Translatierende und homothetisch expandierene Lösungen des mittleren Krümmungsflusses

Bachelorarbeit im Fach Mathematik

von
Jonas Blessing

betreut von
Prof. Dr. Oliver C. Schnürer

eingereicht am Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz

Oktober 2017

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. Oliver C. Schnürer für die sehr gute Betreuung meiner Bachelorarbeit bedanken.

Zusammenfassung

Im ersten Teil meiner Bachelorarbeit habe ich die Existenz eines unter dem mittleren Krümmungsfluss im Minkowskiraum translatierenden rotationssymmetrischen ganzen Graphen bewiesen. Dieser ist asymptotisch zum Lichtkegel. Die Asymptotik hierfür habe ich bestimmt. Im zweiten Teil meiner Bachelorarbeit habe ich die Existenz eines unter dem mittleren Krümmungsfluss im euklidischen Raum homothetisch expandierenden rotationssymmetrischen ganzen Graphen bewiesen. Numerische Untersuchungen legen die Vermutung nahe, dass dieser ebenfalls asymptotisch zu einem Kegel ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Geometrische Grundbegriffe im Minkowskiraum

Wir verwenden im Folgenden [1] und [3].

1.1. **Normale, Metrik, 2. Fundamentalform, mittlere Krümmung.**

Definition 1.1.1 (Minkowskiraum)**.**
(i) Als Minkowskiraum $\mathbb{R}^{1,n}$ bezeichnen wir den $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Pseudskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}\colon \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto -x^0y^0+x^i\delta_{ij}y^j$.
(ii) Sei $x\in\mathbb{R}^{1,n}$. x heißt
  (a) raumartig, falls $\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}>0$,
  (b) lichtartig, falls $\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}=0$,
  (c) zeitartig, falls $\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}<0$.
(iii) Als Lichtkegel bezeichnen wir die Menge aller zeitartigen Vektoren.
(iv) Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{1,n}$ eine Hyperfläche. X heißt raumartig, falls alle von Null verschiedenen Tangentialvektoren, d.h. Vektoren der Form $\mu^iX_i(x)\neq 0$ mit $\mu^i\in\mathbb{R},\ x\in\Omega$, raumartig sind.

Die Hyperflächen, welche wir im Folgenden betrachten sind stets raumartig, ohne dass wir dies explizit erwähnen. Desweiteren verwenden wir im Folgenden die Einsteinsche Summenkonvention.

Definition 1.1.2 (Normale)**.**
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{1,n}$ eine immersierte Hyperfläche. Eine stetige Abbildung $\nu:\ \Omega\to\mathbb{R}^{1,n}$ mit
(i) $\langle X_i(x),\nu(x)\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}=0$ für alle $x\in\Omega$ und für $i=1,\ldots,n$,
(ii) $\langle \nu(x),\nu(x)\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}=-1$ für alle $x\in\Omega$,

heißt Einheitsnormalenfeld an X. $\nu(x)$ heißt Normale an X im Punkt x.

Bemerkung 1.1.3 (Vorzeichenkonvention)**.**
Im Folgenden wählen wir bei graphischen Hyperflächen im Minkowskiraum stets die obere Normale.

Lemma 1.1.4 (Raumartige Flächen)**.**
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{1,n}$ eine Hyperfläche. Dann gelten
(i) X ist genau dann raumartig, wenn $g_{ij}>0$ in Ω gilt.
(ii) Sei $X=(u,\mathrm{id})$ eine graphische Lösung. Dann gilt $g_{ij}>0$ in Ω genau dann, wenn $|Du|<1$ in Ω gilt.

Beweis.
(i) „$\Longrightarrow$“: Sei $y\in\mathbb{R}^n$, $y\neq 0$. Seien $\left(\bar g_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta}$ die Koordinaten des Pseudoskalarprodukts, d.h. $\bar g_{11}=-1$, $\bar g_{\alpha\alpha}=1$ für $2\le\alpha\le n+1$ und $\bar g_{\alpha\beta}=0$ für $\alpha\neq\beta$. Dann ist $y^ig_{ij}y^j=\left(y^iX_i^\alpha\right)\bar g_{\alpha\beta}\left(y^jX_j^\beta\right)>0$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $\mu^iX_i\neq 0$ ein Tangentialvektor. Dann ist
$$\left(\mu^iX_i^\alpha\right)\bar g_{\alpha\beta}\left(\mu^jX_j^\beta\right)=\mu^ig_{ij}\mu^j>0.$$
(ii) „$\Longrightarrow$“: Sei $x\in\Omega$ mit $Du(x)\neq 0$. Dann gilt an der Stelle x
$$\begin{aligned}\left(1-|Du|^2\right)|Du|^2&=-|Du|^2|Du|^2+|Du|^2=-u^iu_iu_ju^j+u^i\delta_{ij}u^j\\&=u^ig_{ij}u^j>0.\end{aligned}$$
Daraus folgt $|Du|<1$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $y\in\mathbb{R}^n$, $y\neq 0$. Dann ist
$$\begin{aligned}y^ig_{ij}y^j&=-y^iu_iu_jy^j+y^i\delta_{ij}y^j\ge -|y||Du||Du||y|+|y|^2\\&=\left(1-|Du|^2\right)|y|^2>0.\end{aligned}$$
□

Beispiel 1.1.5.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(\Omega)$, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{1,n}$, $x \mapsto (u(x), x)$ eine graphische Hyperfläche, so gilt für die obere Normale $\nu(x) = \frac{(1, Du(x))}{\sqrt{1-|Du(x)|^2}}$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ ist $X_i = (u_i, e_i)$ und $\langle X_i, \nu\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}} = \frac{-u_i+u_i}{\sqrt{1-|Du|^2}} = 0$.
Desweiteren ist $\langle \nu, \nu\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}} = \frac{-1+|Du|^2}{1-|Du|^2} = -1$. □

Definition 1.1.6 (Metrik)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{1,n}$ eine C^1-Immersion. Definiere die Metrik $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ von X durch

$$g_{ij} \colon \Omega \to \mathbb{R},\ g_{ij}(x) := \langle X_i(x), X_j(x)\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}.$$

Mit $(g^{ij})_{1\le i,j\le n}$ bezeichnen wir die Inverse von $(g_{ij})_{i,j}$, d.h. $(g^{ij})_{i,j}$ ist eine Matrix, für die gilt $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$.

Beispiel 1.1.7.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(\Omega)$, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{1,n}$, $x \mapsto (u(x), x)$ eine graphische Hyperfläche. Dann gelten $X_i = (u_i, e_i)$ und somit

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}} = -u_iu_j + \delta_{ij}.$$

Desweiteren ist

$$g^{ij} = \delta^{ij} + \frac{u^iu^j}{1-|Du|^2}.$$

Beweis. Für $i, k = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned} g^{ij}g_{jk} &= \left(\delta^{ij} + \frac{u^iu^j}{1-|Du|^2}\right)(-u_ju_k + \delta_{jk}) = -u^iu_k + \delta^i_k - \frac{u^i|Du|^2u_k - u^iu_k}{1-|Du|^2} \\ &= -u^iu_k + \delta^i_k - \left(-u^iu_k\right) = \delta^i_k. \end{aligned}$$

Somit hat die inverse Metrik die behauptete Gestalt. □

Definition 1.1.8 (Zweite Fundamentalform)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{1,n}$ eine C^2-Immersion mit Normale ν. Definiere die zweite Fundamentalform $(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ von X durch

$$h_{ij} \colon \Omega \to \mathbb{R},\ h_{ij}(x) := -\langle X_{ij}(x), \nu(x)\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}.$$

Beispiel 1.1.9.
Sei $X = (u, \mathrm{id})$ eine graphische Hyperfläche. Dann gelten $X_{ij} = (u_{ij}, 0)$ und

$$h_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{1-|Du|^2}}\left\langle \begin{pmatrix} u_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ Du \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1-|Du|^2}}$$

Definition 1.1.10 (Hauptkrümmungen)**.**
Die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij} heißen Hauptkrümmungen von X. Bezeichne diese mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Definition 1.1.11 (Mittlere Krümmung)**.**
Wir nennen $H := \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ mittlere Krümmung.

Beispiel 1.1.12.
Im graphischen Fall gilt

$$\begin{aligned} H = g^{ij}h_{ij} &= \left(\delta^{ij} + \frac{u^iu^j}{1-|Du|^2}\right)\left(\frac{u_{ij}}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) \\ &= \frac{\delta^{ij}u_{ij}}{\sqrt{1-|Du|^2}} + \frac{u^iu^ju_{ij}}{\sqrt{1-|Du|^2}^3} = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right). \end{aligned}$$

Definition 1.1.13 (mittlerer Krümmungsfluss)**.**
Sei $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Familie immersierter Hyperflächen $X(\cdot,t)_{t\in[0,T)}$, welche zweimal im Ort und einmal in der Zeit differenzierbar ist, mit $X(\cdot,t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{1,n}$ erfüllt den mittleren Krümmungsfluss (MCF), falls

$$\langle \dot{X}, \nu\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}} = -H \quad \text{auf} \quad \Omega \times (0,T)$$

gilt und X auf $\Omega \times [0,T)$ stetig ist.

1.2. **Der graphische mittlere Krümmungsfluss.**

Lemma 1.2.1 (Graphischer mittlerer Krümmungsfluss)**.**
Sei $T > 0$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X\colon \tilde{\Omega} \times [0,T) \to \mathbb{R}^{1,n}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, so dass es eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^{2;1}(\Omega \times [0,T))$ mit $\operatorname{im}(X(\cdot,t)) \cap (\Omega \times \mathbb{R}) = \operatorname{graph}(u(\cdot,t))$ für alle $t \in [0,T)$ gibt. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$\dot{u} = \sqrt{1-|Du|^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) = \Delta u + \frac{u^i u^j u_{ij}}{1-|Du|^2} \quad \textit{in} \quad \Omega \times (0,T).$$

Beweis. Bezeichne für $(\xi,t) \in \tilde{\Omega} \times [0,T)$ mit $x(\xi,t)$ die orthogonale Projektion von $X(\xi,t)$ auf $\mathbb{R}^n \equiv \{0\}\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ bezüglich des euklidischen Skalarproduktes. Dann ist für alle $(\xi,t) \in \tilde{\Omega} \times [0,T)$ mit $X(\xi,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
X(\xi,t) &= (u(x(\xi,t),t), x(\xi,t)),\\
\frac{d}{dt}X &= (u_i\dot{x}^i + \dot{u}, \dot{x}),\\
-H = \langle \dot{X}, \nu\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}} &= \frac{1}{\sqrt{1-|Du|^2}}\left\langle \begin{pmatrix} u_i\dot{x}^i + \dot{u} \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ Du \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^{1,n}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-|Du|^2}}\left(-u_i\dot{x}^i - \dot{u} + u_i\dot{x}^i\right) = \frac{-\dot{u}}{\sqrt{1-|Du|^2}}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\dot{u} = \sqrt{1-|Du|^2}H = \sqrt{1-|Du|^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right).$$

□

2. Translatierende Lösungen im Minkowskiraum

Wir betrachten im folgenden stets Lösungen, welche in vertikaler Richtung translatieren.

2.1. **Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.**

Lemma 2.1.1 (Reduktion auf Geschwindigkeit eins)**.**
Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^{1,n}$ *ein unter dem mittleren Krümmungsfluss mit Geschwindigkeit eins translatierender ganzer Graph, d.h.* u *erfülle die Differentialgleichung*

$$1 = \dot{u} = \sqrt{1-|Du|^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty).$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. *Dann ist*

$$\hat{u}\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^{1,n},\ \hat{u}(x,t) := \frac{1}{\lambda}u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

eine mit Geschwindigkeit λ *translatierende Lösung.*

Beweis. Sei $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty)$. Dann gelten

$$\dot{\hat{u}}(x,t) = \lambda \dot{u}(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda,\ \hat{u}_i(x,t) = u_i(\lambda x, \lambda^2 t),\ \hat{u}_{ij}(x,t) = \lambda u_{ij}(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lambda = \dot{\hat{u}}(x,t) = \lambda \dot{u}(\lambda x, \lambda^2 t) &= \lambda \left(\Delta u + \frac{u^i u^j u_{ij}}{1-|Du|^2}\right)(\lambda x, \lambda^2 t) \\ &= \left(\Delta \hat{u} + \frac{\hat{u}^i \hat{u}^j \hat{u}_{ij}}{1-|D\hat{u}|^2}\right)(x,t).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.2 (Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung)**.**
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $u\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^{1,n}$ *eine mit Geschwindigkeit* λ *translatierende Lösung des mittleren Krümmungsflusses, d.h. eine Lösung von*

$$\lambda = \dot{u} = \sqrt{1-|Du|^2}\,\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right).$$

Dann gibt es $U \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *mit* $u(x,t) = U(x) + \lambda t$ *für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty)$. *Gibt es ein* $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$ *mit* $U(x) = \Phi(|x|)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, *so erfüllt* $\varphi := \Phi'$ *auf* $\mathbb{R}_{>0}$ *die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\varphi' = \left(\lambda - \frac{n-1}{r}\varphi\right)\left(1-\varphi^2\right).$$

Verwende dabei die Notation $r = |x|$.

Beweis. Sei $U = \Phi(|\cdot|)$. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gelten

$$\begin{aligned} U_i(x) &= \Phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \\ U_{ij}(x) &= \Phi''(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\Phi'(|x|)}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right), \\ 1-|DU|^2 &= 1-(\Phi')^2, \\ \Delta U(x) &= \Phi''(|x|) + \Phi'(|x|)\frac{n-1}{|x|}, \\ U^i U^j U_{ij} &= (\Phi')^2\,\Phi''. \end{aligned}$$

Erhalte daraus für $r = |x| > 0$

$$\lambda = \dot{u} = \Delta U + \frac{U^i U^j U_{ij}}{1 - |DU|^2} = \Phi'' + \Phi' \frac{n-1}{r} + \frac{(\Phi')^2 \Phi''}{1 - (\Phi')^2}.$$

Mit $\varphi = \Phi'$ folgt

$$\lambda = \varphi' + \frac{n-1}{r}\varphi + \frac{\varphi'\varphi^2}{1-\varphi^2} = \frac{\varphi'(1-\varphi^2) + \varphi'\varphi^2}{1-\varphi^2} + \frac{n-1}{r}\varphi = \frac{\varphi'}{1-\varphi^2} + \frac{n-1}{r}\varphi.$$

Es folgt für φ die Differentialgleichung

$$\varphi' = \left(\lambda - \frac{n-1}{r}\varphi\right)(1-\varphi^2) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}_{>0}.$$

□

Lemma 2.1.3 (Geschwindigkeit Null)**.**
Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^{1,n}$, $(x,t) \mapsto \Phi(|x|)$ eine rotationssymmetrische translatierende Lösung mit Geschwindigkeit Null. Dann ist u konstant.

Beweis. $\varphi := \Phi'$ erfüllt auf $\mathbb{R}_{>0}$ die Gleichung $\varphi' = -\frac{n-1}{r}\varphi(1-\varphi^2)$.
Da wir raumartige Flächen betrachten, gilt $|\varphi| < 1$, d.h $(1-\varphi^2) > 0$. Aufgrund der Regularität der Lösung im Ursprung, Lemma 2.2.1, gilt $\varphi' \to 0$ für $r \to 0$. Angenommen $\varphi(1) \neq 0$.
Sei $\varphi(1) > 0$. Angenommen, es gibt $r \in (0,1]$ mit $\varphi(r) = 0$. Wähle r maximal. Da für alle $s \in (r,1]$ gilt $\varphi(s) > 0$ und $\varphi'(s) < 0$, folgt $\varphi(r) > \varphi(1) > 0$. Widerpruch. Somit ist $\varphi(r) > 0$ für alle $r \in (0,1]$ im Widerspruch zu $\varphi \to 0$ für $r \to 0$.
Sei $\varphi(1) < 0$. Angenommen es gibt $r \in (0,1]$ mit $\varphi(r) = 0$. Wähle r maximal. Da für alle $s \in (r,1]$ gilt $\varphi(s) < 0$ und $\varphi'(s) > 0$, folgt $\varphi(r) < \varphi(1) < 0$. Widerspruch. Somit ist $\varphi(r) < 0$ für alle $r \in (0,1]$ im Widerspruch zu $\varphi \to 0$ für $r \to 0$.
Es folgt $\varphi(1) = 0$. Da φ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \varphi' = -\frac{n-1}{r}\varphi(1-\varphi^2), & r \in (0,\infty), \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

löst und $\chi \equiv 0$ die eindeutige Lösung davon ist, folgt $\varphi \equiv 0$. □

Bemerkung 2.1.4.
Aufgrund obiger Überlegungen betrachten wir im Folgenden stets mit Geschwindigkeit eins translatierende Lösungen und die dazugehörige Gleichung

$$\varphi'(r) = \left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi(r)\right)(1 - \varphi^2(r)) \tag{2.1}$$

2.2. **Existenz nahe $r = 0$.**

Das folgende Lemma stammt aus [3].

Lemma 2.2.1 (Regularität im Ursprung)**.**
Sei $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$, $n \geq 2$ und $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Phi(|x|)$. Genau dann ist U in einer Umgebung des Ursprungs von der Klasse C^2, falls $\varphi := \Phi'$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} = \lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r} \in \mathbb{R}$ *existiert,*
(ii) $\lim\limits_{r \searrow 0} \varphi(r) = \lim\limits_{r \searrow 0} \Phi'(r) = 0$ *und*
(iii) $\lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} - \varphi'(r) = \lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r} - \Phi''(r) = 0.$

Beweis.
„$\Longrightarrow$“:

(i) Für $x \neq 0$ gelten $U_i = \Phi' \frac{x_i}{|x|}$ und $U_{ij} = \Phi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\Phi'}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)$.
Da U'' stetig ist folgt $U_{22}(0) = \lim\limits_{r \searrow 0} U_{22}(re_1) = \lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r}$.

(ii) Mit (i) folgt $\lim\limits_{r \searrow 0} \Phi'(r) = \lim\limits_{r \searrow 0} r \cdot \lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r} = 0$.

(iii) Aus $U_{11}(0) = \lim\limits_{r \searrow 0} U_{11}(re_1) = \lim\limits_{r \searrow 0} \Phi''(r)$ und $U_{11}(0) = \lim\limits_{r \searrow 0} U_{11}(re_2)$
$= \lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r}$ folgt $\lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r} - \Phi''(r) = U_{11}(0) - U_{11}(0) = 0$.

„$\Longleftarrow$“:

(1) Zeige $U'(0) = 0$:
Zeige dazu $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta \Rightarrow |U(x) - U(0) - 0(x-0)| \leq \varepsilon |x|$.
Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund von (ii) existiert ein $\delta > 0$ mit $\sup_{|y| \leq \delta} |\Phi'(|y|)| < \varepsilon$.
Sei $x \in \mathbb{R}$, $0 < |x| < \delta$. Definiere $v\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto U(x) - U(tx)$. Dann gelten $v(0) = U(x) - U(0)$ und $v(1) = 0$. Da $v \in C^1((0,1))$ folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}|v(0)| = |v(0) - v(1)| &\leq \sup_{t \in (0,1)} |v'(t)|(1-0) = \sup_{t \in (0,1)} |\langle \nabla U(tx), x \rangle| \\ &= \sup_{t \in (0,1)} \left| \frac{\Phi'(|tx|)}{|tx|} t|x|^2 \right| \leq \sup_{0 < |y| \leq \delta} |\Phi'(|y|)||x| \leq \varepsilon |x|.\end{aligned}$$

Es folgt $\nabla U(0) = 0$. Aus $\nabla U(x) = \frac{\Phi'(|x|}{|x|} x \to 0 = \nabla U(0)$ für $x \to 0$ folgt die Stetigkeit von ∇U.

(2) Nach (i) existiert $a := \lim\limits_{r \searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r} \in \mathbb{R}$. Zeige $\operatorname{Hess} U(0) = a \cdot \mathbb{1}$. Zeige dazu: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta \Rightarrow |\nabla U(x) - \nabla U(0) - ax| \leq \varepsilon |x|$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition von a und wegen (iii) existiert ein $\delta > 0$, so dass $\sup\limits_{0<|y|<\delta} \left| -\frac{\Phi'(|y|)}{|y|} + \Phi''(|y|) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\sup\limits_{0<|y|<\delta} \left| \frac{\Phi'(|y|)}{|y|)} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ gelten. Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < |x| < \delta$. Definiere $v\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \nabla U(x) - \nabla U(tx) - a(1-t)x$. Es gelten $v(0) = \nabla U(x) - \nabla U(0) - ax$ und $v(1) = 0$. Da $v \in C^1((0,1))$ folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}&|v(0)| = |v(1) - v(0)| \leq \sup_{t \in (0,1)} |v'(t)|(1-0) = \sup_{t \in (0,1)} |\operatorname{Hess} U(tx)x - ax| \\ &\leq \sup_{0<|y|<\delta} \left| \left(\left(\frac{\Phi'(|y|)}{|y|} \left(\delta_{ij} - \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right) + \Phi''(|y|) \frac{y_i y_j}{|y|^2} \right) x^j - ax \right)_{1 \leq i \leq n} \right| \\ &\leq \sup_{0<|y|<\delta} \left| -\frac{\Phi'(|y|)}{|y|} + \Phi''(|y|) \right| \left| \left(\frac{y_i y_j}{|y|^2} x^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right| + \left| \frac{\Phi'(|y|)}{|y|} - a \right| \left| \left(\delta_{ij} x^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right| \\ &\leq \underbrace{\sup_{0<|y|<\delta} \left| \frac{-\Phi'(|y|)}{|y|} + \Phi''(|y|) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \frac{|y||y||x|}{|y|^2} + \underbrace{\sup_{0<|y|<\delta} \left| \frac{\Phi'(|y|)}{|y|} - a \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} |x| \\ &\leq \varepsilon |x|.\end{aligned}$$

Es folgt $\operatorname{Hess} U(0) = a \cdot \mathbb{1}$. $\operatorname{Hess} U$ ist stetig, denn für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} U(x) &= \frac{\Phi'(|x|)}{|x|} \left(\mathbb{1} - \frac{xx^T}{|x|^2} \right) + \Phi''(|x|) \frac{xx^T}{|x|^2} \\ &= \frac{\Phi'(|x|)}{|x|} \mathbb{1} + \left(\Phi''(|x|) - \frac{\Phi'(|x|)}{|x|} \right) \frac{xx^T}{|x|^2} \to a\mathbb{1} = \operatorname{Hess} U\end{aligned}$$

für $x \to 0$, wegen (i) und (iii). □

Lemma 2.2.2.
Sei φ eine Lösung von (2.1) auf $(0,\infty)$. Dann ist $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\psi(r) := \varphi(e^{-r})$ eine Lösung von

$$\psi'(r) = ((n-1)\psi(r) - e^{-r})(1-\psi^2(r)). \tag{2.2}$$

Ist andererseits $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Lösung von (2.2), so ist $\varphi\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(r) := \psi(-\log(r))$ eine Lösung von (2.1). Erfüllt ψ die Regularitätsbedingungen

(i') $\lim\limits_{r\to\infty} e^r\psi(r) \in \mathbb{R}$ *existiert,*

(ii') $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r) = 0$,

(iii') $\lim\limits_{r\to\infty} e^r(\psi(r)+\psi'(r)) = 0$,

so erfüllt φ die Regularitätsbedingungen aus Lemma 2.2.1.

Beweis. Sei φ eine Lösung von (2.1), $\psi(r) := \varphi(e^{-r})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\psi'(r) &= -e^{-r}\varphi'(e^{-r}) = -e^{-r}\left(1-(n-1)e^r\psi(e^{-r})\right)\left(1-\varphi^2(e^{-r})\right)\\ &= \left((n-1)\varphi(e^{-r})-e^{-r}\right)\left(1-\varphi^2(e^{-r})\right) = \left((n-1)\psi(r)-e^{-r}\right)\left(1-\psi^2(r)\right).\end{aligned}$$

Ist andererseits ψ eine Lösung von (2.2), $\varphi(r) := \psi(-\log(r))$, so ist

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= -\frac{\psi'(-\log(r))}{r} = -\frac{1}{r}\left((n-1)\psi(-\log(r)) - e^{-(-log(r))}\right)\left(1-\psi^2(-\log(r))\right)\\ &= -\frac{1}{r}((n-1)\varphi(r)-r)\left(1-\varphi^2(r)\right) = \left(1-\frac{n-1}{r}\varphi(r)\right)\left(1-\varphi^2(r)\right).\end{aligned}$$

Erfülle ψ die Regularitätsbedingungen. Dann folgt für φ

(i) $\lim\limits_{r\searrow 0}\frac{\varphi(r)}{r} = \lim\limits_{r\searrow 0} e^{-\log(r)}\psi(-\log(r)) = \lim\limits_{r\to\infty} e^r\psi(r)\in\mathbb{R}$ existiert,

(ii) $\lim\limits_{r\searrow 0}\varphi(r) = \lim\limits_{r\searrow 0}\psi(-\log(r)) = \lim\limits_{r\to\infty}\psi(r) = 0$,

(iii) $\lim\limits_{r\searrow 0}\frac{\varphi(r)}{r} - \varphi'(r) = \lim\limits_{r\searrow 0} e^{-\log(r)}\psi(-\log(r)) - e^{-\log(r)}\psi'(-\log(r))$
$= \lim\limits_{r\to\infty} e^r(\psi(r)+\psi'(r)) = 0.$ □

Theorem 2.2.3.
Sei $n\geq 2$. Es gibt genau ein $a\in(-1,1)$, so dass die Lösung ψ von

$$\begin{cases}\psi'(r) = ((n-1)\psi(r)-e^{-r})\left(1-\psi^2(r)\right)\\ \psi(0) = a,\end{cases}$$

auf $[0,\infty)$ existiert die Regularitätsbedingungen (i'),(ii'),(iii') aus Lemma 2.2.2 erfüllt.

Beweis.
Existenz:

(1) (2.2) hat die beiden konstanten Lösungen $\psi\equiv 1$ und $\psi\equiv -1$. (Diese haben keine geometrischen Bedeutung, da für eine raumartige Lösung $|\psi|<1$ gilt, sind im Folgenden jedoch nützlich.) Eine Lösung ψ mit Anfangswert $|\psi(0)|\geq 1$ kann aufgrund der beiden konstanten Lösungen und des Vergleichsprinzips die Bedingung (i') nicht erfüllen. Daher betrachten wir im Folgenden Lösungen mit $\psi(0)\in(-1,1)$. Für eine Lösung ψ von (2.2) mit Anfangswert $\psi(0)\in(-1,1)$ gilt somit aufgrund des Vergleichsprinzips, dass ψ auf $[0,\infty)$ existiert und dort die Abschätzung $|\psi|<1$ erfüllt.
Bezeichne im Folgenden für $a\in(-1,1)$ mit ψ_a die Lösung von (2.2) mit Anfangswert $\psi_a(0)=a$. Sei $m\in\mathbb{N}$. Dann ist $0<\frac{e^{-m}}{n-1}<1$. Aufgrund der beiden konstanten Lösungen, der Langzeitexistenz und der stetigen Abhängigkeit vom Anfangswert existiert ein $a_m\in(-1,1)$ mit $\psi_{a_m}(m) = \frac{e^{-m}}{n-1}$.

(2) Sei ψ eine Lösung von (2.2) mit $|\psi| < 1$. Angenommen, es existiert ein $r_0 \in [0,\infty)$ mit $\psi'(r_0) \geq 0$. Dann gilt $\psi'(r) > 0$ für alle $r \geq r_0$: Es gilt $1-\psi(r_0)^2 > 0$. Aus $\psi'(r_0) \geq 0$ folgt somit $(n-1)\psi(r_0) - e^{-r_0} \geq 0$. Desweiteren ist

$$\frac{d}{dr}(n-1)\psi(r) - e^{-r}|_{r=r_0} = (n-1)\psi'(r) + e^{-r}|_{r=r_0} > 0.$$

Da stets $(1-\psi^2) > 0$ gilt, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\psi'(r) > 0$ auf $(r_0, r_0+\varepsilon)$. Aufgrund obiger Abschätzungen bleibt diese Ungleichung auf (r_0, ∞) erhalten.

(3) Sei ψ eine Lösung von (2.2). Angenommen es existiert ein $r_0 \in [0,\infty)$ mit $-1 < \psi(r_0) \leq 0$. Aufgrund des Vergleichsprinzips gilt $|\psi| < 1$ und $(1-\psi^2) > 0$. Somit ist $\psi'(r_0) \leq -e^{-r_0}(1-\psi^2(r_0)) < 0$ und $\psi < 0$ auf (r_0,∞). Anwendung dieses Resultats mit $r_0 = 0$ ergibt insbesondere: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $a_m > 0$. Ansonsten wäre $0 < \frac{e^{-m}}{n-1} = \psi_{a_m}(m) < 0$.

(4) **Beh.:** $(a_m)_m$ ist monoton fallend.
Sei $l \geq m$. Angenommen $a_l > a_m$. Aufgrund des Vergleichsprinzips ist dann $\psi_{a_l}(m) > \psi_{a_m}(m) = \frac{e^{-m}}{n-1}$. Es folgt

$$\psi'_{a_l}(m) = \underbrace{((n-1)\psi_{a_l}(m) - e^{-m})}_{>(n-1)\frac{e^{-m}}{n-1} - e^{-m} = 0}\underbrace{(1-\psi^2_{a_l}(m))}_{>0} > 0.$$

Nach (2) ist somit $\psi'_{a_l} > 0$ auf $[m,\infty)$. Für $l > m$ ergibt sich der Widerspruch

$$\frac{e^{-l}}{n-1} = \psi_{a_l}(l) > \psi_{a_l}(m) > \frac{e^{-m}}{n-1} > \frac{e^{-l}}{n-1}.$$

(5) Nach (1) und (3) ist $(a_m)_m \subset (0,1)$ und nach (4) monoton fallend. Daher ist $a := \lim\limits_{m\to\infty} a_m \in [0,1)$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist nach Vergleichsprinzip $\psi_a(m) \leq \psi_{a_m}(m) = \frac{e^{-m}}{n-1}$. Desweiteren ist aufgrund der stetigen Abhängigkeit vom Anfangswert $\psi_a(m) = \lim\limits_{m\to\infty} \psi_{a_l}(m) \geq 0$, denn für $l > m$ ist wegen (3) $\psi_{a_l}(m) > 0$. Somit gilt $\psi_a(m) \in \left[0, \frac{e^{-m}}{n-1}\right)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(6) **Beh.:** $\forall r \geq 0 : \psi_a(r) \in \left(0, \frac{e^{-r}}{n-1}\right)$.
Sei $r \geq 0$. Angenommen $\psi_a(r) \leq 0$. Für $l \in \mathbb{N}_{>r}$ folgt dann mit (3) $\psi_a(l) < 0$ im Widerspruch zu (5). Angenommen $\psi_a(r) \geq \frac{e^{-r}}{n-1}$. Dann ist aufgrund von (2.2) $\psi'_a(r) \geq 0$. Aus (2) folgt, dass ψ_a auf $[r,\infty)$ wachsend ist im Widerspruch zu (5).

(7) Sei im Folgenden $\psi := \psi_a$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\chi(r) := e^r\psi(r)$.
Beh.: $\exists r_0 > 0 \forall r \geq r_0 : \frac{1-\varepsilon}{n} \leq \chi(r) \leq \frac{1}{n}$.
Nach (6) gilt $0 < \chi(r) < \frac{1}{n-1}$ für alle $r \in [0,\infty)$. Da $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$, existiert $r_0 \geq 0$, so dass für alle $r \geq r_0$ gilt: $\psi^2(r) < \varepsilon$. Sei $r \geq r_0$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\chi'(r) &= e^r\psi(r) + e^r\psi'(r) \\
&= e^r\psi(r) + e^r((n-1)\psi(r) - e^{-r})(1-\psi^2(r)) \\
&= e^r\psi(r) + ((n-1)e^r\psi(r) - 1)(1-\psi^2(r)) \\
&= \chi(r) + \underbrace{((n-1)\chi(r) - 1)}_{<0}\underbrace{(1-\psi^2(r))}_{>1-\varepsilon} \\
&\leq \chi(r) + ((n-1)\chi(r) - 1)(1-\varepsilon) \\
&= n\chi(r) \underbrace{-\varepsilon(n-1)\chi(r)}_{<0} - 1 + \varepsilon \\
&\leq n\chi(r) - 1 + \varepsilon \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\chi'(r) &= \chi(r) + \underbrace{((n-1)\chi(r)-1)}_{<0}\underbrace{(1-\psi^2(r)}_{<1} \\
&\geq \chi(r) + (n-1)\chi(r) - 1 \\
&= n\chi(r) - 1. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Beh.: Es gilt $\chi(r) \leq \frac{1}{n}$ für alle $r \geq 0$.
Angenommen es gibt $r_1 \geq 0$ mit $\chi(r_1) > \frac{1}{n}$. Sei χ_1 eine Lösung von $\chi_1' = n\chi_1 - 1$. Diese Gleichung lösen wir nun explizit. Definiere $u := \chi_1 - \frac{1}{n}$. Dann ist $u' = \chi_1' = n\chi_1 - 1 = nu$. Somit gilt $u(r) = \lambda e^{nr}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\chi_1(r) = u + \frac{1}{n} = \lambda e^{nr} + \frac{1}{n}$. Da $\chi(r_1) > \frac{1}{n}$ gibt es ein $\lambda > 0$ mit $\chi_1(r_1) < \chi(r_1)$. Die untere Abschätzung (2.4) für χ' gilt für alle $r \geq 0$. Mit dem Vergleichsprinzip folgt somit $\chi(r) \geq \chi_1(r)$ für alle $r \geq r_1$. Da $\lambda > 0$ gibt es jedoch ein $r \geq r_1$ mit $\chi(r) \geq \chi_1(r) \geq 1$, was im Widerspruch zu $\chi(r) < \frac{1}{n-1}$ steht.
Beh.: $\chi(r) \geq \frac{1-\varepsilon}{n}$ für alle $r \geq r_0$.
Sei χ_2 eine Lösung von $\chi_2' = n\chi_2 - (1-\varepsilon)$, $u := \chi_2 - \frac{1-\varepsilon}{n}$. Dann ist $u' = \chi_2' = n\chi_2 - (1-\varepsilon) = nu$. Somit gilt $u(r) = \lambda e^{nr}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\chi_2(r) = u + \frac{1-\varepsilon}{n} = \lambda e^{nr} + \frac{1-\varepsilon}{n}$. Angenommen es gibt $r_1 \geq r_0$ mit $\chi(r) < \frac{1-\varepsilon}{n}$. Dann gibt es $\lambda < 0$ mit $\chi_2(r_1) > \chi(r_1)$. Mit dem Vergleichsprinzip und der oberen Abschätzung (2.3) für χ' folgt $\chi_2(r) \geq \chi(r)$ für alle $r \geq r_0$. Da $\lambda < 0$ ist, gibt es jedoch ein $r \geq r_1$ mit $\chi(r) \leq \chi_2(r) < 0$, was im Widerspruch zu $\chi > 0$ steht.

(8) Aus (7) folgt $\lim_{r\to\infty} e^r\psi(r) = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$. Dies zeigt (i'), woraus auch (ii') folgt. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
e^r\psi'(r) &= e^r((n-1)\psi(r) - e^{-r})(1-\psi^2(r)) \\
&= ((n-1)\underbrace{e^r\psi(r)}_{\to\frac{1}{n}} - 1)\underbrace{(1-\psi^2(r))}_{\to 1} \to -\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

für $r \to \infty$. Es folgt $\lim_{r\to\infty} e^r(\psi(r) + \psi'(r)) = 0$. Dies zeigt (iii').

Eindeutigkeit:

(10) Seien ψ_1, ψ_2 Lösungen von (2.2), welche die Regularitätsbedingungen erfüllen. Inbesondere gilt $\psi_1, \psi_2 \to 0$ für $r \to \infty$. Sei $\psi_1(0) > \psi_2(0)$ und $w := \psi_1 - \psi_2$. Sei $\varepsilon > 0$ klein. Dann gibt es ein r_0, so dass für alle $r \geq r_0$ die Abschätungen $1 - (t\psi_1(r) + (1-t)\psi_2(r))^2 > 1 - \varepsilon$, $2|t\psi_1(r) + (1-t)\psi_2(r)| < 1$ und $|(n-1)(t\psi_1(r) + (1-t)\psi_2(r)) - e^{-r}| < \varepsilon$ gelten. Damit folgt für $r \geq r_0$

$$\begin{aligned}
&w'(r) \\
&= \psi_1'(r) - \psi_2'(r) \\
&= ((n-1)\psi_1(r) - e^{-r})(1-\psi_1^2(r)) - ((n-1)\psi_2(r) - e^{-r})(1-\psi_2^2(r)) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}((n-1)(t\psi_1(r) + (1-t)\psi_2(r)) - e^{-r}) \cdot \\
&\quad \cdot (1 - (t\psi_1(r) + (1-t)\psi_2(r))^2) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (n-1)(\psi_1(r)-\psi_2(r)) \underbrace{\left(1-(t\psi_1(r)+(1-t)\psi_2(r))^2\right)}_{>1-\varepsilon} dt \\
&\quad + \int_0^1 \underbrace{((n-1)(t\psi_1(r)+(1-t)\psi_2(r))-e^{-r})}_{|\cdot|<\varepsilon} \underbrace{2(t\psi_1(r)+(1-t)\psi_2(r))}_{|\cdot|<1} \cdot \\
&\quad \cdot (-(\psi_1(r)-\psi_2(r))dt \\
&\geq (\psi_1(r)-\psi_2(r))(1-\varepsilon-\varepsilon) \\
&> \frac{w(r)}{2}.
\end{aligned}
$$

Sei u eine Lösung von $u' = \frac{u}{2}$. Dann ist $u(r) = \lambda e^{\frac{1}{2}r}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Da $w(r_0) > 0$ existiert ein $\lambda > 0$ mit $u(r_0) < w(r_0)$. Aufgrund obiger Abschätzung von w' auf $[r_0, \infty)$ folgt $w(r) > u(r)$ für alle $r \geq r_0$ im Widerspruch zu $w(r) \to 0$ für $r \to \infty$. □

2.3. **Asymptotisches Verhalten für $r \to \infty$.**

Das folgende Lemma zeigt zusammen mit Lemma 2.2.3 die Existenz eines rotationssymmetrischen translatierenden ganzen Graphen.

Lemma 2.3.1.
Sei $r_0 > 0$ und φ eine Lösung von (2.1) $\varphi'(r) = \left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi(r)\right)(1-\varphi^2(r))$ mit $\varphi(r_0) \in (-1,1)$. Dann existiert φ auf $[r_0, \infty)$.

Beweis. (2.1) besitzt die beiden konstanten Lösungen $\varphi_1 \equiv 1$ und $\varphi_2 \equiv -1$, welche auf $[r_0, \infty)$ existieren. Sei $I \subset \mathbb{R}$ das maximale Existenzintervall von φ und $I \cap [r_0, \infty) = [r_0, R)$ mit $r_0 < R \leq \infty$. Angenommen es gilt $R < \infty$. Aufgrund des Vergleichsprinzips gilt $|\varphi| < 1$ auf $[r_0, R)$ und somit ist mit (2.1) auch φ' beschränkt. Setze φ durch $\varphi(R) = \varphi(r_0) + \int_{r_0}^{R} \varphi'(s)ds$ fort. Aufgrund der Kurzzeitexistenz einer Lösung von (2.1), gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass φ auf $[r_0, R+\varepsilon)$ existiert im Widerspruch zur Wahl von R. Folglich gilt $R = \infty$. □

Theorem 2.3.2.
Sei $\tilde{r} > 0$ und φ eine Lösung von (2.1), welche auf $[\tilde{r}, \infty)$ existiert. Dann gibt es ein $c_0 \in \mathbb{R}$, so dass für φ die folgende asymptotische Entwicklung gilt:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(r) = 1 - e^{a(r)} \text{ mit} \\
&a(r) = -2r + 2(n-1)\log(r) + c_0 - \frac{1}{2}e^{-2r+2(n-1)\log(r)+c_0+\log(1+g(r))} \text{ mit} \\
&g(r) = -\frac{2(n-1)}{r} - \frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2} - \frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)}{r^3} \\
&\qquad + o(r^{-3}).
\end{aligned}
$$

für $r \to \infty$.
Dies ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
\varphi(r) = 1 - e^{c_0}r^{2n-2}\exp\Bigg[&-2r - \frac{e^{c_0}}{2}r^{2n-2}e^{-2r} + (n-1)e^{c_0}r^{2n-3}e^{-2r} \\
&+ \left((n-1)^2 - \frac{n-1}{2}\right)e^{c_0}r^{2n-4}e^{-2r} \\
&+ \left((n-1)^3 - \frac{3(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{2}\right)e^{c_0}r^{2n-5}e^{-2r} + o\left(r^{2n-5}e^{-2r}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

für $r \to \infty$.

Beweis.

(1) Da $1 - \varphi > 0$ gilt, lässt sich φ in der Form $\varphi(r) := 1 - e^{a(r)}$ mit $a(r) := \log(1 - \varphi(r))$ schreiben. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= -a'(r)e^{a(r)} \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi(r)\right)\left(1 - \varphi^2(r)\right) \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)\left(2e^{a(r)} - e^{2a(r)}\right).\end{aligned}$$

Es folgt

$$a'(r) = \underbrace{\left(-1 + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)}_{<-1+\frac{n-1}{r}}\underbrace{\left(2 - e^{a(r)}\right)}_{>0}.$$

Die Abschätzung $2 - e^{a(r)} > 0$ folgt aus $\varphi(r) \in (-1, 1) \Leftrightarrow e^{a(r)} \in (0, 2)$. Für $r > n - 1$ ist somit $a'(r) < 0$.
Sei nun $r > 2(n-1)$. Da $e^{a(r)} < 2$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $e^{a(r)} + \varepsilon \leq 2$. Da a auf $(n-1, \infty)$ monoton fallend ist, gilt $e^{a(s)} + \varepsilon \leq 2$ für alle $s \geq r$. Für $s \geq r$ folgt

$$a'(s) \leq \left(-1 + \frac{1}{2} - 0\right)(2 - (2 - \varepsilon)) = -\frac{\varepsilon}{2} < 0.$$

Es folgen $a(r) \to -\infty$ für $r \to \infty$ und

$$a'(r) = \left(-1 + \underbrace{\frac{n-1}{r}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{n-1}{r}}_{\to 0}\underbrace{e^{a(r)}}_{\to 0}\right)\left(2 - \underbrace{e^{a(r)}}_{\to 0}\right) \to -2$$

für $r \to \infty$. Insbesondere gibt es zu $0 < \delta < 2$ ein $R \geq 0$, so dass $a(r) < -\delta r$ für $r \geq R$ gilt.

(2) Schreibe $a(r) = -2r + b(r)$ mit $b(r) := a(r) + 2r$. Dann erfüllt b die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}& b'(r) \\ &= a'(r) + 2 \\ &= \left(-1 + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)\left(2 - e^{a(r)}\right) + 2 \\ &= -2 + \frac{2(n-1)}{r} - \frac{2(n-1)}{r}e^{a(r)} + e^{a(r)} - \frac{n-1}{r}e^{a(r)} + \frac{n-1}{r}e^{2a(r)} + 2 \\ &= \frac{2(n-1)}{r} - \frac{3(n-1)}{r}e^{a(r)} + e^{a(r)} + \frac{n-1}{r}e^{2a(r)}.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für r groß gelten $a(r) < -r$ und somit

$$e^{2a(r)} < e^{a(r)} < e^{-r} < \max\left\{\frac{\varepsilon}{3(n-1)}, \frac{\varepsilon}{r}\right\}.$$

Es folgen für b' die Abschätzungen

$$\begin{aligned}b'(r) &= \frac{2(n-1)}{r} - \frac{3(n-1)}{r}\underbrace{e^{a(r)}}_{<\frac{\varepsilon}{3(n-1)}} + \underbrace{e^{a(r)} + \frac{n-1}{r}e^{2a(r)}}_{>0} \\ &> \frac{2(n-1)}{r} - \frac{\varepsilon}{r}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b'(r) &= \frac{2(n-1)}{r} \underbrace{-\frac{3(n-1)}{r}e^{a(r)}}_{<0} + \underbrace{e^{a(r)}}_{<\frac{\varepsilon}{r}} + \frac{n-1}{r}\underbrace{e^{2a(r)}}_{<\frac{\varepsilon}{(n-1)}} \\ &< \frac{2(n-1)}{r} + \frac{2\varepsilon}{r}. \end{aligned}$$

(3) Wähle aufgrund dieser beiden Abschätzungen $b(r) = 2(n-1)\log(r) + c(r)$. Dann gilt $c(r) = b(r) - 2(n-1)\log(r)$ und c erfüllt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} c'(r) &= b'(r) - \frac{2(n-1)}{r} \\ &= \frac{2(n-1)}{r} - \frac{3(n-1)}{r}e^{a(r)} + e^{a(r)} + \frac{n-1}{r}e^{2a(r)} - \frac{2(n-1)}{r} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)}_{>0 \text{ für } r \geq 3(n-1)} \underbrace{e^{a(r)}}_{>0}. \end{aligned}$$

Auf $[3(n-1), \infty)$ ist somit $c' > 0$ und c streng monoton wachsend. Desweiteren gibt es $R > 3(n-1)$, so dass für alle $r \geq R$ gilt: $a(r) < -r$ und somit

$$c'(r) = \left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right) e^{a(r)} \leq 1 \cdot e^{-r}.$$

Für $r \geq R$ folgt

$$c(r) = c(R) + \int_R^r c'(s)ds \leq c(R) + \int_R^r e^{-s}ds = c(R) - e^{-r} + e^{-R}.$$

Folglich ist c auf $[R, \infty)$ beschränkt und monoton wachsend. Daher existiert $c_0 := \lim_{r\to\infty} c(r) \in \mathbb{R}$.

(4) Sei $0 < \delta < 2$. **Beh.:** Es gibt ein $C \geq 0$ mit $|c_0 - c(r)| \leq Ce^{-\delta r}$ für alle $r \geq 0$. Wie in (1) gesehen gibt es zu $0 < \delta < 2$ ein $R > 3(n-1)$ mit $a(r) < -\delta r$ für alle $r \geq R$. Für $r \geq R$ ist $0 < c'(r) \leq e^{-\delta r}$ (vgl (3)). Seien $r > s \geq R$. Dann gilt

$$|c(r) - c(s)| = \left| \int_s^r c'(\tau)d\tau \right| \leq \int_s^r e^{-\delta\tau}d\tau = -\frac{1}{\delta}e^{-\delta r} + \frac{1}{\delta}e^{-\delta s}.$$

Für $r \to \infty$ folgt $|c_0 - c(s)| \leq \frac{1}{\delta}e^{-\delta s}$. Auf $[r_0, R]$ ist c beschränkt und $e^{-\delta r} \geq e^{-\delta R} > 0$. Somit existiert ein $C \geq 0$ mit $|c_0 - c(r)| \leq Ce^{-\delta r}$ für alle $r \geq 0$.
Sei $0 < \varepsilon < 1$. **Beh.:** $\exists\, R > 0\, \forall\, r \geq R$: $c_0 - c(r) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}e^{-2r}$.
Wähle $R > 0$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt: $\frac{3(n-1)}{r} < \varepsilon$, $a(r) > -2r$. Hierbei haben wir $a(r) = -2r + 2(n-1)\log(r) + o(\log(r))$ verwendet. Für $r \geq R$ folgt $c'(r) \geq (1-\varepsilon)e^{-2r}$. Seien $r > s \geq R$. Dann ist

$$c(r) - c(s) = \int_s^r c'(\tau)d\tau \geq \int_s^r (1-\varepsilon)e^{-2\tau}d\tau = -\frac{1-\varepsilon}{2}e^{-2r} + \frac{1-\varepsilon}{2}e^{-2s}.$$

Für $r \to \infty$ folgt $c_0 - c(s) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}e^{-2s}$.

(5) Schreibe c für $r \geq 3(n-1)$ in der Form $c(r) = c_0 - \frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}$. Dies ist wohldefiniert, den auf $[3(n-1), \infty)$ ist c streng monoton wachsend, folglich

$c_0 - c > 0$ und

$$\begin{aligned} c(r) &= c_0 - \frac{1}{2} e^{-2r+d(r)} \\ \Leftrightarrow e^{-2r+d(r)} &= 2(c_0 - c(r)) \\ \Leftrightarrow d(r) &= \log(2(c_0 - c(r))e^{2r}) = \log(2) + \log(c_0 - c(r)) + 2r. \end{aligned}$$

Erhalte für d die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d'(r) &= -\frac{c'(r)}{c_0 - c(r))} + 2 \\ &= -\left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{n-1}{r} e^{a(r)}\right) e^{a(r)} 2e^{2r} e^{-d(r)} + 2 \\ &= -2\left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{n-1}{r} e^{a(r)}\right) r^{2(n-1)} e^{c(r)} e^{-d(r)} + 2. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ klein. Nach (4) gibt es $C, R > 0$, so dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$\frac{1-\varepsilon}{2} e^{-2r} \leq c_0 - c(r) \leq Ce^{-(2-\varepsilon)r}.$$

Erhalte daraus für die Abschätzungen

$$\begin{aligned} d(r) &\leq \log(2) + \log(Ce^{-(2-\varepsilon)r}) + 2r \\ &= \log(2) + \log(C) - 2r + \varepsilon r + 2r \\ &= \log(2C) + \varepsilon r \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(r) &\geq \log(2) + \log(\frac{1-\varepsilon}{2} e^{-2r}) + 2r \\ &= \log(2) + \log(\frac{1-\varepsilon}{2}) - 2r + 2r \\ &= \log(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Folglich ist $d(r) = o(r)$ für $r \to \infty$.
Beh.: $d(r) = 2(n-1)\log(r) + o(\log(r))$ für $r \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$ klein. Wähle $R > 0$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$\begin{aligned} &e^{a(r)} < 1,\ c_0 - \varepsilon < c(r) < c_0,\ \frac{2(n-1)+\varepsilon}{r} < \frac{3(n-1)}{r} < \varepsilon < 1, \frac{2e^{c_0}}{r^{\varepsilon}} < 1, \\ &-2(1-\varepsilon)e^{c_0-\varepsilon} r^{\varepsilon} < -3. \end{aligned}$$

Angenommen, es gibt ein $r \geq R$ mit $d(r) \geq (2(n-1)+\varepsilon)\log(r)$. Erhalte

$$d'(r) \geq -2r^{2(n-1)} e^{c_0} e^{-2(n-1)\log(r) - \varepsilon\log(r)} + 2 = -\frac{2e^{c_0}}{r^{\varepsilon}} + 2 \geq 1.$$

Da für $s \geq r \geq R$ gilt: $1 \geq \frac{2(n-1)+\varepsilon}{s} = \frac{d}{ds}\big((2(n-1)+\varepsilon)\log(s)\big)$, bleibt die Ungleichung $d' \geq 1$ auf $[r, \infty)$ erhalten. Dies steht im Widerspruch zu $d(r) = o(r)$ für $r \to \infty$.
Angenommen, es gibt ein $r \geq R$ mit $d(r) \leq (2(n-1)-\varepsilon)\log(r)$. Erhalte

$$\begin{aligned} d'(r) &\leq -2(1-\varepsilon) r^{2(n-1)} e^{c_0-\varepsilon} e^{-2(n-1)\log(r) + \varepsilon\log(r)} + 2 \\ &= -2(1-\varepsilon)e^{c_0-\varepsilon} r^{\varepsilon} + 2 \leq -1. \end{aligned}$$

Da für $s \geq r \geq R$ gilt: $-1 \leq \frac{2(n-1)-\varepsilon}{s} = \frac{d}{ds}\big((2(n-1)-\varepsilon)\log(s)\big)$, bleibt die Ungleichung $d' \leq -1$ auf $[r, \infty)$ erhalten. Dies steht im Widerspruch zu $d(r) = o(r)$ für $r \to \infty$.
Somit gilt $d(r) = 2(n-1)\log(r) + o(\log(r))$ für $r \to \infty$.

(6) Schreibe $d(r) = 2(n-1)\log(r) + f(r)$.
Es ist $f(r) = d(r) - 2(n-1)\log(r) = o(\log(r))$ und

$$\begin{aligned} f'(r) &= d'(r) - \frac{2(n-1)}{r} \\ &= -2\left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)e^{c(r)}e^{-f(r)} + 2 - \frac{2(n-1)}{r}. \end{aligned}$$

Beh.: $f(r) \to c_0$ für $r \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$ klein, so dass $e^{-\varepsilon} > \frac{3}{4}$ gilt. Sei $\delta := e^{\varepsilon} - 1 > 0$. Wähle $R > 0$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$e^{a(r)} < 1,\ c_0 - \varepsilon < c(r) < c_0,\ \frac{6(n-1)e^{\varepsilon}}{r} < \delta.$$

Angenommen, es gibt ein $r \geq R$ mit $f(r) \geq c_0 + \varepsilon$. Dann gilt für solche r

$$\begin{aligned} f'(r) &\geq -2\left(1 - \frac{2(n-1)}{r}\right)e^{c_0}e^{-c_0-\varepsilon} + 2 - \frac{2(n-1)}{r} \\ &= \underbrace{-2e^{-\varepsilon} + 2}_{>0} + \frac{4(n-1)}{r}\underbrace{e^{-\varepsilon}}_{>\frac{3}{4}} - \frac{2(n-1)}{r} \\ &\geq \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung und $f(r) \geq c_0 + \varepsilon$ bleiben auf $[r, \infty)$ erhalten. Erhalte für $s \geq r$: $f(s) \geq f(r) + (n-1)\log(s)$. Widerspruch zu $f(s) = o(\log(s))$.
Angenommen, es gibt ein $r \geq R$ mit $f(r) \leq c_0 - 2\varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(r) &\leq -2\left(1 - \frac{3(n-1)}{r}\right)e^{c_0-\varepsilon}e^{-c_0+2\varepsilon} + 2 \\ &= \underbrace{-2e^{\varepsilon} + 2}_{=-2\delta} + \underbrace{\frac{6(n-1)e^{\varepsilon}}{r}}_{<\delta} \\ &< -\delta. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung bleibt auf $[r, \infty)$ erhalten. Widerspruch zu $f(r) = o(\log(r))$.
Somit gilt $f(r) \to c_0$ für $r \to \infty$.

(7) **Beh.:** Seien $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Dann existiert ein $R > 0$, so dass für alle $r \geq R$ gilt: $1 - e^{-\frac{1}{2}e^{-2r}} < 1 - e^{-\frac{1}{2}e^{-r}} < \frac{\varepsilon}{r^m}$.
Es ist $1 - e^{-\frac{1}{2}e^{-r}} < \frac{\varepsilon}{r^m} \Leftrightarrow \frac{1-e^{-\frac{1}{2}e^{-r}}}{\frac{1}{r^m}} < \varepsilon$. Mit l'Hopital folgt

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}e^{-r}}}{\frac{1}{r^m}} = \lim_{r\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}e^{-r}e^{-\frac{1}{2}e^{-r}}}{-\frac{m}{r^{m+1}}} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^{m+1}}{e^r}\underbrace{\frac{1}{2m}e^{-\frac{1}{2}e^{-r}}}_{<1} = 0.$$

(8) Schreibe $f(r) = c_0 + \log(1 + g(r))$. Dann ist $f(r) - c_0 = \log(1 + g(r))$, $e^{f(r)-c_0} = 1 + g(r)$ und $g(r) = e^{f(r)-c_0} - 1$. Somit gilt $g(r) \to 0$ für $r \to \infty$.

Erhalte für g die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&g'(r)\\
&= f'(r)e^{f(r)-c_0}\\
&= \left[-2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}+\frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)e^{c(r)}e^{-f(r)}+2-\frac{2(n-1)}{r}\right]e^{f(r)-c_0}\\
&= -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}+\frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}}\\
&\quad+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)(1+g(r)).
\end{aligned}$$

Beh.: $g(r) = -\frac{2(n-1)}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r \to \infty$.
Sei $0 < \varepsilon < 2(n-1)$. Wähle $R > 0$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$\begin{aligned}
&(n-1)e^{a(r)} < (n-1)e^{-r} < \frac{1}{r},\ \frac{2(n-1)-\varepsilon}{r^2} < \frac{\varepsilon}{r},\ \frac{2(n-1)}{r} < 2,\\
&1-\frac{1}{r^2} < e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}} < 1,\ \frac{2}{r^2} < \frac{2+2(n-1)(2(n-1)+\varepsilon)}{r^2} < \frac{\varepsilon}{r}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir (1) und (7) verwendet.
Angenommen es existiert ein $r \geq R$ mit $g(r) \geq -\frac{2(n-1)-\varepsilon}{r}$. Erhalte

$$\begin{aligned}
&g'(r)\\
&\geq -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cdot 1+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{2(n-1)-\varepsilon}{r}\right)\\
&= -2+\frac{6(n-1)}{r}-\frac{2}{r^2}+2-\frac{4(n-1)}{r}+\frac{2\varepsilon}{r}-\frac{2(n-1)}{r}\\
&\quad+\underbrace{\frac{2(n-1)(2(n-1)-\varepsilon)}{r^2}}_{>0}\\
&> \frac{2\varepsilon}{r}-\frac{2}{r^2} > \frac{2\varepsilon}{r}-\frac{\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon}{r}.
\end{aligned}$$

Für $s \geq r \geq R$ gilt $\frac{\varepsilon}{s} > \frac{2(n-1)-\varepsilon}{s^2} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2(n-1)-\varepsilon}{s}\right)$. Daher bleibt die Ungleichung $g'(s) > \frac{\varepsilon}{s}$ auf $[r,\infty)$ erhalten. Dies steht im Widerspruch zu $g(s) \to 0$ für $s \to \infty$.
Angenommen es gibt ein $r \geq R$ mit $g(r) \leq -\frac{2(n-1)+\varepsilon}{r}$. Erhalte

$$\begin{aligned}
&g'(r)\\
&\leq -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{2(n-1)+\varepsilon}{r}\right)\\
&= -2+\frac{2}{r^2}+\frac{6(n-1)}{r}\underbrace{-\frac{6(n-1)}{r^3}}_{<0}+2-\frac{4(n-1)}{r}-\frac{2\varepsilon}{r}-\frac{2(n-1)}{r}\\
&\quad+\frac{2(n-1)(2(n-1)+\varepsilon)}{r^2}\\
&< -\frac{2\varepsilon}{r}+\frac{\varepsilon}{r} = -\frac{\varepsilon}{r}.
\end{aligned}$$

Für $s \geq r \geq R$ ist $-\frac{\varepsilon}{s} < \frac{2(n-1)+\varepsilon}{s^2} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2(n-1)+\varepsilon}{s}\right)$. Somit bleibt die Ungleichung $g'(s) < -\frac{\varepsilon}{s}$ auf $[r,\infty)$ erhalten. Dies steht im Widerspruch zu $g(s) \to 0$ für $s \to \infty$.
Somit gilt $g(r) = -\frac{2(n-1)}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r \to \infty$.

(9) Schreibe $g(r) = -\frac{2(n-1)}{r} + h(r)$. Dann ist $h(r) = g(r) + \frac{2(n-1)}{r} = o\left(\frac{1}{r}\right)$. Erhalte für h die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} h'(r) &= g'(r) - \frac{2(n-1)}{r^2} \\ &= -2\left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right) e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}} \\ &\quad + \left(2 - \frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1 - \frac{2(n-1)}{r} + h(r)\right) - \frac{2(n-1)}{r^2}. \end{aligned}$$

Beh.: $h(r) = -\frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ für $r \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$ klein. Wähle $R > 0$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$\begin{aligned} &(n-1)e^{a(r)} < (n-1)e^{-r} < \frac{1}{r^2},\ \frac{2(n-1)}{r} < 2,\ 1 - \frac{1}{r^3} < e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}} < 1, \\ &\frac{4(n-1)^2 - 2(n-1) - 2\varepsilon}{r^3} < \frac{\varepsilon}{r^2}, \\ &\frac{2}{r^3} < \frac{2 + 2(n-1)(2(n-1)^2 - (n-1) + \varepsilon)}{r^3} < \frac{\varepsilon}{r^2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir (1) und (7) verwendet.
Angenomen es gibt ein $r \geq R$ mit $h(r) \geq -\frac{2(n-1)^2-(n-1)-\varepsilon}{r^2}$. Erhalte

$$\begin{aligned} &h'(r) \\ &\geq -2\left(1 - \frac{3(n-1)}{r} + \frac{1}{r^3}\right) \cdot 1 \\ &\quad + \left(2 - \frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1 - \frac{2(n-1)}{r} - \frac{2(n-1)^2 - (n-1) - \varepsilon}{r^2}\right) \\ &\quad - \frac{2(n-1)}{r^2} \\ &= -2 + \frac{6(n-1)}{r} - \frac{2}{r^3} + 2 - \frac{4(n-1)}{r} - \frac{4(n-1)^2}{r^2} + \frac{2(n-1)}{r^2} + \frac{2\varepsilon}{r^2} \\ &\quad - \frac{2(n-1)}{r} + \frac{4(n-1)^2}{r^2} + \underbrace{\frac{2(n-1)(2(n-1)^2 - (n-1) - \varepsilon)}{r^3}}_{>0} \\ &\quad - \frac{2(n-1)}{r^2} \\ &> \frac{2\varepsilon}{r^2} - \frac{2}{r^3} > \frac{2\varepsilon}{r^2} - \frac{\varepsilon}{r^2} = \frac{\varepsilon}{r^2}. \end{aligned}$$

Für $s \geq r \geq R$ ist $\frac{\varepsilon}{s^2} > \frac{4(n-1)^2-2(n-1)-2\varepsilon}{s^3} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2(n-1)^2-(n-1)-\varepsilon}{s^2}\right)$. Somit bleibt die Ungleichung $h'(s) > \frac{\varepsilon}{s^2}$ auf $[r, \infty)$ erhalten. Für $t > s > r$ folgt

$$h(t) = h(s) + \int_s^t h'(\tau)d\tau > -\frac{2(n-1)^2 - (n-1) - \varepsilon}{s^2} - \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon}{s} > \frac{\varepsilon}{4s}$$

für s, t groß und t groß im Vergleich zu s. Dies steht im Widerspruch zu $h(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Angenommen es gibt ein $r \geq R$ mit $h(r) \leq -\frac{2(n-1)^2-(n-1)+\varepsilon}{r^2}$. Erhalte

$$\begin{aligned}
&h'(r)\\
&\leq -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{1}{r^3}\right)\\
&\quad+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{2(n-1)}{r}-\frac{2(n-1)^2-(n-1)+\varepsilon}{r^2}\right)\\
&\quad-\frac{2(n-1)}{r^2}\\
&= -2+\frac{2}{r^3}+\frac{6(n-1)}{r}\underbrace{-\frac{6(n-1)}{r^4}}_{<0}+2-\frac{4(n-1)}{r}-\frac{4(n-1)^2}{r^2}+\frac{2(n-1)}{r^2}\\
&\quad-\frac{2\varepsilon}{r^2}-\frac{2(n-1)}{r}+\frac{4(n-1)^2}{r^2}+\frac{2(n-1)(2(n-1)^2-(n-1)+\varepsilon)}{r^3}\\
&\quad-\frac{2(n-1)}{r^2}\\
&< -\frac{2\varepsilon}{r^2}+\frac{\varepsilon}{r^2}=-\frac{\varepsilon}{r^2}.
\end{aligned}$$

Für $s \geq r \geq R$ gilt $-\frac{\varepsilon}{s^2} < \frac{4(n-1)^2-2(n-1)+2\varepsilon}{s^2} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2(n-1)^2-(n-1)+\varepsilon}{s}\right)$. Somit bleibt die Ungleichung $h'(s) < -\frac{\varepsilon}{s^2}$ auf $[r,\infty)$ erhalten. Analog zu oben steht dies im Widerspruch zu $h(s) \to 0$ für $s \to \infty$.
Somit ist $h(r) = -\frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ für $r \to \infty$.

(10) Schreibe $h(r) = -\frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2} + k(r)$. Dann ist $k(r) = h(r) + \frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2}$ und

$$\begin{aligned}
&k'(r)\\
&= h'(r)-\frac{4(n-1)^2-2(n-1)}{r^3}\\
&= -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}+\frac{n-1}{r}e^{a(r)}\right)e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}}\\
&\quad+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{2(n-1)}{r}-\frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2}+k(r)\right)\\
&\quad-\frac{2(n-1)}{r^2}-\frac{4(n-1)^2-2(n-1)}{r^3}.
\end{aligned}$$

Beh.: $k(r) = -\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$ für $r \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $r > 0$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{2(n-1)}{r} < 2,\ (n-1)e^{a(r)} < (n-1)e^{-r} < \frac{1}{r^3},\ 1-\frac{1}{r^4} < e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}} < 1,\\
&\frac{6(n-1)^3-9(n-1)^2+3(n-1)-3\varepsilon}{r^4} < \frac{\varepsilon}{r^3},\\
&-\frac{6(n-1)^3-9(n-1)^2+3(n-1)+3\varepsilon}{s^4} < \frac{\varepsilon}{s^3},\\
&\frac{2-4(n-1)^4+6(n-1)^3-2(n-1)^2+2(n-1)\varepsilon}{r^4} < \frac{\varepsilon}{r^3},\\
&\frac{2+4(n-1)^4-6(n-1)^3+2(n-1)^2+2(n-1)\varepsilon}{r^4} < \frac{\varepsilon}{r^3}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir (1) und (7) verwendet.

Angenommen es gibt ein $r \geq R$ mit $k(r) \geq -\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)-\varepsilon}{r^3}$. Erhalte

$$\begin{aligned}
&k'(r)\\
&\geq -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}+\frac{1}{r^4}\right)\cdot 1\\
&\quad+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{2(n-1)}{r}-\frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)-\varepsilon}{r^3}\right)\\
&\quad-\frac{2(n-1)}{r^2}-\frac{4(n-1)^2-2(n-1)}{r^3}\\
&=-2+\frac{6(n-1)}{r}-\frac{2}{r^4}+2-\frac{4(n-1)}{r}-\frac{4(n-1)^2}{r^2}+\frac{2(n-1)}{r^2}\\
&\quad-\frac{4(n-1)^3}{r^3}+\frac{6(n-1)^2}{r^3}-\frac{2(n-1)}{r^3}+\frac{2\varepsilon}{r^3}-\frac{2(n-1)}{r}+\frac{4(n-1)^2}{r^2}\\
&\quad+\frac{4(n-1)^3}{r^3}-\frac{2(n-1)^2}{r^3}\\
&\quad+\frac{4(n-1)^4-6(n-1)^3+2(n-1)^2-2(n-1)\varepsilon}{r^4}\\
&\quad-\frac{2(n-1)}{r^2}-\frac{4(n-1)^2}{r^3}+\frac{2(n-1)}{r^3}\\
&>\frac{2\varepsilon}{r^3}-\frac{\varepsilon}{r^3}=\frac{\varepsilon}{r^3}.
\end{aligned}$$

Für $s \geq r \geq R$ ist $\frac{\varepsilon}{s^3} > \frac{6(n-1)^3-9(n-1)^2+3(n-1)-3\varepsilon}{s^4}$ $= \frac{d}{ds}\left(-\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)-\varepsilon}{s^3}\right)$. Somit bleibt die Ungleichung $k'(s) > \frac{\varepsilon}{s^3}$ auf $[r,\infty)$ erhalten. Dies steht im Widerspruch zu $k(s) \to 0$ für $s \to \infty$.

Angenommen es gibt ein $r \geq R$ mit $k(r) \leq -\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)+\varepsilon}{r^3}$. Erhalte

$$\begin{aligned}
&k'(r)\\
&\leq -2\left(1-\frac{3(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{1}{r^4}\right)\\
&\quad+\left(2-\frac{2(n-1)}{r}\right)\left(1-\frac{2(n-1)}{r}-\frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)+\varepsilon}{r^3}\right)\\
&\quad-\frac{2(n-1)}{r^2}-\frac{4(n-1)^2-2(n-1)}{r^3}\\
&=-2+\frac{2}{r^4}+\frac{6(n-1)}{r}\underbrace{-\frac{6(n-1)}{r^5}}_{<0}+2-\frac{4(n-1)}{r}-\frac{4(n-1)^2}{r^2}+\frac{2(n-1)}{r^2}\\
&\quad-\frac{4(n-1)^3}{r^3}+\frac{6(n-1)^2}{r^3}-\frac{2(n-1)}{r^3}-\frac{2\varepsilon}{r^3}-\frac{2(n-1)}{r}+\frac{4(n-1)^2}{r^2}\\
&\quad+\frac{4(n-1)^3}{r^3}-\frac{2(n-1)^2}{r^3}\\
&\quad+\frac{4(n-1)^4-6(n-1)^3+2(n-1)^2+2(n-1)\varepsilon}{r^4}
\end{aligned}$$

$$- \frac{2(n-1)}{r^2} - \frac{4(n-1)^2}{r^3} + \frac{2(n-1)}{r^3}$$
$$< -\frac{2\varepsilon}{r^3} + \frac{\varepsilon}{r^3} = -\frac{\varepsilon}{r^3}.$$

Für $s \geq r \geq R$ ist $-\frac{\varepsilon}{s^3} < \frac{6(n-1)^3-9(n-1)^2+3(n-1)+3\varepsilon}{s^4}$ $= \frac{d}{ds}\left(-\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)+\varepsilon}{s^3}\right)$. Somit bleibt die Ungleichung $k'(s) < -\frac{\varepsilon}{s^3}$ auf $[r, \infty)$ erhalten. Dies steht im Widerspruch zu $k(s) \to 0$ für $s \to \infty$.
Somit gilt $k(r) = -\frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)$ für $r \to \infty$.

(11) Die asymptotische Entwicklung für φ lässt sich folgendermaßen umformen: Für $r \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^{-2r+2(n-1)\log(r)+c_0+\log(1+g(r))}\\
&= -\frac{e^{c_0}}{2}(1+g(r))r^{2n-2}e^{-2r}\\
&= -\frac{e^{c_0}}{2}\left(1 - \frac{2(n-1)}{r} - \frac{2(n-1)^2-(n-1)}{r^2}\right.\\
&\qquad \left. - \frac{2(n-1)^3-3(n-1)^2+(n-1)}{r^3} + o(r^{-3})\right) r^{2n-2}e^{-2r}\\
&= -\frac{e^{c_0}}{2}r^{2n-2}e^{-2r} + (n-1)e^{c_0}r^{2n-3}e^{-2r}\\
&\quad + \left((n-1)^2 - \frac{n-1}{2}\right) e^{c_0}r^{2n-4}e^{-2r}\\
&\quad + \left((n-1)^3 - \frac{3(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{2}\right) e^{c_0}r^{2n-5}e^{-2r} + o\left(\frac{1}{r^3}\right) r^{2n-2}e^{-2r}.
\end{aligned}$$

Mit $o\left(\frac{1}{r^3}\right) r^{2n-2}e^{-2r} = o\left(\frac{1}{r^3}r^{2n-2}e^{-2r}\right) = o\left(r^{2n-5}e^{-2r}\right)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\varphi(r)\\
&= 1 - e^{a(r)}\\
&= 1 - e^{c_0}r^{2n-2}\exp\left[-2r - \frac{1}{2}e^{-2r+2(n-1)\log(r)+c_0+\log(1+g(r))}\right]\\
&= 1 - e^{c_0}r^{2n-2}\exp\left[-2r - \frac{e^{c_0}}{2}r^{2n-2}e^{-2r} + (n-1)e^{c_0}r^{2n-3}e^{-2r}\right.\\
&\quad + \left((n-1)^2 - \frac{n-1}{2}\right) e^{c_0}r^{2n-4}e^{-2r}\\
&\quad \left. + \left((n-1)^3 - \frac{3(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{2}\right) e^{c_0}r^{2n-5}e^{-2r} + o\left(r^{2n-5}e^{-2r}\right)\right].
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.3.
Seien φ, a, d, g wie in Theorem 2.3.2. Für $m \in \mathbb{N}$ gibt es wegen (1) und (7) ein $R > 0$, so dass für alle $r \geq R$ gilt: $0 < \frac{n-1}{r}e^{a(r)} < \frac{1}{r^m}$, $1 - \frac{1}{r^m} < e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}} < 1$. Verwendet man aufgrund dieser beiden Abschätzungen die Näherungen $\frac{n-1}{r}e^{a(r)} \approx 0$ und $e^{-\frac{1}{2}e^{-2r+d(r)}} \approx 1$, so scheint die Vermutung naheliegend, dass eine weitergehende asymptotische Entwicklung für g die Gestalt eines Polynoms in $\frac{1}{r}$ hat.

Lemma 2.3.4 (Hauptkrümmungen)**.**
Sei $u : \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ eine graphische Lösung des mittleren Krümmungsflusses.

Angenommen es gibt ein $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $u(x,t) = \Phi(|x|) + \lambda t$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty)$ gilt. Sei $\varphi := \Phi'$. Dann gilt für die Hauptkrümmgen:

$$\lambda_1 = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\varphi^2}^3}, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{\varphi}{|x|\sqrt{1-\varphi^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Beweis. Nach Beispiel 1.1.7 und Beispiel 1.1.9 gelten $g_{ij} = -u_i u_j + \delta_{ij}$ und $h_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1-|Du|^2}}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Wie im Beweis von Lemma 2.1.2 gesehen, gelten

$$u_i = \varphi \frac{x_i}{|x|}, \; u_{ij} = \varphi' \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right), \; 1 - |Du|^2 = 1 - \varphi^2.$$

Erhalte daraus

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} - \varphi^2 \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \\ h_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}\left(\varphi' \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Aus $g_{ij}x^j = (1-\varphi^2)x_i$ und $h_{ij}x^j = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\varphi}}x_i$ folgt $\lambda_1 = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\varphi^2}^3}$. Sei nun $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp x$. Dann ist $g_{ij}\xi^j = \xi_i$ und $h_{ij}\xi^j = \frac{\varphi}{|x|\sqrt{1-\varphi^2}}\xi_i$. Erhalte daraus $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{\varphi}{|x|\sqrt{1-\varphi^2}}$. □

Lemma 2.3.5 (Asymptotik der Hauptkrümmungen).
Sei $u : \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ eine graphische Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Angenommen es gibt ein $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$, so dass $u(x,t) = \Phi(|x|) + t$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty)$ gilt. Sei $\varphi := \Phi'$. Dann gibt es ein $c_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Hauptkrümmungen die Asymptotik

$$\begin{aligned} \lambda_1(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n+1} e^r + o\left(r^{-n+1}e^r\right), \\ \lambda_k(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r + o\left(r^{-n}e^r\right) \quad \text{für} \quad k = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

erfüllen. Verwende dabei die Notation $r = |x|$.

Beweis.
(1) Nach Lemma 2.3.4 gelten $\lambda_1(r) = \frac{\varphi'(r)}{\sqrt{1-\varphi^2(r)}^3}$ und $\lambda_k(r) = \frac{\varphi(r)}{r\sqrt{1-\varphi^2(r)}}$ für $k = 2, \ldots, n$. Für φ gilt außerdem die asymptotische Entwicklung aus Theorem 2.3.2, d.h es gibt ein $c_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(r) = 1 - e^{a(r)}$ mit $a(r) = -2r + 2(n-1)\log(r) + c_0 + o(1)$ für $r \to \infty$ gilt. Es ist $\varphi^2(r) = 1 - 2e^{a(r)} + e^{2a(r)}$ und $\varphi^3(r) = 1 - 3e^{a(r)} + 3e^{2a(r)} - e^{3a(r)}$. Erhalte damit und mit Gleichung (2.1.2)

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi(r)\right)\left(1 - \varphi^2(r)\right) \\ &= 1 - \frac{n-1}{r}\varphi(r) - \varphi^2(r) + \frac{n-1}{r}\varphi^3(r) \\ &= 1 - \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r}e^{a(r)} - 1 + 2e^{a(r)} - e^{2a(r)} + \frac{n-1}{r} \\ &\quad - \frac{3(n-1)}{r}e^{a(r)} + \frac{3(n-1)}{r}e^{2a(r)} - \frac{n-1}{r}e^{3a(r)} \\ &= \left(2 - \frac{2(n-1)}{r} - e^{a(r)} + \frac{3(n-1)}{r}e^{a(r)} - \frac{n-1}{r}e^{2a(r)}\right)e^{a(r)}. \end{aligned}$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $0 < \delta < 2$ so klein, dass

$$2^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon < \frac{(2-\delta)e^{-\delta}}{2^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{2e^{\delta}}{(2-\delta)^{\frac{3}{2}}} < 2^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon$$

gelten. Wähle nun $R > 1$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$-\frac{a(r)}{2} < r - (n-1)\log(r) - \frac{c_0}{2} + \delta,\ -\frac{a(r)}{2} > r - (n-1)\log(r) - \frac{c_0}{2} - \delta,$$
$$\frac{3(n-1)}{r}e^{a(r)} < \frac{2(n-1)}{r},\ e^{a(r)} < \delta,\ \frac{2(n-1)}{r} + e^{a(r)} + \frac{n-1}{r}e^{2a(r)} < \delta.$$

Sei $r \geq R$. Aus Obigem folgen $(2-\delta)e^{a(r)} < \varphi'(r) < 2e^{a(r)}$ und $(2-\delta)e^{a(r)} < 2e^{a(r)} - e^{2a(r)} = 1 - \varphi^2(r) < 2e^{a(r)}$. Man erhält nun

$$\begin{aligned}
\lambda_1(r) &= \frac{\varphi'(r)}{\sqrt{1-\varphi^2(r)}^3} < \frac{2e^{a(r)}}{\sqrt{(2-\delta)e^{a(r)}}^3} = \frac{2e^{-\frac{a(r)}{2}}}{(2-\delta)^{\frac{3}{2}}} \\
&< \frac{2}{(2-\delta)^{\frac{3}{2}}}e^{r-(n-1)\log(r)-\frac{c_0}{2}+\delta} = \frac{2e^{\delta}}{(2-\delta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r \\
&< \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r + \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_1(r) &> \frac{(2-\delta)e^{a(r)}}{\sqrt{2e^{a(r)}}^3} = \frac{(2-\delta)e^{-\frac{a(r)}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} \\
&> \frac{2-\delta}{2^{\frac{3}{2}}}e^{r-(n-1)\log(r)-\frac{c_0}{2}-\delta} = \frac{(2-\delta)e^{-\delta}}{2^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r \\
&> \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r - \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r
\end{aligned}$$

für alle $r \geq R$. Dies zeigt $\lambda_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n+1}e^r + o\left(r^{-n+1}e^r\right)$ für $r \to \infty$.

(3) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $0 < \delta < 2$ so klein, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon < \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{2}}, \quad \text{und} \quad \frac{e^{\delta}}{\sqrt{2-\delta}} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon$$

gelten. Wähle $R > 1$ so groß, dass für alle $r \geq R$ gilt:

$$-\frac{a(r)}{2} < r - (n-1)\log(r) - \frac{c_0}{2} + \delta,\ -\frac{a(r)}{2} > r - (n-1)\log(r) - \frac{c_0}{2} - \delta,$$
$$\frac{e^{\frac{a(r)}{2}}}{r\sqrt{2}} < \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n}e^r,\ e^{a(r)} < \delta,$$

Für $r \geq R$ folgen $(2-\delta)e^{a(r)} < 1 - \varphi^2(r) < 2e^{a(r)}$. Erhalte für $k = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\lambda_k(r) &= \frac{\varphi(r)}{r\sqrt{1-\varphi^2(r)}} < \frac{1-e^{a(r)}}{r\sqrt{(2-\delta)e^{a(r)}}} < \frac{e^{-\frac{a(r)}{2}}}{r\sqrt{(2-\delta)}} \\
&< \frac{1}{r\sqrt{2-\delta}}e^{r-(n-1)\log(r)-\frac{c_0}{2}+\delta} = \frac{e^{\delta}}{\sqrt{2-\delta}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n}e^r \\
&< \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n}e^r = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n}e^r + \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}}r^{-n}e^r
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\lambda_k(r) &> \frac{1-e^{a(r)}}{r\sqrt{2e^{a(r)}}} = \frac{e^{-\frac{a(r)}{2}}}{r\sqrt{2}} - \frac{e^{\frac{a(r)}{2}}}{r\sqrt{2}} \\
&> \frac{1}{r\sqrt{2}} e^{r-(n-1)\log(r)-\frac{c_0}{2}-\delta} - \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r \\
&= \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r - \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r \\
&> \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right) e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r - \varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r - 2\varepsilon e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r
\end{aligned}
$$

für alle $r \geq R$. Dies zeigt $\lambda_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{c_0}{2}} r^{-n} e^r + o\big(r^{-n} e^r\big)$ für $r \to \infty$ und $k = 2, \dots, n$. □

Lemma 2.3.6.
Sei $u : \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ eine graphische Lösung des mittleren Krümmungsflusses mit Metrik $(g_{ij})_{1\leq i,j,\leq n}$. Angenommen es gibt ein $\Phi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$, so dass $u(x,t) = \Phi(|x|) + t$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty)$ gilt. Sei $\gamma\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto te_1$. Dann gilt für die Länge von γ bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$:

$$L(\gamma) := \int_1^\infty \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)}dt < \infty.$$

Beweis. Es ist $\dot{\gamma}(t) = e_1$ für alle $t \in (1,\infty)$ und, wie im Beweis von Lemma 2.3.4 gesehen, $g_{ij} = \delta_{ij} - \varphi^2 \frac{x_i x_j}{|x|^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Erhalte daraus

$$0 < g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = g_{11}(te_1) = 1 - \varphi^2(t) < 1.$$

Mit der asymptotischen Entwicklung aus Theorem 2.3.2 erhält man ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \geq t_0$ gilt:

$$0 < 1 - \varphi^2(t) = 2e^{a(t)} - e^{2a(t)} < 2e^{-t}.$$

Es folgt

$$L(\gamma) < \int_1^{t_0} 1dt + \int_{t_0}^\infty \sqrt{2e^{-t}}dt < \infty.$$

□

Bemerkung 2.3.7.
Nach [1] ist durch $v\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \sqrt{|x|^2 + 2nt}$ eine homothetisch expandierende Lösung des mittleren Krümmungsflusses im Minkowskirum gegeben, welche zu jedem Zeitpunkt asymptotisch zum positiven Lichtkegel ist. Sei u eine translatierende Lösung wie oben. Diese ist zu jedem Zeitpunkt asymptotisch zu einem verschobenen Lichtkegel. Bei Wahl einer geeigneter Anfangshöhe gilt $u(\cdot,0) < v(\cdot,0)$. Wählt man $t_0 > 0$ groß genug, gilt jedoch $u(\cdot,t) > v(\cdot,t)$ für alle $t \geq t_0$, da v immer asymptotisch zum selben Kegel ist, u jedoch translatiert.
Aufgrund der Rotationssymmetrie von u ist die Kurve γ aus Lemma 2.3.6 eine Geodätische in $\Big(\mathbb{R}^n, (g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\Big)$. Man erhält, dass diese Mannigfaltigkeit nicht vollständig ist. Daher ist das Maximumprinzip aus [2] nicht auf u und v anwendbar, liefert also insbesondere keinen Widerspruch zu den obigen Ungleichungen.

3. Geometrische Grundbegriffe im $\mathbb{R}^n$

Wir verwenden im Folgenden [3].

3.1. **Normale, Metrik, 2. Fundamentalform, mittlere Krümmung.**

Definition 3.1.1 (Normale)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Eine stetige Abbildung $\nu\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

(i) $\langle X_i(x), \nu(x)\rangle = 0$ für alle $x \in \Omega$ und für $i = 1, \ldots, n$,
(ii) $|\nu(x)| = 1$ für alle $x \in \Omega$,

heißt Einheitsnormalenfeld an X. $\nu(x)$ heißt Normale an X im Punkt x.

Bemerkung 3.1.2 (Vorzeichenkonvention)**.**
Im Folgenden wählen wir bei graphischen Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ stets die untere Normale.

Beispiel 3.1.3.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(\Omega)$, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto (x, u(x))$ eine graphische Hyperfläche, so gilt für die untere Normale $\nu(x) = \frac{(Du(x),-1)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$ ist $X_i = (e_i, u_i)$ und $\langle X_i, \nu\rangle = \frac{u_i - u_i}{\sqrt{1+|Du|^2}} = 0$. Desweiteren ist $|\nu|^2 = \frac{|Du|^2+1}{1+|Du|^2} = 1$. □

Definition 3.1.4 (Metrik)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Immersion. Definiere die Metrik $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ von X durch

$$g_{ij}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n,\ g_{ij}(x) := \langle X_i(x), X_j(x)\rangle.$$

Mit $(g^{ij})_{1\le i,j\le n}$ bezeichnen wir die Inverse von $(g_{ij})_{i,j}$, d.h. $(g^{ij})_{i,j}$ ist eine Matrix, für die $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ gilt.

Beispiel 3.1.5.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^1(\Omega)$, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto (x, u(x))$ eine graphische Hyperfläche. Dann gelten $X_i = (e_i, u_i)$ und

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

Desweiteren ist

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}.$$

Beweis. Für $i, k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\begin{aligned} g^{ij} g_{jk} &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right)(\delta_{jk} + u_j u_k) = \delta^i_k + u^i u_k - \frac{u^i u_k + u^i |Du|^2 u_k}{1+|Du|^2} \\ &= \delta^i_k + u^i u_k - u^i u_k = \delta^i_k. \end{aligned}$$

Folglich hat $\left(g^{ij}\right)_{i,j}$ die behauptete Gestalt. □

Definition 3.1.6 (Zweite Fundamentalform)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Immersion mit Normale ν. Definiere die zweite Fundamentalform $(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ von X durch

$$h_{ij}\colon \Omega \to \mathbb{R},\ h_{ij}(x) := -\langle X_{,ij}(x), \nu(x)\rangle.$$

Beispiel 3.1.7.
Sei $X = (\mathrm{id}, u)$ eine graphische Hyperfläche. Dann gelten $X_{,ij} = (0, u_{ij})$ und

$$h_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ u_{ij} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Du \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Definition 3.1.8 (Hauptkrümmungen)**.**
Die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij} heißen Hauptkrümmungen von X. Bezeichne diese mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Definition 3.1.9 (Mittlere Krümmung)**.**
Wir nennen $H := \lambda_1 + \ldots \lambda_n$ mittlere Krümmung.

Beispiel 3.1.10.
Im graphischen Fall gilt

$$\begin{aligned} H = g^{ij} h_{ij} &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2} \right) \left(\frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \\ &= \frac{\delta^{ij} u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u^j u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}^3} = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right). \end{aligned}$$

Definition 3.1.11 (Mittlerer Krümmungsfluss)**.**
Sei $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Familie immersierter Hyperflächen $X(\cdot, t)_{t \in [0,T)}$, welche zweimal im Ort und einmal in der Zeit differenzierbar ist, mit $X(\cdot, t) \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt den mittleren Krümmungsfluss (MCF) bis auf einen tangentialen Diffeomorphismus, falls

$$\langle \dot{X}, \nu \rangle = -H \quad \text{auf} \quad \Omega \times (0, T)$$

gilt und X auf $\Omega \times [0, T)$ stetig ist.

3.2. **Der graphische mittlere Krümmungsfluss.**

Lemma 3.2.1 (Graphischer mittlerer Krümmungsfluss)**.**
Sei $T > 0$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X \colon \tilde{\Omega} \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, so dass es eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^{2;1}(\Omega \times [0, T))$ mit $\mathrm{im}(X(\cdot, t)) \cap (\Omega \times \mathbb{R}) = \mathrm{graph}(u(\cdot, t))$ für alle $t \in [0, T)$ gibt. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \Delta u - \frac{u^i u^j u_{ij}}{1+|Du|^2} \quad \textit{in} \quad \Omega \times (0, T).$$

Beweis. Bezeichne für $(\xi, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T)$ mit $x(\xi, t)$ die orthogonale Projektion von $X(\xi, t)$ auf $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich des euklidischen Skalarproduktes. Dann ist für alle $(\xi, t) \in \tilde{\Omega} \times [0, T)$ mit $X(\xi, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X(\xi, t) &= (x(\xi, t), u(x(\xi, t), t)), \\ \frac{d}{dt} X &= (\dot{x}, u_i \dot{x}^i + \dot{u}), \\ -H = \langle \dot{X}, \nu \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left\langle \begin{pmatrix} \dot{x} \\ u_i \dot{x}^i + \dot{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Du \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\dot{x}^i u_i - u_i \dot{x}^i - \dot{u} \right) = \frac{-\dot{u}}{\sqrt{1+|Du|^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} H = \sqrt{1+|Du|^2} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right).$$

□

4. Homothetisch expandierende Lösungen im $\mathbb{R}^n$

4.1. **Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.**

Bemerkung 4.1.1 (Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung)**.**

(1) Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine homothetisch expandierende Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses, d.h. es gibt ein $\mu\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, so dass für alle $t > 0$ gilt: $\{(x, u(x,t)) | x \in \mathbb{R}^n\} = \mu(t) \left\{ \left(y, u\left(y, \frac{1}{2}\right)\right) | y \in \mathbb{R}^n \right\}$. Definiere $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto u\left(y, \frac{1}{2}\right)$. Seien $t > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\mu(t)\left(y, u\left(y, \frac{1}{2}\right)\right) = (x, u(x,t))$. Dann gelten $y = \frac{x}{\mu(t)}$ und $u(x,t) = \mu(t)U(y) = \mu(t)U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)$.

(2) Es gelten

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,t) &= \dot{\mu}(t)U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - \mu(t)U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu^2(t)}\dot{\mu}(t) \\
&= \dot{\mu}(t)\left(U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)}\right), \\
u_i(x,t) &= U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right), \\
u_{ij}(x,t) &= \frac{1}{\mu(t)}U_{ij}\left(\frac{x}{\mu(t)}\right).
\end{aligned}$$

u erfüllt den graphischen mittleren Krümmungsfluss $\dot{u} = \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right)u_{ij}$. Erhalte daraus

$$\dot{\mu}(t)\left(U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)}\right) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\Delta U - \frac{U^iU^jU_{ij}}{1+|DU|^2}\right)\left(\frac{x}{\mu(t)}\right).$$

Mit $y = \frac{x}{\mu(t)}$ folgt

$$\dot{\mu}(t)\mu(t)\left(U(y) - U_i(y)y^i\right) = \Delta U(y) - \frac{U^iU^jU_{ij}}{1+|Du|^2}(y).$$

Da u expandiert, gilt $\dot{\mu} > 0$. Gilt $U(y) - U_i(y)y^i = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, so ist der Graph von U ein Kegel und aufgrund der Regularität von U im Ursprung ist $U \equiv 0$. Ansonsten existiert ein $c > 0$ mit $\dot{\mu}(t)\mu(t) = c$ für alle $t > 0$. Diese Gleichung hat die explizite Lösung $\mu(t) = \sqrt{1 + 2c(t - t_0)}$.
Wähle ohne Einschräkung $c = 1$:
Gelte $U(y) - U_i(y)y^i = \left(\Delta U - \frac{U^iU^jU_{ij}}{1+|DU|^2}\right)(y)$ und definiere $V(x) = \kappa U\left(\frac{x}{\kappa}\right)$ für ein $\kappa > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
V(x) - V_i(x)x^i &= \kappa\left(U\left(\frac{x}{\kappa}\right) - U_i\left(\frac{x}{\kappa}\right)\frac{x^i}{\kappa}\right) \\
&= \kappa\left(\Delta U - \frac{U^iU^jU_{ij}}{1+|DU|^2}\right)\left(\frac{x}{\kappa}\right) \\
&= \kappa^2\left(\Delta V - \frac{V^iV^jV_{ij}}{1+|DV|^2}\right)(x).
\end{aligned}$$

Wählt man $t_0 = \frac{1}{2}$, so gilt $\mu(0) = 0$ und $\mu(t) = \sqrt{2t}$.

(3) Angenommen es gibt ein $v \in C^2_{loc}(\mathbb{R}_{>0})$ mit $U(x) = v(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Schreibe $r = |x|$. Es ist, wie in Lemma 2.1.2 gesehen,

$$\begin{aligned}
U(x) - U_i(x)x^i &= v(r) - v'(r)r, \\
\Delta U(x) - \frac{U^iU^jU_{ij}}{1+|DU|^2}(x) &= \frac{v''(r)}{1+(v'(r))^2} + \frac{n-1}{r}v'(r).
\end{aligned}$$

Erhalte daraus für v die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) = (1 + (v'(r))^2)\left(v(r) - v'(r)r - \frac{n-1}{r}v'(r)\right). \tag{4.1}$$

(4) Sei v eine Lösung von (4.1). Dann ist $\hat{v}(r) := -v(r)$ ebenfalls eine Lösung von (4.1). Betrachte daher im Folgenden nur Lösungen mit Anfangshöhe $v(r_0) > 0$.

4.2. **Existenz nahe $r = 0$.**

Lemma 4.2.1.
Sei v eine Lösung von (4.1), welche auf $(0, 1]$ existiert. Definiere $w\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $w(r) := v(e^r)$. Dann ist w eine Lösung von

$$w''(r) = \left(e^{2r} + w'(r)^2\right)\left(w(r) - w'(r) - (n-1)e^{-2r}w'(r)\right) + w'(r). \tag{4.2}$$

Ist andererseits $w\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (4.2), so ist $v\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $v(r) := w(\log(r))$ eine Lösung von (4.1). Erfüllt w die Regularitätsbedingungen

(i') $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}w'(r) \in \mathbb{R}$ *existiert,*
(ii') $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-r}w'(r) = 0$,
(iii') $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}\left(2w'(r) - w''(r)\right) = 0$,

so erfüllt v die Regularitätsbedingungen aus Lemma 2.2.1.

Beweis. Sei zunächst v eine Lösung von (4.1) und sei $w(r) := v(e^r)$. Dann ist $w'(r) = e^r v'(e^r)$ und

$$\begin{aligned} w''(r) &= e^r v'(e^r) + e^{2r}v''(e^r) \\ &= e^r v'(e^r) + e^{2r}\left(1 + v'(e^r)^2\right)\left(v(e^r) - v'(e^r)e^r - (n-1)e^{-r}v'(e^r)\right) \\ &= \left(e^{2r} + w'(r)^2\right)\left(w(r) - w'(r) - (n-1)e^{-2r}w'(r)\right) + w'(r). \end{aligned}$$

Sei nun w eine Lösung von (4.2) und $v(r) := w(\log(r))$. Dann ist $v'(r) = \frac{w'(\log(r))}{r}$ und

$$\begin{aligned} v''(r) &= \frac{w''(\log(r))}{r^2} - \frac{w'(\log(r))}{r^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\Bigg[\left(r^2 + w'(\log(r))^2\right)\left(w(\log(r)) - w'(\log(r)) - \frac{n-1}{r^2}w'(\log(r))\right) \\ &\qquad + w'(\log(r))\Bigg] - \frac{w'(\log(r))}{r^2} \\ &= \left(1 + v'(r)^2\right)\left(v(r) - v'(r)r - \frac{n-1}{r}v'(r)\right). \end{aligned}$$

Erfülle w die Regularitätsbedingungen $(i'), (ii'), (iii')$. Erhalte daraus

(i) $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{v'(r)}{r} = \lim\limits_{r\to-\infty} \frac{v'(e^r)}{e^r} = \lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}w'(r) \in \mathbb{R}$ existiert,
(ii) $\lim\limits_{r\searrow 0} v'(r) = \lim\limits_{r\to-\infty} v'(e^r) = \lim\limits_{r\to-\infty} e^{-r}w'(r) = 0$,
(iii) $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{v'(r)}{r} - v''(r) = \lim\limits_{r\to-\infty} \frac{v'(e^r)}{e^r} - v''(e^r)$
$= \lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}w'(r) - \left(e^{-2r}w''(r) - e^{-2r}w'(r)\right)$
$= \lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}(2w'(r) - w''(r)) = 0.$ □

Theorem 4.2.2.
Seien $n \geq 2$ und $h > 0$. Dann gibt es eine Lösung w von (4.2), d. h. w erfüllt die Gleichung

$$w''(r) = \left(e^{2r} + w'(r)^2\right)\left(w(r) - w'(r) - (n-1)e^{-2r}w'(r)\right) + w'(r),$$

welche auf $(-\infty, 0]$ *existiert und die Regularitätsbedingen* $(i'), (ii'), (iii')$ *erfüllt. Es gilt außerdem* $\lim_{r\to-\infty} w(r) = h$.

Beweis.

(1) Betrachte zunächst für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_k''(r) &= \left(e^{2r} + u_k'(r)^2\right)\left(u_k(r) - u_k'(r) - (n-1)e^{-2r}u_k'(r)\right) + u_k'(r), \\ u_k'(-k) &= \frac{e^{-2k}h}{n}, \\ u(-k) &= h. \end{cases} \tag{4.3}$$

Wir zeigen zunächst in mehreren Schritten, dass u_k auf $[-k, 0]$ existiert und verwenden dann Arzelà-Ascoli, um die gesuchte Lösung w zu erhalten. Sei zunächst $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ fest und schreibe $u := u_k$. Sei $I \subset [-k, 0]$ das maximale Existenzintervall von u.

(2) Definiere $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, $\varphi(r) := u(r) - u'(r) - (n-1)e^{-2r}u'(r)$.
Beh.: Angenommen es gibt ein $r_0 \in I$, so dass für alle $r \in [-k, r_0)$ die Ungleichung $u'(r) > 0$ gilt. Dann gilt: $\forall\, r \in [-k, r_0) : \varphi(r) > 0$.
Es ist

$$\begin{aligned}\varphi(-k) &= u(-k) - u'(-k) - (n-1)e^{2k}u'(-k) \\ &= h - (1 + (n-1)e^{2k})\frac{e^{-2k}h}{n} \\ &> h - ne^{2k}\frac{e^{-2k}h}{n} = h - h = 0.\end{aligned}$$

Angenommen es gibt ein $r_1 \in (-k, r_0)$ mit $\varphi(r_1) = 0$. Wähle r_1 minimal. Dann gilt für alle $r \in [-k, r_1)$: $\varphi(r) > 0$. Somit gilt $\varphi'(r_1) \leq 0$. Es ist

$$\varphi'(r) = u'(r) + 2(n-1)e^{-2r}u'(r) - (1 + (n-1)e^{-2r})u''(r).$$

Erhalte daraus unter Verwendung von (4.3) an der Stelle $r = r_1$

$$\begin{aligned}&\varphi'(r_1) \\ &= (1 + (n-1)e^{-2r_1})u'(r_1) + (n-1)e^{-2r_1}u'(r_1) \\ &\quad - (1 + (n-1)e^{-2r_1})u''(r_1) \\ &= (1 + (n-1)e^{-2r_1})u'(r_1) + (n-1)e^{-2r_1}u'(r_1) - (1 + (n-1)e^{-2r_1})\cdot \\ &\quad \cdot \Big[\left(e^{2r_1} + u'(r_1)^2\right)\underbrace{\left(u(r_1) - (1 + (n-1)e^{-2r_1})u'(r_1)\right)}_{=\varphi(r_1)=0} + u'(r_1)\Big] \\ &= (n-1)e^{-2r_1}u'(r_1) > 0.\end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $\varphi'(r_1) \leq 0$.

(3) **Beh.:** Auf I gilt $u'' > 0$, d.h. u ist strikt konvex.
Es ist

$$u''(-k) = \underbrace{\left(e^{-2k} + u'(-k)^2\right)}_{>0}\underbrace{\varphi(-k)}_{>0} + \underbrace{\frac{e^{-2k}h}{n}}_{>0} > 0.$$

Angenommen es gibt ein $r_0 \in I$ mit $u''(r_0) = 0$. Wähle r_0 minimal. Auf $[-k, r_0)$ gilt $u'' > 0$ und wegen $u'(-k) > 0$ auch $u' > 0$. Wie in (2) gesehen gilt somit $\varphi(r) > 0$ für alle $r \in [-k, r_0)$. Sei $r \in [-k, r_0)$. Dann ist

$$u''(r) = \underbrace{\left(e^{2r} + u'(r)^2\right)\varphi(r)}_{>0} + u'(r) > u'(-k) > 0.$$

Die Abschätzung $u'(r) > u'(-k)$ folgt dabei aus $u''(s) > 0$ für alle $s \in [-k, r)$. Aus Stetigkeitsgründen folgt $u''(r_0) \geq u'(-k) > 0$. Dies steht im Widerspruch zu $u''(r_0) = 0$.

(4) **Beh.:** $\forall\, r \in I\colon 0 < u'(r) < \frac{e^{2r}h}{n-1}$.
Die Abschätzung $u' > 0$ folgt aus $u'(-k) > 0$ und (3). Desweiteren ist

$$u'(-k) = \frac{e^{-2k}h}{n} < \frac{e^{-2k}h}{n-1}.$$

Angenommen es gibt ein $r_0 \in I$ mit $u'(r_0) = \frac{e^{2r_0}h}{n-1}$. Wähle r_0 minimal. Für alle $r \in [-k, r_0)$ gilt $u'(r) < \frac{e^{2r}h}{n-1}$. Erhalte damit

$$\begin{aligned} u(r_0) &= u(-k) + \int_{-k}^{r_0} u'(r)dr < h + \int_{-k}^{r_0} \frac{e^{2r}h}{n-1}dr \\ &= h + \frac{e^{2r_0}h}{2(n-1)} - \frac{e^{-2k}h}{2(n-1)} < h + \frac{e^{2r_0}h}{n-1}. \end{aligned}$$

Wegen $u' > 0$ auf I und (2) gilt auch $\varphi > 0$ auf I. Mit der obigen Abschätzung für u folgt jedoch

$$\begin{aligned} \varphi(r_0) &= u(r_0) - (1 + (n-1)e^{-2r_0})\frac{e^{2r_0}h}{n-1} = u(r_0) - \frac{e^{2r_0}h}{n-1} - h \\ &< h + \frac{e^{2r_0}h}{n-1} - \frac{e^{2r_0}h}{n-1} - h = 0. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $\varphi(r_0) > 0$.

(5) **Beh.:** $I = [-k, 0]$.
Angenommen $I \neq [-k, 0]$. Dann gibt es ein $r_0 < 0$ mit $I = [-k, r_0)$. Auf I gilt $0 < u' < h$ gleichmäßig in r. Somit lässt sich u durch $u(r_0) := u(-k) + \int_{-k}^{r_0} u'(r)dr$ nach r_0 fortsetzen. Desweiteren kann man u' durch
$u'(r_0) := u'(-k) + \int_{-k}^{r_0} \big(e^{2r} + u'(r)^2\big)\big(u(r) - u'(r) - (n-1)e^{-2r}u'(r)\big) + u'(r)dr$
nach r_0 fortsetzen. Hierbei haben wir ebenfalls verwendet, dass u und u' auf I gleichmäßig beschränkt sind. Aufgrund der Kurzzeitexistenz einer Lösung von (4.2) mit obigen Anfangswerten bei r_0 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass u auf $[-k, r_0 + \varepsilon)$ existiert. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von r_0.

(6) **Beh.:** Auf $[-k, 0]$ ist u gleichmäßig in C^3 beschränkt unabhängig von k und r.
Wie in (4) gesehen gilt $0 < u'(r) < \frac{e^{2r}h}{n-1} \leq h$ für alle $r \in I$. Erhalte daraus für u die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 < u(r) &= u(-k) + \int_{-k}^{r} u'(s)ds < h + \int_{-k}^{r} \frac{e^{2s}h}{n-1}ds \\ &= h + \frac{e^{2r}h}{2(n-1)} - \frac{e^{-2k}h}{2(n-1)} < 2h \end{aligned}$$

für alle $r \in I$. Für $r \in I$ ist desweiteren

$$\begin{aligned} 0 < u''(r) &= \big(e^{2r} + u'(r)^2\big)\big(u(r) - \underbrace{(1 + (n-1)e^{-2r})u'(r)}_{>0}\big) + u'(r) \\ &< \big(e^{2r} + u'(r)^2\big)u(r) + u'(r) < (1 + h^2)2h + h \\ &= 2h^3 + 3h. \end{aligned}$$

Sei $r \in I$. Differentiation von (4.3) ergibt

$$\begin{aligned}
&u'''(r)\\
&= \underbrace{\big(2e^{2r} + 2u'(r)u''(r)\big)}_{>0}\underbrace{\big(u(r) - (1+(n-1)e^{-2r})u'(r)\big)}_{=\varphi(r)>0}\\
&\quad + \underbrace{\big(e^{2r} + u'(r)^2\big)}_{>0}\Big(\underbrace{u'(r) + 2(n-1)e^{-2r}u'(r)}_{>0}\underbrace{-(1+(n-1)e^{-2r})u''(r)}_{<0}\Big)\\
&\quad + \underbrace{u''(r)}_{>0}.
\end{aligned}$$

Für die Abschätzungen haben wir (2),(3) und (4) verwendet. Desweiteren ist

$$\begin{aligned}
u'''(r) &> -\big(e^{2r} + u'(r)^2\big)\big(1+(n-1)e^{-2r}\big)u''(r)\\
&> -\left(e^{2r} + \frac{e^{4r}h^2}{(n-1)^2}\right)\big(1+(n-1)e^{-2r}\big)(2h^3+3h)\\
&= -\underbrace{e^{2r}}_{\leq 1}\left(e^{2r} + \frac{e^{2r}h^2}{(n-1)^2}\right)(2h^3+3h)\\
&\quad - \left(1 + \frac{e^{2r}h^2}{(n-1)^2}\right)(2h^3+3h)(n-1)\underbrace{e^{2r}e^{-2r}}_{=1}\\
&> -\left(1 + \frac{h^2}{(n-1)^2}\right)(2h^3+3h)\cdot 1\\
&\quad - \left(1 + \frac{h^2}{(n-1)^2}\right)(2h^3+3h)(n-1)\\
&= -n\left(1 + \frac{h^2}{(n-1)^2}\right)(2h^3+3h) > -\infty
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
u'''(r) &< \big(2e^{2r} + 2u'(r)u''(r)\big)u(r)\\
&\quad + \big(e^{2r} + u'(r)^2\big)\big(u'(r) + 2(n-1)e^{-2r}u'(r)\big) + u''(r)\\
&< \big(2\cdot 1 + 2h(2h^3+3h)\big)2h\\
&\quad + \big(1+h^2\big)\left(h + 2(n-1)e^{-2r}\frac{e^{2r}h}{n-1}\right) + 2h^3 + 3h\\
&= 4h + 8h^5 + 12h^3 + \big(1+h^2\big)(h+2h) + 2h^3 + 3h\\
&= 8h^5 + 12h^3 + 4h + 3h + 3h^3 + 2h^3 + 3h\\
&= 8h^5 + 17h^3 + 10h < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist $(u_k)_k$ gleichmäßig in C^3 beschränkt.

(7) **Beh.:** Es existiert ein Lösung w von (4.2), welche auf $(-\infty, 0]$ existiert.
Sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Abschneidefunktion mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 0$ auf $(-\infty, 1]$ und $\psi \equiv 1$ auf $[2, \infty)$. ψ ist in C^3 gleichmäßig beschränkt. Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ definiere $w_k\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$,

$$w_k(r) := \begin{cases} h, & r < -k\\ \psi(r+k)\,(u_k(r) - h) + h, & -k \leq r \leq 0. \end{cases}$$

Für alle $r \leq -k+1$ gilt $w_k(r) = h$. Desweiteren gilt auf $(-k+2, 0]$: $w_k \equiv u_k$. Insbesondere ist w_k auf $(-k+2, 0]$ eine Lösung von (4.2). Da $\varphi, (u_k)_k$ gleichäßig in C^3 beachränkt sind, ist auch $(w_k)_k$ gleichmäßig in C^3 beschränkt. Erhalte mit Arzelà-Ascoli eine Teilfolge $(w_{k_l})_l$ von $(w_k)_k$, mit $w_{k_l} \to w$ in $C^2_{loc}((-\infty, 0])$.

Da für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt, dass w_{k_l} auf $(-k_l+2, 0]$ die Gleichung (4.2) löst, folgt mit der C^2_{loc}-Konvergenz, dass w die Gleichung (4.2) auf $(-\infty, 0]$ löst. Wir zeigen im Folgenden noch die weiteren behaupteten Eigenschaften von w.

(8) **Beh.:** Es gilt $\lim\limits_{r\to-\infty} w(r) = h$.

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Aus $u_k \geq h$ und $\psi \geq 0$ folgt $w_k \geq h$. Für $r \leq 0$ ist somit $w(r) = \lim\limits_{l\to\infty} w_{k_l}(r) \geq h$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $R < 0$ so klein, dass für alle $r \leq R$ gilt: $0 < \frac{e^{2r}h}{2(n-1)} < \varepsilon$. Sei $r \leq R$ fest und sei $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $-k_l + 2 < r$ gilt. Mit der ersten Abschätzung aus (6) folgt $w_{k_l}(r) = u_{k_l}(r) < h + \frac{e^{2r}h}{2(n-1)} < h+\varepsilon$. Erhalte daraus im Grenzwert $w(r) = \lim\limits_{l\to\infty} w_{k_l}(r) \leq h + \varepsilon$. Auf $(-\infty, R]$ gilt somit $h \leq w \leq h + \varepsilon$. Erhalte $\lim\limits_{r\to-\infty} w(r) = h$.

(9) **Beh.:** Für alle $r \leq 0$ gelten:

(a) $h \leq w(r) \leq h + \frac{e^{2r}h}{2(n-1)}$,

(b) $0 \leq w'(r) \leq \frac{e^{2r}h}{n-1}$,

(c) $e^{-r}w'(r) \to 0$ für $r \to -\infty$.

(a) wurde bereits gezeigt. Sei $r \leq 0$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $-k_l + 2 < r$. Dann gilt $0 < w'_{k_l}(r) = u'_{k_l}(r) < \frac{e^{2r}h}{n-1}$ nach (4). Erhalte daraus im Grenzwert $0 \leq w'(r) = \lim\limits_{l\to\infty} w'_{k_l}(r) \leq \frac{e^{2r}h}{n-1}$. (c) folgt aus (b). Dies zeigt bereits die Regularitätsbedingung (ii').

(10) **Beh.:** Es gilt $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}w'(r) = \frac{h}{n}$.

Sei $\varepsilon > 0$ und definiere $\chi(r) := e^{-2r}w'(r)$. Zeige: $\exists\, r_0 < 0\, \forall\, r \leq r_0 : \frac{h}{n} - \varepsilon \leq \chi(r) \leq \frac{h}{n} + \varepsilon$. Sei $r < 0$. Mit (4.2) ist

$$\begin{aligned}
\chi'(r) &= -2e^{-2r}w'(r) + e^{-2r}w''(r) \\
&= e^{-2r}\left(e^{2r} + w'(r)^2\right)\left(w(r) - w'(r) - (n-1)e^{-2r}w'(r)\right) \\
&\quad + e^{-2r}w'(r) - 2e^{-2r}w'(r) \\
&= \left(1 + \left(e^{-r}w'(r)\right)^2\right)\left(w(r) - w'(r) - (n-1)\chi(r)\right) - \chi(r).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt $0 \leq \chi(r) \leq \frac{h}{n-1}$, d.h. χ ist beschränkt. Wähle $R < 0$ so klein, dass für alle $r \leq R$ gilt:

$$\left(e^{-r}w'(r)\right)^2 < \frac{n\varepsilon}{2h},\; w(r) < h + \varepsilon,\; \frac{e^{2r}h}{n} < (n-1)\varepsilon.$$

Wir haben dabei (9) verwendet.

Angenommen es gibt ein $r_0 \leq R$ mit $\chi(r_0) > \frac{h}{n} + \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\chi'(r_0) &\leq \left(1 + \left(e^{-r_0}w'(r_0)\right)^2\right)\left(h + \varepsilon - 0 - (n-1)\left(\frac{h}{n} + \varepsilon\right)\right) - \left(\frac{h}{n} + \varepsilon\right) \\
&= \left(1 + \left(e^{-r_0}w'(r_0)\right)^2\right)\left(\frac{h}{n} + \underbrace{(2-n)\varepsilon}_{\leq 0}\right) - \frac{h}{n} - \varepsilon \\
&\leq \left(1 + \frac{n\varepsilon}{2h}\right)\frac{h}{n} - \frac{h}{n} - \varepsilon \\
&= -\frac{\varepsilon}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\chi'(r) < -\frac{\varepsilon}{2}$ bleibt auf $(-\infty, r_0]$ erhalten: Es reicht zu zeigen, dass auf $(-\infty, r_0]$ die Abchätzung $\chi(r) > \frac{h}{n} + \varepsilon$ erhalten bleibt. Angenommen es gibt ein $r < r_0$ mit $\chi(r) = \frac{h}{n} + \varepsilon$. Wähle r maximal. Da auf $(r, r_0]$ die Ungleichung $\chi'(s) < 0$ gilt, folgt $\chi(r) > \chi(r_0) > \frac{h}{n} + \varepsilon$. Widerspruch. Aus der

Ungleichung $\chi'(r) < -\frac{\varepsilon}{2}$ auf $(-\infty, r_0]$ folgt nun jedoch $\chi(r) \to \infty$ für $r \to -\infty$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass χ beschränkt ist. Folglich gilt $\chi(r) \le \frac{h}{n}+\varepsilon$ für alle $r \le R$.
Angenommen es gibt ein $r_0 \le R$ mit $\chi(r_0) \le \frac{h}{n} - \varepsilon$. Dann ist $w'(r_0) = e^{2r_0}\chi(r_0) \le \frac{e^{2r_0}h}{n} - e^{2r_0}\varepsilon$ und

$$\begin{aligned}
&\chi'(r_0)\\
&\ge \left(1 + \left(e^{-r_0}w'(r_0)\right)^2\right)\left(h - \frac{e^{2r_0}h}{n} + e^{2r_0}\varepsilon - \frac{(n-1)h}{n} + (n-1)\varepsilon\right) - \frac{h}{n} + \varepsilon\\
&= \Bigg(1 + \underbrace{\left(e^{-r_0}w'(r_0)\right)^2}_{>0}\Bigg)\Bigg(\frac{h}{n} + \underbrace{e^{2r_0}\varepsilon + (n-1)\varepsilon - \frac{e^{2r_0}h}{n}}_{>0}\Bigg) - \frac{h}{n} + \varepsilon\\
&\ge \frac{h}{n} - \frac{h}{n} + \varepsilon = \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung bleibt auf $(-\infty, r_0]$ erhalten. Es folgt $\chi(r) \to -\infty$ für $r \to -\infty$ im Widerspruch dazu, dass χ beschränkt ist. Erhalte $\chi(r) \ge \frac{h}{n} - \varepsilon$ für alle $r \le R$.
Es folgt $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}w'(r) = \frac{h}{n} \in \mathbb{R}$. Dies zeigt die Regularitätsbedingung (i').

(11) **Beh.:** $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}\left(w''(r) - 2w'(r)\right) = 0$.
Wir verwenden (8) und (10). Sei $r \le 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&e^{-2r}\left(w''(r) - 2w'(r)\right)\\
&= e^{-2r}\left(e^{2r} + w'(r)^2\right)\left(w(r) - w'(r) - (n-1)e^{-2r}w'(r)\right)\\
&\quad + e^{-2r}w'(r) - 2e^{-2r}w'(r)\\
&= \Bigg(1 + \underbrace{\left(e^{-r}w'(r)\right)^2}_{\to 0}\Bigg)\Bigg(\underbrace{w(r)}_{\to h} - \underbrace{w'(r)}_{\to 0} - (n-1)\underbrace{e^{-2r}w'(r)}_{\to \frac{h}{n}}\Bigg) - \underbrace{e^{-2r}w'(r)}_{\to \frac{h}{n}}\\
&\to h - \frac{(n-1)h}{n} - \frac{h}{n} = 0
\end{aligned}$$

für $r \to -\infty$. Dies zeigt die Regularitätsbedingung (iii'). □

Bemerkung 4.2.3.
$v(r) := w(\log(r))$ löst (4.1) und existiert auf $(0,1]$. Desweiteren gelten $v > 0$ und $v' > 0$ auf $(0,1]$: Es ist $v'(r) = \frac{w'(\log(r))}{r}$. $v > 0$ bzw. $v' > 0$ folgen nun direkt aus $w > 0$ bzw. $w' > 0$. Die Funktion

$$V : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} h, & x = 0 \\ v(|x|), & \text{sonst} \end{cases}$$

ist von der Klasse C^2.

4.3. **Globale Existenz.**

Mit Theorem 4.2.2, obiger Bemerkung und dem folgenden Lemma erhalten wir eine Lösung v von (4.1), welche auf $(0,\infty)$ existiert und die Regularitätsbedingungen bei $r = 0$ erfüllt.

Lemma 4.3.1.
Sei $r_0 > 0$ und v eine Lösung von (4.1) mit $v(r_0) > 0$, $v'(r_0) > 0$. Dann existiert v auf $[r_0,\infty)$.

Beweis. Sei $I \subset [r_0,\infty)$ das maximale Existenzintervall von v. Zeige $I = [0,\infty)$.

(1) **Beh.:** Es gilt $v' > 0$ auf I.
Es ist $v'(r_0) > 0$. Angenommen es existiert ein $r > r_0$ mit $v'(r) = 0$. Wähle r minimal. Wegen $v'(s) > 0$ für alle $s \in [r_0, r)$ gilt $v(r) > v(r_0) > 0$ und $v''(r) \leq 0$. Wegen (4.1) und $v'(r) = 0$ ist jedoch $v''(r) = v(r) > 0$. Widerspruch.

(2) **Beh.:** $\exists\, c > 0 \,\forall\, r \in I\colon v'(r) < \frac{c}{r} v(r)$.
Sei $c := \max\left\{2, \frac{2v'(r_0)r_0}{v(r_0)}\right\}$. Definiere $\chi(r) := v'(r) - \frac{c}{r} v(r)$. Es ist

$$\chi(r_0) < v'(r_0) - \frac{2v'(r_0)r_0}{v(r_0)} \frac{v(r_0)}{r_0} = -v'(r_0) < 0.$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned}\chi'(r) &= v''(r) - \frac{cv'(r)}{r} + \frac{cv(r)}{r^2} \\ &= \left(1 + v'(r)^2\right)\left(v(r) - v'(r)r - \frac{n-1}{r} v'(r)\right) - \frac{cv'(r)}{r} + \frac{cv(r)}{r^2}.\end{aligned}$$

Angenommen es gibt ein $r > r_0$ mit $\chi(r) = 0$. Wähle r minimal. Dann gelten $\chi'(r) \geq 0$ und $v'(r) = \frac{c}{r} v(r)$. Erhalte

$$\begin{aligned}\chi'(r) &= \underbrace{\left(1 + v'(r)^2\right)}_{>1}\left(v(r) - cv(r) \underbrace{- \frac{n-1}{r} v'(r)}_{<0}\right) \underbrace{- \frac{c^2 v(r)}{r^2} + \frac{cv(r)}{r^2}}_{<0} \\ &< v(r) - cv(r) < -v(r) < 0.\end{aligned}$$

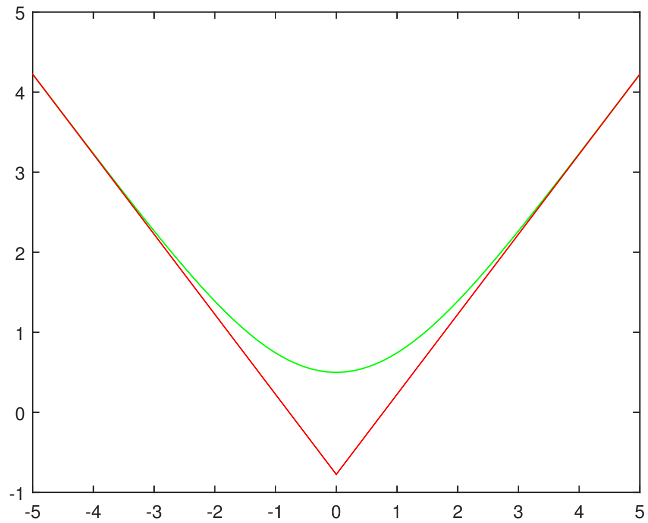
Widerspruch. Erhalte $0 < v'(r) < \frac{c}{r} v(r)$ für alle $r \in I$.

(3) Sei $A \in \mathbb{R}$ und $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(r) := Ar^c$. Dann ist $u'(r) = Acr^{c-1} = \frac{c}{r} u(r)$. Wähle $A > 0$ so groß, dass $u(r_0) > v(r_0)$ gilt. Mit dem Vergleichsprinzip folgt nun, dass v auf $[r_0, \infty)$ existiert.

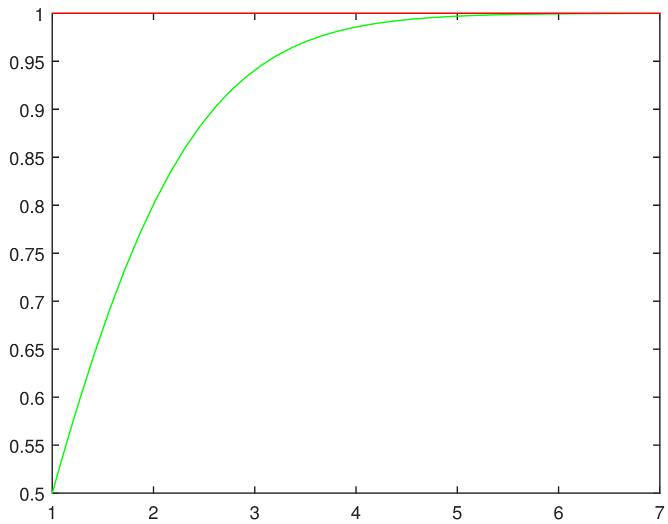
□

Anhang A. Numerische Untersuchungen

A.1. **Translatierende Lösungen.**
Die folgende Graphik zeigt eine translatierende Lösung zur Dimension $n = 2$ und Anfangshöhe $h = 0.5$. Man sieht die Asymptotik zum Lichtkegel. Lösungen zu anderen Dimensionen und Anfagshöhen sehen sehr ähnlich aus.

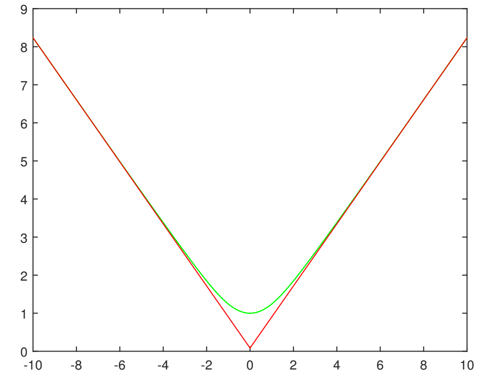


Die exponentielle Konvergenz einer Lösung von (2.1.2) lässt sich ebenfalls numerisch erkennen. Die folgende Graphik zeigt eine Lösung mit $n = 2$ und $\varphi(1) = 0.5$.

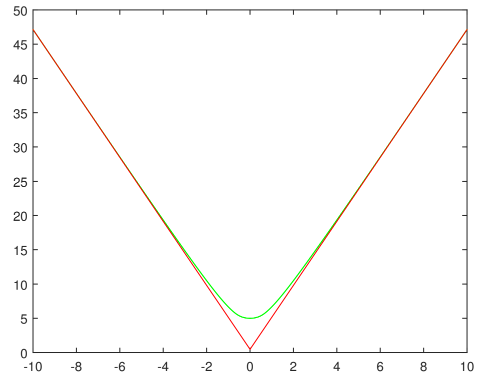


A.2. **Homothetisch expandierende Lösungen.**
Numerische Untersuchungen legen die Vermutung nahe, dass eine homothetisch expandierende Lösung asymptotisch zu einem Kegel ist, dessen Steigung monoton von der Anfangshöhe abhängt. Die folgenden Graphiken zeigen einige Beispiele mit Dimension $n = 2$ und unterschiedlichen Anfangshöhen.

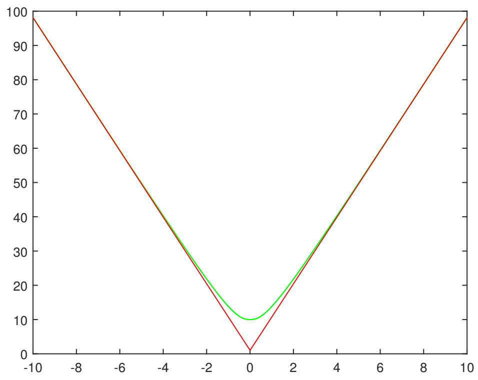
Anfangshöhe $h = 1$, Endsteigung: $v'(10) \approx 0.8150$.



Anfangshöhe $h = 5$, Endsteigung: $v'(10) \approx 4.6670$.



Anfangshöhe $h = 10$, Endsteigung: $v'(10) \approx 9.7098$.



Literatur

1. Klaus Ecker, *Interior estimates and longtime solutions for mean curvature flow of noncompact spacelike hypersurfaces in Minkowki space*, J. Differential Geometry. **45** (1997), 481–498.
2. Klaus Ecker, Gerhard Huisken, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Inventiones mathematicae. **105** (1991), 547–569.
3. Oliver C. Schnürer, *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen*, 2016, Skript zur Vorlesung.