Proseminar und Seminar für Lehramtstudierende: Analysis

Winter 2020/21, Konvexität, kritische Punkte und Folgenräume.

(1) Elementare Eigenschaften (Mittelpunktkonvexität und Konvexität, Konvexität und $D^2u \succcurlyeq 0$, liegt oberhalb der Tangentialebene, lokale und globale Konvexität, Beispiele: $|x|^2$, $|x|$, $\exp(x)$, jede Norm, punktweiser Limes erhält Konvexität, Maxima und Suprema konvexer Funktionen sind konvex, Material von [3, S. 61-63], Konvexe Hülle, Carathéodorys Theorem, ggf. auswählen)

(2) Schnitte konvexer Mengen: Abgeschlossene konvexe Mengen sind genau Schnitte von abgeschlossenen Halbräumen (Satz von Hahn-Banach)

(3) Konvexe Körper, Bälle und Ellipsoide
In einem konvexen Körper mit beschränktem Durchmesser und nach unten beschränktem Volumen gibt es eine Kugel mit nach unten beschränktem Radius [1, Lemma 4].

Um jeden beschränkten konvexen Körper gibt es ein Ellipsoid, so dass eine kleinere Kopie (mit festem Streckfaktor) davon im konvexen Körper enthalten ist, siehe [2] und [5, Lemma 3.1].

(4) Eistütenabschätzung
Die C^1-Norm einer konvexen Funktion mit beschränkter Normalableitung ist beschränkt. [4, Theorem 3.1]

(5) Gradientenfluss: Teilfolgenkonvergenz und Nichtkonvergenz. Ggf. diskrete Version. Erweiterbar zu einer Abschlussarbeit für Lehramtsstudierende. Konvergenz z. B. für analytische Funktionen.

(6) Minimax Theorem: Aus [6]. Erweiterbar zu einer Abschlussarbeit für Lehramtsstudierende.

(7) ℓ^p-Räume: Schachtelung von ℓ^p und L^p-Räumen, $\ell^p(\mathbb{N})$ ist Banachraum, $\overline{B_1(0)}$ ist nicht kompakt, Separabilität

(8) ab hier in $\ell^2(\mathbb{N})$: Schwach konvergente Teilfolgen, kompakte Teilmengen; geeignet für Lehrämtler.

(9) Surjektive/injektive lineare Abbildungen;

$$T\colon (x^1, x^2, \ldots) \mapsto \left(\frac{x^1}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \ldots\right)$$

ist weder offen noch abgeschlossen, aber kompakt; Gegenbeispiel zu Brouwer [6], Retrahierbarkeit von $\overline{B_1(0)}$; geschachtelte Familie von Erzeugendensystemen, dessen Schnitt kein Erzeugendensystem ist.

(10) Brouwerscher Fixpunktsatz.

Literatur

1. Shiu Yuen Cheng and Shing Tung Yau, *On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 5, 495–516.

2. Fritz John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 1948, pp. 187–204.
3. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
4. Oliver C. Schnürer and Hartmut R. Schwetlick, *Translating solutions for Gauß curvature flows with Neumann boundary conditions*, Pacific J. Math. **213** (2004), no. 1, 89–109.
5. Neil S. Trudinger and Xu-Jia Wang, *The Monge-Ampère equation and its geometric applications*, Handbook of geometric analysis. No. 1, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 7, Int. Press, Somerville, MA, 2008, pp. 467–524.
6. Michel Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.