

Sei $L \subseteq F$ eine nicht algebraische Körpererweiterung. Sei $B = F[[t]]$ der Potenzreihenring in einer Variablen t über F , sei $\mathfrak{m} = tB$ das maximale Ideal von B und

$$A := L + \mathfrak{m} = \{f \in F[[t]] : f(0) \in L\}.$$

- (a) A ist ein lokaler integrierter Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und mit $\dim(A) = 1$.
 (b) $\dim A[x] = 3$.

Anleitung zu (b): Sei $\xi \in F$ ein über L transzendentes Element, und sei C der von A und ξ erzeugte Teilring von B . Verwende geeignete Homomorphismen $A[x] \rightarrow C \rightarrow L[\xi]$ sowie Aufgabe 26.

Aufgabe 28

Sei $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ ein graduerter Ring und $A_+ = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$. Es sind äquivalent:

- (i) A ist noethersch,
- (ii) jedes homogene Ideal in A ist endlich erzeugt,
- (iii) A_0 ist noethersch und A_+ ist endlich erzeugt als Ideal in A ,
- (iv) A_0 ist noethersch und A ist endlich erzeugt als A_0 -Algebra.

Falls A als A_0 -Algebra von A_1 erzeugt wird, so ist auch äquivalent:

- (v) A_0 ist noethersch und A_1 ist endlich erzeugt als A_0 -Modul.