Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
SS 2019

Übungen zur Kommutativen Algebra

Blatt 9

Abgabe: Montag 1. 7. 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 33
Sei A ein lokaler noetherscher Ring, sei $\widehat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ seine Komplettierung und $G = \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n\ge 0} G_n$ mit $G_n = \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ der zugehörige graduierte Ring. Zeige die Implikationen

$$G \text{ integer} \quad\Rightarrow\quad \widehat{A} \text{ integer} \quad\Rightarrow\quad A \text{ integer},$$

und beweise auch dieselben Implikationen mit "reduziert" statt "integer".

Aufgabe 34
Sei k ein Körper, sei $(A, \mathfrak{m})$ der lokale Ring der Kurve $y^2 = x^3$ (über k) im Ursprung, sei $\widehat{A}$ die Komplettierung von A und $G = \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}}(A)$ der zu A assoziierte graduierte Ring. Zeige, daß A integer ist, und untersuche die Ringe $\widehat{A}$ und G darauf, ob sie integer oder reduziert sind.

Aufgabe 35
Sei A ein Ring, seien $I_1, \dots, I_r$ Ideale von A mit $I_i + I_j = \langle 1\rangle$ für alle $i \ne j$, und sei $I = \bigcap_{i=1}^r I_i$. Sei B die I-adische und B_i die I_i-adische Komplettierung von A, für $i = 1, \dots, r$. Dann besteht ein kanonischer Ringisomorphismus $B \cong B_1 \times \cdots \times B_r$.

Aufgabe 36
Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein regulärer lokaler Ring von Dimension $n \ge 1$, und sei $\mathrm{Quot}(A) = K$. Für $0 \ne a \in A$ sei

$$\omega(a) \;:=\; \max\{n \ge 0\colon a \in \mathfrak{m}^n\}.$$

Dann setzt sich ω zu einer diskreten Bewertung ω von K fort. Der Restklassenkörper von ω ist (über A) isomorph zu einem rationalen Funktionenkörper über k von Dimension $n-1$.