Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
SS 2019

Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 8

Abgabe: Montag 24. 6. 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 29
Sei S ein graduierter noetherscher Ring mit S_0 artinsch, und sei M ein endlich erzeugter graduierter S-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) $\ell(M) < \infty$,
(ii) $S_+ \subseteq \sqrt{\mathrm{Ann}(M)}$,
(iii) $M_d \neq 0$ nur für endlich viele $d \in \mathbb{Z}$.

Sind diese erfüllt, so hat M eine Kompositionsreihe aus homogenen Untermoduln, und jeder Kompositionsfaktor ist graduiert-isomorph zu $(S/\mathfrak{m})(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \supseteq S_+$.

Aufgabe 30
Sei M ein A-Modul mit einer separierten Filtrierung $(M_n)_{n\geq 0}$. Genau dann ist M mit dieser Filtrierung vollständig, wenn für jede Nullfolge $(x_i)_{i\geq 1}$ in M die Reihe $\sum_{i\geq 1} x_i$ in M konvergiert.

Aufgabe 31
Sei k ein Körper, sei $0 \neq f \in k[x]$ ein Polynom mit $\deg(f) = d \geq 0$. Ist $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}(k) > d+1$, so gibt es genau ein Polynom $g \in k[x]$ mit $\deg(g) = d+1$ und mit

$$g(n) \;=\; f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 32
Sei A ein reduzierter noetherscher Ring und I ein Ideal in A. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ diejenigen minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ von A, für die $I + \mathfrak{p} \neq \langle 1 \rangle$ gilt. Dann ist

$$\bigcap_{n\geq 1} I^n \;=\; \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r.$$