Schwache Harnackungleichung unter Dirichletrandwerten und messbaren Koeffizienten für parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Bachelorarbeit bei Oliver Schnürer

vorgelegt von

Anja Grabow, Matr.-Nr. 3868721

am 01.01.2008,

am Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Deutschland.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist eines der anwendungsbezogensten der Mathematik. Zu Beginn einer Vorlesung lernt man vor allem die elliptischen partiellen Differentialgleichungsprobleme kennen, welche in allen erdenklichen Varianten untersucht wurden. Die Bandbreite der möglichen Problemstellungen ist enorm. Angefangen beim einfachen Anfangswertproblem bis zu komplexen Randabschätzungen, lassen sich unterschiedlichste Aussagen zu Existenz, Eindeutigkeit und Charakteristika von Lösungen treffen. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen ist im Bereich der partiellen sehr selten eine geschlossene Lösungsformel anzugeben. Aus diesem Grund hat man es bei partiellen Differentialgleichungen selten mit Fundamentallösungen oder Fundamentalsystemen zu tun.

Auf den Betrachtungen zu elliptischen Differentialgleichungen aufbauend, haben einige Mathematiker sich mit Problemstellungen im parabolischen Fall beschäftigt. Durch ihre Arbeit in diesem Bereich wurden Mathematiker wie N. V. Krylov und M. V. Safonov bekannt, die wesentliche Erkenntnisse in diesem Bereich lieferten.

Die vorliegende Abschlussarbeit meines Mathematikstudiums wird sich im Folgenden mit Sachverhalten genau aus diesem in Vorlesungen oft etwas im Schatten stehenden, aber nicht weniger wichtigen, mathematischen Bereich befassen. Im allgemeinen beschreiben parabolische Gleichungen zweiter Ordnung in den physikalischen Anwendungen zum Beispiel die Veränderung einer chemischen Konzentration innerhalb einer bestimmten Menge. Der Term zweiter Ordnung beschreibt dabei die Diffusion, der Term erster Ordnung die örtliche Verschiebung und der Term nullter Ordnung die Zu- oder Abnahme aufgrund von Reaktionen.

Themen dieser Arbeit sind a priori Abschätzungen für parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese Abschätzungen gehen auf Arbeiten von N. V. Krylov und M. V. Safonov [**Kry2**] beziehungsweise L. E. Evans [**Eva2**] zurück. Sie beweisen die Hölderstetigkeit von Lösungen, im Falle messbarer Koeffizienten. (Wir bemerken, dass man in der Schaudertheorie [**Gilb**] hölderstetige Koeffizienten benötigt.) Weitere Referenzen für die sogenannten Abschätzungen von Krylov und Safonov sind im elliptischen Fall [**Gilb, Sch2, Tayl**] und [**Lieb**] im parabolischen Fall.

In der geometrischen Analysis werden die Abschätzungen von Krylov und Safonov bei unterschiedlichen Problemen angewandt. Solche sind:

- Der Yamabefluss [**Bren**] und der zweidimensionale Riccifluss [**Hami, Wu, Sch1**] in der konformen Geometrie.
- Voll nichtlineare partielle Differentialgleichungen, in denen die Gaußkrümmung auftritt, [**Trud, Baya, Tso**].

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis der schwachen Harnackungleichung unter Dirichletrandwerten. Der Beweis ist sehr komplex und benötigt diverse Theoreme und technische Hilfsmittel. Um die Übersicht zu wahren, werden diese dem eigentlichen Beweis der Harnackungleichung vorangestellt und zwar in der Reihenfolge ihres Auftretens in diesem. Es sei explizit darauf hingewiesen, wie wichtig es ist, sich stets klar zu machen, welche Bedingungen und Sachverhalte auf welchen Mengen gelten.

KAPITEL 2

Notation und Definition

Um die Übersicht zu wahren, werden einige vereinfachende Schreibweisen vorgenommen. Diese entsprechen den üblichen Gewohnheiten im Bereich der partiellen Differentialgleichungen. Die Differentialoperatoren werden mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention folgendermaßen gekürzt geschrieben:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} b^i D_i + d \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} + a^{ij} D_{ij} + b^i D_i + d. \end{aligned}$$

a^{ij}, b^i und d sind von $(x,t) \in G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ abhängige reellwertige Koeffizientenfunktionen in $L^\infty(G)$. Hochgestellte Indizes bezeichnen Matrix- und Vektoreinträge. Der Ausdruck a^{ij} meint den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte der Koeffizientenmatrix. Der Ausdruck b^i meint entsprechend den i-ten Eintrag im Koeffizientenvektor. Tiefgestellte Indizes bezeichnen die partiellen Ableitungen einer Funktion. Für die Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist $D_{ij}u(x,t) \equiv u_{ij} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t)$ die zweite partielle Ableitung von u und $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ die Ableitung von u nach $t \in \mathbb{R}$. Meist wird $\frac{\partial u}{\partial t}$ als u_t oder $\dot{u}$ geschrieben. Da x die räumliche und t die zeitliche Komponente einer Differentialgleichung sind, spricht man von räumlicher und zeitlicher Ableitung.

L heißt gleichmäßig parabolisch, falls Konstanten $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ existieren, so dass

$$\Lambda |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

für alle $(x,t) \in G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt. Es wird vorausgesetzt, dass die Koeffizienten a^{ij}, b^i und d beschränkt sind, wobei a^{ij} außerdem symmetrisch sein soll. Sei

$$H := \det(a^{ij}) \quad \text{und} \quad H^* := H^{1/(n+1)}.$$

Für eine beliebige Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist der parabolische Rand PG definiert als die Menge aller Punkte $(x,t) \in \partial G$, für die $B_r(x) \times (t - r^2, t)$ für beliebiges (insbesondere kleines) $r > 0$ nicht in G enthalten ist. Unsere Betrachtungen beziehen sich auf Zylindermengen, deshalb definieren wir die Menge Ω_T durch

$$\Omega_T := \Omega \times (0,T),$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $T > 0$ sind. Für den parabolischen Rand von Ω_T gilt nach obiger Definition

$$P\Omega_T = P(\Omega \times (0,T)) := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).$$

Weiterhin ist der Schnitt mit einem Zylinder definiert als $\Omega[r] := Q(r) \cap \Omega_T$, wobei der Zylinder durch $Q(r) = Q((x,t),r) := B_r(x) \times (t - r^2, t)$ beschrieben wird. Der Einfachheit halber werden die Zylinder in den meisten Fällen bezüglich eines gemeinsamen Referenzpunktes definiert, dieser wird, soweit nicht anders angemerkt, der Ursprung sein. Für den parabolischen Rand von $\Omega[r]$ gilt

$$P(\Omega[r]) = \left(\bar{Q}(r) \cap P\Omega_T\right) \cup \left(PQ(r) \cap \Omega_T\right).$$

Für eine Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ mit $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist die Menge der oberen Kontaktpunkte $E(u)$ definiert als die Menge aller Punkte $(x,t) \in G$, für die es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$u(x,t) + \langle \xi, y - x \rangle \geq u(y,s)$$

für alle $(y,s) \in G$ mit $s \leq t$ erfüllt ist. Dies gilt dann speziell für $y = x$ und es folgt

$$u(x,s) \leq u(x,t) \quad \text{für } s \leq t.$$

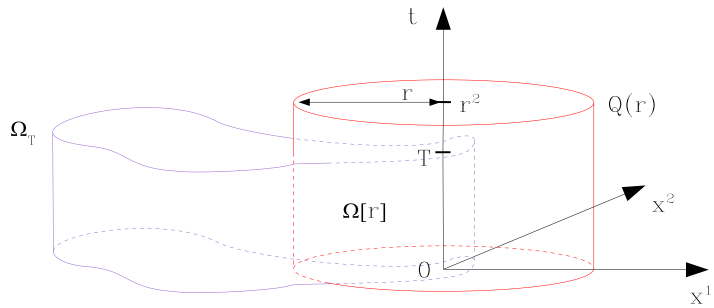

ABBILDUNG 1. Der Fall $n = 2$ mit $T > 0$ und $t = r^2$

Sei $R > 0$. Ist $|x| < R$ für $(x,t) \in G$, dann ist $E^+(u) \subset E(u)$ definiert als die Teilmenge, in der $u > 0$ gilt und außerdem

$$R|\xi| < u(x,t) - \langle \xi, x \rangle < \frac{1}{2} \sup_G u^+$$

erfüllt ist. Dabei ist u^+ definiert als $u^+ := \max\{u, 0\}$.

Zum Schluss sei angemerkt, dass auf Änderungen von Konstanten nicht explizit hingewiesen wird. Im Allgemeinen steht für eine positive Konstante einfach nur c.

KAPITEL 3

Maximumprinzipien

Im ersten Teil werden verschiedene Maximumprinzipien angeführt, welche aufeinander aufbauen. Den Anfang macht dabei das schwache Maximumprinzip. Es wird vorausgesetzt, dass u stets glatt genug ist, es reicht $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega} \times [0,T])$.

LEMMA 1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $T > 0$. Sei $d = 0$ und die Differentialgleichung $Lu \geq 0$ in Ω_T erfüllt. Dann gilt*

$$\sup_{\bar{\Omega} \times [0,T]} u \leq \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} u.$$

BEWEIS. Nehme zunächst an, dass

$$Lu = -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i > 0 \text{ in } \Omega_T$$

gilt. Es folgt ein Beweis durch Widerspruch. Sei angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, so dass

$$u(x_0, t_0) > \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} u$$

ist. Sei $t_1 > 0$ minimal mit $\sup_\Omega u(\cdot, t_1) = u(x_0, t_0)$ und sei $x_1 \in \Omega$ mit $u(x_1, t_1) = u(x_0, t_0)$. Da $t_1 > 0$ minimal ist, folgt

$$\dot{u}(x_1, t_1) \geq 0.$$

Wegen $\sup_\Omega u(\cdot, t_1) = u(x_1, t_1)$, ist

$$u_i(x_1, t_1) = 0$$

und $D^2 u(x_1, t_1)$ ist negativ semidefinit,

$$u_{ij}(x_1, t_1) \leq 0.$$

Also folgt in (x_1, t_1) die Differentialgleichung

$$-\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i < 0.$$

Dies steht im Widerspruch zur Vorausstzung

$$-\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i > 0.$$

Die Behauptung ist also in diesem Fall richtig.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir definieren

$$\omega(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t.$$

Die Funktion ω erfüllt in Ω_T die Differentialgleichung

$$-\dot{\omega} + a^{ij} \omega_{ij} + b^i \omega_i = -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + \varepsilon > 0.$$

Somit gilt

$$\sup_{\bar{\Omega} \times [0,T]} \omega \leq \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} \omega.$$

Für $(x,t) \in \Omega_T$ gilt

$$\omega(x,t) \leq \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} \omega \leq \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} u.$$

Da

$$u(x,t) - \varepsilon T \leq u(x,t) - \varepsilon t = \omega(x,t) \leq u(x,t)$$

gilt, folgt

$$\sup_{\bar{\Omega} \times [0,T]} u - \varepsilon T \leq \sup_{\bar{\Omega} \times [0,T]} \omega \leq \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} \omega \leq \sup_{P(\bar{\Omega} \times [0,T])} u.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ ist das die Behauptung.

$\square$

Bemerkung 2. *Analog gilt das schwache Minimumprinzip, dass wenn in* Ω_T *die Differentialgleichung*

$$Lu = -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \le 0$$

unter sonst gleichen Voraussetzungen erfüllt ist, dann

$$\min_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u \le \min_{P(\bar{\Omega}\times[0,T])} u$$

folgt.

Lemma 3. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $R > 0$*, so dass* $\Omega \subset B_R(0)$ *und* $T > 0$ *mit* $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$*. Sei* $u \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$*, und gelte* $u \le 0$ *auf dem parabolischen Rand* $P\Omega_T$*. Dann folgt*

$$\sup_{\Omega_T} u \le c(n) \cdot R^{n/(n+1)} \left(\int_{E^+(u)} |\dot{u} \det D^2 u| \right)^{1/(n+1)}.$$

Beweis. Wir definieren die Funktion $\Phi : \Omega_T \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\Phi(x,t) := (Du(x,t), u(x,t) - x^k u_k(x,t)).$$

Diese Funktion hat unter Beachtung der Summenkonvention das Differential

$$(D\Phi, \frac{\partial}{\partial t}\Phi) = \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots\ldots & u_{1n} & u_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \ldots\ldots & u_{nn} & u_{nt} \\ u_1 - (x^k u_{k1} + u_1) & \ldots & u_n - (x^k u_{kn} + u_n) & u_t - x^k u_{kt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_{ij}) & (u_{it}) \\ (-x^k u_{kj}) & u_t - x^k u_{kt} \end{pmatrix}.$$

Von dieser Matrix berechnen wir die Determinante, die sich unter Zeilenoperationen nicht ändert, indem wir jeweils das x^j-fache der j-ten Zeile zur letzten Zeile addieren, und erhalten

$$\det(D\Phi, \frac{\partial}{\partial t}\Phi) = \det \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} & u_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} & u_{nt} \\ 0 & \ldots & 0 & u_t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (u_{ij}) & (u_{it}) \\ (0) & u_t \end{pmatrix}.$$

Nach dem Transformationssatz für injektive und stetig differenzierbare Funktionen $v : G \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt, dass $v(G)$ bezüglich des Lebesguemaßes μ_{n+1}-messbar und

$$\int_G (f \circ v) |\det Dv| d\mu_{n+1} = \int_{v(G)} f d\mu_{n+1} \tag{1}$$

für $f \in L^1(v(G), \mu_{n+1})$ ist. Da Φ zwar stetig differenzierbar auf $E^+(u)$ ist, dort aber nicht unbedingt injektiv sein muss, folgt hier lediglich

$$\int_{E^+(u)} |\det D\Phi| = \int_{E^+(u)} \left| u_t \det D^2 u \right| \ge \int_{\Phi(E^+(u))} 1 = \left| \Phi(E^+(u) \right|.$$

Bemerkung 4. *Benutzt man die Transformationsformel mit einer Funktion* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, so ergibt sich*

$$\int_{E^+(u)} |g(Du) u_t \det D^2 u| \ge \int_{(\xi,h)\in\Phi(E^+(u))} g(\xi) \ge \int_{(\xi,h)\in\Sigma} g(\xi),$$

für jede messbare Menge $\Sigma \subset \Phi(E^+(u))$*.*

Wir setzen $M := \sup_{\Omega_T} u$ und nehmen an, dass $M > 0$ gilt. Sei $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega}_T \backslash P\Omega_T$ mit $u(x_0,t_0) = M$. Im Fall $M \le 0$ gilt die Behauptung des Lemmas 3 ganz offensichtlich, da die rechte Seite der Ungleichung nichtnegativ ist. Sei Σ definiert als die Menge aller $(\xi, h) \in \mathbb{R}^{n+1}$, für die

$$R|\xi| < h < \frac{M}{2}$$

erfüllt ist. Für ein festes Tupel $(\xi, h) \in \Sigma$ sei die Funktion

$$p(y,s) := \langle \xi, y \rangle + h$$

definiert. Es folgt für $y \in \Omega$

$$\begin{aligned} p(y,s) &= \langle \xi, y\rangle + h \\ &> \langle \xi, y\rangle + R|\xi| \\ &\geq \langle \xi, y\rangle + |y||\xi| \\ &\geq \langle \xi, y\rangle + |\langle y, \xi\rangle| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

aus der Definition von Σ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Also ist $p > 0$ in $\bar{\Omega}_T$ und insbesondere $p > 0 \geq u$ auf dem parabolischen Rand $P\Omega_T$. Weiterhin liefert die Definition von Σ, dass

$$\begin{aligned} p(x_0,t_0) &= \langle \xi, x_0\rangle + h \\ &\leq |\xi||x_0| + h \\ &\leq |\xi|R + h \\ &< 2h \\ &< M \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung und den vorigen Definitionen. Also ist $p(x_0,t_0) < M$. Es gibt somit einen Punkt $(y_1,s_1) \in \bar{\Omega}_T$ mit $0 < s_1 < t_0$, in dem

$$p(y_1,s_1) = u(y_1,s_1) \tag{2}$$

und $p(y,s) \geq u(y,s)$, für alle $(y,s) \in \bar{\Omega}_T$ mit $s \leq s_1$ gelten. Aus obiger Ungleichung $p > 0 \geq u$ auf $P\Omega_T$ folgt, dass (y_1,s_1) nicht auf dem parabolischen Rand liegt, sondern in der offenen Menge Ω_T.

Für $(y,s) \in \Omega_T$ mit $0 < s < s_1$ gilt

$$u(y,s) \leq p(y,s) = \langle \xi, y\rangle + h = \langle \xi, y - y_1\rangle + p(y_1,s_1) = \langle \xi, y - y_1\rangle + u(y_1,s_1)$$

nach Wahl von (y_1,s_1) und der Definition von p. Daraus folgt $(y_1,s_1) \in E(u)$ und wegen (2) ist $u(y_1,s_1) > 0$. Nach Definition von Σ und p folgt schließlich

$$R|\xi| < h = p(y_1,s_1) - \langle \xi, y_1\rangle = u(y_1,s_1) - \langle \xi, y_1\rangle = h < \frac{M}{2}.$$

Somit ist $(y_1,s_1) \in E^+(u)$.

Weil $p(y,s) \geq u(y,s)$ für alle $s \leq s_1$ ist und wegen (2), folgt an der Stelle y_1

$$Du(\cdot,s_1) = Dp(\cdot,s_1) = D(\langle \xi, \cdot\rangle) = \xi.$$

Erneut mit (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(y_1,s_1) &= (Du(y_1,s_1), u(y_1,s_1) - y_1^k u_k(y_1,s_1)) \\ &= (\xi, p(y_1,s_1) - y_1^k p_k(y_1,s_1)) \\ &= (\xi, p(y_1,s_1) - \langle y_1, \xi\rangle) \\ &= (\xi, h). \end{aligned}$$

Dabei ist wieder die Summenkonvention zu beachten. Für festes $(\xi,h) \in \Sigma$ haben wir also einen Punkt $(y_1,s_1) \in E^+(u)$ mit der Eigenschaft $\Phi(y_1,s_1) = (\xi,h)$ gefunden. Daraus schließen wir, dass $\Sigma \subset \Phi(E^+(u))$.

Geometrisch betrachtet ist Σ ein Kegel mit einer n-dimensionalen Kugel vom Radius $\frac{M}{2R}$ als Grundfläche und der Kegelhöhe $\frac{M}{2}$.

Dementsprechend erhalten wir die Abschätzung

$$|\Phi(E^+(u))| \geq |\Sigma| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{M^{n+1}}{R^n} \cdot |B_1(0)| = c(n)\frac{M^{n+1}}{R^n}.$$

Zusammen mit (1) folgt letztendlich

$$c(n)\frac{M^{n+1}}{R^n} \leq |\Phi(E^+(u))| \leq \int_{E^+(u)} |u_t \det D^2 u|$$

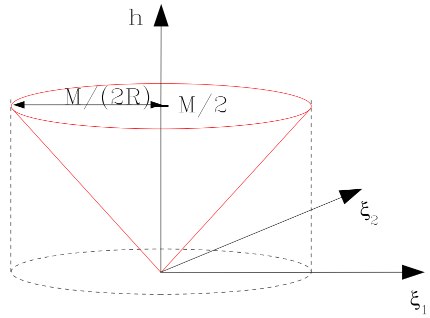

ABBILDUNG 1. Σ im Fall $n = 2$

und damit die Behauptung

$$M \leq \left[c(n) R^n \int_{E^+(u)} |u_t \det D^2 u| \right]^{1/(n+1)} .$$

$\square$

THEOREM 5. *Sei $\Omega \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$. Gelte $Lu \geq f$ in Ω_T und erfülle der konstante Koeffizient d im Differentialoperator L die Ungleichung $d \leq k$ für ein $k \geq 0$. Dann gilt*

$$\sup_{\Omega_T} u \leq e^{kT} \left(\sup_{P\Omega_T} u^+ + c(n) \left\| \frac{f^-}{H^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}} \right)$$

mit $B_0 = \left(\left\| \frac{b}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega_T)} + R \right)$ *und* $f^- = \max\{0, -f\} \geq 0$.

BEWEIS. Sei

$$\omega(x,t) := e^{-kt} u(x,t) - \sup_{P\Omega_T} e^{-kt} u^+ .$$

Der parabolische Rand $P\Omega_T$ ist eine abgeschlossene Menge, auf der u stetig ist. $\sup_{P\Omega_T} e^{-kt} u^+$ wird also angenommen, ist konstant und fällt somit beim Ableiten weg. Weiterhin ist $\omega \leq 0$ auf $P\Omega_T$. Es gilt

$$\begin{aligned} -\omega_t + a^{ij}\omega_{ij} &= e^{-kt}(-u_t + a^{ij}u_{ij}) + ke^{-kt}u \\ &= e^{-kt}(Lu - b^i u_i - du) + ke^{-kt}u \\ &\geq e^{-kt}(f - b^i u_i) + e^{-kt}(k-d)u \\ &\geq \underbrace{e^{-kt}}_{0<\ldots\leq 1}(f - |b||Du|) + \underbrace{e^{-kt}}_{0<\ldots\leq 1}\underbrace{(k-d)}_{\geq 0}u \\ &\geq -f^- - |b||D\omega|, \end{aligned}$$

in $E^+(\omega)$, weil dort $\omega > 0$ und damit $u > 0$. Es sei darauf hingewiesen, dass mit den gegebenen Definitionen $f = f^+ - f^-$ gilt.

Sei $\mu > 0$ eine Konstante, die noch zu wählen ist. Definiere die Funktion

$$g(p) := \left(|p|^{\frac{n+1}{n}} + \mu^{\frac{n+1}{n}} \right)^{-n} .$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhält man folgende Ungleichung in $E^+(\omega)$

$$\begin{aligned}
\omega_t - a^{ij}\omega_{ij} &\leq f^- + |b||D\omega| \\
&= \int_0^3 f^-\chi_{[0,1]}(s) + |b||D\omega|\chi_{[2,3]}(s)ds \\
&= \int_0^3 \left(\frac{f^-}{\mu}\chi_{[0,1]}(s) + |b|\chi_{[2,3]}(s)\right)\left(\mu\chi_{[0,1]}(s) + |D\omega|\chi_{[2,3]}(s)\right)ds \\
&\leq \left(\int_0^3 \left(\frac{f^-}{\mu}\chi_{[0,1]}(s) + |b|\chi_{[2,3]}(s)\right)^{n+1} ds\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\int_0^3 \left(\mu\chi_{[0,1]}(s) + |D\omega|\chi_{[2,3]}(s)\right)^{\frac{n+1}{n}} ds\right)^{\frac{n}{n+1}} \\
&= \left(\int_0^3 \left(\frac{f^-}{\mu}\chi_{[0,1]}(s)\right)^{n+1} + \left(|b|\chi_{[2,3]}(s)\right)^{n+1} ds\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\int_0^3 \left(\mu\chi_{[0,1]}(s)\right)^{\frac{n+1}{n}} + \left(|D\omega|\chi_{[2,3]}(s)\right)^{\frac{n+1}{n}} ds\right)^{\frac{n}{n+1}} \\
&= \left(\left(\frac{f^-}{\mu}\right)^{n+1} + |b|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \underbrace{\left(\mu^{\frac{n+1}{n}} + |D\omega|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}}_{=g(D\omega)^{-\frac{1}{n+1}}} \\
&= \frac{\left(\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{g(D\omega)^{\frac{1}{n+1}}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Aufgrund der Bedingung an $E(\omega)$, dass $\omega(x,t) + \langle \xi, y - x\rangle \geq \omega(y,s)$ für alle $(y,s) \in \Omega \times (0,t]$ und ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt in $E^+(\omega)$ insbesondere, dass $\omega(x,t) \geq \omega(x,s)$ für alle $s \leq t$ und $(x,t) \in E^+(\omega)$ ist. Auf dieser Menge gilt somit $\omega_t \geq 0$.

Wählt man in oben genannter Ungleichung $y = x + \eta e$ mit $|\eta|$ klein genug und e einem beliebigen Einheitsvektor, so dass $y \in \Omega$, dann erhält man nach Einsetzen

$$\omega(x,t) + \langle \xi, \eta e\rangle \geq \omega(x + \eta e, t)$$

und für $y = x - \eta e$, so dass $y \in \Omega$,

$$\omega(x,t) - \langle \xi, \eta e\rangle \geq \omega(x - \eta e, t).$$

Ist $\eta \neq 0$, so ergibt die Addition der beiden Ungleichungen

$$\frac{h(\eta)}{\eta^2} := \frac{\omega(x+\eta e,t) + \omega(x-\eta e,t) - 2\omega(x,t)}{\eta^2} \leq 0.$$

Mit $\eta \to 0$ laufen Zähler und Nenner gegen Null. Da Ω_T in $\mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt, offen und ω zweimal stetig differenzierbar auf dieser Menge ist, erhalten wir nach zweimaliger Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to 0} \frac{h(\eta)}{\eta^2} &= \lim_{\eta\to 0} \frac{\omega_i(x+\eta e,t) - \omega_i(x-\eta e,t)}{2\eta} \\
&= \lim_{\eta\to 0} \frac{\omega_{ii}(x+\eta e,t) + \omega_{ii}(x-\eta e,t)}{2} \\
&= w_{ii}(x,t) \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

wobei e der i-te Einheitsvektor ist. Für beliebige Vektoren und analoger Rechnung folgt, dass $\omega_{ij}e_ie_j \leq 0$ und $-D^2\omega$ positiv semidefinit ist. Für positiv semidefinite (symmetrische) $(n+1)\times(n+1)$-Matrizen A und B gilt die geometrisch-arithmetische Ungleichung für Matrizen

$$(\det AB)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{\operatorname{tr} AB}{n+1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\omega_t - a^{ij}\omega_{ij} &= \operatorname{tr}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (a^{ij})_{ij} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_t & (0) \\ (0) & (-\omega_{ij})_{ij} \end{pmatrix}}_{=:B} \right\} \\
&\geq (n+1)(\det(a^{ij})_{ij})^{\frac{1}{n+1}} (\omega_t \det(-\omega_{ij})_{ij})^{\frac{1}{n+1}} \\
&= (n+1)(\det(a^{ij})_{ij})^{\frac{1}{n+1}} |\omega_t \det D^2\omega|^{\frac{1}{n+1}} \\
&= (n+1)H^* |\omega_t \det D^2\omega|^{\frac{1}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Kombiniert mit Bemerkung 4 und (3) erhalten wir hieraus

$$\tag{4}
\begin{aligned}
\int_{(\xi,h)\in\Sigma} g(\xi) &\leq \int_{E^+(\omega)} |g(D\omega)\omega_t \det D^2\omega| \\
&\leq \int_{E^+(\omega)} |g(D\omega)| \left(\frac{\omega_t - a^{ij}\omega_{ij}}{(n+1)H^*} \right)^{n+1} \\
&\leq \int_{E^+(\omega)} \frac{\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}}{((n+1)H^*)^{n+1}},
\end{aligned}$$

wobei Σ wie in Lemma 3 definiert ist. Es gilt

$$g(p) = \left(|p|^{\frac{n+1}{n}} + \mu^{\frac{n+1}{n}} \right)^{-n} \geq c(n)(|p|^n + \mu^n)^{-\frac{n+1}{n}}$$

und nach Definition von Σ erhalten wir unter Verwendung von Polarkoordinaten für die Funktion g die nachstehende Abschätzung,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma g(\xi) &\geq c(n) \int_0^{M/2} \int_0^{h/R} \frac{r^{n-1}}{(r^n + \mu^n)^{\frac{n+1}{n}}} \, dr \, dh \\
&= c(n) \int_0^{M/2} \left(-(r^n + \mu^n)^{-\frac{1}{n}} \Big|_0^{h/R} \right) dh \\
&\geq c(n) \int_{\mu R}^{M/2} \frac{1}{\mu} - \left(\left(\frac{h}{R} \right)^n + \mu^n \right)^{-\frac{1}{n}} dh, \qquad \text{falls } M \geq 2\mu R, \\
&\geq c(n) \int_{\mu R}^{M/2} \frac{1}{\mu} - 2^{-1/n} \cdot \frac{1}{\mu} \, dh, \qquad \text{da } h \geq \mu R \text{ abgeschätzt werden kann,} \\
&\geq c(n) \frac{M/2 - \mu R}{\mu} \\
&= c(n) \left(\frac{M}{2\mu} - R \right).
\end{aligned}$$

Dabei wird vorerst angenommen, dass $M = \sup \omega > 0$ gilt. Zusammen mit (4) oder falls $M < 2\mu R$ ergibt sich

$$\tag{5}
\begin{aligned}
M &\leq 2\mu R + c(n)\mu \int_{E^+(\omega)} \frac{\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}}{(H^*)^{n+1}} \\
&\leq 2\mu R + c(n) \frac{1}{\mu^n} \left\| \frac{f^-}{H^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)}^{n+1} + c(n)\mu \left\| \frac{b}{H^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ist nicht scharf, denn eigentlich würde es hierbei genügen, über die Menge $E^+(\omega)$ zu integrieren. Wäre $d \leq 0$ und $u \leq 0$ auf $P\Omega_T$, dann könnte sogar über $E^+(u)$ integriert werden, da in diesem Fall $\omega(x,t) = u(x,t)$ gelten würde. Wir können an späterer Stelle genau so abschätzen.

Falls $\left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} = 0$ gilt, erhalten wir mit $\mu \to 0$, dass $M \leq 0$. Sonst fixieren wir

$$\begin{aligned}\mu &= \left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot \left(\left\|\frac{b}{H^*}\right\|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega_T)} + R\right)^{-\frac{1}{n+1}} \\ &\equiv \left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{-\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

und erhalten nach Definition von B_0

$$\begin{aligned}M = \sup \omega &\leq \left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot \left(2RB_0^{-\frac{1}{n+1}} + c(n)B_0^{\frac{n}{n+1}} + c(n)\left\|\frac{b}{H^*}\right\|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{-\frac{1}{n+1}}\right) \\ &\leq \left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot \left(\underbrace{2RB_0^{-1}}_{\leq 2} + c(n) + c(n)\underbrace{\left\|\frac{b}{H^*}\right\|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{-1}}_{\leq 1}\right) \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}} \\ &\leq c(n)\left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}}.\end{aligned}$$

Umordnen der Terme ergibt

$$\begin{aligned}u(x,t) &\leq e^{kt}\left(\sup_{P\Omega_T} e^{-kt}u^+ + c(n)\left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}}\right) \\ &\leq e^{kt}\left(\sup_{P\Omega_T} u^+ + c(n)\left\|\frac{f^-}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}}\right)\end{aligned}$$

und das Theorem folgt.

□

Bemerkung 6. *Dieses Theorem bleibt auch für $\Omega \subset B_R(x)$ mit beliebigem $x \in \mathbb{R}^n$ und für beliebige offene Teilmengen von Ω_T gültig und kann außerdem im Fall $Lu \leq f$ auch als* inf*-Variante formuliert werden. Dabei bleiben die übrigen Voraussetzungen gleich. Wir betrachten dann $-u$ und definieren im Beweis*

$$\begin{aligned}\omega(x,t) &:= e^{-kt}(-u(x,t)) - \sup_{P\Omega_T} e^{-kt}(-u)^+. \\ &= -e^{kt}u(x,t) - \sup_{P\Omega_T} e^{-kt}u^-,\end{aligned}$$

mit $u^- := \max\{-u, 0\}$. Damit erhalten wir am Ende die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega_T}(-u) &\leq e^{kT}\left(\sup_{P\Omega_T} u^- + c(n)\left\|\frac{f^+}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{n/(n+1)}\right) \\ \inf_{\Omega_T} u &\geq e^{kT}\left(\inf_{P\Omega_T} -u^- - c(n)\left\|\frac{f^+}{H^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega_T)} \cdot B_0^{n/(n+1)}\right).\end{aligned}$$

Theorem 7. *Sei $Lu \geq f$ in $\Omega_T \equiv \Omega \times (T, 0)$ mit $T < 0$ und $u \leq 0$ auf $P\Omega[2R]$. Dann gibt es zu jedem $p > 0$ eine Konstante $c = c(n, p, \lambda, \Lambda, R, \sup(|b| + d^+))$, so dass*

$$\sup_{\Omega[R]} u \leq c\left[\left(R^{-n-2}\int_{\Omega[2R]} (u^+)^p \, dX\right)^{1/p} + R^{n/(n+1)}\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])}\right]$$

gilt.

Beweis. Für den Beweis definieren wir einige Hilfsfunktionen. Seien

$$\zeta := \left(1 - \frac{|x|^2}{4R^2}\right)\left(1 + \frac{t}{4R^2}\right),$$

$$\eta := \zeta^q, \text{ wobei } q \geq 2 \text{ später zu fixieren ist, mit } q = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{p} & \text{falls } p \leq n+1, \\ 2 & \text{falls } p > n+1, \end{cases}$$

und

$$v := \eta u.$$

In $Q(2R)$ ist dann $0 \leq \zeta \leq 1$ und auf $PQ(2R)$ ist $\zeta = 0$.

Sei L_0 ein Differentialoperator definiert durch $L_0 := -\frac{\partial}{\partial t} + a^{ij}D_{ij}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} L_0 v &= -v_t + a^{ij}D_{ij}v \\ &= -(\eta_t u + \eta u_t) + a^{ij}(\eta_i u + \eta u_i)_j \\ &= -\eta_t u - \eta u_t + a^{ij}(\eta_{ij}u + \eta_i u_j + \eta_j u_i + \eta u_{ij}) \\ &= \eta L_0 u + u L_0 \eta + 2a^{ij}u_i\eta_j \\ &= \eta(Lu - b^i u_i - du) + uL_0\eta + 2a^{ij}u_i\eta_j \\ &\geq \eta f - \eta(b^i u_i + du) + uL_0\eta + 2a^{ij}u_i\eta_j \quad \text{ in } \Omega[2R]. \end{aligned}$$

Um $L_0 v$ weiter abschätzen zu können, folgen einige Vorüberlegungen. Zuerst gilt

$$Dv = uD\eta + \eta Du \quad \Rightarrow Du = \frac{Dv}{\eta} - \frac{uD\eta}{\eta} \quad \Rightarrow |Du| \leq \frac{|Dv|}{\eta} + |u|\frac{|D\eta|}{\eta}.$$

Betrachte nun $(x,t) \in E^+(v)$ bezüglich $\Omega[2R]$, dann gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$v(x,t) + \langle \xi, y - x\rangle \geq v(y,s) \quad \forall (y,s) \in (B_{2R} \cap \Omega) \times (\max\{-4R^2, T\}, t].$$

Sei $(y,s) = (x + he_i, t)$, dann folgt

$$\begin{aligned} v(x,t) + \langle \xi, he_i\rangle &\geq v(x + he_i, t) \\ \langle \xi, e_i\rangle &\geq \frac{v(x+he_i,t) - v(x,t)}{h} \\ \xi_i &\geq \frac{v(x+he_i,t) - v(x,t)}{h} \quad \xrightarrow[h \to 0]{} \quad v_i \quad . \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt vor allem für kleine $h \in \mathbb{R}$ und da die Richtungsableitungen von v in (x,t) existieren und stetig sind, ist $\xi_i = v_i$, also $\xi = Dv$ und aus $2R|\xi| < v(x,t) + |\xi||x|$ folgt

$$2R|Dv| < v + |Dv||x| \quad \Rightarrow |Dv|(2R - |x|) < v \quad \Rightarrow |Dv| < \frac{v}{2R - |x|}.$$

Durch Rechnung erhalten wir

$$|D\eta| = |D\zeta^q| = \left|q\zeta^{q-1}\left(-\frac{2x}{4R^2}\right)\left(1 + \frac{t}{4R^2}\right)\right| = \left|q\eta\zeta^{-1}\right|\left|\frac{2x}{4R^2}\right|\left(1 + \frac{t}{4R^2}\right).$$

Da $v = \eta u > 0$ und $\eta > 0$ in $E^+(v)$ gilt, folgt $u > 0$ auf dieser Menge und somit $|u| = u$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|Du| &\leq \frac{|Dv|}{\eta} + \frac{u|D\eta|}{\eta} \\
&\leq \frac{v}{\eta(2R-|x|)} + \frac{uq\eta\zeta^{-1}\left|\frac{2x}{4R^2}\right|\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)}{\eta} \\
&= \frac{v}{\eta\zeta}\left(\frac{\zeta}{2R-|x|} + q\left|\frac{2x}{4R^2}\right|\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)\right) \\
&= \frac{v}{\eta\zeta}\left(\frac{(2R-|x|)(2R+|x|)}{4R^2(2R-|x|)} + q\left|\frac{2x}{4R^2}\right|\right)\left(1+\frac{t}{4R^2}\right) \\
&\leq \frac{v}{\eta\zeta}\left(\frac{4R}{4R^2} + q\frac{1}{R}\right) \\
&= \frac{v}{\eta\zeta}\left(\frac{1+q}{R}\right),
\end{aligned}$$

da in $E^+(v)$ bzgl. $\Omega[2R] = Q(2R) \cap \Omega_T$ mit $Q(2R)$ um $(x_0, t_0) = (0,0)$ gilt $|x| < 2R$ und $t \in (-4R^2, 0)$.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\eta_t &= q\zeta^{q-1}\frac{1}{4R^2}\left(1-\frac{|x|^2}{4R^2}\right) = \frac{q\eta}{\zeta 4R^2}\left(1-\frac{|x|^2}{4R^2}\right), \\
\eta_i &= q\zeta^{q-1}\left(-\frac{2x_i}{4R^2}\right)\left(1+\frac{t}{4R^2}\right), \\
\eta_{ij} &= q(q-1)\zeta^{q-2}\ \frac{4x_ix_j}{16R^4}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)^2 - q\zeta^{q-1}\ \frac{2\delta_{ij}}{4R^2}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right) \\
&= q(q-1)\ \frac{\eta 4x_ix_j}{16\zeta^2R^4}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)^2 - \ \frac{q\eta 2\delta_{ij}}{\zeta 4R^2}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
uL_0\eta &= u(-\eta_t + a^{ij}\eta_{ij}) \\
&= u\left(-q\ \frac{\eta}{4\zeta R^2}\left(1-\frac{|x|^2}{4R^2}\right) + a^{ij}\left[q(q-1)\ \frac{\eta 4x_ix_j}{16\zeta^2R^4}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)^2 - q\ \frac{\eta 2\delta_{ij}}{4\zeta R^2}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)\right]\right) \\
&= \frac{u\eta}{4\zeta^2R^2}\Bigg(\underbrace{-q\zeta\left(1-\frac{|x|^2}{4R^2}\right)}_{=:A} + \underbrace{q(q-1)\ \frac{1}{R^2}\ a^{ij}x_ix_j\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)^2}_{=:B}\underbrace{-2q\zeta a^{ij}\delta_{ij}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)}_{=:C}\Bigg).
\end{aligned}$$

Eine Abschätzung der einzelnen Terme ergibt:

$$\begin{aligned}
A &= -q\zeta\left(1-\frac{|x|^2}{4R^2}\right) \geq -q, \quad \text{da } q > 0, \zeta \in (0,1) \text{ und } 0 \leq \left(1-\tfrac{|x|^2}{4R^2}\right) \leq 1, \\
B &= q(q-1)\frac{1}{R^2}a^{ij}x_ix_j\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)^2 \geq q(q-1)\frac{1}{R^2}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)^2\lambda|x|^2 \geq 0, \\
C &= -2q\zeta a^{ij}\delta_{ij}\left(1+\frac{t}{4R^2}\right) = -2q\zeta\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^n a^{ii} \geq -2q\zeta\left(1+\frac{t}{4R^2}\right)n\Lambda \geq -2qn\Lambda \quad (\text{Vgl. } B).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Positivität kann der Term B weggelassen werden und es ergibt sich insgesamt

$$uL_0\eta \geq \tfrac{u\eta}{4\zeta^2R^2}\left(-q-2qn\Lambda\right) = \tfrac{v}{4\zeta^2R^2}\left(-q-2qn\Lambda\right) \quad \text{in } E^+(v)\ .$$

Nach den obigen Überlegungen, lässt sich $L_0 v$ nun wie folgt in $E^+(v)$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
L_0 v &\geq \eta f - \eta(b^i u_i + du) + u L_0 \eta + 2a^{ij} u_i \eta_j \\
&\geq -\eta|f| - \eta|b||Du| - dv + \left(\tfrac{v}{4\zeta^2 R^2}\left(-q - 2qn\Lambda\right)\right) - 2\Lambda|Du||D\eta| \\
&\geq -|f| - \eta|b||Du| - dv + \left(\tfrac{v}{4\zeta^2 R^2}\left(-q - 2qn\Lambda\right)\right) - 2\Lambda|Du||D\eta| \\
&\geq -|f| - \eta|b|\tfrac{v}{\eta\zeta}\left(\tfrac{1+q}{R}\right) - dv + \tfrac{v}{4\zeta^2 R^2}(-q - 2qn\Lambda) - 2\Lambda\tfrac{v}{\eta\zeta}\left(\tfrac{1+q}{R}\right) q\zeta^{q-1}\cdot\tfrac{2|x|}{4R^2}\left(1 + \tfrac{t}{4R^2}\right) \\
&\geq -|f| - \tfrac{v}{4\zeta^2 R^2}(4(1+q)\zeta|b|R + 4d\zeta^2 R^2 + q + 2qn\Lambda + 8(1+q)q\Lambda), \qquad \text{denn } \tfrac{\zeta^q}{\eta} = 1 \\
&\geq -|f| - \tfrac{v}{4\zeta^2 R^2}(4(1+q)|b|R + 4d^+ R^2 + q + 2qn\Lambda + 8(1+q)q\Lambda) \\
&\geq -|f| - \tfrac{v}{4\zeta^2 R^2} c(q, R, \sup(|b| + d^+), n, \Lambda).
\end{aligned}$$

Unter den geltenden Bedingungen lässt sich nun Theorem 5 auf $L_0 v$ bezüglich der Menge $\Omega[2R]$ anwenden. Dabei ist zu beachten, dass $L_0 v \geq -|f| - \frac{v}{4\zeta^2 R^2} c(q, R, \sup(|b| + d^+), n, \Lambda)$ lediglich in $E^+(v)$ erfüllt ist. Grundsätzlich würde dies Probleme im Beweis von Theorem 5 verursachen. Da jedoch $d = 0$ und $v \leq 0$ auf $P(\Omega[2R])$, wegen $u \leq 0$ auf $P(\Omega[2R])$ ist, folgt dort nach Definition, dass $\omega(x,t) = v(x,t)$ und damit $E^+(\omega) = E^+(v)$. Damit geht der Beweis durch und wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega[2R]} v &\leq c \left\| \frac{\left(-|f| - \frac{v}{4\zeta^2 R^2} c\right)^-}{H^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} (2R)^{n/(n+1)} \\
&\leq c \left(\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \frac{c}{4R^2} \left\| v^+ \cdot \zeta^{-2} \right\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} \right) \left\| \frac{1}{H^*} \right\|_{L^\infty} (2R)^{n/(n+1)} \\
&\leq c \left(\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{4} R^{-2} \left\| v^+ \cdot \zeta^{-2} \right\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} \right) (2R)^{n/(n+1)} \\
&\leq c \left((2R)^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{2} R^{(-n-2)/(n+1)} \left\| (u^+)^{2/q} \cdot v^{1-2/q} \right\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} \right) \\
&\leq c \left((2R)^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{2} R^{(-n-2)/(n+1)} (\sup_{\Omega[2R]} v)^{1-2/q} \left(\int_{\Omega[2R]} (u^+)^{2(n+1)/q} \right)^{1/(n+1)} \right),
\end{aligned}$$

indem b und $(H^*)^{-1}$ zusätzlich abgeschätzt werden, nach Definition von v und weil $\sup v \geq 0$ (o.B.d.A). Zu bemerken ist, dass dann auch $\sup u \geq 0$ ohne Einschränkung angenommen werden kann.

Es werden nun die beiden möglichen Fälle für p untersucht. Im ersten Fall ist $p \leq n+1$ und dementsprechend $q = \frac{2(n+1)}{p} \geq 2$ gewählt. Dann gilt

$$\sup_{\Omega[2R]} v \leq c \left((2R)^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{2} R^{(-n-2)/(n+1)} (\sup v)^{1-(p/(n+1))} \left(\int_{\Omega[2R]} (u^+)^p \right)^{1/(n+1)} \right).$$

Anwendung der Youngschen Ungleichung mit $\frac{p}{n+1} + \frac{n+1-p}{n+1} = 1$ und $\varepsilon > 0$ liefert

$$(\sup v)^{1-\frac{p}{n+1}} \left(\tfrac{1}{2} R^{-(n+2)} \int_{\Omega[2R]} (u^+)^p \right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \varepsilon \sup v + c(\varepsilon) \left(\tfrac{1}{2} R^{-(n+2)} \int_{\Omega[2R]} (u^+)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zusätzlich gilt, wegen $1 \geq \eta \geq c(n) > 0$ auf $\Omega[R]$, dass

$$\begin{aligned}
& c \sup_{\Omega[R]} u \leq \sup_{\Omega[2R]} v \\
\Longrightarrow \quad & \sup_{\Omega[R]} u \leq c \sup_{\Omega[2R]} v.
\end{aligned} \tag{6}$$

Ist ε klein genug gewählt, folgt die behauptete Aussage,

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega[2R]} v &\leq c\left((2R)^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{2}R^{(-n-2)/(n+1)}(\sup_{\Omega[2R]} v)^{1-(p/(n+1))}\left(\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{1/(n+1)}\right)\\
&\leq c\left((2R)^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \varepsilon \sup_{\Omega[2R]} v + c(\varepsilon)\left(\tfrac{1}{2}R^{-(n+2)}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\leq c\left(\left(R^{-n-2}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{1/p} + R^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])}\right).
\end{aligned}$$

Mit (6) folgt

$$\sup_{\Omega[R]} u \leq c\left(\left(R^{-n-2}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{1/p} + R^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])}\right).$$

Im zweiten Fall ist $p > n+1$ und $q = 2$. Danach gilt $(\sup v)^{1-\frac{2}{q}} = 1$ und es folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega[2R]} v &\leq c\left((2R)^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{2}R^{(-n-2)/(n+1)}(\sup v)^{1-2/q}\left(\int_{\Omega[2R]}(u^+)^{2(n+1)/q}\right)^{1/(n+1)}\right)\\
&\leq c\left((2R)^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + \tfrac{1}{2}R^{(-n-2)/(n+1)}\left(\int_{\Omega[2R]}(u^+)^{n+1}\right)^{1/(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

Diesmal liefert die Höldersche Ungleichung das gewünschte Ergebnis mit $\frac{n+1}{p} + \frac{p-(n+1)}{p} = 1$. Zusammen mit $|\Omega[2R]| \leq |Q(2R)| = c(n)(2R)^{n+2}$ folgt

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{2}R^{-(n+2)}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^{(n+1)}\right)^{\frac{1}{n+1}} &\leq \tfrac{1}{2}R^{-\frac{n+2}{n+1}}\left(\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega[2R]}1\right)^{(1-\frac{n+1}{p})\frac{1}{n+1}}\\
&\leq c(n,p)\tfrac{1}{2}R^{\frac{n+2}{n+1}(-1+1-\frac{n+1}{p})}\left(\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= c(n,p)\tfrac{1}{2}\left(R^{-(n+2)}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Wegen (6) ergibt sich schließlich insgesamt

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega[R]} u &\leq c\left((2R)^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])} + c(n,p)\tfrac{1}{2}\left(R^{-(n+2)}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\leq c\left(\left(R^{-n-2}\int_{\Omega[2R]}(u^+)^p\right)^{1/p} + R^{n/(n+1)}\,\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[2R])}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

KAPITEL 4

Die schwache Harnackungleichung

Die nächsten Abschnitte ebnen den Weg für die schwache Harnackungleichung. Die folgenden Theoreme 8 und 9 ermöglichen die spätere Vorgehensweise im Beweis. Wie in Kapitel 3 wird angenommen, dass u glatt genug ist.

1. Maßtheoretische Infimumschranke

THEOREM 8. *Sei $u \geq 0$ in $Q(r)$ und gelte dort $Lu \leq f$. Definiere*

$$k := r^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(Q(r))} \quad \text{und} \quad \bar{u} := u + k.$$

Dann gibt es $1 > \zeta = \zeta(n, \Lambda) > 0$, so dass

$$|\{(x,t) \in Q(r) : \bar{u} < h\}| \leq \zeta |Q(r)|$$

bzw.

$$|\{(x,t) \in Q(r) : \bar{u} > h\}| > (1-\zeta)|Q(r)|$$

für festes $h \geq k$ impliziert, dass

$$\inf_{Q(r/2)} \bar{u} \geq c(n, \lambda) h$$

gilt, falls $0 < r \leq r_0(\lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty})$ ist. Im Fall $b = d = 0$ gilt die Aussage für beliebige Radien $r > 0$.

Dieses Theorem beschreibt die Eigenschaft, dass u auf einem kleineren Zylinder groß ist, wenn es in einem größeren Zylinder keine Menge von großem Maß gibt, in der u klein ist.

BEWEIS. Wir betrachten den Zylinder $Q(r)$ bezüglich des Referenzpunktes $(x_0, 0)$, also ist $Q(r) = Q((x_0, 0), r)$. Das Theorem gilt natürlich auch für Quader mit beliebigem Referenzpunkt.

Definiere die Hilfsfunktion

$$v := h\left(1 - \frac{|x - x_0|^2 - t}{r^2}\right) - \bar{u}$$

und

$$Q^*(r) = \{(x,t) \in Q(r) : \bar{u} < h\}.$$

Mit obiger Definition für v folgt

$$\begin{aligned}
v_t &= \frac{h}{r^2} - u_t, \\
v_i &= -2\frac{h}{r^2}(x - x_0)_i - u_i, \\
v_{ij} &= -2\frac{h}{r^2}\delta_{ij} - u_{ij}, \\
Lv &= -Lu - \frac{h}{r^2}(1 + 2a^{ij}\delta_{ij} + 2b^i(x - x_0)_i) + dh\left(1 - \frac{|x - x_0|^2 - t}{r^2}\right) - dk \\
&\geq \underbrace{-f - \frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x - x_0|) - |d|h - |d|k}_{=:\tilde{f}},
\end{aligned}$$

da $h \geq 0$ nach Definition von k und $0 \leq |x - x_0|^2 - t \leq 2r^2$ in $Q(r)$ gilt. Außerdem kann $h > 0$ ohne Einschränkung angenommen werden, da $u \geq 0$ auf $Q(r)$ und daher $\inf_{Q(r/2)} u \geq 0$ nach Voraussetzung erfüllt ist.

Wir betrachten v auf dem Rand von $Q^*(r)$. Auf $PQ(r)$ gilt $-t = r^2$ oder ($|x-x_0| = r$ und $-t \geq 0$) und darum $v \leq -\bar{u} = -u - k \leq 0$ unabhängig von h, da $u \geq 0$ in $Q(r)$. Auf $Q(r)$ gilt $-1 \leq 1 - \frac{|x-x_0|^2-t}{r^2} \leq 1$ und da $\bar{u} = h$ auf $PQ^*(r)$ folgt $v \leq 0$. Somit ist $v \leq 0$ auf $PQ^*(r)$.

Im Folgenden wird Theorem 5 angewandt und zwar auf die Funktion v in $Q(r)$. Nach Anwendung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sup_{Q^*(r)} v &\leq e^{\sup d^+ r^2} \left(\sup_{PQ^*(r)} v^+ + c(n) \left\| \frac{\tilde{f}^-}{H^*} \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \cdot \left(\left\| \frac{b}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} + r \right)^{n/(n+1)} \right) \\
&\leq e^{\sup d^+ r^2} c(n) \left(\left\| \frac{1}{H^*} \right\|_{L^\infty} \cdot \left\| \left(-f - \frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|) - |d|h - |d|k \right)^- \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \cdot \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\left\| \frac{b}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} + r \right)^{n/(n+1)} \right) \\
&\leq e^{\sup d^+ r^2} c(n) \left(\left\| \frac{1}{H^*} \right\|_{L^\infty} \cdot \left(\left\| \frac{b}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} + r \right)^{n/(n+1)} \cdot \right. \\
&\qquad \cdot \left\| \Big(-f \Big)^- + \left(-\frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|) \right)^- + \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. + \Big(-|d|h - |d|k \Big)^- \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \right) \\
&\leq e^{\sup d^+ r^2} c(n) \left(\left\| \frac{1}{H^*} \right\|_{L^\infty} \cdot \left(\left\| \frac{b}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} + r \right)^{n/(n+1)} \cdot \right. \\
&\qquad \cdot \left(\left\| \big(-f \big)^- \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \left\| \left(-\frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|) \right)^- \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. + \left\| \big(-|d|h - |d|k \big)^- \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \right) \right) \\
&\leq e^{\sup d^+ r^2} c(n) \left(\left\| \frac{1}{H^*} \right\|_{L^\infty} \left(\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} \left\| \frac{1}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^\infty} + r \right)^{n/(n+1)} \cdot \right. \\
&\qquad \cdot \left(\|f\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \left\| \frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|) \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. + \||d|(h+k)\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \right) \right) \\
&\leq c(n,\lambda) e^{\sup d^+ r^2} \left(c(\lambda) \, \|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} + r \right)^{n/(n+1)} \left(\|f\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \right. \\
&\qquad \left. + \left\| \frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|) \right\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \||d|(h+k)\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \right).
\end{aligned}$$

Angenommen, $r_0 > 0$ ist nun so klein, dass

$$\|d^+\|_{L^\infty} \cdot r^2 \leq \|d^+\|_{L^\infty} \cdot r_0^2$$

gleichmäßig beschränkt ist, nehme an durch eins. Wir schätzen weiter ab

$$\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} \leq \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot |Q(r)| \leq c(n) \cdot \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot r^{n+2} = c(n) \cdot \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot r^{n+1} \cdot r,$$

weil $|Q(r)| = c(n) r^{n+2}$ ist. Das ergibt für $r \leq r_0$ oder $b = 0$

$$\left(c(\lambda) \, \|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*(r))} + r \right)^{n/n+1} \leq c(n,\lambda) r^{n/n+1}.$$

Schließlich folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{Q^*(r)} v &\le c(n,\lambda) r^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + c(n,\lambda,\Lambda) h r^{(n/(n+1))-2} \|1+|b|r\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + \\
&\quad + c(n,\lambda) h r^{n/(n+1)} \|d\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} \\
&\le c(n,\lambda) r^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(Q^*(r))} + c(n,\lambda,\Lambda) h r^{-(n+2)/(n+1)} |Q^*(r)|^{1/(n+1)} (1 + r\|b\|_{L^\infty}) + \\
&\quad + c(n,\lambda) h r^{n/(n+1)} \|d\|_{L^\infty} |Q(r)|^{1/(n+1)} \\
&\le c(n,\lambda) k + c(n,\lambda,\Lambda) h r^{-(n+2)/(n+1)} r^{(n+2)/(n+1)} \zeta^{1/(n+1)} (1 + r\|b\|_{L^\infty}) + c(n,\lambda) h \|d\|_{L^\infty} r^2 \\
&\le c(n,\lambda) k + c(n,\lambda,\Lambda) h \zeta^{1/(n+1)} (1 + r\|b\|_{L^\infty}) + c(n,\lambda) h \|d\|_{L^\infty} r^2 \\
&\le c(n,\lambda) k + c(n,\lambda,\Lambda) h \zeta^{1/(n+1)} + \tfrac{1}{8} h,
\end{aligned}$$

falls $b = d = 0$ oder $r \le r_0(\lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty})$. Fixiere $\zeta > 0$, so dass

$$c(n,\lambda,\Lambda)\zeta^{1/(n+1)} \le \frac{1}{8}$$

ist. Nach Definition von $Q(r/2)$ gilt $0 \le |x - x_0|^2 \le \left(\frac{r}{2}\right)^2$ und $0 \le -t \le \left(\frac{r}{2}\right)^2$. Auf diesem Bereich erhält man also

$$1 - \frac{|x - x_0|^2 - t}{r^2} \ge 1 - \frac{\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}}{r^2} = \frac{1}{2}.$$

Daraus ergibt sich in $Q^*(r) \cap Q(r/2)$ die Abschätzung

$$\tfrac{1}{2} h - \bar{u} \le v \le c(n,\lambda) k + \tfrac{1}{4} h \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{u} \ge \tfrac{1}{4} h - c(n,\lambda) k.$$

Die Behauptung folgt, wenn k/h klein genug ist. Sonst ist die Ungleichung

$$\inf_{Q(r/2)} \bar{u} \ge k \ge c(n,\lambda) h$$

bei geeigneter Wahl von $c(n,\lambda)$ trivialerweise erfüllt (Achtung, nicht obiges, sondern c aus der Behauptung). Das Lemma 8 gilt folglich für alle $h \ge k$.

□

2. Nicht-Abfallen

Theorem 9. *Sei $u \ge 0$ und $Lu \le f$ in $Q(R)$, wobei $d = 0$ im Differentialoperator L gelte. Seien $0 < \varepsilon_0 < 1$, $0 < \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$ und $r \le R$. Dann gibt es zu jedem $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ positive Konstanten $\delta(n,\lambda) > 0$ und $\kappa(n,\lambda,\Lambda,\alpha_0,\alpha_1,\varepsilon_0) > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Ist

$$\bar{u} \ge A \quad \textit{auf} \quad \{|x| < \varepsilon r, t = -r^2\}$$

für eine positive Konstante A, mit

$$\bar{u} = u + k \equiv u + r^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(Q(R))},$$

so folgt

$$\bar{u} \ge \delta \varepsilon^\kappa A \quad \textit{auf} \quad \left\{|x| < \tfrac{r}{2}, t = -(1-\alpha) r^2\right\}$$

für beliebiges $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$, falls $r \le r_0(n,\lambda,\Lambda,\alpha_0,\alpha_1,||b||_{L^\infty},\varepsilon,\varepsilon_0)$ ist. Im Fall $b \equiv 0$ gilt die Aussage für alle Radien $r \le R$. Genauer gesagt reicht es, wenn $\|b\|_{L^\infty} r^{n/n+1}$ klein ist.

Aussage dieses Theorems ist, dass eine untere Schranke auf einem Ball zu einer festen Zeit später eine untere Schranke auf einem dazu konzentrischen Ball impliziert. Der Beweis macht deutlich, dass die Funktion u nur auf $B_r \times (-r^2, -(1-\alpha)r^2)$ definiert zu sein braucht.

Beweis. Sei α fest und $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Wir definieren die Funktionen

$$\psi_0(t) := \frac{(1-\varepsilon^2)(t+r^2)}{\alpha} + \varepsilon^2 r^2$$

und

$$\psi_1(x) := \left(\psi_0 - |x|^2\right)^+ .$$

Als drittes definieren wir

$$\psi := \psi_1^{2+\beta}\psi_0^{-q}$$

mit $1 > \beta > 0$ und einem noch zu bestimmenden $q > 2$. Da $\beta > 0$ ist, gilt $\psi \in C^2$.

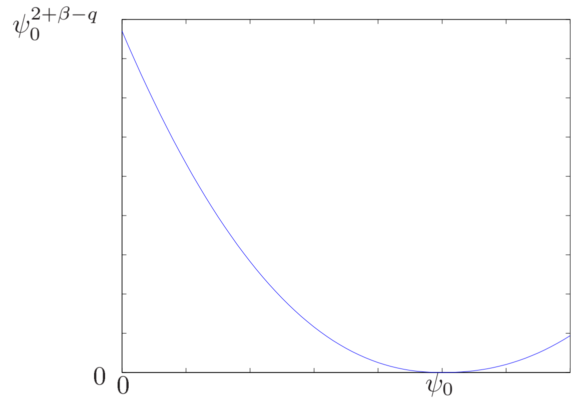

Abbildung 1. Glättung von $\psi(x)$ mit $\psi_0 = 0,5, q = 3, \beta = 0,2$

Die Funktion ψ wird nur für $-r^2 \leq t \leq 0$ betrachtet, da es genügt, die Situation auf $Q(r)$ zu untersuchen. Auf diesem Bereich gilt $\psi_0 \geq \varepsilon^2 r^2$, die Funktion ψ ist somit wohldefiniert.

Für jeden Punkt mit $|x|^2 > \psi_0$ gilt $\psi = 0$ in einer Umgebung. Deshalb gilt in $\mathbb{R}^n \backslash \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 \leq \psi_0\}$ die Gleichung $L\psi = 0$. Dies folgt auch für $|x|^2 \geq \psi_0$. Für die Punkte mit $|x|^2 \leq \psi_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (2+\beta)\ \psi_1^{1+\beta}\ \dot{\psi}_1\ \psi_0^{-q} + (-q)\ \psi_1^{2+\beta}\ \psi_0^{-q-1}\ \dot{\psi}_0 \\ &= \left[(2+\beta)\ \psi_1^{1+\beta} - q\ \psi_1^{2+\beta}\ \psi_0^{-1}\right]\ \psi_0^{-q}\ \dot{\psi}_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_i &= (2+\beta)\ \psi_1^{1+\beta}\ \psi_{1_i}\ \psi_0^{-q} + (-q)\ \psi_1^{2+\beta}\ \psi_0^{-q-1}\ \underbrace{\psi_{0_i}}_{=0} \\ &= (2+\beta)\ \psi_1^{1+\beta}\ \psi_{1_i}\ \psi_0^{-q},\end{aligned}$$

$$\psi_{ij} = \left[(2+\beta)(1+\beta)\ \psi_1^{\beta}\ \psi_{1_j} + (-q)(2+\beta)\ \psi_1^{1+\beta}\ \psi_0^{-1}\ \underbrace{\psi_{0_j}}_{=0}\ \right]\psi_0^{-q}\ \psi_{1_i} + (2+\beta)\ \psi_1^{1+\beta}\ \psi_0^{-q}\ \psi_{1_{ij}}$$

(Achtung, das i kennzeichnet hier die Ableitung von ψ und NICHT die Funktion ψ_i, wie z.B. oben für ψ_1 angeführt.) Für die nächsten Schritte ist es sinnvoll, sich die Ableitungen von ψ_1 anzuschauen. Diese sind für $|x|^2 < \psi_0$

$$\begin{aligned}\psi_{1_i} &= -2x_i, \\ \psi_{1_{ij}} &= -2\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Definiert man folgenden Differentialoperator $L_0\omega := -\dot{\omega} + a^{ij}\omega_{ij}$, dann ergibt sich für $|x|^2 < \psi_0$ die Ungleichung

$$L_0\psi = -\dot{\psi} + a^{ij}\ \psi_{ij}$$

$$= \left[q\, \psi_1^{2+\beta}\, \psi_0^{-1} - (2+\beta)\, \psi_1^{1+\beta}\right] \left(\tfrac{1-\varepsilon^2}{\alpha}\right)\, \psi_0^{-q} + (2+\beta)(1+\beta)\, 4a^{ij}x_i x_j\, \psi_1^{\beta}\, \psi_0^{-q} - \\ - (2+\beta)\, 2a^{ij}\delta_{ij}\, \psi_1^{1+\beta}\, \psi_0^{-q}$$

$$= \frac{\psi_0^{-q}\, \psi_0}{\alpha} \left[q(1-\varepsilon^2)\, \frac{\psi_1^{2+\beta}}{\psi_0^2} - (2+\beta)(1-\varepsilon^2)\, \frac{\psi_1^{1+\beta}}{\psi_0} + (2+\beta)(1+\beta)\, 4\,\alpha\, a^{ij} x_i x_j\, \frac{\psi_1^{\beta}}{\psi_0} - \right. \\ \left. -(2+\beta)\, 2\,\alpha\, a^{ij}\delta_{ij}\, \frac{\psi_1^{1+\beta}}{\psi_0} \right]$$

$$\geq \frac{\psi_0^{-q}\, \psi_0}{\alpha}\, \psi_1^{\beta} \left[q(1-\varepsilon_0^2)\, \frac{\psi_1^2}{\psi_0^2} - (2+\beta)(1-\varepsilon^2)\, \frac{\psi_1}{\psi_0} + (2+\beta)(1+\beta)\, 4\,\alpha\lambda \frac{|x|^2}{\psi_0} - (2+\beta) 2\,\alpha\, n\, \Lambda\, \frac{\psi_1}{\psi_0} \right]$$

$$\geq \frac{\psi_0^{-q}\, \psi_0}{\alpha}\, \psi_1^{\beta} \left[q(1-\varepsilon_0^2)\, \frac{\psi_1^2}{\psi_0^2} - (2+\beta)\left((1-\varepsilon^2) + 2\alpha n\Lambda\right)\, \frac{\psi_1}{\psi_0} + (2+\beta)(1+\beta)\, 4\,\alpha\lambda \frac{|x|^2}{\psi_0} \right].$$

Sei nun zunächst $0 \leq \frac{|x|^2}{\psi_0} \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$1 \geq \frac{\psi_1}{\psi_0} = \frac{\psi_0 - |x|^2}{\psi_0} \geq \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten dann $L_0\psi \geq 0$, falls $q \geq q_0(\alpha, n, \Lambda, \varepsilon_0)$.

Sonst ist $\frac{|x|^2}{\psi_0} > \frac{1}{2}$ und $L_0\psi \geq 0$ folgt mit der Cauchyschen Ungleichung und $q \geq q_0(\varepsilon_0, \alpha, n, \lambda, \Lambda)$.

Insgesamt schließt man nun $L_0\psi = L\psi - b^i\psi_i \geq 0$ und in $\{|x|^2 < \psi_0\}$ folgt

$$\begin{aligned} L\psi &\geq b^i\psi_i \\ &= (2+\beta)\, \psi_1^{1+\beta}\, \psi_0^{-q}(-2b^i x_i) \\ &\geq -2(2+\beta)\, \psi_1^{1+\beta}\, \psi_0^{-q}|b||x| \\ &\geq -2(2+\beta)\psi_0^{1-q+\beta}|b||x| \\ &\geq -2(2+\beta)(\varepsilon r)^{2-2q+2\beta}|b||x|, \end{aligned}$$

weil $\psi_1 \geq \psi_0 \geq \varepsilon^2 r^2$ und $1-q < 0$ ist. β ist dabei als klein genug vorausgesetzt.

Bis hierher wurde die Funktion ψ bezüglich der Ortsvariable x untersucht. Jetzt erfolgt die Untersuchung bezüglich der Zeitvariablen t. Zunächst sei $t = -r^2$. Dann gilt $\psi_0 = \varepsilon^2 r^2$ und für $|x| < \varepsilon r$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi(x, -r^2) &= (\varepsilon^2 r^2)^{-q}(\varepsilon^2 r^2 - |x|^2)^{2+\beta} \\ &\leq (\varepsilon^2 r^2)^{-q}(\varepsilon^2 r^2)^{2+\beta} \\ &\leq (\varepsilon r)^{4-2q+2\beta}. \end{aligned}$$

Für $|x| \geq \varepsilon r$ gilt $\psi(x, -r^2) = 0$. Ist jetzt $t = -(1-\alpha)r^2$, so ist $\psi_0 = r^2$ und für $|x| \leq \frac{r}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(x, -(1-\alpha)r^2) &= r^{-2q}(r^2 - |x|^2)^{2+\beta} \\ &\geq r^{-2q}\left(\tfrac{3}{4}r^2\right)^{2+\beta} \\ &\geq \left(\tfrac{3}{4}\right)^{2+\beta} r^{4-2q+2\beta}. \end{aligned}$$

Definiere die Testfunktion v durch

$$v := \bar{u} - A(\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}\psi$$

und dazu den Zylinder $Q_\alpha := B_r(0) \times (-r^2, -(1-\alpha)r^2)$.
Das weitere Ziel ist es, Theorem 5 auf die Testfunktion v anzuwenden. Dazu wird v als erstes auf dem

parabolischen Rand von Q_α untersucht. Für $|x| = r$ und $t < -(1-\alpha)r^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_0 &< \frac{(1-\varepsilon^2)(-(1-\alpha)r^2 + r^2)}{\alpha} + \varepsilon^2 r^2 \\
&= \frac{(1-\varepsilon^2)\alpha r^2}{\alpha} + \varepsilon^2 r^2 = r^2, \\
\psi_1 &= 0, \\
\psi &= 0 \\
\Longrightarrow \quad v &= \bar{u} \geq u \geq 0.
\end{aligned}$$

Für $t = -r^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \varepsilon^2 r^2, \\
\psi_1 &= (\varepsilon^2 r^2 - |x|^2), \\
\psi &= (\varepsilon^2 r^2 - |x|^2)^{2+\beta}(\varepsilon^2 r^2)^{-q} \\
&\leq (\varepsilon r)^{4-2q+2\beta}
\end{aligned}$$

mit $|x|^2 < \varepsilon^2 r^2$. Mit der Voraussetzung $\bar{u} \geq A$ auf $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |x| < \varepsilon r, t = -r^2\}$ folgt

$$v \geq \bar{u} - A \geq 0.$$

Für $|x|^2 \geq \varepsilon^2 r^2$ ist $\psi = 0$. Daraus folgt $v = \bar{u} \geq u \geq 0$.
Also ist $v \geq 0$ auf dem Rand PQ_α.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
Lv &= -\dot{v} + a^{ij} v_{ij} + b^i v_i \\
&= -\dot{u} + A(\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}(\dot{\psi} - a^{ij}\psi_{ij} - b^i \psi_i) + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i \\
&= \underbrace{-\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i}_{=Lu} + A(\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}(\underbrace{\dot{\psi} - a^{ij}\psi_{ij} - b^i \psi_i}_{=-L\psi}) \\
&\leq f + 2(2+\beta)A(\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}|b||x|(\varepsilon r)^{2-2q+2\beta} \\
&\leq \underbrace{f + 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}|x|}_{=:\tilde{f}}.
\end{aligned}$$

Jetzt lässt sich Theorem 5 auf v in Q_α anwenden mit $d = k = 0$. Allerdings wird dieses Mal die angesprochene Infimums- statt der gewohnten Supremumsvariante verwendet. Es folgt also

$$\begin{aligned}
\inf_{Q_\alpha} v \geq \underbrace{\inf_{PQ_\alpha} -v^-}_{=0} - c(n) \left\| \frac{\tilde{f}^+}{H^*} \right\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} \cdot \left(\left\| \frac{b}{H^*} \right\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + r \right)^{n/(n+1)} \\
\geq -c(n) \left\| \left(f + 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}|x|\right)^+ \right\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} \left\| \frac{1}{H^{*(n+1)}} \right\|_{L^\infty} \cdot \\
\cdot \left(\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q_\alpha)} \left\| \frac{1}{H^{*(n+1)}} \right\|_{L^\infty} + r \right)^{n/(n+1)} \\
\geq -c(n) \left(\|f\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + 2(2+\beta)A \, \|b\|_{L^\infty} \, (\varepsilon r)^{-2} \, \|x\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} \right) \left\| \frac{1}{H^{*(n+1)}} \right\|_{L^\infty} \cdot \\
\cdot \left(\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q_\alpha)} \left\| \frac{1}{H^{*(n+1)}} \right\|_{L^\infty} + r \right)^{n/(n+1)} \\
\geq -c(n,\lambda) \Big(\|f\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + \underbrace{2(2+\beta)A \, \|b\|_{L^\infty} \, (\varepsilon r)^{-2} \, \|x\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)}}_{=:G} \Big) \cdot \underbrace{\left(c(n,\lambda) \, \|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + r \right)^{n/n+1}}_{=:F}.
\end{aligned}$$

F wird folgendermaßen abgeschätzt,

$$F = \left(c(n,\lambda) \, \|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + r \right)^{n/n+1} \leq \left(c(n,\lambda) \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot r^n \alpha r^2 + r \right)^{n/n+1} \leq 2r^{n/n+1}$$

falls $r \leq r_0(c(n,\lambda), \|b\|_{L^\infty}, \alpha_1)$. Ist $b \equiv 0$, so gilt die Abschätzung für alle Radien $r \leq R$. Als zweites wird G unter Verwendung von Polarkoordinaten abgeschätzt,

$$\begin{aligned}
2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\,\|x\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} &= 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\left(\int_{B_r(0)}\int_{-r^2}^{-r^2+\alpha r^2}|x|^{n+1}\,dt\,dx\right)^{1/(n+1)}\\
&= 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\left(\alpha r^2\int_{B_r(0)}|x|^{n+1}dx\right)^{1/(n+1)}\\
&\leq 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\left(\alpha r^2 c(n)\int_0^r \rho^{n+1}\rho^{n-1}\,d\rho\right)^{1/(n+1)}\\
&= 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\left(\alpha r^2 c(n)\frac{1}{2n+1}r^{2n+1}\right)^{1/(n+1)}\\
&\leq 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}\varepsilon^{-2}r^{-2}\alpha_1^{1/(n+1)}c(n)r^{\frac{2n+3}{n+1}}\\
&= 2(2+\beta)Ac(n)\varepsilon^{-2}\alpha_1^{1/(n+1)}\|b\|_{L^\infty}r^{\frac{1}{n+1}}\\
&\leq 6c(n)A\varepsilon^{-2}\alpha_1^{1/(n+1)}\|b\|_{L^\infty}r^{\frac{1}{n+1}}\\
&\leq c(n)A\varepsilon^{-2},
\end{aligned}$$

falls $r \leq r_0(\|b\|_{L^\infty}, \alpha_1, n)$. Ist $b \equiv 0$, dann gilt die Ungleichung für alle Radien $r \leq R$ und es genügt $c(n) = 0$. Mit diesen beiden Abschätzungen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
v &\geq -c(n,\lambda)\Big(\|f\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + 2(2+\beta)A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\,\|x\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)}\Big)\cdot\Big(c(n,\lambda)\,\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + r\Big)^{n/n+1}\\
&\geq -c(n,\lambda)\left(\|f\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)} + c(n)A\varepsilon^{-2}\right)\cdot 2r^{n/n+1}\\
&= -c(n,\lambda)\,\|f\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)}\cdot 2r^{n/n+1} - \underbrace{c(n,\lambda)c(n)}_{c(n,\lambda)}A\varepsilon^{-2}\cdot 2r^{n/n+1}\\
&= -c(n,\lambda)\cdot 2k - c(n,\lambda)A\varepsilon^{-2}\cdot 2r^{n/n+1} \qquad \text{in } Q_\alpha \text{ mit } k = r^{n/n+1}\,\|f\|_{L^{n+1}(Q_\alpha)},\\
&= -c(n,\lambda)k - c(n,\lambda)A\varepsilon^{-2}r^{n/n+1}.
\end{aligned}$$

Auf der Menge Q_α schränken wir nun auf $|x| \leq \frac{r}{2}$ und $t = -(1-\alpha)r^2$ ein, dann ergibt sich dort

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= v + A(\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}\psi\\
&\geq A\left((\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}\psi - c(n,\lambda)\varepsilon^{-2}r^{n/(n+1)}\right) - c(n,\lambda)k\\
&\geq A\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^{2+\beta}(\varepsilon r)^{2q-2\beta-4}r^{4-2q+2\beta} - c(n,\lambda)\varepsilon^{-2}r^{n/(n+1)}\right) - c(n,\lambda)k\\
&= A\left(\varepsilon^{2q-2\beta-4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{2+\beta} - c(n,\lambda)\varepsilon^{-2}r^{n/(n+1)}\right) - c(n,\lambda)k\\
&= A\varepsilon^{2q-4-2\beta}\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^{2+\beta} - c(n,\lambda)\varepsilon^{2-2q+2\beta}r^{n/(n+1)}\right) - c(n,\lambda)k\\
&\geq A\varepsilon^{2q-4-2\beta}\left(\tfrac{27}{64} - c(n,\lambda)\varepsilon^{2-2q}r^{n/(n+1)}\right) - c(n,\lambda)k\\
&\geq \tfrac{3}{8}A\varepsilon^{2q-4} - c(n,\lambda)k,
\end{aligned}$$

sofern $r \leq r_0(\varepsilon_0, n, \lambda, q)$ und β klein genug sind.

Setzen wir $\kappa = 2q-4$, dann folgt mit Addition von $c(n,\lambda)u$ (hier stimmen die c überein) und wegen $u \geq 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\bar{u} + c(n,\lambda)u &\geq \frac{3}{8}A\varepsilon^\kappa - c(n,\lambda)k + c(n,\lambda)u\\
\Rightarrow \quad \bar{u}(1+c(n,\lambda)) &\geq \frac{3}{8}A\varepsilon^\kappa + c(n,\lambda)u\\
\Rightarrow \quad \bar{u}(1+c(n,\lambda)) &\geq \frac{3}{8}A\varepsilon^\kappa\\
\Rightarrow \quad \bar{u} &\geq \delta A\varepsilon^\kappa
\end{aligned}$$

mit $\delta = \frac{3}{8}\frac{1}{1+c(n,\lambda)}$. Daraus folgt Theorem 9.

$\square$

3. Calderon-Zygmund Zerlegung

An dieser Stelle steht nun die Calderon-Zygmund Zerlegung in einer parabolischen Version. Zu deren Beweis werden wir im Verlauf eine passende Version des Lebesguetheorems verwenden.

Sei $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, R > 0, T > 0$. Wir definieren den Quader

$$K_0 := \{\max_i |x^i - x_0^i| < R, |t - t_0| < T\}.$$

Sei $f \in L^1(K_0)$ eine nichtnegative Funktion. Im Grunde würde es genügen, charakteristische Funktionen zu betrachten, da wir die Aussage lediglich auf solche anwenden. Sei $\tau > 0$ eine Konstante, für die gilt

$$\tau \geq \frac{1}{|K_0|}\int_{K_0} f.$$

Zerlege K_0 in 2^{n+2} disjunkte offene Teilquader

$$K_{1,1}, \ldots, K_{1,2^{(n+2)}}$$

von der Form

$$K_{1,j} := \{\max_i |x^i - x_{1,j}^i| < R/2, |t - t_{1,j}| < T/4\}$$

für geeignete $(x_{1,j}, t_{1,j})$. Da die Quader offen sind, gibt es keine Überschneidungen. Im Falle abgeschlossener Quader erfolgt die Zerlegung bis auf eine Nullmenge, nämlich den Rändern, an denen sich die Quader schneiden.

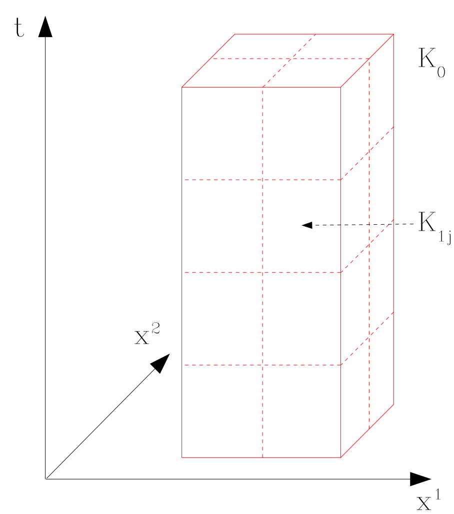

Abbildung 2. erster Zerlegungsschritt im Fall $n = 2$

Unterteile jeden Teilquader K mit

$$\frac{1}{|K|}\int_K f \leq \tau$$

nochmals mit der gleichen Vorgehensweise. Setze die Zerlegung beliebig lange fort und erhalte so im m-ten Schritt eine endliche Menge von Quadern $K_{m,1}, \ldots, K_{m,k(m)}$. Sei S die Menge aller so entstandenen Quader, für die gilt

$$\frac{1}{|K|}\int_K f > \tau.$$

Bezeichne für $K \in S$ den "Vorgängerquader" , aus dem K durch Zerlegen entstanden ist, mit $\tilde{K}$. Da die Zerlegung bei K abbricht, erhalten wir

$$\tau \geq \frac{1}{|\tilde{K}|} \int_{\tilde{K}} f = \frac{1}{2^{n+2}|K|} \int_{\tilde{K}} f \geq \frac{1}{2^{n+2}|K|} \int_K f.$$

und daraus

$$\tau < \frac{1}{|K|} \int_K f \leq 2^{n+2}\tau$$

für alle $K \in S$. Definiere nun

$$B := \bigcup_{K \in S} K \quad \text{ und } \quad G := K_0 \backslash B.$$

Jetzt benötigen wir die angekündigte Variante des Lebesguetheorems.

Lemma 10. *Sei $0 \leq f \in L^1(K_0)$ und bezeichne für festes $(x,t) \in K_0$ (diese Zuordnung funktioniert für fast-alle $(x,t) \in K_0$) mit $K_m(x,t)$ den Quader aus dem m-ten Schritt der Calderon-Zygmund Zerlegung (ohne vorzeitig abbzubrechen), so dass $(x,t) \in K_m(x,t)$. Definiere*

$$f_m(x,t) := \frac{1}{|K_m(x,t)|} \int_{K_m(x,t)} f.$$

Dann gilt $f_m \longrightarrow f$ in $L^1(K_0)$.

Beweis. Bezeichne $\rho_m(x,t) \equiv (x(\rho_m), t(\rho_m))$ den Mittelpunkt des Quaders $K_m(x,t)$. Sei K_m der um $-\rho_m(x,t)$ verschobene Quader $K_m(x,t)$, der also seinen Mittelpunkt im Ursprung hat. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{K_0} |f - f_m| &= \int_{K_0} \left| f(x,t) - \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} f(\rho_m(x,t) + (y,s))\, dy\, ds \right| dx\, dt \\
&= \frac{1}{|K_m|} \cdot \left(\int_{K_0} \left| \int_{K_m} 1 \cdot f(x,t)\, dy\, ds - \int_{K_m} f(\rho_m(x,t) + (y,s))\, dy\, ds \right| dx\, dt \right) \\
&\leq \frac{1}{|K_m|} \int_{K_0} \int_{K_m} |f(x,t) - f(\rho_m(x,t) + (y,s))|\, dy\, ds\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} \int_{K_0} |f(x,t) - f(\rho_m(x,t) + (y,s))|\, dx\, dt\, dy\, ds.
\end{aligned}$$

Ist f eine stetige Funktion, dann gilt für ein festes $\varepsilon > 0$, dass

$$|f(x,t) - f(\rho_m(x,t) + (y,s))| < \varepsilon,$$

wenn m groß genug ist. Insgesamt schließen wir daraus, dass

$$\begin{aligned}
\int_{K_0} |f - f_m| &\leq \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} \int_{K_0} |f(x,t) - f(\rho_m(x,t) + (y,s))|\, dx\, dt\, dy\, ds \\
&\leq \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} |K_0| \varepsilon\, dy\, ds \\
&= \frac{1}{|K_m|} |K_m||K_0|\varepsilon \\
&= |K_0|\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt daraus die Behauptung. Ist f nicht stetig, so können wir es durch eine Funktion g beliebig gut approximieren, da für jedes $p \geq 1$ der Funktionenraum $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, also zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.
Wir approximieren in L^1die Funktion f mit einer stetigen Funktion g bis auf $\varepsilon/3$. Sei g_m analog wie f_m definiert, dann gilt die obige Ungleichung für g und g_m,

$$\int_{K_0} |g - g_m| \leq \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} \int_{K_0} |g(x,t) - g(\rho_m(x,t) + (y,s))|\, dx\, dt\, dy\, ds.$$

Wir verwenden im Folgenden die Dreiecksungleichung, die Approximationsgüte $\frac{\varepsilon}{3}$ von g an f und die Stetigkeit von g. Die Wahl von m (m wieder groß genug gewählt) hängt dabei vom Stetigkeitsmodul von g ab. Wir erhalten

$$\int_{K_0} |f - f_m| = \int_{K_0} |f - f_m + g - g + g_m - g_m|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{K_0} \left(|f-g| + |f_m - g_m| + |g - g_m|\right) \\
&= \int_{K_0} |f(x,t) - g(x,t)| \, dx\, dt \, + \\
&\qquad + \int_{K_0} \left| \frac{1}{|K_m|} \left(\int_{K_m} f(\rho_m(x,t)+(y,s)) - g(\rho_m(x,t)+(y,s)) \, dy\, ds \right) \right| dx\, dt \, + \\
&\qquad\qquad + \int_{K_0} |g(x,t) - g_m(x,t)| \, dx\, dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{|K_m|} \int_{K_0} \left(\int_{K_m} |f(\rho_m(x,t)+(y,s)) - g(\rho_m(x,t)+(y,s))| \, dy\, ds \right) dx\, dt + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{|K_m|} |K_m| \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Somit ist die Behauptung auch in diesem Fall gezeigt.

□

Aufgrund dieses Lemmas 10 konvergiert f_m oder zumindest eine Teilfolge davon fast überall gegen f. Damit ist fast überall dort, wo $f > \tau$ gilt, irgendein $f_m > \tau$ und die entsprechende Zerlegung bricht nach Definition ab. In diesem Fall liegen die betreffenden Quader in B und folglich gilt $f \leq \tau$ fast überall in G.

Definiere nun die Menge

$$\tilde{B} := \bigcup_{K \in S} \tilde{K},$$

wobei $\tilde{K}$ wieder der "Vorgängerquader" von K sein soll, dann folgt

$$\int_{\tilde{B}} f \leq \tau |\tilde{B}|,$$

da dies nach Definition von $\tilde{K}$ für jeden dieser Quader gilt und $\tilde{B}$ als disjunkte Vereinigung (modulo Nullmengen, nämlich den Rändern) solcher Mengen $\tilde{K}$ dargestellt werden kann.

Sei nun $f := \chi_\Gamma$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $\Gamma \subset K_0$ mit $|\Gamma| < \tau |K_0|$ und gelte $0 < \tau < 1$. Wie bereits gesagt, konvergiert f_m (oder eine Teilfolge davon) fast überall gegen f. Wegen der Definition von f_m,

$$f_m(x,t) = \frac{1}{|K_m(x,t)|} \int_{K_m(x,t)} f = \frac{1}{|K_m(x,t)|} \int_{K_m(x,t)} \chi_\Gamma$$

ist die Konvergenz $f_m \to 1$ (wegen der charakteristischen Funktion) nur möglich, falls es einen entsprechenden Quader K_m gibt, der Γ so schneidet, dass

$$\frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} \chi_\Gamma = \frac{|K_m \cap \Gamma|}{|K_m|} \geq 1 - \varepsilon$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt. Im Komplement der Vereinigung solcher Quader gilt fast überall $\chi_\Gamma = 0$. Deswegen folgt insbesondere

$$|\Gamma| = |\Gamma \cap \tilde{B}| \leq \tau |\tilde{B}|. \tag{7}$$

4. Maßtheoretisches Lemma von Krylov und Safonov

Im Beweis der schwachen Harnackungleichung wird es später einen Fall geben, bei dem sehr technische Hilfsmittel benötigt werden. Zu diesen gehört das Lemma von Krylov und Safonov, welches hier folgt. Zuvor jedoch noch einige kurze Definitionen.

Definition 11. *Sei* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. *Für* $R > 0$ *definieren wir den folgenden Quader*

$$K_0 \equiv K((x_0,t_0),R) := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \max_i |x^i - x_0^i| < R, t_0 < t < t_0 + R^2 \right\}.$$

Sei $\eta \in (0, \frac{3}{4})$. Seien weiter (x_1, t_1) und r derart, dass $K((x_1,t_1),r) \subset K_0$. K ist dabei analog zu K_0 definiert. Zu K gehörig definieren wir die Quader

$$K_1((x_1,t_1),r) := K_0 \cap \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \max_i |x^i - x_1^i| < 3r,\ t_1 - 3r^2 < t < t_1 + 4r^2\right\}$$

und

$$K_2((x_1,t_1),r) := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \max_i |x^i - x_1^i| < 3r,\ \max_i |x^i - x_0^i| < R,\ t_1 + r^2 < t < t_1 + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r^2\right\}.$$

Sei $\xi \in (0,1)$, und $\Gamma \subset K_0$ eine messbare Teilmenge. Sei $G^* = G^*(\Gamma, \xi)$ die Familie aller Teilquader $K = K((x,t),r)$ von K_0, für die $|K \cap \Gamma| \geq \xi |K|$ gilt und setze

$$Y_i := \bigcup_{K \in G^*} K_i, \quad i = 1, 2.$$

Die K_i, K, K_0 sind dabei wie oben definiert.

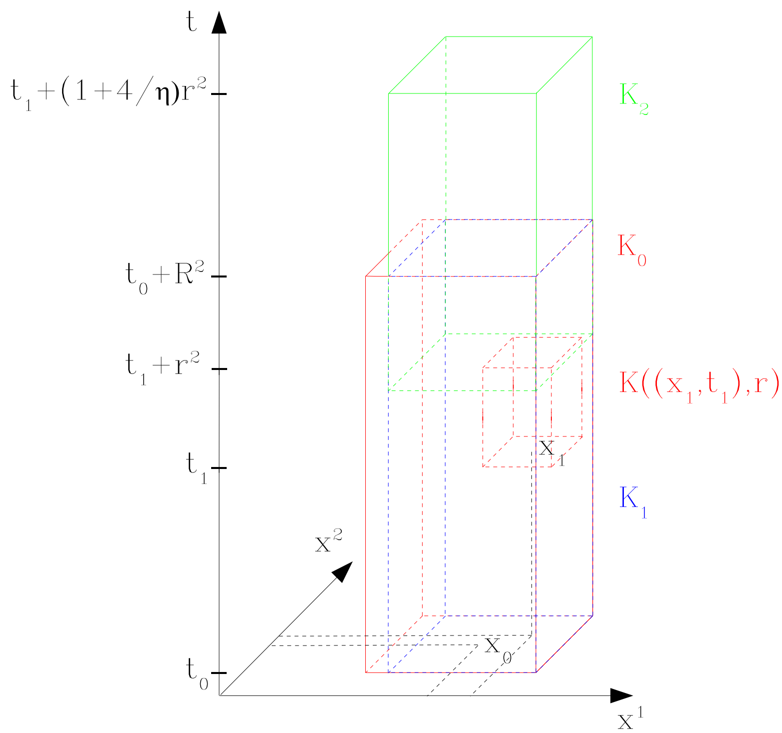

ABBILDUNG 3. Die Quader im Fall $n = 2$

LEMMA 12. *Sei $\Gamma \subset K_0$ messbar. Dann gelten*

(i) $$|\Gamma \backslash Y_1| = 0,$$

(ii) $$|\Gamma| \leq \xi |K_0| \Longrightarrow |\Gamma| \leq \xi |Y_1|,$$

(iii) $$|Y_1| \leq (1 + \eta)|Y_2|.$$

BEWEIS. Falls $|\Gamma| > \xi |K_0|$ gilt, so wähle $K = K_0$ und setze $K_1 = K_0$. Damit gilt dann $Y_1 = K_0$ und es ist $|\Gamma \backslash Y_1| = |\Gamma \backslash K_0| = 0$ und damit (i) erfüllt. Für den Fall (ii) ist nichts zu zeigen, da die Voraussetzung nicht erfüllt ist.
Im Fall $|\Gamma| \leq \xi |K_0|$ benutzen wir die Calderon-Zygmund Zerlegung aus dem vorigen Abschnitt mit $\tau = \xi$. Ist $K((x_1,t_1),r) \in S$, dann gilt für den Vorgängerquader $\tilde{K}$ von K,

$$\tilde{K} \subset \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \max_i |x^i - x_1^i| < 3r, t_1 - 3r^2 < t < t_1 + 4r^2\right\}.$$

Es gilt also $\tilde{K} \subset K_1((x_1,t_1),r)$. Da $\tilde{B}$ als Vereinigung der Vorgängerquader und Y_1 als Vereinigung der K_1 definiert sind, folgt daraus $\tilde{B} \subset Y_1$. Die Calderon-Zygmund Zerlegung liefert nach (7), dass $|\Gamma| = |\Gamma \cap \tilde{B}|$, also erhält man zusammen $\Gamma \subset \tilde{B} \subset Y_1$. Damit ist (i) auch in diesem Fall bewiesen. Aus (7) und $|\tilde{B}| \leq |Y_1|$ schließen wir weiterhin (ii).

Der Beweis von (iii) ist etwas aufwändiger. Zunächst fixieren wir ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$I(x) := \{t : (x,t) \in Y_2\} \neq \emptyset.$$

Da Vereinigungen von (beliebig vielen) offenen Mengen wieder offen sind und Y_2 eine solche Vereinigung ist, ist $I(x)$ ebenfalls offen als Teilmenge von $\mathbb{R}$. $I(x)$ kann weiter als disjunkte Vereinigung offener Intervalle $I_m = (t_m, \tau_m)$ dargestellt werden. Jedes dieser Intervalle ist nach Definition von Y_2 wieder Vereinigung von offenen Intervallen der Form

$$I_{m,k} = \left(t_{m,k} + r_{m,k}^2, t_{m,k} + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r_{m,k}^2\right).$$

Jedes dieser Intervalle entspricht dabei einer Menge K_2. Sie sind jedoch nicht notwendigerweise disjunkt, da sich mehrere K_2 schneiden können, so dass einzelne Intervalle "zusammenfallen" oder sich überlappen. Bezogen auf die Bedingung $t_1 - 3r^2 < t < t_1 + 4r^2$ aus der Definition von K_1, definieren wir

$$J_{m,k}^* := \left(t_{m,k} - 3r_{m,k}^2, t_{m,k} + 4r_{m,k}^2\right)$$

und

$$I_m^* := \bigcup_k J_{m,k}^*,$$

wobei wir die Vereinigung jeweils bis zu einem von m abhängigen Wert für k bilden. Nach Definition der Intervalle und Quader gilt also

$$\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in Y_1 \cup Y_2\} \subset \bigcup_m \left(I_m^* \cup I_m\right). \tag{8}$$

Da I_m die Vereinigung der Intervalle $I_{m,k}$ ist, folgt aufgrund der Inklusionen $I_{m,k} \subset I_m$

$$t_m \leq t_{m,k} + r_{m,k}^2 \leq t_{m,k} + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r_{m,k}^2 \leq \tau_m. \tag{9}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass

$$J_{m,k}^* \subset \left(t_m - \eta\left(\tau_m - t_m\right), \tau_m\right) \tag{10}$$

gilt. Für die rechte Seite von $J_{m,k}^*$ verwenden wir $\frac{4}{3} \geq \eta$ und erhalten mit (9)

$$\tau_m \geq t_{m,k} + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r_{m,k}^2 \geq t_{m,k} + 4r_{m,k}^2.$$

Die entsprechende Ungleichung für die linke Seite von $J_{m,k}^*$ ist aufwändiger. Wir addieren zunächst die beiden äußeren Ungleichungen in (9) und multiplizieren dann mit $\eta > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} t_m + t_{m,k} + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r_{m,k}^2 &\leq t_{m,k} + r_{m,k}^2 + \tau_m, \\ \eta\left(t_m + t_{m,k} + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r_{m,k}^2\right) &\leq \eta\left(t_{m,k} + r_{m,k}^2 + \tau_m\right), \\ \eta t_m + 4r_{m,k}^2 &\leq \eta\tau_m, \\ 4r_{m,k}^2 &\leq \eta\left(\tau_m - t_m\right), \\ t_m - \eta\left(\tau_m - t_m\right) &\leq t_{m,k} - 3r_{m,k}^2, \quad \text{erneut mit (9).} \end{aligned}$$

Damit haben wir (10) gezeigt. Offensichtlich ist aber auch I_m in dem eben angeführten Intervall enthalten. Nach Definition von I_m^* folgt

$$I_m \cup I_m^* \subset \left(t_m - \eta\left(\tau_m - t_m\right), \tau_m\right).$$

Das Intervall auf der rechten Seite hat die Länge $(1+\eta)(\tau_m - t_m)$. Zusammen mit (8) und weil $I(x)$ die Vereinigung der Intervalle I_m ist, ergibt sich

$$|\{t : (x,t) \in Y_1 \cup Y_2\}| \leq \sum_m (1+\eta)(\tau_m - t_m) = (1+\eta)|I(x)|.$$

Genauer gesagt haben wir die Abschätzung

$$|\{t : (x,t) \in Y_1\}| \leq |\{t : (x,t) \in Y_1 \cup Y_2\}| \leq (1+\eta)|\{t : (x,t) \in Y_2\}|$$

für x mit $I(x) \neq \emptyset$. Sei mit χ_1 und χ_2 jeweils die charakteristische Funktion zu Y_1 und Y_2 benannt, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_1(x,t)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x,t) + \chi_2(x,t) - \chi_1(x,t)\chi_2(x,t)\,dt \leq (1+\eta)\int_{\mathbb{R}} \chi_2(x,t)\,dt$$

für jedes beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ mit $I(x) \neq \emptyset$. Für Punkte x mit $I(x) = \emptyset$ gibt es keine Werte t, für die $(x,t) \in Y_2$. Weil nach Definition entsprechende K_1 und K_2 "übereinander liegen", kann es dann aber auch keine Werte t geben mit $x \in K_1$ bzw. $x \in Y_1$. Beide Integrale verschwinden also.
Zum Schluß integrieren wir beide Seiten bezüglich x und erhalten mit dem Satz von Fubini

$$|Y_1| \leq (1+\eta)|Y_2|.$$

□

5. Die schwache Harnackungleichung

Für das folgende Theorem seien der Quader

$$K_0 := (-R,R)^n \times (-5R^2, -4R^2) = K((0,-5R^2), R)$$

und der Zylinder

$$\Theta(R) := Q((0,-4R^2), R) = B_R(0) \times (-5R^2, -4R^2)$$

definiert. Es gilt

$$\Theta(R) \subset K_0.$$

Theorem 13. *Sei $Lu \leq f$ in Ω_T, $u \geq 0$ in $\Omega[4\sqrt{n}R]$, $m = \inf_{P\Omega[4\sqrt{n}R]} u$ und sei*

$$u_m = \begin{cases} \inf\{u, m\} & \text{in } \Omega_T, \\ m & \text{außerhalb } \Omega_T. \end{cases}$$

Ist $d = 0$, dann gibt es positive Konstanten $C = C(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})$ und $p = p(n, \lambda, \Lambda)$, so dass

$$\left(R^{-(n+2)} \int_{\Theta(R)} u_m^p dX \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\inf_{Q(R)} u_m + R^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(\Omega[4\sqrt{n}R])} \right)$$

gilt.

Beweis: Es kann vorausgesetzt werden, dass ein $(x,t) \in \Omega_T$ existiert, für das $u(x,t) < m$ gilt, da die Konstante C auf der rechten Seite der Gleichung sonst nur groß genug gewählt werden muss. Außerdem wird zunächst vorausgesetzt, dass $R > 0$ so klein ist, dass es die Schranken aus den Theoremen 8 und 9 erfüllt, damit wir diese später anwenden können. Es ist also $R \leq R_0(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})$. Die allgemeine Aussage erhalten wir dann am Ende mit Hilfe eines modifizierten Kugelkettenarguments.

Sei $1 > \zeta = \zeta(n, \Lambda) > 0$ wie in Theorem 8 und $\xi := 1 - \zeta$. Dabei kann ξ nahe bei eins angenommen werden. Wie schon des öfteren, werden auch in diesem Beweis einige Hilfsfunktionen verwendet. Definiere die Funktion

$$\eta := \tfrac{1}{2} \min\left\{ \tfrac{3}{4}, \xi^{-1/2} - 1 \right\}.$$

Für die gewünschten Abschätzungen arbeiten wir mit Theorem 8 und Theorem 9. Da die Funktion u_m in den Punkten (x,t) mit $u(x,t) = m$ nicht unbedingt differenzierbar zu sein braucht, definieren wir folgende Glättungsfunktion u_m^ε durch

$$u_m^\varepsilon(x,t) := \begin{cases} \rho(u(x,t)) & \text{für } (x,t) \in \Omega_T, \\ m - \frac{\varepsilon}{2} & \text{für } (x,t) \notin \Omega_T, \end{cases}$$

wobei

$$\rho(z) := \begin{cases} \left(m - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}(z-m)^3 + \frac{1}{2\varepsilon^3}(z-m)^4 & \text{für } z \in (m-\varepsilon, m), \\ z & \text{für } z \leq m - \varepsilon, \\ m - \frac{\varepsilon}{2} & \text{für } z \geq m. \end{cases}$$

Die Ableitungen von $\rho(z)$ auf $(m-\varepsilon, m)$ sind

$$\rho'(z) = \tfrac{3}{\varepsilon^2}(z-m)^2 + \tfrac{2}{\varepsilon^3}(z-m)^3 \geq 0,$$
$$\rho''(z) = \tfrac{6}{\varepsilon^2}(z-m) + \tfrac{6}{\varepsilon^3}(z-m)^2 \leq 0.$$

An den Stellen $z = m$ und $z = m - \frac{\varepsilon}{2}$ stimmen die definierten Funktionswerte als auch die rechts- und linksseitigen ersten und zweiten Ableitungen überein. Die Funktion ρ ist somit eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Auf dem parabolischen Rand $P\Omega[4\sqrt{n}R]$ gilt $u \geq m$, deshalb folgt dort, dass $\rho(u) = m - \frac{\varepsilon}{2}$. Für u_m^ε stimmen in diesen Punkten die rechts- und linksseitigen Ableitungen überein. Somit ist u_m^ε ein zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche für $\varepsilon \to 0$ in C^0 gegen die Funktion u_m konvergiert.

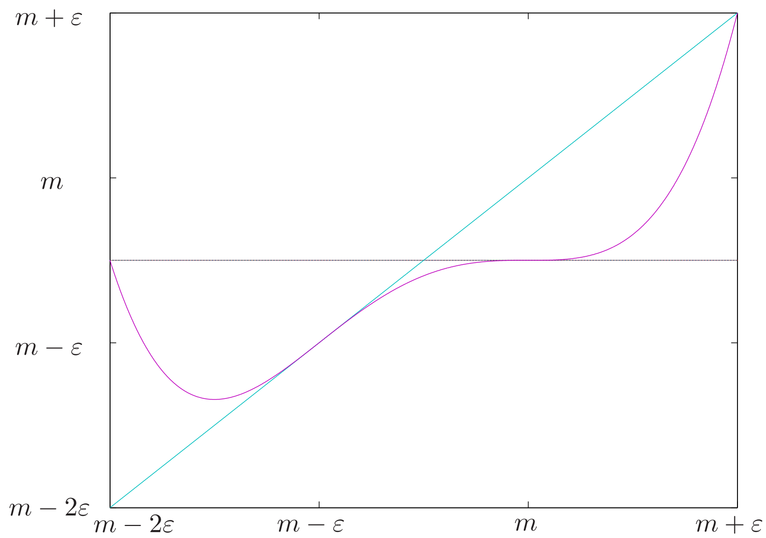

ABBILDUNG 4. Plot von $\rho(z)$ mit $m = 2$ und $\varepsilon = 0,5$

u_m^ε erfüllt in Ω_T die Differentialungleichung

$$\begin{aligned}
Lu_m^\varepsilon &= -(u_m^\varepsilon)_t + a^{ij}(u_m^\varepsilon)_{ij} + b^i(u_m^\varepsilon)_i \\
&= -\rho(u)_t + a^{ij}\rho(u)_{ij} + b^i\rho(u)_i \\
&= -\rho'(u)u_t + a^{ij}\left(\rho'(u)u_j\right)_i + b^i\rho'(u)u_i \\
&= -\rho'(u)u_t + a^{ij}\left(\rho''(u)u_iu_j + \rho'(u)u_{ij}\right) + b^i\rho'(u)u_i \\
&= \rho'(u)\left(-u_t + a^{ij}u_{ij} + b^iu_i\right) + a^{ij}\rho''(u)u_iu_j \\
&\leq \rho'(u)f + \underbrace{a^{ij}u_iu_j}_{\geq 0}\underbrace{\rho''(u)}_{\leq 0} \\
&\leq \underbrace{\rho'(u)}_{\in(0,1)} f \\
&\leq |f|.
\end{aligned}$$

Für $f < 0$ gilt immerhin $Lu_m^\varepsilon \leq 0$. Da u_m^ε außerhalb von Ω_T konstant ist, gilt dort $Lu_m^\varepsilon = 0 \leq |f|$. Die Bedingungen sind für die Anwendungen der Theoreme 8 und 9 mit $Q(4\sqrt{n}R)$ ausreichend, da lediglich die Norm von f in die Aussagen eingeht.

Wir können $m > 0$ annehmen, da die Behauptung sonst offensichtlich erfüllt ist. Ist ε klein genug gewählt, gilt außerdem $u_m^\varepsilon \geq 0$ in $Q(4\sqrt{n}R)$.

Weiterhin sei $h > k = R^{n/n+1}\|f\|_{L^{n+1}(\Omega[4\sqrt{n}R])}$, $\bar{u}_m^\varepsilon = u_m^\varepsilon + k$ und

$$\Gamma(h) := \{(x,t) \in K_0 : \bar{u}_m^\varepsilon > h\}.$$

Bezeichne $G^*(\Gamma(h), \xi)$ die Menge aller Teilquader K von K_0 mit $|K \cap \Gamma(h)| > \xi|K|$. In $G^*(\Gamma(h), \xi)$ sind die Teilquader enthalten, die die Bedingung erfüllen und insbesondere alle, die in $\Gamma(h)$ liegen.

(x_1, t_1) und $r > 0$ werden nun so fixiert, dass $K = K((x_1, t_1), r) \in G^*(\Gamma(h), \xi)$. Für den diesem Quader einbeschriebenen Zylinder $Q = Q((x_1, t_1 + r^2), r) \subset K$ gelten außerdem die Bedingungen

$$1 \geq \frac{|Q|}{|K|} \geq c(n) > 0, \tag{11}$$

$$|Q\backslash\Gamma(h)| \leq |K\backslash\Gamma(h)|, \tag{12}$$

und außerdem

$$|Q\cap\Gamma(h)| + |Q\backslash\Gamma(h)| = |Q|, \tag{13}$$

$$|K\cap\Gamma(h)| + |K\backslash\Gamma(h)| = |K|. \tag{14}$$

Daraus lässt sich folgende Abschätzung gewinnen

$$\begin{aligned} |Q\cap\Gamma(h)| &= |Q| - |Q\backslash\Gamma(h)| \\ &\geq |Q| - |K\backslash\Gamma(h)| \\ &= |Q| - |K| + |K\cap\Gamma(h)| \\ &\geq |Q| - |K| + \xi|K| \\ &= |Q| - (1-\xi)|K| \\ &\geq |Q| - (1-\xi)\frac{1}{c(n)}|Q| \end{aligned}$$

Da ξ nahe eins ist, folgt für $1 > \tilde{\zeta} > (1-\xi)\frac{1}{c(n)} > 0$

$$|Q\cap\Gamma(h)| > \left(1-\tilde{\zeta}\right)|Q| = \tilde{\xi}|Q|.$$

Somit können wir nun Theorem 8 anwenden und erhalten eine untere Schranke für $\bar{u}_m^\varepsilon$, nämlich

$$\inf_{Q_1} \bar{u}_m^\varepsilon \geq C_1 h,$$

wobei

$$Q_1 := \{|x-x_1| < \frac{r}{2}, t_1 + \frac{3}{4}r^2 < t < t_1 + r^2\}$$

ist.

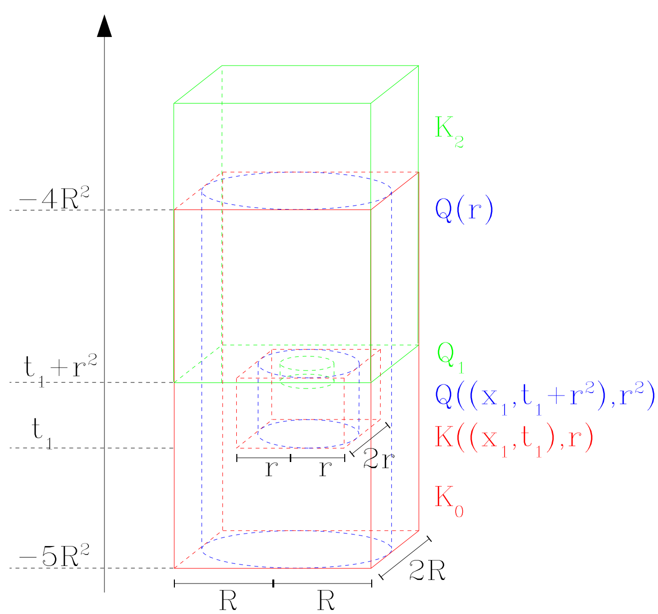

Abbildung 5. Übersicht der Quader und Zylinder

Eine ähnliche untere Schranke soll nun auf der Menge K_2 gefunden werden. Dazu untersuchen wir verschiedene Fälle, denn $K_2((x_1,t_1),r)$ muss nicht in K_0 liegen. Durch die entsprechende Wahl von r kann er nach oben aus K_0 ausbrechen. Das Gleiche gilt für den den Quader K_2 enthaltenden und wie folgt definierten Zylinder, der bei entsprechender Wahl von η zusätzlich seitlich aus K_0 ausbrechen kann,

$$Q_2 := Q\left(\left(x_1, t_1 + \frac{7}{8}r^2 + \max\left\{3\sqrt{n}, \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{4}{\eta}}\right\}^2 r^2\right), \underbrace{\max\left\{3\sqrt{n}, \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{4}{\eta}}\right\} r}_{=:\tilde{r}}\right).$$

Im ersten Fall nehmen wir an, dass Q_2 in $Q(4\sqrt{n}R)$ liegt. Nach Anwendung von Theorem 9 erhalten wir eine untere Schranke in $Q_2 \supset K_2$, durch

$$\bar{u}_m^\varepsilon \geq C_2 \cdot h,$$

mit $C_2 = C_2(C_1, n, \lambda, \Lambda, \eta) = C_2(n, \lambda, \Lambda, \xi) = C_2(n, \lambda, \Lambda)$. Gegebenenfalls ist das Theorem mehrfach anzuwenden. Wie in den Theoremen gefordert, muss r ein bestimmtes, von diversen Variablen abhängiges r_0 unterschreiten. Da aber $\alpha_0, \alpha_1, \varepsilon, \varepsilon_0, n, \lambda, \Lambda$ dort als feste, nur von η abhängige Konstanten gewählt werden können, genügt es, R in Abhängigkeit davon als klein genug vorauszusetzen, wie dies am Anfang angenommen wird.

Ist $\tilde{r}$ so groß, dass der Zylinder Q_2 nicht in $Q(4\sqrt{n}R)$ enthalten ist, so muss er über $t = 0$ nach oben hinausreichen (Zu beachten ist, dass ab einem Radius $\tilde{r} \geq \sqrt{5}R$ der Zylinder Q_2 in jedem Fall nach oben hinaus steht, während er seitlich frühestens ab einem Radius von $\tilde{r} \geq 3R$ übersteht.) In diesem Fall liefert der Beweis von Theorem 9

$$\bar{u}_m^\varepsilon \geq C_2 \cdot h \quad \text{in } K_2 \cap \{t < 0\}. \tag{15}$$

Wir setzen $\gamma := \frac{1}{2}C_2$ und dürfen ohne Einschränkung $0 < \gamma < 1$ annehmen. Dabei gilt $\gamma = \gamma(n, \lambda, \Lambda)$, weil $C_2(n, \lambda, \Lambda)$.

Es folgt eine weitere Fallunterscheidung bezüglich K_2. Nehme zuerst an, es gibt ein $K((x_1, t_1), r) \in G^*(\Gamma(h), \xi)$ mit einem über $t = 0$ hinausreichendem K_2. Zunächst lässt sich r dann nach unten abschätzen. Aus $t_1 + r^2 \leq -4R^2$ wegen $K \subset K_0$ und $t_1 + \left(1 + \frac{4}{\eta}\right) r^2 \geq 0$ aus K_2 folgt

$$\frac{4}{\eta} r^2 \geq 4R^2 \quad \text{und damit} \quad r \geq \sqrt{\eta}R.$$

Insbesondere gilt deshalb

$$\bar{u}_m^\varepsilon \geq C_2 h \text{ in } \left(B_{\sqrt{\eta}R}(x_1)\right) \times \{t = -4R^2\}.$$

Erneutes Anwenden von Theorem 9 auf Q mit $Q := Q((x_1, 0), 2R) \supset Q((0,0), R)$ ergibt

$$\bar{u}_m^\varepsilon \geq C_3 h \quad \text{in } Q(R),$$

mit $C_3 = C_3(C_2, n, \lambda, \Lambda, \eta) = C_3(n, \lambda, \Lambda)$. Wir schätzen nun $|\Gamma(h)| \leq |K_0| = 2^n R^{n+2}$ ab und erhalten für jedes feste $q > 0$ eine Konstante $c = c(C_3, q, n)$, so dass

$$|\Gamma(h)| \leq c \cdot \left(\frac{\inf_Q \bar{u}_m^\varepsilon}{h}\right)^q \cdot R^{n+2}$$

gilt.

Nehme im zweiten Fall an, dass alle zum jeweiligen $K((x_1, t_1), r)$ gehörigen K_2 in $t \leq 0$ und damit in $Q(4\sqrt{n}R)$ liegen. Zuerst betrachten wir die Fälle, in denen die beiden Annahmen

$$|\Gamma(h)| \leq \xi |K_0| \tag{16}$$

und

$$|\Gamma(\gamma h) \leq \xi^{-1/4} |\Gamma(h)| \tag{17}$$

erfüllt sind. Die anderen Fälle folgen später. Nach Lemma 12 erhalten wir dann

$$|Y_1| \geq \frac{1}{\xi} |\Gamma(h)|.$$

Aus der vorherigen Betrachtung (15) folgt, dass

$$\bar{u}_m^\varepsilon \geq 2\gamma h \text{ in} Y_2.$$

Y_1 und Y_2 sind wie in Definition 11 mit $\Gamma = \Gamma(h)$ definiert. Mit (17) bekommen wir

$$|Y_2 \cap K_0| \leq |\{\bar{u}_m^\varepsilon > \gamma h\} \cap K_0| = |\Gamma(\gamma h)| \leq \xi^{-1/4} |\Gamma(h)|.$$

Weiterhin ergibt sich nach Lemma 12

$$|Y_2| \geq \frac{1}{1+\eta} |Y_1|$$

und zusätzlich mit (16) oben

$$|Y_2| \geq \frac{1}{1+\eta} \frac{1}{\xi} |\Gamma(h)|.$$

Insgesamt schließen wir daraus

$$|Y_2 \backslash K_0| = |Y_2| - |Y_2 \cap K_0|$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{1+\eta}\frac{1}{\xi}|\Gamma(h)| - \xi^{-1/4}|\Gamma(h)| \\
&\geq \xi^{1/2}\frac{1}{\xi}|\Gamma(h)| - \xi^{-1/4}|\Gamma(h)| \\
&= \left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}|\Gamma(h)|,
\end{aligned}$$

da nach Definition $\eta \leq \xi^{-1/2} - 1$ gilt.

Wir betrachten nun den Quader K_2, der am weitesten nach oben, nach unten geht ja per Definition nicht, aus K_0 hinaus steht. Zu diesem wollen wir eine untere Schranke für das entsprechende r angeben. Beachte, dass auch ein seitliches Ausbrechen aus K_0 ebenfalls nach Definition nicht möglich ist. Für den über K_0 überstehenden Teil von K_2 ergibt sich

$$|K_2 \backslash K_0| \leq (2R)^n \cdot \left| -4R^2 - \left(t_1 + \left(1+\frac{4}{\eta}\right) r^2\right)\right|$$

und zusammen mit der letzten Abschätzung

$$\left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}|\Gamma(h)| \leq |Y_2 \backslash K_0| \leq (2R)^n \cdot \left| -4R^2 - \left(t_1 + \left(1+\frac{4}{\eta}\right) r^2\right)\right|$$

und damit

$$t_1 + r^2 + \frac{4}{\eta}r^2 \geq \left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}|\Gamma(h)|\,(2R)^{-n} - 4R^2.$$

Dabei ist $(2R)^n$ die Querschnittsfläche von K_0. Da aber $K((x_1,t_1),r)$ noch in K_0 liegt, gilt zusätzlich $t_1 + r^2 \leq -4R^2$ und es folgt zusammen

$$r^2 \geq \frac{\eta}{4}\left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}2^{-n}R^{-n}|\Gamma(h)|.$$

Weil $B_r(x_1) \times \{t = -4R^2\} \subset K_2$ ist, gilt auf dieser Kugel auch $\bar{u}_m^\varepsilon \geq \gamma h$. Theorem 9 liefert uns dann eine untere Schranke für $\bar{u}_m^\varepsilon$ in $Q(R)$, nämlich

$$\inf_{Q(R)} \bar{u}_m^\varepsilon \geq c(n,\lambda)\left(\frac{r}{R}\right)^\kappa \gamma h, \qquad \text{mit } \kappa = \kappa(n,\lambda,\Lambda).$$

Mit veränderter Konstante $c(n,\lambda)$ gilt auch auf einer größeren Menge

$$\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon \geq c(n,\lambda)\left(\frac{r}{R}\right)^\kappa \gamma h.$$

Diese Tatsache wird im schon angekündigten späteren Kettenargument wichtig.

Mit der vorhergehenden Abschätzung von r erhalten wir

$$\begin{aligned}
\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon &\geq c(n,\lambda)\left(\frac{\eta}{4}\left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}2^{-n}R^{-n}|\Gamma(h)|\right)^{\kappa/2} R^{-\kappa}\gamma h \\
&\geq c(n,\lambda,\gamma,\eta,\xi)\cdot\left(\frac{|\Gamma(h)|}{R^{n+2}}\right)^{\kappa/2}\cdot h.
\end{aligned}$$

Weil $\Gamma(h) \subset K_0$ und somit

$$|\Gamma(h)| \leq |K_0| = R^2 \cdot (2R)^n,$$

läßt sich weiter abschätzen

$$\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon \geq c(n,\lambda,\gamma,\eta,\xi)\cdot\left(\frac{|\Gamma(h)|}{R^{n+2}}\right)^{1/q}\cdot h,$$

auch mit $c = c(n,\lambda,\Lambda,\xi) = c(n,\lambda,\Lambda)$, wenn wir $0 < q = q(\kappa,\gamma,\xi) = q(n,\lambda,\Lambda) \leq \frac{2}{\kappa}$ so fixieren, dass

$$\gamma^q \geq \xi^{1/4}$$

gilt.

Für den Nachweis der unteren Schranke von $\bar{u}_m^\varepsilon$ auf $K((0,-R^2),R)$ hatten wir die Annahmen (16) und (17) getroffen, aus denen dann die Abschätzung folgte. Aufgrund dieser Implikation ist für jedes $h > k$ mindestens eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt

(i) $$|\Gamma(h)| < \xi^{1/4}|\Gamma(\gamma h)|,$$

(ii) $$|\Gamma(h)| \leq c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\left(\frac{\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon}{h}\right)^q \cdot R^{n+2},$$

(iii) $$|\Gamma(h)| > \xi \cdot |K_0|.$$

Daraus wollen wir eine allgemeine Abschätzung für $|\Gamma(h)|$ ohne Fallunterscheidung herleiten. Dazu sei $h_0 > k$ so gewählt, dass

$$|\Gamma(h_0)| \geq \xi |K_0| \quad \text{und} \quad \left|\Gamma\left(\frac{h_0}{\gamma}\right)\right| < \xi |K_0|$$

gelten. Mit Theorem 8 und Theorem 9 ergibt sich die Schranke

$$\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon \geq c_0 h_0.$$

Wir definieren

$$h_1 := \frac{\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon}{c_0}.$$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion wollen wir nun beweisen, dass

$$\left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^l}\right)\right| \leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \gamma^{lq} \cdot R^{n+2}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen der Inklusion $\Gamma(h_1) \subset K_0$ ist $|\Gamma(h_1)| \leq |K_0| = c(n) \cdot R^{n+2}$ und damit die Aussage mit geeigneter Wahl der Konstanten für $l = 0$ erfüllt (Induktionsanfang). Beim Induktionsschritt treten nur die Fälle (i) und (ii) aus der obigen Fallunterscheidung auf, weil $h_1 \geq h_0$ ist und deswegen für $l \geq 1$ die Abschätzung

$$\left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^l}\right)\right| \leq \left|\Gamma\left(\frac{h_0}{\gamma^l}\right)\right| \leq \left|\Gamma\left(\frac{h_0}{\gamma}\right)\right| < \xi |K_0|$$

gilt. Im Fall (i) ist der Induktionsschritt

$$\begin{aligned}\left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^{l+1}}\right)\right| &\leq \xi^{1/4} \left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^l}\right)\right| \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \xi^{1/4} \gamma^{lq} R^{n+2} \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \gamma^{(l+1)q} R^{n+2}.\end{aligned}$$

Im Fall (ii) erhalten wir direkt ohne Verwendung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^{l+1}}\right)\right| &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \left(\frac{\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon}{h_1}\right)^q \cdot \gamma^{(l+1)q} R^{n+2} \\ &= c \cdot c_0^q \cdot \gamma^{(l+1)q} \cdot R^{n+2} \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \gamma^{(l+1)q} \cdot R^{n+2}.\end{aligned}$$

Die Behauptung ist also in allen drei Fällen von $|\Gamma(h)|$ erfüllt. Sei nun $h > h_1$ beliebig und $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ derart fixiert, dass

$$\frac{h_1}{\gamma^l} \geq h > \frac{h_1}{\gamma^{l-1}}$$

gegeben ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\Gamma(h)| &\leq \left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^{l-1}}\right)\right| \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \gamma^{(l-1)q} \cdot R^{n+2} \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \gamma^{lq} \cdot R^{n+2} \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \left(\frac{h_1}{\gamma}\right)^q \cdot R^{n+2}.\end{aligned}$$

Für beliebiges $p > 0$ gilt

$$\int_{h_1}^\infty h^{p-1} \chi_{\{\bar{u}_m^\varepsilon > h\}} dh = \int_{h_1}^{\bar{u}_m^\varepsilon} h^{p-1} dh = \frac{1}{p} h^p \Big|_{h_1}^{\bar{u}_m^\varepsilon} = \frac{1}{p}\left((\bar{u}_m^\varepsilon)^p - h_1^p\right),$$

da $h_1 < h$. Mit der Abschätzung von $|\Gamma(h)|$ erhalten wir für alle $0 < p < q$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \int_{K((0,-5R^2),R)} ((\bar{u}_m^\varepsilon)^p - h_1^p) &= \int_{h_1}^\infty h^{p-1} |\Gamma(h)| dh \\ &\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot R^{n+2} \cdot h_1^q \cdot \int_{h_1}^\infty h^{p-1-q} dh\end{aligned}$$

$$= c(n,\lambda,\Lambda) \cdot R^{n+2} \cdot h_1^q \cdot \frac{1}{q-p} \cdot h_1^{p-q}$$
$$\leq c(n,\lambda,\Lambda,p,q) \cdot R^{n+2} \cdot h_1^p.$$

Daraus folgt

$$\int_{K((0,-5R^2),R)} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \leq c(n,\lambda,\Lambda,p,q) \cdot R^{n+2} \cdot h_1^p.$$

Mit fixiertem $p = p(n,\lambda,\Lambda)$ ergibt sich nach Definition von h_1

$$\begin{aligned}
\left(R^{-(n+2)} \int_{\Theta(R)} (u_m^\varepsilon)^p\right)^{1/p} &\leq \left(R^{-(n+2)} \int_{K((0,-5R^2),R)} (u_m^\varepsilon)^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(R^{-(n+2)} \int_{K((0,-5R^2),R)} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(R^{-(n+2)}\right)^{1/p} \cdot \left(c(n,\lambda,\Lambda,p,q) \cdot R^{n+2} \cdot h_1^p\right)^{1/p} \\
&\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot h_1 \\
&\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon \\
&\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \left(\inf_{K((0,-R^2),R)} u_m^\varepsilon + R^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(Q(4\sqrt{n}R))}\right) \\
&\leq c(n,\lambda,\Lambda) \cdot \left(\inf_{Q(R)} u_m^\varepsilon + R^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(Q(4\sqrt{n}R))}\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Behauptung für u_m^ε unter Einschränkung von R gezeigt, denn um Theorem 8 und 9 anwenden zu können, hatten wir $R \leq R_0$ klein genug angenommen. Für allgemeines R können wir die Behauptung durch Induktion zeigen. Der bisherige Beweis mit der Einschränkung an R ist dabei der Induktionsanfang. Im Induktionsschritt kommt nun das angekündigte "Quaderkettenargument" zum Einsatz. Wir nehmen an, dass

$$\left(\left(\frac{R}{2}\right)^{-(n+2)} \cdot \int_{K((0,-5\left(\frac{R}{2}\right)^2),\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p\right)^{1/p} \leq c_1 \cdot \inf_{K((0,-\left(\frac{R}{2}\right)^2),\frac{R}{2})} \bar{u}_m^\varepsilon$$

schon gezeigt ist.

Unter Berücksichtigung des vorher Gezeigten reicht es,

$$\left(R^{-(n+2)} \cdot \int_{K((0,-5R^2),R)} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p\right)^{1/p} \leq c(c_1,n,p) \cdot \inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon$$

zu zeigen. Die Konstante c muss dabei nicht gleich bleiben. Sie darf sich um einem von n und p abhängigen Faktor verändern.

Wie in der Calderon-Zygmund Zerlegung zerlegen wir den Quader $K((0,-R^2),R)$ in 2^{n+2} kleinere $K(X,\frac{R}{2})$ Quader mit X als dem zugehörigen Mittelpunkt (x,t). Wir wählen ein $\Delta_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ so, dass der um dieses Δ_i verschobene Quader noch einen bestimmten Anteil des nicht verschobenen Qauders überdeckt, d.h.

$$\left|K\left(X,\frac{R}{2}\right) \cap K\left(X+\Delta_i,\frac{R}{2}\right)\right| \geq \delta \left|K\left(X,\frac{R}{2}\right)\right|,$$

mit einem $\delta \in (0,1)$. Außerdem gilt nach wie vor

$$|K(X,R)| = c(n) \cdot R^{n+2}.$$

Zusammen mit der getroffenen Annahme erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\inf_{K(X,\frac{R}{2})} \bar{u}_m^\varepsilon &\geq \frac{1}{c_2(c_1,n,p)} \left(\frac{1}{\left|K(X,\frac{R}{2})\right|} \cdot \int_{K(X-(0,R^2),\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p\right)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{c_2} \left(\frac{\left|K\left(X-(0,R^2),\frac{R}{2}\right) \cap K\left(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2}\right)\right|}{\left|K\left(X,\frac{R}{2}\right)\right|}\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \left(\frac{1}{|K(0,\frac{R}{2}) \cap K(\Delta_1,\frac{R}{2})|} \cdot \int_{K(X-(0,R^2),\frac{R}{2})\cap K(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \right)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{c_2}\delta^{1/p} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{|K(X-(0,R^2),\frac{R}{2}) \cap K(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2})|}{|K(0,\frac{R}{2}) \cap K(\Delta_1,\frac{R}{2})|}}_{=1} \cdot \\
&\qquad \cdot \inf_{K(X-(0,R^2),\frac{R}{2})\cap K(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \Bigg)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{c_2}\delta^{1/p} \cdot \inf_{K(X-(0,R^2),\frac{R}{2})\cap K(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2})} \bar{u}_m^\varepsilon \\
&\geq \frac{1}{c_2}\delta^{1/p} \cdot \inf_{K(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2})} \bar{u}_m^\varepsilon \\
&\geq \frac{1}{c_2^2}\delta^{1/p} \left(\frac{1}{|K(X,\frac{R}{2})|} \cdot \int_{K(X-(0,2R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \right)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{c_2^3}\delta^{2/p} \left(\frac{1}{|K(X,\frac{R}{2})|} \cdot \int_{K(X-(0,3R^2)+\Delta_1+\Delta_2,\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \right)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{c_2^4}\delta^{3/p} \left(\frac{1}{|K(X,\frac{R}{2})|} \cdot \int_{K(X-(0,4R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \right)^{1/p} \\
&\geq \frac{1}{c_2^5}\delta^{4/p} \left(\frac{1}{|K(X,\frac{R}{2})|} \cdot \int_{K(X-(0,5R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4,\frac{R}{2})} (\bar{u}_m^\varepsilon)^p \right)^{1/p} .
\end{aligned}
$$

Die jeweils größtmögliche Verschiebung, die wir mit einem Δ_i erreichen, beträgt fast $\frac{R}{2}$ bezüglich der x-Koordinate und fast $\frac{R^2}{4}$ bezüglich der t-Koordinate. Von einem beliebigen Quader $K(X,\frac{R}{2})$ aus der Zerlegung von $K((0,-R^2),R)$ ausgehend, können wir mit $K(X-(0,3R^2)+\Delta_1+\Delta_2,\frac{R}{2}), K(X-(0,4R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,\frac{R}{2}), K(X-(0,5R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4,\frac{R}{2})$ jeden beliebigen Quader der Zerlegung von $K((0,-5R^2),R)$ erreichen.

Sei $K(X,\frac{R}{2})$ so gewählt, dass

$$
\inf_{K((0,-R^2),R)} \bar{u}_m^\varepsilon = \inf_{K(X,\frac{R}{2})} \bar{u}_m^\varepsilon
$$

gilt. Durch Addieren der gefundenen Abschätzungen (oder durch Betrachtung des maximalen der auftretenden L^p-Integrale) folgt die Induktionsbehauptung, in der C auch von R_0 abhängt, für beliebige Radien $R > 0$. Somit folgt das Theorem für u_m^ε und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung auch für u_m.

$\square$

KAPITEL 5

Hölderabschätzung

Lemma 14. *Seien ω und σ wachsende nichtnegative Funktionen auf dem Intervall $(0, R_0]$. Gibt es positive Konstanten α, δ, τ mit $\tau < 1$ und $\delta < \alpha$, so dass*

$$r^{-\delta}\sigma(r) \leq s^{-\delta}\sigma(s) \text{ für alle } 0 < s \leq r \leq R_0$$

und

$$\omega(\tau r) \leq \tau^{\alpha}\omega(r) + \sigma(r) \text{ für } 0 < r \leq R_0$$

gelten, dann folgt

$$\omega(r) \leq c(\alpha, \delta, \tau) \cdot \left(\left(\frac{r}{R_0} \right)^{\alpha} \omega(R_0) + \sigma(r) \right).$$

Beweis: Im Falle $r \geq \tau R_0$ gilt die Behauptung mit $c = \tau^{-\alpha}$.
Im anderen Fall wählen wir $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\tau^{k+1}R_0 \leq r < \tau^k R_0 \tag{18}$$

erfüllt ist. Für $j = 0, \ldots, k-1$ gilt

$$\tau^j R_0 > \tau^k R_0,$$

woraus folgt, dass

$$\left(\tau^j R_0\right)^{-\delta} \sigma\left(\tau^j R_0\right) \leq \left(\tau^k R_0\right)^{-\delta} \sigma\left(\tau^k R_0\right),$$

$$\sigma\left(\tau^j R_0\right) \leq \tau^{(j-k)\delta}\sigma\left(\tau^k R_0\right). \tag{19}$$

Nach vollständiger Induktion erhalten wir, dass

$$\omega(\tau^k r) \leq \tau^{k\alpha}\omega(r) + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{\alpha(k-1-j)}\sigma(\tau^j r)$$

gilt. Induktionsanfang ist dabei die Voraussetzung

$$\omega(\tau r) \leq \tau^{\alpha}\omega(r) + \sigma(r)$$

mit $k = 1$. Der Induktionsschritt ergibt

$$\begin{aligned}
\omega(\tau^{k+1}r) &= \omega(\tau^k \cdot \tau r) \\
&\leq \tau^{k\alpha}\omega(\tau r) + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{\alpha(k-1-j)}\sigma(\tau^j \tau r), \quad \text{nach Annahme,} \\
&\leq \tau^{k\alpha}\left(\tau^{\alpha}\omega(r) + \sigma(r)\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{\alpha(k-1-j)}\sigma(\tau^{j+1} r), \quad \text{nach Vor.,} \\
&= \tau^{(k+1)\alpha}\omega(r) + \tau^{k\alpha}\sigma(r) + \sum_{j=1}^{k} \tau^{\alpha(k-j)}\sigma(\tau^j r) \\
&= \tau^{(k+1)\alpha}\omega(r) + \sum_{j=0}^{k} \tau^{\alpha(k-j)}\sigma(\tau^j r).
\end{aligned}$$

Wir können nun folgendermaßen weiter abschätzen

$$\omega(\tau^k R_0) \leq \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{\alpha(k-1-j)}\sigma(\tau^j R_0)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{\alpha(k-1-j)+\delta(j-k)}\sigma(\tau^k R_0), \qquad \text{nach (19)},\\
&= \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{(k-1-j)(\alpha-\delta)}\tau^{-\delta}\sigma(\tau^k R_0)\\
&= \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \tau^{(\alpha-\delta)i}\tau^{-\delta}\sigma(\tau^k R_0)\\
&\le \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \tau^{-\delta}\sigma(\tau^k R_0) \qquad \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \tau^{(\alpha-\delta)i}}_{\text{geo. Reihe, da } \tau^{\alpha-\delta}<1}\\
&= \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \frac{1}{\tau^\delta}\sigma(\tau^k R_0)\frac{1}{1-\tau^{\alpha-\delta}}\\
&= \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \frac{\sigma(\tau^k R_0)}{\tau^\delta - \tau^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Wegen (18) gilt

$$\sigma(\tau^k R_0) \le \sigma\left(\frac{r}{\tau}\right)$$

und

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{r}{\tau}\right)^{-\delta}\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right) &\le r^{-\delta}\sigma(r),\\
\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right) &< \tau^{-\delta}\sigma(r),
\end{aligned}
$$

weil $\frac{r}{\tau} > r$ und wegen $\tau < 1$ nach Voraussetzung. Daraus und nochmals nach (18) mit $r < \tau^k R_0$ und $\tau^k \le \frac{r}{R_0}\frac{1}{\tau}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\omega(r) &\le \omega(\tau^k R_0)\\
&\le \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \frac{1}{\tau^\delta - \tau^\alpha}\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right)\\
&\le \left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\tau}\right)^\alpha \omega(R_0) + \frac{\tau^{-\delta}}{\tau^\delta - \tau^\alpha}\sigma(r)\\
&\le \max\left\{\left(\frac{1}{\tau}\right)^\alpha, \frac{\tau^{-\delta}}{\tau^\delta-\tau^\alpha}\right\}\left(\left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha \omega(R_0) + \sigma(r)\right).
\end{aligned}
$$

Mit $c = \max\left\{\left(\frac{1}{\tau}\right)^\alpha, \frac{\tau^{-\delta}}{\tau^\delta-\tau^\alpha}\right\}$ ist das die Behauptung.

□

Für die Anwendung des Lemmas 14 ist es hilfreich, sich folgendes zu überlegen.

BEMERKUNG 15. *Seien ω und σ wachsend. Gibt es positives K und β mit $\beta > \delta$, so dass*

$$\omega(\tau r) \le K\tau^\beta \omega(r) + \sigma(r)$$

für kleine $\tau > 0$ gilt, so folgt

$$\omega(\tau r) \le \tau^\alpha \omega(r) + \sigma(r)$$

für $\alpha \in (\delta, \beta)$ und τ so klein, dass $K\tau^\beta \le \tau^\alpha$ und die Aussage des Lemmas 14 gelten.

BEMERKUNG 16. *Gibt es $\tau, \varepsilon \in (0,1)$, so dass*

$$\omega(\tau r) \le \varepsilon\omega(r) + \sigma(r)$$

gilt, dann folgt

$$\omega(\tau r) \le \tau^\alpha \omega(r) + \sigma(r)$$

mit $\alpha = \log_\tau \varepsilon = \frac{\log \varepsilon}{\log \tau}$.

Bemerkung 17. *Erfüllt Ω eine äußere Kegelbedingung, siehe* [**Gilb**, Kap. 8.10] *vor Theorem 8.27, so finden wir $A<1$ wie in Theorem 18 beschrieben.*

Löst u

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega_T, \\ u = \varphi & \text{auf } P\Omega_T, \end{cases}$$

mit $\varphi \in C^{0,\beta}$, so können wir im folgenden Theorem $\sigma(r) = c \cdot r^\beta$ wählen, falls wir annehmen, dass $\beta > 0$ klein genug ist. In diesem Falle ist u für $(x,t) \in P\Omega_T$ hölderstetig. Mit Hilfe von [**Gilb**, Theorem 8.29] *und inneren Krylov-Safonov Abschätzungen (den dem Theorem 18 entsprechenden Abschätzungen) folgt dann die globale Hölderstetigkeit.*

Theorem 18. *Sei $Lu = f$ in Ω_T. Gibt es positive Konstanten $A < 1$ und $R > 0$ für $(x_0, t_0) \in P\Omega_T$, so dass*

$$\frac{|Q((x_0,t_0),r) \cap \Omega_T|}{|Q((x_0,t_0),r)|} \le A$$

für $0 < r \le R$ erfüllt ist, dann gibt es Konstanten $C = C(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}, A, p) > 0$ und $0 < \alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}, A, p) < 1$, p wie in Theorem 13, so dass

$$\operatorname*{osc}_{\Omega[r]} u \le C \left[\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \operatorname*{osc}_{\Omega[R]} u + r^{n/(n+1)} \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])} + \sigma(r) \right]$$

gilt, sofern $\sigma(r)$ eine wachsende und $r^{-\delta}\sigma(r)$ eine fallende Funktion von $r > 0$ mit $\delta < \alpha$ und $\operatorname*{osc}_{P\Omega[4r]} u \le \sigma(r)$ ist.

Beweis: Sei ohne Einschränkung angenommen, dass $0 < r \le \frac{R}{4}$ gelte. Wir definieren

$$M_4 := \sup_{\Omega[4r]} u, \quad m_4 := \inf_{\Omega[4r]} u,$$

$$M_1 := \sup_{\Omega[r]} u, \quad m_1 := \inf_{\Omega[r]} u$$

und

$$M := \sup_{P\Omega[4r]}, \quad m := \inf_{P\Omega[4r]} u.$$

Sei $Q(r) := Q((x_0,t_0),r)$ für $(x_0,t_0) \in P\Omega_T$. In $\Omega[4r]$ gilt

$$M_4 - u \ge 0, \quad u - m_4 \ge 0.$$

Mit $L_0 := -\frac{\partial}{\partial t} + a^{ij}D_{ij} + b^i D_i$ gilt in Ω_T

$$L_0(M_4 - u) = -f + du, \quad L_0(u - m_4) = f - du.$$

Mit Anwendung der schwachen Harnackungleichung auf $(M_4 - u)$ und $(M_4 - u)_{\tilde m}$ wie dort definiert erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(r^{-n-2} \int_{\Theta(r)} (M_4 - u)^p_{\tilde m}\, dX \right)^{1/p} &\le C \left(\inf_{Q(r)} (M_4 - u)_{\tilde m} + r^{n/(n+1)} \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])} \right) \\ &\le C \left(M_4 - M_1 + r^{n/(n+1)} \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])} \right) \end{aligned}$$

mit $\tilde m = \inf_{P\Omega[4r]}(M_4 - u) = M_4 - M$. Da Ω_T Produktstruktur hat, gilt $|\Theta(r) \backslash \Omega_T| \ge |Q(r) \backslash \Omega_T|$. Wir benutzen, dass $(M_4 - u)_{\tilde m} = (M_4 - M)$ ausserhalb von Ω_T gilt und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|B_1(x_0,t_0)|} \cdot r^{-n-2} \int_{\Theta(r)} (M_4 - u)^p_{\tilde m}\, dX \right)^{1/p} &\ge \left(\frac{1}{|B_1(x_0,t_0)|} \cdot r^{-n-2} \int_{\Theta(r) \backslash \Omega_T} (M_4 - M)^p\, dX \right)^{1/p} \\ &\ge \left(\frac{|Q(r) \backslash \Omega_T|}{|Q(r)|} \cdot (M_4 - M)^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\left(1 - \frac{|Q(r) \cap \Omega_T|}{|Q(r)|} \right) (M_4 - M)^p \right)^{1/p} \\ &\ge (1 - A)^{1/p} (M_4 - M). \end{aligned}$$

Es gilt die Ungleichung

$$(1-A)^{1/p}(M_4-M) \leq C\left(M_4-M_1+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}\right). \tag{20}$$

Analog folgt für $(u-m_4)$ die Abschätzung

$$(1-A)^{1/p}(m_1-m_4) \leq C\left(m_1-m_4+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}\right). \tag{21}$$

Durch Addition von (20) und (21) erhalten wir

$$(1-A)^{1/p}(M_4-M+m-m_4) \leq C\left(M_4-M_1+m_1-m_4+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}\right)$$

und nach Umformung

$$\begin{aligned} M_1-m_1 &\leq \left(M_4-m_4+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}\right)-\frac{1}{C}(1-A)^{1/p}\,(M_4-m_4+m-M) \\ &\leq \left(1-\frac{1}{C}(1-A)^{1/p}\right)(M_4-m_4)+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}+\frac{1}{C}(1-A)^{1/p}\,(M-m). \end{aligned}$$

Sei

$$\omega(r) := \operatorname*{osc}_{\Omega[r]} u.$$

Dann ist

$$\omega(r) \leq \left(1-\frac{1}{C}(1-A)^{1/p}\right)\omega(4r)+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}+\frac{1}{C}(1-A)^{1/p}\operatorname*{osc}_{P\Omega[4r]} u.$$

Sei $0<\alpha=\alpha(A,p,n,\lambda,\Lambda,\|b\|_{L^\infty})<1$ so gewählt, so dass

$$1-\frac{1}{c}(1-A)^{1/p}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}$$

gilt. Für $0<r\leq R$ gilt dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{1}{4}r\right) &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\omega(r)+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}+\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\right)\operatorname*{osc}_{P\Omega[4r]} u \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\omega(r)+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}+\sigma(r) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 14 ergibt sich

$$\omega(r) \leq C\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}\omega(R)+r^{n/(n+1)}\,\|f-du\|_{L^{n+1}(\Omega[4r])}+\sigma(r)\right].$$

□

KAPITEL 6

Anhang

Höldersche Ungleichung: Seien $1 \le p \le q \le \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt für $u \in L^p(U)$ und $v \in L^q(U)$ die Ungleichung

$$\int_U |uv|\,dx \le \|u\|_{L^p(U)} \cdot \|v\|_{L^q(U)}.$$

Youngsche Ungleichung: Seien $1 < p \le q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{für } a, b > 0.$$

Youngsche Ungleichung mit ε: Seien $1 < p \le q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$ab \le \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q \qquad \text{für } a, b, \varepsilon > 0.$$

Im Fall $p = q = 2$ erhalten wir die Cauchysche Ungleichung bzw. die Cauchysche Ungleichung mit ε.

Cauchysche Ungleichung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Cauchysche Ungleichung mit ε: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Cauchy-Schwarz Ungleichung: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$|x \cdot y| \le |x||y|.$$

Regel von de l'Hospital (einfachste Version): Auf dem Intervall $I = (a, b)$ seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ und es existiere der Limes

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Dann gelten die folgenden Regeln von de l'Hospital:

1) Falls $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} f(x) = 0$ gilt, so ist $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ und

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

2) Falls $\lim_{x \to b} g(x) = \pm\infty$ gilt, so ist $g(x) \neq 0$ für $x \ge x_0$ mit $x_0 \in I$ und

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Satz von Fubini: Seien ϕ_1 und ϕ_2 Maße auf $\mathbb{R}^{n_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_2}$, und sei $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^{n_1 + n_2}$. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Dann gilt:

(i) Für ϕ_1-fast alle x_1 ist $f(x_1, .) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$.
(ii) Die (für ϕ_1-fast alle x_1 definierte) Funktion

$$F : x_1 \longmapsto \int f(x_1, .)\, d\phi_2$$

ist in $\mathcal{L}^1(\phi_1)$ und

$$\int F\, d\phi_1 = \int f\, d\phi.$$

Die Rollen von ϕ_1 und ϕ_2 lassen sich dabei vertauschen.
In der Kurzform lautet die Aussage

$$\int f\, d\phi = \int \left(\int f\, d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int f\, d\phi_1 \right) d\phi_2,$$

falls die <u>linke</u> Seite existiert.

Transformationssatz: Sei $h : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

(i) $h(G)$ ist Lebesgue-messbar.
(ii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(h(G), \mu_n)$, so ist $(f \circ h)|\det Dh| \in \mathcal{L}^1(G, \mu_n)$ und

$$\int_{h(G)} f\, d\mu_n = \int_G (f \circ h)|\det Dh|\, d\mu_n.$$

Literaturverzeichnis

[Baya] P. Bayard O. Schnürer. *Entire spacelike hypersurfaces of constant Gauß curvature in Minkowski space*. erscheint in J. reine angew. Math., `arXiv:math/0612659`

[Bren] S. Brendle. *Convergence of the Yamabe flow in dimension 6 and higher*. Invent. math. **170** (2007), 541-576.

[Eva1] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2002

[Eva2] L. C. Evans: *Classical solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellmann equation for uniformly elliptic operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 245-255.

[Frae] L. E. Fraenkel. *Introduction to Maximum Principles and Symmetry in Elliptic Problems.* Cambridge University Press, 2000

[Gilb] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1977

[Hami] R. S. Hamilton. *The Ricci flow on surfaces*. Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., vol. 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 237–262.

[Hess] P. Hess. *Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity*. Longman Scientific & Technical, 1991

[Jost] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer, 2002

[Kry1] N. V. Krylov. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*. American Mathematical Society, 1996

[Kry2] N. V. Krylov. *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*. D. Reidel Publishing Co., 1987

[Lee] J. W. Lee, R. B. Guenther. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Prentice Hall Inc., 1988

[Leun] A. W. Leung. *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, 1989

[Lieb] G. M. Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific, 1996

[Prot] M. H. Protter, C. B. Morrey. *Modern Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1972

[Sch1] O. C. Schnürer, F. Schulze, M. Simon. *Stability of Euclidean Space under Ricci Flow*. erscheint in Comm. Anal. Geom., `arXiv:0706.0421`

[Sch2] O. C. Schnürer. *Partielle Differentialgleichungen 2*. Vorlesungsskript FU Berlin, 2006.

[Tayl] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations III*. Springer, 1996.

[Trud] N. S. Trudinger, J. I. E. Urbas. *The Dirichlet problem for the equation of prescribed Gauss curvature*. Bull. Austral. Math. Soc. **28** (1983), no. 2, 217–231.

[Tso] K. Tso. *Deforming a hypersurface by its Gauss-Kronecker curvature*. Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 6, 867–882.

[Wu] L.-F. Wu. *The Ricci flow on complete* $\mathbf{R}^2$. Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 439–472.

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Anja Grabow, versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und mich fremder Hilfe nicht bedient habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß veröffentlichtem oder unveröffentlichtem Schrifttum entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Berlin, 06.02.2008