Regularität minimaler Subgraphen in R^8

Diplomarbeit von
Oliver C. Schnürer

Betreuer:
Prof. Dr. C. Gerhardt

September/November 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Definitionen **5**

3 Das Blow-up-Verfahren und Darstellbarkeit als Subgraph **8**

4 Regularitätssatz **11**

5 Anwendungen **14**

6 Vorgeschriebene mittlere Krümmung **16**

7 Zitierte Resultate **30**

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Regularität fast minimaler Subgraphen in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seien eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine meßbare Menge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vorgegeben. E sei fast minimal in Ω, d. h. es gelten Abschätzungen der Form

$$\int\limits_{B_\rho(x)} |D\chi_E| \leq \int\limits_{B_\rho(x)} |D\chi_F| + K\rho^{n+2\lambda}$$

für Vergleichsmengen F mit $E \vartriangle F \Subset B_\rho(x)$.

Unter diesen Voraussetzungen besteht der maßtheoretische Rand $\partial E \cap \Omega$ aus dem relativ offenen reduzierten Rand $\partial^\star E \cap \Omega$ und einer Singularitätenmenge $(\partial E \setminus \partial^\star E) \cap \Omega$. Die Regularitätsresultate von [6] besagen nun

$$\partial^\star E \cap \Omega \text{ ist } C^{1,\lambda} - \text{Mannigfaltigkeit}$$

und

$$H^s((\partial E \setminus \partial^\star E) \cap \Omega) = 0 \text{ für } s > n-7.$$

Besonders interessant ist der Fall $n \leq 6$, hier stimmen nämlich maßtheoretischer und reduzierter Rand überein, da $H^0((\partial E \setminus \partial^\star E) \cap \Omega) = 0$ gilt. Der maßtheoretische Rand ist damit eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $C^{1,\lambda}$.

Dieses Resultat beruht insbesondere auf der Tatsache, daß es in $\mathbb{R}^7$ keine minimalen Kegel gibt außer der leeren Menge, $\mathbb{R}^7$ oder Halbräumen. In $\mathbb{R}^8$ sind nicht mehr alle minimalen Kegel von der erwähnten Art, und man findet fast minimale Mengen in $\mathbb{R}^8$, deren maßtheoretischer Rand ∂C keine $C^{1,\lambda}$-Mannigfaltigkeit ist.

In dieser Arbeit wird nun ein Regularitätssatz bewiesen, der besagt, daß minimale Kegel $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die zusätzlich die Eigenschaft haben, als Subgraphen darstellbar zu sein, auch noch für $n = 7$, d. h. für $E \subset \mathbb{R}^8$, Halbräume (oder $\emptyset$, $\mathbb{R}^8$) sind.

Dieser Regularitätssatz ermöglicht es nun auch, Rückschlüsse auf die Regularität des maßtheoretischen Randes gewisser fast minimaler Mengen $E \subset \mathbb{R}^8$ zu ziehen. Ist $E \subset \mathbb{R}^8$ fast minimal und als Subgraph darstellbar, so erhält man unmittelbar aus dem Regularitätssatz, daß auch in diesem Fall der maßtheoretische Rand ∂E eine $C^{1,\lambda}$-Mannigfaltigkeit ist. Für $E \subset \mathbb{R}^9$ gilt ein analoges Resultat nicht mehr, ein Gegenbeispiel ist angegeben.

Anwendbar ist der Regularitätssatz auch, wenn man – in einer zu einer Tubenumgebung von S^n homöomorphen Menge – Hyperflächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung sucht, die homöomorph zu S^n sind. Nach [1] kann man solche Hyperflächen insbesondere für $n \leq 6$ finden. Auch auf diese Fragestellung kann man den Regularitätssatz anwenden und erhält auch noch für $n = 7$ Hyperflächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung homöomorph zu S^n.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Kapitel 2 skizziert verschiedene Möglichkeiten, den Rand einer meßbaren Menge zu definieren. Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Blow-up-Verfahren, mit dessen Hilfe man aus fast minimalen Mengen minimale Kegel bekommt, weiterhin wird gezeigt, daß die aus fast minimalen Mengen – die zugleich Subgraphen sind – entstehenden Kegel wieder Subgraphen sind. In Kapitel 4 wird gezeigt, daß als Subgraph darstellbare minimale Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ für $n \leq 7$ Halbräume sind. Kapitel 5 zeigt, wie diese Resultate nun angewandt werden können, um nachzuweisen, daß der Rand eines fast minimalen Subgraphen eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Es wird auch ein Beispiel angegeben, das zeigt, daß dieses Resultat bezüglich der Dimension optimal ist. Wie man mit diesen Resultaten auch noch in 8-dimensionalen Mannigfaltigkeiten Hyperflächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung wie in [1] erhält, wird schließlich in Kapitel 6 beschrieben. In Kapitel 7 werden einige zitierte Resultate, insbesondere aus [4] und [5], aufgeführt.

2 Definitionen

Bezeichnung 2.1 Die charakteristische Funktion einer Menge M wird im folgenden mit χ_M bezeichnet. Treten Koordinaten in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf, so wird mit (x, t) der Punkt $(x^1, \ldots, x^n, t)$ bezeichnet. Auch $x = (\hat{x}, x^{n+1})$ faßt die ersten n Koordinaten zu $\hat{x}$ zusammen. Setze stets $n \geq 2$ voraus.

Definition 2.2 (Subgraph) *Sei $\varphi : A \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Definiere den Subgraphen* $\operatorname{sub}\varphi$ *der Funktion φ durch*

$$\operatorname{sub}\varphi := \{(x, t) \in A \times \mathbb{R} : t < \varphi(x)\}$$

Definition 2.3 (fast minimal) *Eine meßbare Menge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt fast minimal in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, falls für ein λ mit $0 < \lambda < 1$ und für alle Mengen $A \Subset \Omega$ Zahlen R und K mit $0 < R < \operatorname{dist}(A, \complement\Omega)$ und $K \geq 0$ existieren, so daß*

$$\int\limits_{B_\rho(x)} |D\chi_E| \leq \int\limits_{B_\rho(x)} |D\chi_F| + K\rho^{n+2\lambda}$$

für alle $x \in A$, $0 < \rho < R$ und $E \bigtriangleup F \Subset B_\rho(x)$ gilt.

E heißt (lokal) minimal, falls $K = 0$ gewählt werden kann.

Definition 2.4 (Topologischer Rand) *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig.*

$$\partial^{top} E := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : B_r(x) \cap E \neq \emptyset \quad \text{und} \quad B_r(x) \cap \complement E \neq \emptyset \quad \forall r > 0\}$$

Die folgenden Definitionen entsprechen [4, S. 43]:

Da bei meßbaren Mengen die Definition des Randes nur von der L^1-Äquivalenzklasse abhängen soll, ersetzt man die topologische Randdefinition durch:

Definition 2.5 (Maßtheoretischer Rand) *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ meßbar.*

$$\partial E := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < |B_r(x) \cap E| < |B_r(x)| \quad \forall r > 0\}$$

Definiere weiterhin das maßtheoretische Innere und das maßtheoretische Komplement durch

$$E_\mu := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists r > 0 : |B_r(x) \cap E| = |B_r(x)|\}$$

und

$$\complement_\mu E := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists r > 0 : 0 = |B_r(x) \cap E|\}.$$

Beachte, daß damit E_μ und $\complement_\mu E$ offene Mengen sind. $\mathbb{R}^{n+1}$ ist disjunkte Vereinigung von E_μ, $\complement_\mu E$ und ∂E. Schreibe später auch E oder $\complement E$ für E_μ oder $\complement_\mu E$. Dies ist im Fall $|\partial E| = 0$ sinnvoll, denn in diesem Fall liegen E und E_μ sowie $\complement E$ und $\complement_\mu E$ in der gleichen L^1-Äquivalenzklasse.

Definition 2.6 (Reduzierter Rand) *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Caccioppolimenge, d. h. es gilt $\int\limits_\Omega |D\chi_E| < \infty$ für alle offenen Mengen $\Omega \Subset \mathbb{R}^{n+1}$. Der reduzierte Rand $\partial^\star E$ besteht aus den Punkten $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, für die*

$$\int\limits_{B_\rho(x)} |D\chi_E| > 0 \quad \forall \rho > 0$$

gilt, und der Limes

$$\lim_{\rho \to 0} \nu_\rho(x) = \nu(x)$$

existiert, wobei

$$\nu_\rho(x) := \frac{\int\limits_{B_\rho(x)} D\chi_E}{\int\limits_{B_\rho(x)} |D\chi_E|}$$

und zusätzlich

$$|\nu(x)| = 1$$

gilt. $\nu(x)$ heißt innere Normale an E in x.

Eine andere Methode, bei einer meßbaren Menge den Rand zu definieren, besteht in der Verwendung der Dichte:

Definition 2.7 (Dichter Rand, vgl. [7, S. 249]) *Definiere*

$$\partial_M E := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \limsup_{\rho \to 0} \frac{\int\limits_{B_\rho(x)} \chi_E}{\int\limits_{B_\rho(x)} 1} > 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{\rho \to 0} \frac{\int\limits_{B_\rho(x)} \chi_E}{\int\limits_{B_\rho(x)} 1} < 1 \right\}$$

Einschränkender könnte man auch lim inf und lim sup vertauschen. Wie man aber analog zu Lemma 3.1 zeigen könnte, hätte man auch in diesem Fall Übereinstimmung von dichtem und maßtheoretischem Rand, solange die betrachteten Mengen fast minimale Caccioppolimengen sind.

Definition 2.8 (Singularität) *$x \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt Singularität der meßbaren Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, falls $x \in \partial M \setminus \partial^\star M$. $\partial M \setminus \partial^\star M$ heißt Singularitätenmenge der Menge M. Man spricht auch von der Singularitätenmenge der Menge ∂M.*

Nicht singuläre Randpunkte heißen regulär.

Definition 2.9 (Kegel) *$C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt Kegel mit Spitze x, falls*

$$y \in C \Rightarrow x + \tau(y - x) \in C \text{ für } 0 < \tau.$$

Falls $C \neq \emptyset$ und $C \neq \mathbb{R}^{n+1}$, so heißt C nichttrivialer Kegel.

3 Das Blow-up-Verfahren und Darstellbarkeit als Subgraph

Lemma 3.1 *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ fast minimale Caccioppolimenge. Dann stimmen in Ω dichter und maßtheoretischer Rand von E überein.*

Beweis: (Analog zu [4, Theorem 9.3])
Stets gilt $\partial_M E \subset \partial E$.

Nehme an, es existiert $x_0 \in (\partial E \setminus \partial_M E) \cap \Omega$. Nehme weiter o. E. $x_0 = 0$, $B_1(0) \subset \Omega$ an. Definiere $E_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : tx \in E\}$ für $t > 0$. Da nach Annahme $x_0 \notin \partial_M E \cap \Omega$, gilt für eine beliebige Folge $t_i \to 0$, $i \to \infty$, $t_i > 0$, daß $(\omega_{n+1} t_i^{n+1})^{-1} \int\limits_{B_{t_i}} \chi_E$ gegen 0 oder 1 konvergiert für $i \to \infty$: Falls beispielsweise $\liminf\limits_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x_0) \cap E|}{|B_\rho(x_0)|} < 1$ verletzt ist, gilt

$$1 \leq \liminf_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x_0) \cap E|}{|B_\rho(x_0)|} \leq \limsup_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x_0) \cap E|}{|B_\rho(x)_0|} \leq 1,$$

d. h. der Grenzwert dieser Folge existiert für $\rho \to 0$. Nehme o. E. an, daß $\liminf\limits_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x_0) \cap E|}{|B_\rho(x_0)|} < 1$ verletzt ist, also daß $\frac{|B_\rho(x_0) \cap E|}{|B_\rho(x_0)|}$ gegen 1 konvergiert. Daraus ergibt sich $\omega_{n+1}^{-1} \int\limits_{B_1} \chi_{E_{t_i}} \to 1$ für $i \to \infty$. Also gilt $E_{t_i} \to B_1$ in $L^1(B_1)$.

Dies liefert einen Widerspruch, wenn man noch nachweist, daß eine Teilfolge in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegen eine Menge C mit $\int\limits_{B_{\frac{1}{2}}} |D\chi_C| > 0 = \int\limits_{B_{\frac{1}{2}}} |D\chi_{B_1}|$ konvergiert:

Nach [5, S. 137, vgl. 7.15] gibt es eine Teilfolge, o. E. t_i, so daß $E_{t_i} \to C$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ konvergiert, und C minimaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Spitze 0 ist. Beachte, daß auch die reskalierten Mengen E_{t_i} für $0 < t_i \leq 1$ fast minimal sind:

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_\rho} |D\chi_{E_t}| &= t^{-n} \int\limits_{B_{\rho t}} |D\chi_E| \\ &\leq t^{-n} \left(\int\limits_{B_{\rho t}} |D\chi_F| + K(\rho t)^{n+2\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{B_\rho} |D\chi_{F_t}| + (Kt^{2\lambda})\rho^{n+2\lambda}$$

F ist dabei eine Vergleichsmenge wie in der Definition beschrieben, F_t wird analog zu E_t definiert.

Und weiter nach [5, S. 118, vgl. 7.10] erhält man

$$\rho^n \left(\omega_n - \frac{n}{\lambda} K t^{2\lambda} \rho^{2\lambda}\right) \leq \int\limits_{B_\rho} |D\chi_{E_t}| = t^{-n} \int\limits_{B_{\rho t}} |D\chi_E|.$$

Nach [5, S. 139, vgl. 7.16] gilt nun

$$\int\limits_{B_\rho} |D\chi_C| = \lim_{t \to 0} t^{-n} \int\limits_{B_{\rho t}} |D\chi_E|.$$

Zusammengenommen erhält man

$$\rho^{-n} \int\limits_{B_\rho} |D\chi_{B_1}| = 0 < \omega_n \leq \rho^{-n} \int\limits_{B_\rho} |D\chi_C|$$

für alle $1 > \rho > 0$. Diese Gleichung zeigt $C \cap B_{\frac{1}{2}} \neq B_{\frac{1}{2}}$, liefert also den gewünschten Widerspruch. ■

Bemerkung 3.2 Der Beweis von Lemma 3.1 garantiert insbesondere, daß beim Blow-up um einen Randpunkt einer fast minimalen Caccioppolimenge E die Mengen $E_{t_i} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i x \in E\}$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ weder gegen die leere Menge noch gegen $\mathbb{R}^{n+1}$ konvergieren für eine beliebige Folge $t_i \to 0$, $t_i > 0$.

Bemerkung 3.3 In kleinen Dimensionen, d. h. für $n+1 \leq 8$, hat der Kegel höchstens eine Singularität: Angenommen, C habe neben dem Ursprung noch weitere Singularitäten, dann enthält die Singularitätenmenge Σ, da C Kegel ist, mindestens eine Halbgerade, und deshalb folgt $H^1(\Sigma) = +\infty$. Nach [4, Theorem 11.8, S. 134, vgl. 7.4] gilt aber $H^s(\Sigma) = 0$ für $s > n - 7$. Also gilt hier $s = 1 \leq n - 7$ im Widerspruch zu $n + 1 \leq 8$, und somit besitzt C im Fall $n + 1 \leq 8$ höchstens eine Singularität.

Der Kegelmantel ∂C ohne die möglicherweise auftretende Singularität im Ursprung ist dann nach Theorem [5, Theorem 2, S. 135, vgl. 7.12] eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Weiterhin kann man o. E. annehmen, daß C das maßtheoretische Innere des Kegels ist, da der Mantel ohne Ursprung, $\partial C \setminus \{0\}$, als differenzierbare Mannigfaltigkeit eine H^{n+1}-Nullmenge ist, d. h. die meßbare Menge C besitzt in ihrer Äquivalenzklasse einen offenen Vertreter.

Mit der gleichen Argumentation erhält man dimensionsunabhängig, daß jeder minimale Kegel C mit höchstens einer Singularität o. E. offen ist. Ebenso ist für eine minimale Menge E der reduzierte Rand $\partial^\star E$ eine reellanalytische Mannigfaltigkeit.

Die folgende Definition erweitert den Begriff des Subgraphen, so daß man auch von Subgraphen von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ sprechen kann.

Definition 3.4 (Subgraph einer Funktion, vgl. [4, Definition 16.1, S. 183]) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offenene Menge, $u : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ meßbar.*

$$\operatorname{sub} u := \{(\hat{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R} : t < u(\hat{x})\}$$

heißt dann Subgraph zur Funktion u.

u heißt Quasi-Lösung der Minimalflächengleichung, falls $\operatorname{sub} u$ *in $\Omega \times \mathbb{R}$ minimal ist.*

Bemerkung 3.5 Ist der Ursprung Randpunkt einer fast minimalen Caccioppolimenge, so konvergieren die Mengen E_{t_i} aus Bemerkung 3.2 in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ nicht gegen die leere Menge oder gegen $\mathbb{R}^{n+1}$. Nach [5, Proposition, S. 137, vgl. 7.15] konvergiert E_{t_i} für eine geeignete Teilfolge $t_i \to 0$ gegen einen minimalen Kegel C. C ist also nichttrivialer minimaler Kegel.

Sei nun die Menge E zusätzlich Subgraph einer meßbaren Funktion. Dann sind auch die Mengen E_{t_i} Subgraphen meßbarer Funktionen. Nach Lemma [4, Lemma 16.3, S. 184, vgl. 7.7] ist nun auch C Subgraph einer meßbaren Funktion $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. Da C aber auch ein Kegel mit Spitze im Ursprung ist, ist u positiv homogen vom Grade 1. Weiterhin ist $C = \operatorname{sub} u$ minimal, u also Quasi-Lösung der Minimalflächengleichung.

4 Regularitätssatz

Definition 4.1 *Sei* $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ *meßbar. Definiere*

$$P := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : u(\hat{x}) = +\infty\}$$

und

$$N := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : u(\hat{x}) = -\infty\}.$$

Falls eine Menge M *als Subgraph einer meßbaren Funktion* u *darstellbar ist, dann ordnet man* M *vermöge* u *Mengen* P *und* N *gemäß der obigen Definition zu.*

Bemerkung 4.2 *Die Mengen* N *und* P *einer als Subgraph darstellbaren Menge* M *sind als* L^1*-Äquivalenzklassen wohldefiniert.*

Beweis: Zeige die Behauptung nur für N. Für P verläuft der Beweis analog. Seien u_1 und u_2 zwei meßbare Funktionen, $u_i : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, $\operatorname{sub} u_i = M$, $i = 1, 2$. Definiere für $i = 1, 2$ zur Funktion u_i die Menge N_i. Nehme an, es gilt $|N_1 \vartriangle N_2| > 0$. Man erhält nun

$$|N_1 \setminus N_2| + |N_2 \setminus N_1| \geq |(N_1 \setminus N_2) \cup (N_2 \setminus N_1)| = |N_1 \vartriangle N_2| > 0.$$

Nehme daher o. E. $|N_1 \setminus N_2| > 0$ an. In $N_1 \setminus N_2$ gilt $u_1 = -\infty$ und $u_2 > -\infty$. Damit gilt

$$N_1 \setminus N_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\hat{x} \in N_1 \setminus N_2 : u_2(\hat{x}) > k\}.$$

Die Mengen $A_k := \{\hat{x} \in N_1 \setminus N_2 : u_2(\hat{x}) > k\}$ sind aber für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ n-dimensionale Lebesgue-Nullmengen: Sonst erhält man für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 0 &= |\emptyset| = |M \setminus M| \\ &= |\operatorname{sub} u_2 \setminus \operatorname{sub} u_1| \\ &\geq |(\operatorname{sub} u_2 \setminus \operatorname{sub} u_1) \cap A_k| \\ &\geq |A_k| \cdot (k - (-\infty)) \\ &\geq |A_k| \cdot 1 > 0. \end{aligned}$$

Also ist A_k eine Nullmenge. Wegen $N_1 \setminus N_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ ist $N_1 \setminus N_2$ also abzählbare Vereinigung von Nullmengen und damit selber wieder eine Nullmenge, ein Widerspruch zur Annahme $|N_1 \triangle N_2| > 0$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit. ■

Bemerkung 4.3 Ist ein Kegel mit Zentrum im Ursprung als Subgraph einer meßbaren Funktion u darstellbar, so sind die zugehörigen Mengen N und P ebenfalls Kegel mit Zentrum im Ursprung, und u ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ positiv homogen vom Grade 1.

Lemma 4.4 *Sei $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kegel, der in einer Umgebung der Kegelspitze als Subgraph einer C^1-Funktion u darstellbar ist. Dann stimmt ∂C mit der Tangentialebene T an ∂C in der Kegelspitze überein und C ist ein Halbraum.*

Beweis: Vermöge einer Translation kann man o. E. annehmen, daß die Spitze des Kegels der Ursprung ist. Da C ein Kegel ist, ist u positiv homogen vom Grade eins und besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung der gleichen Homogenität, die auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist und deren Subgraph somit gerade C ist. Nehme daher o. E. an, daß u auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Es gilt

$$\langle Du(0), v\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{u(tv) - u(0)}{t}.$$

Berücksichtigt man nun $u(0) = 0$ und die positive Homogenität von u, so erhält man für $t > 0$

$$\langle Du(0), v\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot u(v)}{t} = u(v).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist in v linear. Also ist auch u eine lineare Funktion. C ist nun Subgraph einer linearen Funktion und somit ein Halbraum. ■

Lemma 4.5 *Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein nichttrivialer meßbarer Kegel mit Spitze im Ursprung. Dann gilt $0 \in \partial K$.*

Beweis: Zeige, daß weder $0 \in K$, noch $0 \in \complement K$ gilt: Angenommen, es gilt $0 \in K$, so gibt es nach Definition des maßtheoretischen Inneren einer Menge ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(0) \subset K$. Da K Kegel ist, gilt daher auch $B_\rho(0) \subset K$ für alle $\rho > 0$, d. h. $K = \mathbb{R}^{n+1}$ im Widerspruch zur Annahme, daß K nichttrivial ist. Analog führt man den Fall $0 \in \complement K$ zum Widerspruch. Somit gilt $0 \in \partial K$. ■

Theorem 4.6 (Regularitätssatz) *Sei $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \leq 7$, minimaler nichttrivialer Kegel mit Spitze im Ursprung. Ist C als Subgraph darstellbar, dann ist ∂C eine Hyperfläche und C ein Halbraum.*

Im Fall $n \leq 6$ gilt dieser Satz nach Theorem 7.3 auch schon für nicht als Subgraph darstellbare Kegel.

Beweis: C besitzt nach Bemerkung 3.3 höchstens eine Singularität und diese befindet sich, wenn sie auftritt, im Ursprung. Außerdem kann man nach dieser Bemerkung o. E. annehmen, daß C offen ist. Betrachte nun die Mengen N und P wie oben definiert. Unterscheide zwei Fälle:

(i) $N \neq \emptyset$ oder $P \neq \emptyset$:
Nehme o. E. $N \neq \emptyset$ an. Für $P \neq \emptyset$ verläuft der Beweis analog. Nach [4, Theorem 16.6, S. 187, vgl. 7.8] ist $N \subset \mathbb{R}^n$ minimaler Kegel. Wegen $N \neq \emptyset$ und $C \neq \emptyset$ ist N von $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ verschieden: Sei $u : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ eine meßbare Funktion mit $\operatorname{sub} u = C$. Gilt $N = \mathbb{R}^n$, so ergibt sich $u \equiv -\infty$ und weiterhin $C = \emptyset$, was der Nichttrivialität von C widerspricht. Also gilt $N \neq \mathbb{R}^n$.

Da es in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 7$, nach Corollar 7.3 keine minimalen nichttrivialen Kegel außer Halbräumen gibt, ist N ein Halbraum. Ferner gilt $0 \in \partial N$ nach Bemerkung 4.3 und Lemma 4.5. Damit liegt aber auch C in einem Halbraum. Nach [4, Theorem 15.5, S. 174, vgl. 7.5] stimmt C nun mit einem Halbraum überein, wie behauptet war.

(ii) $N = P = \emptyset$:
Sei u eine meßbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{sub} u = C$. Nach [4, Proposition 16.7, S. 188, vgl. 7.9] ist u in $\mathbb{R}^n$ lokal beschränkt: $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Kugel. Da der Subgraph von $u|_\Omega$ in $\Omega \times \mathbb{R}$ endlichen Perimeter hat, d. h. $\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}} |D\chi_{\operatorname{sub} u}| < \infty$, und $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt, erhält man nach [3, Theorem 1, p. 371, vgl. 7.2] $u \in BV(\Omega)$. Nach [2] ist dann $u \in C^{0,1}(\Omega)$. Da u aber auch schwache Lösung der Minimalflächengleichung ist, gilt $u \in C^2(\Omega)$. Ω war eine beliebige offene Kugel, also gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Lemma 4.4. ■

5 Anwendungen

Theorem 5.1 (Regularität für Subgraphen) *Ist $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \leq 7$, Subgraph und fast minimal in Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, dann gilt $\partial E \cap \Omega = \partial^\star E \cap \Omega$.*

Beweis: Nach Definition gilt stets $\partial^\star E \subset \partial E$. Sei $x_0 \in \partial E \cap \Omega$ beliebig. Zeige $x_0 \in \partial^\star E$: Vermöge einer Translation kann man o. E. $x_0 = 0$ annehmen. Nach [5, Proposition, S. 137, vgl. 7.15] gibt es eine Folge $t_i \to 0$, $t_i > 0$, so daß $E_{t_i} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i x \in E\}$ für $i \to \infty$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegen einen minimalen Kegel C konvergiert. Nach Bemerkung 3.2 ist C nichttrivialer Kegel. Darüberhinaus gilt gemäß der erwähnten Proposition

$$0 \in \partial^\star C \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = 0 \in \partial^\star E.$$

Bemerkung 3.3 besagt, daß man o. E. annehmen kann, daß C offen ist. Nach Bemerkung 3.5 weiß man, daß C als Subgraph darstellbar ist. Nach Theorem 4.6 erhält man nun, daß ∂C eine Hyperebene ist. Wie in Lemma 3.1 kann man $0 \in \partial C$ nachweisen. Offenbar gilt $\partial C = \partial^\star C$ nach Bemerkung 7.14, da der Rand ∂C als Hyperebene eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dies zeigt vermöge der obigen Äquivalenz $x_0 \in \partial^\star E$ und somit die Behauptung. ■

Theorem 5.2 *Simons Kegel*

$$K^{2m} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2m} : \sum_{i=1}^{m} \left(x^i\right)^2 < \sum_{i=m+1}^{2m} \left(x^i\right)^2 \right\}$$

ist für $m \geq 4$ ein minimaler Kegel.

Beweis: [4, Theorem 16.4, S. 185] ■

Lemma 5.3 *Theorem 5.1 gilt in $\mathbb{R}^9$ nicht mehr, d. h. ersetzt man die Voraussetzung $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \leq 7$, durch $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \leq 8$, so folgt nicht mehr $\partial E \cap \Omega = \partial^\star E \cap \Omega$.*

Beweis: Sei $K := K^8$ der in Theorem 5.2 definierte minimale Kegel. $K \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^9$ ist offenbar Subgraph der Funktion u mit

$$u(\hat{x}) := \begin{cases} +\infty & : \quad \hat{x} \in K \\ -\infty & : \quad \hat{x} \notin K \end{cases}$$

für $\hat{x} \in \mathbb{R}^8$ und nach [4, Beispiel 16.2, S. 183, vgl. 7.6] minimal. Maßtheoretischer und reduzierter Rand stimmen in diesem Beispiel nicht überein, es gilt $\partial(K \times \mathbb{R}) = \partial^\star(K \times \mathbb{R}) \dot{\cup} (\{0\} \times \mathbb{R})$: Diese Gleichheit ergibt sich, da für fast minimale Mengen $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der reduzierte Rand genau aus den Randpunkten x besteht, für die ∂E in einer Umgebung von x eine C^1-Mannigfaltigkeit ist. ■

6 Vorgeschriebene mittlere Krümmung

In der Arbeit [1] wird das folgende Problem betrachtet:
In einer vollständigen lokal konform flachen $(n+1)$-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit N wird eine geschlossene zu S^n homöomorphe Hyperfläche M vorgeschriebener mittlerer Krümmung f, $f \in C^{0,1}(N)$, gesucht, d. h. die Gleichung $H|_M = f(x)$ soll durch eine Hyperfläche der Klasse $C^{2,\alpha}$ gelöst werden. Die Hyperfläche wird in einer offenen, zusammenhängenden, relativ kompakten Teilmenge Ω von N gesucht, die man vermöge eines Diffeomorphismusses als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet. Der Rand von Ω bestehe aus zwei Komponenten M_1 und M_2, die sich in euklidischen Polarkoordinaten $(x^\alpha)_{0\le\alpha\le n}$, $x^0 \equiv r$, mit Hilfe von Funktionen $u_i \in C^{2,\alpha}(S^n, (0,\infty))$ als Graphen über S^n darstellen lassen: $M_i = \text{graph } u_i|_{S^n} = \{(z, u_i(z)) : z \in S^n\}$. M_1 und M_2 wirken als Barrieren, d. h. es gilt $H|_{M_1} \le f$ und $H|_{M_2} \ge f$, wobei der Normalenvektor stets so ausgewählt wird, daß die 0-te Komponente negativ ist.
In der erwähnten Arbeit wird bewiesen, daß unter den oben angegebenen Voraussetzungen eine solche Hyperfläche M existiert, falls $n \le 6$ ist. In diesem Kapitel wird nun gezeigt, daß eine solche Hyperfläche auch noch im Fall $n = 7$ existiert.

Theorem 6.1 *Das Problem „Finde eine geschlossene Hyperfläche $M \subset \overline{\Omega}$ der Klasse $C^{2,\alpha}$ mit $H|_M = f$, die homöomorph zu S^n ist.“ besitzt unter den oben angegebenen Voraussetzungen eine Lösung, falls $n \le 7$ ist.*

Der Beweis dieses Theorems benötigt noch einige Lemmata:

Lemma 6.2 *Das metrische Produkt $S^n \times \mathbb{R}$ ist lokal konform äquivalent zu $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Man kann $S^n \times \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ identifizieren. Der maßtheoretische Rand einer meßbaren Menge E in $S^n \times \mathbb{R}$ stimmt mit dem maßtheoretischen Rand von E in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ überein, falls man $S^n \times \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ identifiziert. Der reduzierte Rand $\partial^\star E$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist eine Teilmenge des reduzierten Randes $\partial^\star E$ in $S^n \times \mathbb{R}$, falls E in $\mathbb{R}^{n+1}$ fast minimal ist.*

Beweis: Sei $\tilde{N} = S^n \times \mathbb{R}$ das metrische Produkt von S^n und $\mathbb{R}$. Die Metrik von $\tilde{N}$ läßt sich darstellen als

$$d\bar{s}^2_{\tilde{N}} = dt^2 + \sigma_{ij} dx^i dx^j,$$

wobei $(x^i)_{1\leq i\leq n}$ Koordinaten von S^n sind, und $t\in\mathbb{R}$ ist. Identifiziere nun die Mannigfaltigkeit $\tilde{N}$ mit ihrem Bild in $\mathbb{R}^{n+1}$ unter dem Diffeomorphismus

$$\begin{aligned}\Psi : S^n\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\\ (x,t) &\mapsto (x,e^t)\equiv(x,r).\end{aligned}$$

Ψ ist Isometrie, wenn man $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ mit der Metrik

$$\frac{1}{r^2}dr^2+\sigma_{ij}dx^idx^j$$

versieht. $((x^i)_{1\leq i\leq n},r)$ sind dabei Polarkoordinaten des $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Nehme vermöge dieser Isometrie

$$(\tilde{N},d\overline{s}^2_{\tilde{N}})=(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\frac{1}{r^2}dr^2+\sigma_{ij}dx^idx^j)$$

an. Nun gilt

$$\begin{aligned}d\overline{s}^2_{\tilde{N}} &= \frac{1}{r^2}dr^2+\sigma_{ij}dx^idx^j\\ &= \frac{1}{r^2}(dr^2+r^2\sigma_{ij}dx^idx^j)\\ &= \frac{1}{r^2}d\overline{s}^2_{\mathbb{R}^{n+1}}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich, da $dr^2+r^2\sigma_{ij}dx^idx^j$ die Darstellung der Standardmetrik des $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ in Polarkoordinaten ist. $d\overline{s}^2_{\tilde{N}}=\frac{1}{r^2}d\overline{s}^2_{\mathbb{R}^{n+1}}$ besagt aber genau, daß in beliebigen lokalen Koordinaten für die metrischen Tensoren $\overline{g}_{\alpha\beta}$ von $\tilde{N}$ und $\hat{g}_{\alpha\beta}$ von $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ die Beziehung $\overline{g}_{\alpha\beta}=\frac{1}{r^2}\hat{g}_{\alpha\beta}=e^{-2\log r}\hat{g}_{\alpha\beta}$ gilt, d. h. $(\tilde{N},\overline{g}_{\alpha\beta})$ und $(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},\hat{g}_{\alpha\beta})$ sind lokal konform äquivalent.

Da der größte und der kleinste Eigenwert von $\overline{g}_{\alpha\beta}$ bezüglich $\hat{g}_{\alpha\beta}$ auf kompakten Mengen K, $K\subset\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, nach oben bzw. unten durch $c=c(K)>0$ bzw. $\frac{1}{c}$ beschränkt sind, ist auch das Verhältnis von Weglängen von Wegen in K bezüglich der beiden Metriken beschränkt. Dies bedeutet, daß die geodätischen Kugeln bezüglich der beiden Metriken für hinreichend kleine Radien $\rho>0$ geschachtelt sind:

$$B^{\hat{g}}_{\frac{1}{c}\rho}(x)\subset B^{\overline{g}}_{\rho}(x)\subset B^{\hat{g}}_{c\rho}(x)\quad\text{für}\quad x\in K,\ c=c(K)>0.$$

Der maßtheoretische Rand und das maßtheoretische Innere/Komplement einer Menge sind im Fall einer Mannigfaltigkeit genauso wie in $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Als Kugeln verwendet man hier jedoch geodätische Kugeln. Sei $x \in \complement E$ im maßtheoretischen Sinn in $\tilde{N}$. Es gilt also für ein $\rho > 0$

$$\int\limits_{B_\rho^{\overline{g}}(x)} \chi_E \sqrt{\overline{g}} = 0.$$

Da jede geodätische Kugel in $\tilde{N}$ eine geodätische Kugel in $\mathbb{R}^{n+1}$ enthält, existiert ein $r > 0$, so daß $B_r^{\hat{g}}(x) \subset B_\rho^{\overline{g}}(x)$ gilt. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_r^{\hat{g}}(x)} \chi_E &\leq \int\limits_{B_\rho^{\overline{g}}(x)} \chi_E \\ &\leq \sup_{B_\rho^{\overline{g}}(x)} \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} \cdot \int\limits_{B_\rho^{\overline{g}}(x)} \chi_E \sqrt{\overline{g}} = 0 \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man, daß $x \in \complement E$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ auch $x \in \complement E$ in $\tilde{N}$ impliziert. Ebenfalls analog erhält man

$$x \in E \text{ in } \tilde{N} \Longleftrightarrow x \in E \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}$$

und somit

$$x \in \partial E \text{ in } \tilde{N} \Longleftrightarrow x \in \partial E \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dies bedeutet, daß die maßtheoretischen Mengendefinitionen in $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\tilde{N}$ übereinstimmen.

Sei schließlich $x \in \partial^\star E$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. ∂E ist dann in einer Umgebung von x eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Da Ψ Diffeomorphismus ist, und die maßtheoretischen Ränder übereinstimmen, ist auch ∂E in einer Umgebung von x in $\tilde{N}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Somit gilt $x \in \partial^\star E$ in $\tilde{N}$. ■

Lemma 6.3 *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ meßbar und als Subgraph über S^n darstellbar, d. h.*

$$E = \{(\hat{x}, t) \in S^n \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : t < u(\hat{x})\},$$

sei in Polarkoordinaten als Subgraph darstellbar. Gelte $H^{n+1}(\partial E) = 0$, $u(\hat{x}) \geq c > 0$. Sei $z_0 = (0, z_0^{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $z_0^{n+1} > 0$ beliebig. Konvergiert

$$E_{t_i} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : z_0 + t_i(y - z_0) \in E\}$$

für eine gegebene Folge $t_i \to 0$, $t_i > 0$, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegen einen Kegel C mit $H^{n+1}(\partial C) = 0$, dann ist C als Subgraph über $\mathbb{R}^n \equiv \langle z_0 \rangle^\perp$ darstellbar.

Beweis: Identifiziere $\mathbb{R}^n$ mit $\langle z_0 \rangle^\perp$ und führe orthogonale Koordinaten ein. Zeige, daß es kein $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $(\hat{x}, t) \in C \cup \partial C$ und $(\hat{x}, \tau) \in \complement C$ gilt mit $t > \tau$ oder $(\hat{x}, t) \in C$ und $(\hat{x}, \tau) \in \partial C$ mit $t > \tau$:

(i) Nehme vermöge einer Streckung um den Ursprung o. E. an, daß $z_0^{n+1} = 1$ gilt. Damit die folgenden Überlegungen einfacher in Koordinaten darstellbar sind, nimmt man nach einer Translation des Koordinatensystems $z_0 = 0$ an. Dann gilt

$$E_{t_i} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i y \in E\}.$$

E und E_{t_i} sind nun als Subgraphen über S^n mit Mittelpunkt $(0, -1)$ bzw. $(0, -\frac{1}{t_i})$ darstellbar.

(ii) $(\hat{x}, t) \in C \cup \partial C$ und $(\hat{x}, \tau) \in \complement C \Longrightarrow t < \tau$:
Nehme an, es gibt $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, so daß $(\hat{x}_0, t_0) \in C \cup \partial C$, $(\hat{x}_0, \tau_0) \in \complement C$ und $t_0 > \tau_0$ gilt. $\complement C$ ist eine offene Menge. Also gibt es ein $\rho > 0$, so daß $B_\rho((\hat{x}_0, \tau_0)) \subset \complement C$ ist. Betrachte nun die Halbgeraden g_i, die $(\hat{x}_0, t_0)$ und $\left(0, -\frac{1}{t_i}\right)$ enthalten und deren Endpunkt $\left(0, -\frac{1}{t_i}\right)$ ist. Es gilt

$$g_i = \left\{ \left(0, -\frac{1}{t_i}\right) + \lambda \left[(\hat{x}_0, t_0) - \left(0, -\frac{1}{t_i}\right) \right] : \lambda \geq 0 \right\}.$$

Schreibe auch $g_i(\lambda)$ statt $\left(0, -\frac{1}{t_i}\right) + \lambda \left[(\hat{x}_0, t_0) - \left(0, -\frac{1}{t_i}\right) \right]$. Für alle $r > 0$ gilt $\int\limits_{B_r((\hat{x}_0, t_0))} \chi_C \geq 2\varepsilon(r) > 0$, da $(\hat{x}_0, t_0) \in C \cup \partial C$. Da E_{t_i} in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegen C konvergiert, erhält man auch $\int\limits_{B_r((\hat{x}_0, t_0))} \chi_{E_{t_i}} \geq \varepsilon(r) > 0$ für $i \geq i_0(r)$. Setze $r = \frac{\rho}{2}$ und nehme o. E. an, daß die obige Ungleichung für alle i gilt. Analog kann man für hinreichend große i auch Halbgeraden g_i^y durch $y \in B_r((\hat{x}_0, t_0))$ und $\left(0, -\frac{1}{t_i}\right)$ definieren. Ist nun $y \in E_{t_i}$, so ist aufgrund der Darstellbarkeit von

E_{t_i} als Subgraph auch $g_i^y(\lambda) \in E_{t_i}$ für $0 < \lambda < 1$. $y \mapsto g_i^y(\lambda)$ beschreibt genau die Streckung mit Zentrum $\left(0, -\frac{1}{t_i}\right)$ um den Faktor λ. Da $H^{n+1}(\partial E_{t_i}) = 0$ ist, gilt fast überall

$$\chi_{E_{t_i}}(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in E_{t_i}.$$

Nehme o. E. an, daß diese Relation überall gilt. Nun ergibt sich unter Berücksichtigung von $y \in E_{t_i} \Longrightarrow g_i^y(\lambda) \in E_{t_i}$ für $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned} \int\limits_{B_r((\hat{x}_0,t_0))} \chi_{E_{t_i}}(y)\,dy &\leq \int\limits_{B_r((\hat{x}_0,t_0))} \chi_{E_{t_i}} \circ g_i^y(\lambda)\,dy \\ &= \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int\limits_{B_{\lambda r}(g_i^{(\hat{x}_0,t_0)}(\lambda))} \chi_{E_{t_i}}. \end{aligned}$$

Daraus folgert man

$$\int\limits_{B_{\lambda r}(g_i(\lambda))} \chi_{E_{t_i}} \geq \lambda^{n+1}\varepsilon(r) > 0.$$

Wählt man insbesondere

$$\lambda_i = \frac{\tau_0 + \frac{1}{t_i}}{t_0 + \frac{1}{t_i}},$$

so gilt $\lambda_i < 1$ und o. E., d. h. für $i \geq i_0$, gilt auch $\lambda_i > 0$. Man erhält

$$\begin{aligned} g_i(\lambda_i) &= \left(0, -\frac{1}{t_i}\right) + \frac{\tau_0 + \frac{1}{t_i}}{t_0 + \frac{1}{t_i}}\left(\hat{x}_0, t_0 + \frac{1}{t_i}\right) \\ &= \left(\frac{\tau_0 + \frac{1}{t_i}}{t_0 + \frac{1}{t_i}}\hat{x}_0, \tau_0\right) \\ &= (\lambda_i x_0, \tau_0)\,. \end{aligned}$$

Für $i \to \infty$ konvergiert λ_i gegen 1 und $g_i(\lambda_i)$ gegen $(\hat{x}_0, \tau_0)$. Da $r < \rho$ ist, gilt für hinreichend großes i

$$B_{\lambda_i r}(g_i(\lambda_i)) \subset B_r(g_i(\lambda_i)) \subset B_\rho((\hat{x}_0, \tau_0)).$$

Durch Kombination der obigen Aussagen schließt man

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{B_\rho((\hat{x}_0,\tau_0))} \chi_C \\ &= \lim_{i\to\infty} \int\limits_{B_\rho((\hat{x}_0,\tau_0))} \chi_{E_{t_i}} \\ &\geq \lim_{i\to\infty} \int\limits_{B_{\lambda_i r}(g_i(\lambda_i))} \chi_{E_{t_i}} \\ &\geq \lim_{i\to\infty} \lambda_i^{n+1}\varepsilon(r) = \varepsilon(r) > 0. \end{aligned}$$

Dies führt somit die Annahme zum Widerspruch und zeigt daher, daß $(\hat{x}, t) \in C \cup \partial C$ und $(\hat{x}, \tau) \in \complement C$ die Relation $t < \tau$ impliziert.

(iii) $(\hat{x}, t) \in C$ und $(\hat{x}, \tau) \in \partial C \Longrightarrow t < \tau$:
Man geht ganz analog zu (ii) vor: Nehme $(\hat{x}_0, t_0) \in C$ und $(\hat{x}_0, \tau_0) \in \partial C$ mit $t_0 > \tau_0$ an. Es existiert $\rho > 0$, so daß $\int\limits_{B_\rho((\hat{x}_0,t_0))} \chi_{\complement C} = 0$ gilt. Definiere wieder Halbgeraden g_i^y. Analog zu oben kommt man zur Ungleichung

$$\int\limits_{B_{\frac{\rho}{2}}((\hat{x}_0,\tau_0))} \chi_{\complement E_{t_i}} \geq \varepsilon\left(\frac{\rho}{2}\right) > 0.$$

Die Darstellbarkeit als Subgraph über S^n liefert

$$y \in \complement E_{t_i} \quad \Longrightarrow \quad g_i^y(\lambda) \in \complement E_{t_i} \text{ für } \lambda > 1.$$

Betrachte nun Kugeln um $g_i^{(\hat{x}_0,\tau_0)}(\lambda_i)$ mit $\lambda_i = \frac{t_0+\frac{1}{t_i}}{\tau_0+\frac{1}{t_i}}$ und Radius $\frac{\rho}{2}\lambda_i$. Wie in (ii) ergibt sich ein Widerspruch.

(iv) Man erhält also, daß für festes $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ Zahlen t_1 und t_2 mit $t_1 \leq t_2$ aus $[-\infty, +\infty]$ existieren, so daß

$$\{\hat{x}\} \times (-\infty, t_1) \subset C,$$

$$\{\hat{x}\} \times ([t_1, t_2] \cap \mathbb{R}) \subset \partial C$$

und

$$\{\hat{x}\} \times (t_2, +\infty) \subset \complement C.$$

Für H^n-fast alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $t_1(\hat{x}) = t_2(\hat{x})$: Zeige nur, daß für H^n-fast alle $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $t_2(\hat{x}) - t_1(\hat{x}) < \frac{1}{k}$ für $k \geq 1$ gilt. Setze $A_k := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : t_2(\hat{x}) - t_1(\hat{x}) \geq \frac{1}{k}\}$. Es gilt $0 = H^{n+1}(\partial C) \geq \frac{1}{k} H^n(A_k)$. Also ergibt sich $H^n(A_k) = 0$. Daraus folgt aber auch, daß $\{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : t_1 < t_2\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ eine H^n-Nullmenge ist. Damit ist durch $u(\hat{x}) := t_1(\hat{x})$ eine Funktion erklärt, so daß $C = \operatorname{sub} u$ für einen Vertreter aus der Äquivalenzklasse von C gilt. u ist eine meßbare Funktion, da C meßbar ist. ■

Lemma 6.4 (C. Gerhardt, nach einer Seminarnotiz) *Sei E in $\Omega \Subset S^n \times \mathbb{R} = \tilde{N} = (\tilde{N}, \overline{g}_{\alpha\beta})$ fast minimal. Betrachte $\tilde{N}$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$. Da $\tilde{N}$ lokal konform äquivalent zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, ist E auch in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{\alpha\beta})$ fast minimal. Falls E in $\tilde{N}$ mit einer Konstanten $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, λ wie in der Definition der Fast-Minimalität, fast minimal ist, so kann diese Konstante auch im $\mathbb{R}^{n+1}$ beibehalten werden.*

Beweis: (i) In $\mathbb{R}^{n+1}$ ist der Perimeter einer meßbaren Menge F in einer offenen Menge Ω wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{R}^{n+1}}(F, \Omega) &= \int\limits_{\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}} |D\chi_F| \\
&= \sup \left\{ \int\limits_{\Omega} \chi_F \operatorname{div} \eta \,:\, \eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),\ |\eta(x)| \leq 1 \text{ für } x \in \Omega \right\}.
\end{aligned}
$$

Diese Definition gilt auch in $\tilde{N}$:

$$
\begin{aligned}
P_{\tilde{N}}(F, \Omega) &= \int\limits_{\Omega \subset \tilde{N}} |D\chi_F| \\
&= \sup \left\{ \int\limits_{\Omega \subset \tilde{N}} \chi_F \operatorname{div} \eta \,:\, \eta^\alpha \in C_c^1(\Omega), 0 \leq \alpha \leq n, \right. \\
&\qquad \left. ||\eta(x)|| \leq 1 \text{ für } x \in \Omega \right\} \\
&\equiv \sup \left\{ \int\limits_{\Omega} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g} \eta^\alpha) \,:\, \eta^\alpha \in C_c^1(\Omega), 0 \leq \alpha \leq n, \right.
\end{aligned}
$$

$$\left.\overline{g}_{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq 1 \text{ für } x \in \Omega\right\}$$

Dabei ist $\{\overline{g}_{\alpha\beta}\}_{0\leq\alpha,\beta\leq n}$ die Metrik von $\tilde{N}$, $\overline{g}$ ihre Determinante. Über doppelt auftretende griechische Indices wird von 0 bis n summiert. Betrachte ab jetzt die Situation stets in einem Koordinatensystem, in dem die Standardmetrik des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den metrischen Tensor $(\delta_{\alpha\beta})_{0\leq\alpha,\beta\leq n}$ dargestellt wird.

(ii) Die Fast-Minimalität von E in $\tilde{N}$ bedeutet, daß für ein λ mit $0 < \lambda < 1$ und $A \Subset \Omega$ Zahlen R und K mit $0 < R < \operatorname{dist}(A, \complement\Omega)$ und $K \geq 0$ existieren, so daß für alle $x \in A$, $0 < \rho < R$ und F mit $E \bigtriangleup F \Subset B^{\overline{g}}_\rho(x)$

$$\int\limits_{B^{\overline{g}}_\rho(x)\subset\tilde{N}} |D\chi_E| \leq \int\limits_{B^{\overline{g}}_\rho(x)\subset\tilde{N}} |D\chi_F| + K\rho^{n+2\lambda}$$

gilt. Der obere Index bei den Kugeln deutet an, bezüglich welcher Metrik es sich um geodätische Kugeln handelt. Nehme o. E. an, daß R so klein ist, daß $B^\delta_\rho(x) \subset B^{\overline{g}}_{c\rho}(x)$ gilt für ein $c(A) > 0$ und für alle $x \in A$ und ρ mit $0 < \rho < R$. Für $\rho < \tilde{R} = \frac{R}{c}$ gilt also mit $\tilde{K} = Kc^{n+2\lambda}$ auch

$$\int\limits_{B^{\overline{g}}_{c\rho}(x)\subset\tilde{N}} |D\chi_E| \leq \int\limits_{B^{\overline{g}}_{c\rho}(x)\subset\tilde{N}} |D\chi_F| + \tilde{K}\rho^{n+2\lambda}$$

falls $E \bigtriangleup F \Subset B^\delta_\rho(x)$. Da die symmetrische Differenz von E und F kompakt in $B^\delta_\rho(x)$ enthalten ist, stimmen die beiden Integrale überein, wenn man nur über $B^{\overline{g}}_{c\rho}(x) \setminus B^\delta_\rho(x)$ integriert. Diesen Beitrag kann man auf beiden Seiten abziehen und erhält

$$\int\limits_{B_\rho(x)\subset\tilde{N}} |D\chi_E| \leq \int\limits_{B_\rho(x)\subset\tilde{N}} |D\chi_F| + \tilde{K}\rho^{n+2\lambda}.$$

B_ρ steht dabei für B^δ_ρ. Schreibe im folgenden auch wieder R statt $\tilde{R}$ und K statt $\tilde{K}$. Die obige Gleichung besagt insbesondere, daß es genügt, die Perimeter für euklidische Kugeln zu vergleichen.

(iii) Sei F eine beliebige Caccioppolimenge in $\tilde{N}$. Sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in A$ beliebig. Wähle $\eta^\alpha_\varepsilon \in C^1_c(B_\rho(x_0))$, $0 \leq \alpha \leq n$, so daß $\overline{g}_{\alpha\beta}\eta^\alpha_\varepsilon\eta^\beta_\varepsilon \leq 1$ und

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde{N}} |D\chi_F| \leq \varepsilon + \int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde{N}} \chi_F D_\alpha\eta^\alpha_\varepsilon.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde N} |D\chi_F| &\le \varepsilon + \int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde N} \chi_F D_\alpha \eta_\varepsilon^\alpha \\
&= \varepsilon + \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\overline{g}(x)}\eta_\varepsilon^\alpha) \\
&= \varepsilon + \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\overline{g}(x_0)}\left(\frac{\sqrt{\overline{g}(x)}}{\sqrt{\overline{g}(x_0)}}\eta_\varepsilon^\alpha\right)\right).
\end{aligned}$$

Es gilt für $x \in B_\rho(x_0)$, falls $R = R(A)$ hinreichend klein ist, für $0 < \rho < R$

$$\begin{aligned}
& \overline{g}_{\alpha\beta}(x_0)\frac{\sqrt{\overline{g}(x)}}{\sqrt{\overline{g}(x_0)}}\eta_\varepsilon^\alpha(x)\frac{\sqrt{\overline{g}(x)}}{\sqrt{\overline{g}(x_0)}}\eta_\varepsilon^\beta(x) \\
\le\ & \sup_{y\in A}\sup_{z\in B_\rho(y)}\left(\frac{\sqrt{\overline{g}(z)}}{\sqrt{\overline{g}(x_0)}}\right)^2 \cdot \\
& \cdot((\overline{g}_{\alpha\beta}(x_0) - \overline{g}_{\alpha\beta}(x))\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) + \overline{g}_{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x)) \\
\le\ & (1+\rho c(A))\cdot(\rho c(A)+1) \\
\le\ & 1+\rho c(A).
\end{aligned}$$

Diese Abschätzungen beruhen insbesondere auf dem Mittelwertsatz. $c(A)$ steht unter Umständen bei jedem neuen Auftreten für eine andere Konstante, die aber jeweils nur von A abhängt. Beachte auch, daß $R = R(A) = c(A)$ gilt. Setzt man $\tilde\eta_\varepsilon^\alpha = \frac{\sqrt{\overline{g}(x)}}{\sqrt{\overline{g}(x_0)}}\eta_\varepsilon^\alpha(x)$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde N} |D\chi_F| &\le \varepsilon + \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\overline{g}(x_0)}\tilde\eta_\varepsilon^\alpha) \\
&= \varepsilon + \sqrt{1+\rho c(A)} \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\overline{g}(x_0)}\frac{\tilde\eta_\varepsilon^\alpha}{\sqrt{1+\rho c(A)}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon + (1+\rho c(A)) \cdot \sup \Bigg\{ \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{\overline{g}(x_0)} \eta^\alpha \right) : \\
&\quad \eta^\alpha \in C_c^1(B_\rho(x_0)), 0 \leq \alpha \leq n, \\
&\quad \overline{g}_{\alpha\beta}(x_0)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq 1 \text{ für } x \in B_\rho(x_0) \Bigg\} \\
&\equiv \varepsilon + (1+\rho c(A)) \cdot P_{(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g}(x_0))}(F, B_\rho(x_0))
\end{aligned}
$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$
\int\limits_{B_\rho(x_0) \subset \tilde{N}} |D\chi_F| \leq (1+\rho c(A)) \cdot P_{(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g}(x_0))}(F, B_\rho(x_0)).
$$

(iv) Sei F wieder eine beliebige Caccioppolimenge in $\tilde{N}$, seien $0 < \rho < R$, $x_0 \in A$ und $\eta^\alpha \in C_c^1(B_\rho(x_0))$ mit $\overline{g}_{\alpha\beta}(x_0)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq 1$. Für $\tilde{\eta}^\alpha(x) = \frac{\sqrt{\overline{g}(x_0)}}{\sqrt{\overline{g}(x)}}\eta^\alpha(x)$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
& \overline{g}_{\alpha\beta}(x)\tilde{\eta}^\alpha(x)\tilde{\eta}^\beta(x) \\
= \; & \overline{g}_{\alpha\beta}(x)\frac{\overline{g}(x_0)}{\overline{g}(x)}\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \\
\leq \; & (1+\rho c(A))(\overline{g}_{\alpha\beta}(x_0)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) + (\overline{g}_{\alpha\beta}(x) - \overline{g}_{\alpha\beta}(x_0))\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x)) \\
\leq \; & (1+\rho c(A))(1+\rho c(A)) \\
\leq \; & 1+\rho c(A).
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_\rho(x_0) \subset \tilde{N}} |D\chi_F| \; &\geq \; \frac{1}{1+\rho c(A)} \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\overline{g}(x)}\tilde{\eta}^\alpha(x)) \\
&\geq \; \frac{1}{1+\rho c(A)} \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\overline{g}(x_0)}\eta^\alpha(x))
\end{aligned}
$$

Gehe nun in dieser Ungleichung zum Supremum über alle $\eta^\alpha \in C_c^1(B_\rho(x_0))$ mit $\overline{g}_{\alpha\beta}(x_0)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq 1$ über. Es folgt

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde{N}} |D\chi_F| \geq \frac{1}{1+\rho c(A)} P_{(\mathbb{R}^{n+1},\overline{g}(x_0))}(F, B_\rho(x_0))$$

(v) Aufgrund der konformen Äquivalenz gilt $\overline{g}_{\alpha\beta}(x_0) = \vartheta(x_0)\delta_{\alpha\beta}(x_0)$ mit $0 < \vartheta(x_0) < \infty$. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned}
& P_{(\mathbb{R}^{n+1},\overline{g}(x_0))}(F, B_\rho(x_0)) \\
= \; & \sup\left\{ \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\overline{g}(x_0)}\eta^\alpha) : \eta^\alpha \in C_c^1(B_\rho(x_0)), 0 \leq \alpha \leq n, \right. \\
& \left. \overline{g}_{\alpha\beta}(x_0)\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq 1 \right\} \\
= \; & \sup\left\{ \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\vartheta^{\frac{n+1}{2}}(x_0)\sqrt{\det(\delta_{\alpha\beta})}\eta^\alpha) :, \right. \\
& \left. \eta^\alpha \in C_c^1(B_\rho(x_0)), 0 \leq \alpha \leq n, \delta_{\alpha\beta}\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq \frac{1}{\vartheta(x_0)} \right\} \\
= \; & \vartheta^{\frac{n}{2}+1}(x_0) \sup\left\{ \int\limits_{B_\rho(x_0)} \chi_F \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\eta^\alpha : \eta^\alpha \in C_c^1(B_\rho(x_0)), 0 \leq \alpha \leq n, \right. \\
& \left. \delta_{\alpha\beta}\eta^\alpha(x)\eta^\beta(x) \leq 1 \right\} \\
= \; & \vartheta^{\frac{n}{2}+1}(x_0) \int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F|.
\end{aligned}$$

(vi) Sei nun wieder $E \triangle F \Subset B_\rho(x_0)$. Die in (iii) und (iv) hergeleiteten Ungleichungen lassen sich mit diesem Resultat wie folgt umschreiben:

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde{N}} |D\chi_F| \leq (1+\rho c(A))\vartheta^{\frac{n}{2}+1}(x_0) \int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F|$$

und

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde N} |D\chi_E| \geq \frac{1}{1+\rho c(A)}\vartheta^{\frac{n}{2}+1}(x_0)\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E|.$$

Diese Ungleichungen gelten für beliebiges $x_0\in A$. Aus (ii) erhält man

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde N} |D\chi_E| \leq \int\limits_{B_\rho(x_0)\subset\tilde N} |D\chi_F| + K\rho^{n+2\lambda}.$$

Durch Kombination der obigen Ungleichungen schließt man weiter

$$\frac{1}{1+\rho c(A)}\vartheta^{\frac{n}{2}+1}(x_0)\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| \leq (1+\rho c(A))\vartheta^{\frac{n}{2}+1}(x_0)\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| + K\rho^{n+2\lambda}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{1+\rho c(A)}\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| \leq (1+\rho c(A))\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| + K\vartheta^{-\frac{n}{2}-1}(x_0)\rho^{n+2\lambda}$$

und weiterhin

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| &\leq (1+\rho c(A))\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| \\ &\quad +(1+\rho c(A))K\vartheta^{-\frac{n}{2}-1}(x_0)\rho^{n+2\lambda}.\end{aligned}$$

Der Konformitätsfaktor $\vartheta(x)$ ist positiv und stetig in x. Daher kann man ihn abschätzen mit $\vartheta^{-\frac{n}{2}-1}(x)\leq c(A)$:

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| \leq (1+\rho\tilde c(A))\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| + c(A)\rho^{n+2\lambda}.$$

Sei r mit $0<r<\rho$ so gewählt, daß

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)\setminus B_r(x_0)} |D\chi_E| \leq \omega_{n+1}\rho^n$$

gilt. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_{E\cup B_r(x_0)}| &\leq \int\limits_{B_\rho(x_0)\setminus B_r(x_0)} |D\chi_E| + H^n(\partial B_r(x_0)) \\
&\leq \omega_{n+1}\rho^n + (n+1)\omega_{n+1}r^n \\
&\leq (n+2)\omega_{n+1}\rho^n = c(A)\rho^n.
\end{aligned}$$

$E \cup B_r(x_0)$ ist eine zulässige Vergleichsmenge, die man für F in die obige Ungleichung einsetzen kann. Es ergibt sich daraus

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| \leq c(A)(\rho^n + \rho^{n+2\lambda}) \leq c(A)\rho^n.$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit $\rho\tilde{c}(A)$ und addiert sie zur obigen Ungleichung, so ergibt sich

$$(1+\rho\tilde{c}(A)) \int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| \leq (1+\rho\tilde{c}(A)) \int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| + c(A)(\rho^{n+2\lambda} + \rho^{n+1}).$$

Nehme nun o. E. an, daß $\lambda \leq \frac{1}{2}$ gilt, sonst kann man in der obigen Ungleichung $\lambda = \frac{1}{2}$ setzen, denn es gilt $\rho^{2(\lambda-\frac{1}{2})} \leq R^{2(\lambda-\frac{1}{2})} = c(A)$. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_E| &\leq \int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| + \frac{c(A)}{1+\rho\tilde{c}(A)}\rho^{n+2\lambda} \\
&\leq \int\limits_{B_\rho(x_0)} |D\chi_F| + c(A)\rho^{n+2\lambda}.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung besagt aber genau, daß E in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der euklidischen Metrik fast minimal ist. ■

Ein großer Teil des Beweises von Theorem 6.1 in [1] ist dimensionsunabhängig gültig. Der folgende Beweis konzentriert sich auf die nötigen dimensionsabhängigen Änderungen.

Beweis von Theorem 6.1: Wie in der angegebenen Arbeit erhält man $u_k \in C^{2,\alpha}(S^n)$, $k \geq 3$, mit

$$H|_{\text{graph}\, u_k} = f - \gamma e^{-\mu u_k}[u_k - u_{k-1}]$$

und $u_1 \leq u_k \leq u_{k-1}$. Diese Funktionen konvergieren punktweise, da $u_k(x)$ für festes $x \in S^n$ in k monoton fallend und beschränkt ist. Ihr Limes heiße u. Setze $\varphi_k = \log u_k$ und $\varphi = \log u$. Genauso wie in [1] erhält man, daß $E := \operatorname{sub}\varphi = \{(x,t) : t < \varphi(x),\, x \in S^n\}$ fast minimal in $S^n \times \mathbb{R}$ ist. $S^n \times \mathbb{R}$ ist dabei insbesondere auch metrisches Produkt von S^n und $\mathbb{R}$. Lemma 6.2 zeigt nun, wie man die Menge E auch als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen kann, und daß insbesondere die maßtheoretischen Ränder von E in $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\tilde{N}$ übereinstimmen. Der Ursprung muß nicht gesondert betrachtet werden, da er wegen der Annahme $u_i > 0$ automatisch zu E gehört. Lemma 6.4 besagt dann, daß E auch als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ fast minimal ist. Mit Hilfe von Lemma 6.3 erhält man nun, daß die Blow-up-Kegel um Punkte $x \in \partial E$ als Subgraphen darstellbar sind. Nach dem Regularitätssatz 4.6 ist jeder solche Blow-up-Kegel ein Halbraum. Nun ist [5, Proposition, S. 137, vgl. 7.15] anwendbar. Man erhält $\partial E = \partial^\star E$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Mit Lemma 6.2 kann man diese Aussage wieder in die Mannigfaltigkeit $\tilde{N}$ übertragen und erhält auch hier $\partial E = \partial^\star E$. Der Rest des Beweises in [1] ist wieder dimensionsunabhängig gültig und kann also gemäß dieser Arbeit geführt werden. ∎

7 Zitierte Resultate

Bezeichnung 7.1 In diesem Kapitel bezeichnet Ω eine offene Menge. Falls nicht anders angegeben, gilt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. E und X sind meßbare Teilmengen des $\mathbb{R}^{n+1}$.

Theorem 7.2 (vgl. [3, Theorem 1, p. 371]) *Sei $u \in L^1(\Omega)$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt*

$$u \in BV(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}} |D\chi_{\operatorname{sub} u}| < +\infty.$$

Theorem 7.3 (vgl. [4, Kap. 10, p. 115]) *Ist $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ minimaler nichttrivialer Kegel und $n \leq 6$, dann ist C ein Halbraum.*

Theorem 7.4 (vgl. [4, Theorem 11.8, S. 134]) *Ist E in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ minimal und $\Sigma = (\partial E \setminus \partial^\star E) \cap \Omega$, dann gilt $H^s(\Sigma) = 0$ für alle $s > n - 7$.*

Theorem 7.5 (vgl. [4, Theorem 15.5, S. 174]) *Sei E minimaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Spitze im Ursprung. Ist E im Halbraum $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} < 0\}$ enthalten, so gilt $E = H$.*

Beispiel 7.6 (vgl. [4, Beispiel 16.2, S. 183]) *Sei E meßbar. Dann ist E in Ω genau dann minimal, wenn $E \times \mathbb{R}$ in $\Omega \times \mathbb{R}$ minimal ist.*

Lemma 7.7 (vgl. [4, Lemma 16.3, S. 184]) *Sei u_k eine Folge meßbarer Funktionen in Ω. Nehme an, daß die charakteristischen Funktionen der zugehörigen Subgraphen U_k, χ_{U_k}, in $L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R})$ gegen χ_U konvergieren. Dann ist U der Subgraph einer meßbaren Funktion $u : \Omega \to [-\infty, +\infty]$, und eine Teilfolge der u_k konvergiert fast überall gegen u.*

Theorem 7.8 (vgl. [4, Theorem 16.6, S. 187])
Sei u Quasi-Lösung der Minimalflächengleichung in $\Omega \times \mathbb{R}$. Dann ist P minimal in Ω.

Proposition 7.9 (vgl. [4, Proposition 16.7, S. 188])
Sei u Quasi-Lösung der Minimalflächengleichung in Ω und gelte $P \neq \emptyset$. Dann ist u in Ω lokal nach oben beschränkt.

Theorem 7.10 (vgl. [5, Theorem 1, S. 118]) *Ist X in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ fast minimal mit Konstanten K und λ, dann gilt für $x \in \Omega$ und $0 < \rho <$* $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$

$$|D\chi_X|(B_\rho(x)) \leq \left(\frac{n+1}{2}\omega_{n+1} + K\rho^{2\lambda}\right)\rho^n.$$

Nimmt man zusätzlich $x \in \Omega \cap \partial X$ an, so erhält man als Abschätzung nach unten

$$|D\chi_X|(B_\rho(x)) \geq \rho^n \left(\omega_n - \frac{n}{\lambda}K\rho^{2\lambda}\right).$$

Theorem 7.11 (vgl. [5, Theorem 1, S. 132])
Sei X in der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ fast minimal mit Konstanten K und λ, $x \in \partial C \cap \Omega$. Existiert für ein hinreichend kleines $\eta > 0$ ein $\rho > 0$, $\rho < \min\left\{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \eta^{\frac{1}{\lambda}}\right\}$, *mit*

$$|D\chi_X|(B_\rho(x)) - |D\chi_X(B_\rho(x))| \leq \eta\rho^n,$$

dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\partial X \cap B_\delta(x) = \partial^\star X \cap B_\delta(x).$$

Theorem 7.12 (vgl. [5, Theorem 2, S. 135])
Sei X fast minimal in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Konstanten K und λ, dann ist $\partial^\star X \cap \Omega$ eine $C^{1,\frac{\lambda}{2}}$-Hyperfläche, und es gilt $H^n((\partial X \setminus \partial^\star X) \cap \Omega) = 0$.

Bemerkung 7.13 Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.12 erhält man nach [6, 1.12, S. 11] für $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ sogar, daß $\partial^\star X \cap \Omega$ eine $C^{1,\lambda}$-Hyperfläche ist.

Bemerkung 7.14 (vgl. [4, Beispiel 3.4, S. 44]) Ist C in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ fast minimal, so ist $\partial^\star C$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit, denn für $x \in \partial^\star C$ stimmt $\nu(x)$ mit dem klassischen inneren Normalenvektor an E in x überein. Es gilt allgemein: Ist ∂E in einer offenen Menge Ω eine C^1-Hyperfläche, so gilt $\partial E \cap \Omega = \partial^\star E \cap \Omega$. Der Beweis dieser Tatsache kann unmittelbar auf C^1-Hyperflächen in Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Auch in diesem Fall erhält man: ∂E ist C^1-Mannigfaltigkeit $\Longrightarrow \partial E = \partial^\star E$.

Proposition 7.15 (vgl. [5, Proposition, S. 137]) *Ist* X *in* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *fast minimal und* $0 \in \partial X \cap \Omega$, *so enthält die Familie* $\{X_\rho\}_{\rho>0}$ *eine Teilfolge* $X_h = X_{\rho_h}$ *mit* $\rho_h \to 0$ *und* $X_h \to C$ *in* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$. C *ist minimaler Kegel und es gilt* $0 \in \partial^\star C \Longleftrightarrow 0 \in \partial^\star X$.

Bemerkung 7.16 (vgl. [5, S. 139]) *Unter den Voraussetzungen von Proposition 7.15 gilt*

$$\int_{B_\rho} |D\chi_C| = \lim_{t\to 0} t^{-n} \int_{B_{\rho t}} |D\chi_X|.$$

Literatur

[1] C. Gerhardt: Closed Hypersurfaces of prescribed Mean Curvature in locally conformally flat Riemannian Manifolds, J. Diff. Geom. **48** (1998), 587-613.

[2] C. Gerhardt: On the Regularity of Solutions to Variational Problems in $BV(\Omega)$, Math. Z. **149** (1976), 281-286.

[3] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček: Cartesian Currents in the Calculus of Variations I, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 37, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1998, 736 Seiten.

[4] E. Giusti: Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Monographs in Math. Vol. 80, Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart, 1984, 240 Seiten.

[5] U. Massari, M. Miranda: Minimal Surfaces of Codimension One, Mathematics Studies Vol. 91, North-Holland, Amsterdam New York Oxford, 1984, 242 Seiten.

[6] I. Tamanini: Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in $\mathbb{R}^N$, Quaderni Dipartimento Math. Univ. Leece **1**, (1984), 92 Seiten.

[7] W. P. Ziemer: Weakly differentiable Functions, Graduate Texts in Mathematics Vol. 120, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1989, 308 Seiten.