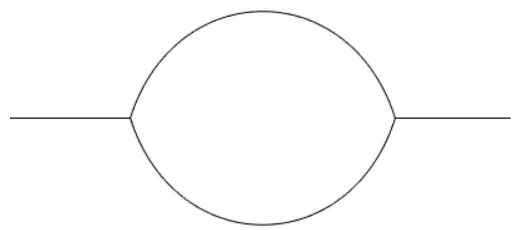
Existenz homothetisch schrumpfender rotationssymmetrischer Linsen unter dem mittleren Krümmungsfluss



Bachelor im Fach Mathematik

von

Lena Reichle

betreut von

Prof. Dr. Oliver Schnürer

eingereicht am Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz

Oktober 2017

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

26. Oktober 2017

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Oliver Schnürer für die großartige Betreuung und Unterstützung bedanken. Desweiteren gilt mein Dank Jonas Blessing, Sebastian Kümpel und Johannes Krotz für ihre Hilfsbereitschaft und Unterstützung.

ZUSAMMENFASSUNG. Im ersten Teil meiner Bachelorarbeit leite ich zuerst die Differentialgleichung einer homothetisch schrumpfenden rotationssymmetrischen Lösung des mittleren Krümmungsflusses her. Anschließend beweise ich die Existenz und Regularität einer solchen Lösung im Ursprung. Im zweiten Teil betrachte ich dann speziellere Lösungen und beweise die Existenz einer, unter dem mittleren Krümmungsfluss homothetisch schrumpfenden rotationssymmetrischen, Linse. Genauere Definitionen findet der Leser in Kapitel 1. Am Ende gehe ich noch kurz auf numerische Vermutungen im Bezug auf die Gleichung ein.

Inhaltsverzeichnis

1. Geometrische Grundbegriffe

Wir verwenden im Folgenden [1] und [2].

1.1. Normale, Metrik, zweite Fundamentalform und mittlere Krümmung.

Definition 1.1.1 (Linse)**.** Eine graphische Linse $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ wird durch eine einfach zusammenhängende Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $u = 0$ auf $\partial\Omega$,
(ii) $u > 0$ im Inneren von Ω,
(iii) der Schnittwinkel zwischen der Ebene $\Omega \times \{0\}$ und $\operatorname{graph}(u)$ beträgt überall $60°$, d.h. in jedem Schnittpunkt von $\Omega \times \{0\}$ und $\operatorname{graph}(u)$ beträgt der Winkel der Normalenvektoren $60°$.

eindeutig bestimmt.
Die gesamte Linse wird dann durch $\operatorname{graph}(u)$, $-\operatorname{graph}(u)$ und $(\mathbb{R}^n \backslash \Omega) \times \{0\}$ gegeben.

Definition 1.1.2 (Normale)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Dann heißt eine stetige Funktion $\nu \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

(i) $|\nu(x)| = 1$ für alle $x \in \Omega$ und
(ii) $\nu(x) \perp X_i(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $1 \le i \le n$, wobei $X_i \equiv \frac{\partial X}{\partial x^i}$ ist,

ein Einheitsnormalenfeld an X. $\nu(x)$ heißt (Einheits-)Normale an X im Punkt x bzw. $X(x)$.

Bemerkung 1.1.3 (Vorzeichenkonvention)**.** Bei geschlossenen Hyperflächen wollen wir stets die äußere Normale und bei graphischen Hyperflächen stets die untere Normale wählen.

Beispiel 1.1.4. Ist $X(x) = (x, u(x))$ ein Graph, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^1(\Omega)$ sind, so gilt für die „untere“ Normale, $\nu(x) = \frac{(\nabla u(x), -1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2(x)}}$.

Beweis. Es gilt $X_i = (e_i, u_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Wir erhalten

$$\langle X_i, \nu \rangle = \frac{\langle e_i, \nabla u \rangle_{\mathbb{R}^n} - u_i}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

Weiterhin gilt $|\nu| = 1$. □

Definition 1.1.5 (Metrik)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei X eine immersierte Hyperfläche. Definiere die Metrik $g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $g_{ij} = g_{ij}(x)$ von X durch

$$g_{ij}(x) := \langle X_i, X_j \rangle \equiv X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta.$$

Mit $\left(g^{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$ bezeichnen wir die Inverse von (g_{ij}). Es gilt also $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

Beispiel 1.1.6. Ist $X(x) = (x, u(x))$, so gilt $X_i = (e_i, u_i)$. Wir erhalten also

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \langle (e_i, u_i), (e_j, u_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} + u_i u_j = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

Weiterhin gilt

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1 + |Du|^2},$$

wobei wir $u^i := \delta^{ik} u_k$ gesetzt haben.

Definition 1.1.7 (Zweite Fundamentalform)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei X eine immersierte C^2-Hyperfläche mit Normale ν. Dann definieren wir die zweite Fundamentalform $(h_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ von X durch

$$h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle$$

mit $X_{,ij} := \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}$. (h_{ij}) ist symmetrisch.

Beispiel 1.1.8. Ist $X(x) = (x, u(x))$, so gilt $X_{,ij} = (0, u_{ij})$, wobei wir mit u_{ij} die partiellen zweiten Ableitungen von u bezeichnen, und wir erhalten nach Definition der Normalen

$$h_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Definition 1.1.9 (Hauptkrümmungen)**.** Die Eigenwerte von h_{ij} (genauer (h_{ij})) bezüglich g_{ij} heißen Hauptkrümmungen und werden mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezeichnet.

Definition 1.1.10. Elementarsymmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen sind wohldefiniert. Wir nennen $S_1(\lambda) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n =: H$ die mittlere Krümmung und $S_n(\lambda) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n =: K$ die Gaußkrümmung.

Beispiel 1.1.11. Im graphischen Fall gilt

$$H = g^{ij} h_{ij} = \frac{\delta^{ij} u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u^j u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}^3} = div\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right).$$

1.2. **Der graphische mittlere Krümmungsfluss.**

Definition 1.2.1 (Mittlerer Krümmungsfluss)**.** Eine Familie $(X(\cdot,t))_{t\in[0,T)}$, $T > 0$, von immersierten Hyperflächen $X(\cdot,t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt den mittleren Krümmungsfluss, falls

$$\frac{d}{dt} X = -H\nu$$

für alle $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ gilt und X auf $\Omega \times [0,T)$ stetig ist.

Theorem 1.2.2. *Sei $(X(\cdot,t))_{t\in[0,T)}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, so dass $Im\, X(\cdot,t) = graph\, u(\cdot,t)$ für alle $t \in [0,T)$ für eine $C^{2;1}$-Funktion u gilt (wobei $C^{2;1}$ den Raum der im Ort zweimal stetig und in der Zeit einmal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet). Dann erfüllt u die Differentialgleichung*

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot div\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \Delta u - \frac{u_{ij} u^i u^j}{1+|Du|^2}.$$

Beweis. Sei X auf $\Omega \times [0,T)$ definiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in Ω mit ξ. Wir bezeichnen die orthogonale Projektion von $X(\xi,t)$ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$ mit $x(\xi,t)$. Dann gilt

$$X(\xi,t) = (x(\xi,t), u(x(\xi,t),t)).$$

Aus der Evolutionsgleichung folgt

$$\frac{d}{dt} X = \left(\dot x, u_i \dot x^i + \dot u\right) = -H\nu = H \frac{(-u^1, \ldots, -u^n, 1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Dabei bezeichnet $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Durch Komponentenvergleich erhalten wir

$$\dot x^i = \frac{-Hu^i}{\sqrt{1+|Du|^2}},$$

$$\dot{u} = \frac{H}{\sqrt{1+|Du|^2}} - u_i \dot{x}^i = \frac{H}{\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{H|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot H.$$

Bis hier gelten die Rechnungen auch für andere Normalengeschwindigkeiten als H. Die Formel für H im graphischen Fall haben wir bereits oben hergeleitet. Somit folgt die Behauptung. □

2. Homothetisch schrumpfende Lösungen des mittleren Krümmungsflusses

2.1. Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Bemerkung 2.1.1 (Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung)**.**

(i) Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ eine homothetisch schrumpfende Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses.
Weiter fordern wir für $t, t_0 \in (-\infty, 0)$ mit t_0 fest

$$\mu(t) \cdot \{(y, u(y, t_0))\colon y \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, u(x,t))\colon x \in \mathbb{R}^n\}$$

für $\mu(t) \neq 0$.
Wir definieren $U(y) := u(y, t_0)$.
Dann gilt $\mu(t)U(y) = u(x,t)$ mit $x = \mu(t)y$.
Somit gilt also $u(x,t) = \mu(t)U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)$.
Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,t) &= \dot{\mu}(t)U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) + \mu(t)U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)^2}\dot{\mu}(t)(-1) \\
&= \dot{\mu}(t)\left(U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)}\right), \\
u_i(x,t) &= U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right), \\
u_{ij}(x,t) &= \frac{1}{\mu(t)}U_{ij}\left(\frac{x}{\mu(t)}\right).
\end{aligned}$$

(ii) Da u die Differentialgleichung des graphischen mittleren Krümmungsflusses $\dot{u} = \Delta u - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2}$ erfüllt, erhalten wir daraus eine Differentialgleichung für U.

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,t) &= \dot{\mu}(t)\left(U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)}\right) \\
&= \Delta u - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2} \\
&= \frac{1}{\mu(t)}\Delta U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - \frac{1}{\mu(t)}\frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2}\left(\frac{x}{\mu(t)}\right).
\end{aligned}$$

Wir weisen darauf hin, dass $U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)$ für $\frac{\partial}{\partial x^i}U(y)\Big|_{y=\frac{x}{\mu(t)}}$ und nicht etwa für $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\right)$ steht.
Benutzen wir nun $y = \frac{x}{\mu(t)}$, so erhalten wir

$$\dot{\mu}(t) \cdot \mu(t)\left\{U(y) - U_i(y)y^i\right\} = \Delta U(y) - \frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2}(y).$$

Wir erhalten daraus eine zeitunabhängige Differentialgleichung für U, falls $\dot{\mu}(t) \cdot \mu(t) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ist. Für $c \neq 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$\mu(t) = \pm\sqrt{2ct - 2ct_0 + \mu(t_0)^2}$$

für Zeiten t.
Da wir eine homothetisch schrumpfende Lösung betrachten, gilt $\mu > 0$ und $\dot{\mu} < 0$ und damit $c < 0$. Wir fordern $\mu(t_0) = 1$ und wählen $t_0 = \frac{1}{2}$. Somit erhalten wir $\mu(t) = \pm\sqrt{2ct}$ und $\mu(t)$ existiert so auf $(-\infty, 0)$.
Ohne Einschränkung darf man im Falle $c < 0$ annehmen, dass $\dot{\mu}(t) \cdot \mu(t) = -1$ gilt. Ansonsten bekommt man eine Lösung U, deren Graph homothetisch gestreckt ist.
Löst nämlich U die Differentialgleichung

$$-U + U_i x^i = \Delta U - \frac{U_{ij} U^i U^j}{1 + |DU|^2},$$

so folgt für $V(x) := \nu U\left(\frac{x}{\nu}\right)$ mit $\nu > 0$

$$\begin{aligned}
V_i(x) &= U_i\left(\frac{x}{\nu}\right)\\
V_{ij}(x) &= \frac{1}{\nu} U_{ij}\left(\frac{x}{\nu}\right)\\
-V(x) + V_i(x)x^i &= \nu\left(-U\left(\tfrac{x}{\nu}\right) + U_i\left(\frac{x}{\nu}\right)\frac{x^i}{\nu}\right)\\
&= \nu\left(\Delta U\left(\tfrac{x}{\nu}\right) - \frac{U_{ij}\left(\frac{x}{\nu}\right) U^i\left(\frac{x}{\nu}\right) U^j\left(\frac{x}{\nu}\right)}{1 + |DU|^2\left(\frac{x}{\nu}\right)}\right)\\
&= \nu^2\left(\Delta V(x) - \frac{V_{ij}(x)V^i(x)V^j(x)}{1 + |DV|^2(x)}\right).
\end{aligned}$$

Daher liefert eine andere positive Konstante nur eine Skalierung von U.
Wir erhalten als partielle Differentialgleichung für U

$$-U(x) + U_i(x)x^i = \Delta U(x) - \frac{U_{ij}(x)U^i(x)U^j(x)}{1 + |DU(x)|^2}.$$

Diese Gleichung sichert, dass $\mu(t) \cdot \{(x, u(x,t)) \colon x \in \mathbb{R}^n\}$ eine homothetisch schrumpfende Lösung des mittleren Krümmungsflusses ist. Wir haben wieder x statt y geschrieben.

(iii) Betrachten wir nun zusätzlich noch eine rotationssymmetrische Lösung mit $U(x) = V(|x|) \equiv V(r)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
U(x) &= V(r),\\
U_i(x) &= V'(r)\frac{x_i}{|x|},\\
U_{ij}(x) &= V'(r)\frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + V''(r)\frac{x_i x_j}{|x|^2},\\
-V(r) + V'(r)r &= -U(x) + U_i(x)x^i\\
&= \Delta U(x) - \frac{U_{ij}(x)U^i(x)U^j(x)}{1 + |DU(x)|^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= V'(r)\frac{1}{r}\left(n - \frac{r^2}{r^2}\right) + V''(r)\frac{r^2}{r^2} \\
&\quad - \frac{V'(r)^3\frac{1}{r}\left(\frac{r^2}{r^2} - \frac{r^4}{r^4}\right) + V''(r)V'(r)^2\left(\frac{r^4}{r^4}\right)}{1 + |V'(r)|^2} \\
&= V''(r) + \frac{n-1}{r}V'(r) - \frac{V''(V')^2}{1 + (V')^2} \\
&= \frac{V''}{1 + (V')^2} + \frac{n-1}{r}V'(r).
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir die Differentialgleichung

$$V''(r) = \left(1 + (V'(r))^2\right) \cdot \left(V'(r)(r - \frac{n-1}{r}) - V(r)\right) \tag{2.1}$$

für V.

2.2. **Existenz nahe r = 0.**

Lemma 2.2.1. *Sei $r_{max} \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Differentialgleichung 2.1 für $r \in (0, r_{max})$ ist äquivalent zu*

$$W''(r) = W'(r) + \left(e^{2r} + W'^2(r)\right)\left(W'(r) - W(r) - W'(r)e^{-2r}(n-1)\right) \tag{2.2}$$

mit $W(r) := V(e^r)$ für $r \in (-\infty, log(r_{max}))$.

Beweis. Setze $W(r) := V(e^r)$, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
W'(r) &= e^r V'(e^r) \\
W''(r) &= e^r V'(e^r) + e^{2r} V''(e^r) \\
&= W'(r) + e^{2r}\left(1 + V'^2(e^r)\right)\left(V'(e^r)e^r - V(e^r) - V'(e^r)e^{-r}(n-1)\right) \\
&= W'(r) + \left(e^{2r} + W'^2(r)\right)\left(W'(r) - W(r) - W'(r)e^{-2r}(n-1)\right).
\end{aligned}
$$

□

Theorem 2.2.2 (Existenz nahe r = 0.)**.** *Sei $r_0 \in \mathbb{R}_{<-1}$. Für alle $n \geq 2$ und für alle $h \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $h_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Lösung $W \in C^2((-\infty, r_0])$ des Anfangswertproblems*

$$
\begin{cases}
W''(r) = & W'(r) + \left(e^{2r} + W'^2(r)\right)\left(W'(r) - W(r) - W'(r)e^{-2r}(n-1)\right), \\
W(r_0) = & h_0
\end{cases}
$$

mit

$$\lim_{r \to -\infty} W'(r) = 0 \qquad \lim_{r \to -\infty} W(r) = h.$$

Beweis. (i) Wir betrachten die Differentialgleichung nun auf $[-k, -1]$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $h \in \mathbb{R}_{>0}$, beliebig, aber fest.

Betrachte also das Anfangswertproblem

$$
\begin{cases}
W''(r) = & W'(r) + \left(e^{2r} + W'^2(r)\right)\left(W'(r) - W(r) - W'(r)e^{-2r}(n-1)\right), \\
W'(-k) = & \frac{-e^{-2k}h}{n}, \\
W(-k) = & h.
\end{cases}
$$

Dieses Anfangswertproblem besitzt eine Lösung W_k auf dem maximalen Existenzintervall $I_k \subseteq [-k, -1]$ mit $-k \in I_k$.

Wir leiten nun Abschätzungen für W_k her.

(ii) Es gilt $W_k > 0$ auf I_k:
Angenommen, es existiert ein $r_1 \in I_k$ minimal mit $W_k(r_1) = 0$. Da $W_k(-k) = h > 0$ muss $r_1 > -k$ gelten.
Damit gilt für alle $r \in I_k$ mit $-k \leq r < r_1$ $W_k(r) > 0$. Die Behauptung zeigen wir später in (vi).

(iii) W_k ist strikt konkav auf $[-k, r_1]$:
Es gilt

$$\begin{aligned}
W_k''(-k) &= \frac{-e^{-2k}h}{n} + \left(e^{-2k} + W_k'(-k)^2\right)\left(W_k'(-k) - W_k(-k) - (n-1)e^{2k}W_k'(-k)\right) \\
&= \frac{-e^{-2k}h}{n} + \left(e^{-2k} + W_k'(-k)^2\right)\left(\frac{-e^{-2k}h}{n}(1-(n-1)e^{2k}) - h\right) \\
&= \frac{-e^{-2k}h}{n} + \left(e^{-2k} + W_k'(-k)^2\right)\left(\frac{-e^{-2k}h}{n} + \frac{h(n-1)}{n} - h\right) \\
&= \frac{-e^{-2k}h}{n} + \left(e^{-2k} + W_k'(-k)^2\right)\underbrace{\left(-\frac{e^{-2k}h}{n} - \frac{h}{n}\right)}_{<0} \\
&< \frac{-e^{-2k}h}{n} < 0,
\end{aligned}$$

also gilt die Behauptung für r nahe $-k$.
Angenommen, es existiert ein $r_0 \in [-k, r_1]$ minimal mit $W_k''(r_0) = 0$. Da $W_k'' < 0$ für $-k \leq r < r_0$ gilt, muss $W_k'''(r_0) \geq 0$ gelten.
Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
0 \leq W_k'''(r_0) = &\left(2e^{2r_0} + 2W_k'(r_0)\underbrace{W_k''(r_0)}_{=0}\right)\left(W_k'(r_0)\left(1-(n-1)e^{-2r_0}\right) - W_k(r_0)\right) + \underbrace{W_k''(r_0)}_{=0} \\
&+ \left(e^{2r_0} + W_k'(r_0)^2\right)\left(\underbrace{W_k''(r_0)}_{=0}\left(1-(n-1)e^{-2r_0}\right) - W_k'(r_0)\left(1-2(n-1)e^{-2r_0}\right)\right) \\
= &\,2e^{2r_0}\left(W_k'(r_0)\left(1-(n-1)e^{-2r_0}\right) - W_k(r_0)\right) \\
&+ \left(e^{2r_0} + W_k'(r_0)^2\right)\left(-W_k'(r_0) + 2W_k'(r_0)(n-1)e^{-2r_0}\right) \\
= &\,2e^{2r_0}W_k'(r_0) - 2e^{2r_0}W_k(r_0) - 2e^{2r_0}W_k'(r_0)(n-1)e^{-2r_0} \\
&- e^{2r_0}W_k'(r_0) + 2e^{2r_0}W_k'(r_0)(n-1)e^{-2r_0} \\
&- W_k'(r_0)^3 + 2W_k'(r_0)^3(n-1)e^{-2r_0} \\
= &\,e^{2r_0}W_k'(r_0) - 2e^{2r_0}W_k(r_0) - 2(n-1)W_k'(r_0) \\
&+ 2(n-1)W_k'(r_0) - W_k'(r_0)^3 + 2W_k'(r_0)^3(n-1)e^{-2r_0} \\
= &\,\underbrace{e^{2r_0}W_k'(r_0)}_{<0} - \underbrace{2e^{2r_0}W_k(r_0)}_{>0} + \underbrace{W_k'(r_0)^3}_{<0}\underbrace{\left(2(n-1)e^{-2r_0} - 1\right)}_{>0} \\
< &\,0.
\end{aligned}$$

Widerspruch.
Somit existiert kein solches r_0 und die Behauptung folgt.

(iv) Es gilt $W_k'\left(1-(n-1)e^{-2r}\right)-W_k \leq 0$ auf $[-k,r_1]$:
Es gilt

$$\begin{aligned}W_k'(-k)\left(1-(n-1)e^{2k}\right)-W_k(-k) &= -h\frac{e^{-2k}}{n}\left(1-(n-1)e^{2k}\right)-h\\ &= -h\frac{e^{-2k}}{n}+\frac{h(n-1)}{n}-h\\ &< \frac{h(n-1)}{n}-h=\frac{-h}{n}<0.\end{aligned}$$

Die Behauptung stimmt also für r nahe $-k$.
Angenommen, es existiert ein $r_2 \in I_k$ minimal mit

$$W_k'(r_2)\left(1-(n-1)e^{-2r_2}\right)-W_k(r_2)=0.$$

Sei $F(r) := W_k'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right)-W_k(r)$.
Es gilt $F(r_2)=0$ und

$$\begin{aligned}F'(r_2) =& W_k''(r_2)\left(1-(n-1)e^{-2r_2}\right)+2W_k'(r_2)(n-1)e^{-2r_2}-W_k'(r_2)\\ =& W_k'(r_2)\left(1-(n-1)e^{-2r_2}\right)+\left(e^{2r_2}+W_k'(r_2)^2\right)\underbrace{F(r_2)}_{=0}\left(1-(n-1)e^{-2r_2}\right)\\ &+2W_k'(r_2)(n-1)e^{-2r_2}-W_k'(r_2)\\ =& W_k'(r_2)\left(1-(n-1)e^{-2r_2}\right)+2W_k'(r_2)(n-1)e^{-2r_2}-W_k'(r_2)\\ =& W_k'(r_2)\left(1-(n-1)e^{-2r_2}+2(n-1)e^{-2r_2}-1\right)\\ =& W_k'(r_2)(n-1)e^{-2r_2}<0.\end{aligned}$$

Also gilt $F(r) \leq 0$ auf I_k.

(v) Es gilt $W_k'e^{2r} > W_k''$ auf $[-k,r_1]$:
Für $r=-k$ gilt

$$\begin{aligned}W_k'(-k)e^{-2k} &= \frac{-e^{-4k}h}{n}\\ W_k''(-k) &= \frac{-e^{-2k}h}{n}+\underbrace{\left(e^{-2k}+W_k'(-k)^2\right)}_{>0}\underbrace{\left(W_k'(-k)-W_k(-k)-(n-1)e^{2k}W_k'(-k)\right)}_{<0 \text{ mit } (iv)}\\ &< \frac{-e^{-2k}h}{n}<\frac{-e^{-4k}h}{n}=W_k'(-k)e^{-2k}.\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage nahe $-k$. Angenommen, es existiert ein $r_3 \in I_k$ minimal mit

$$\begin{aligned}W_k'(r_3)e^{2r_3} =& W_k''(r_3)\\ =& W_k'(r_3)+\left(e^{2r_3}+W_k'^2(r_3)\right)\left(W_k'(r_3)-W_k(r_3)-W_k'(r_3)e^{-2r_3}(n-1)\right)\\ \Leftrightarrow \underbrace{W_k'(r_3)\left(e^{2r_3}-1\right)}_{>0} =& \underbrace{\left(e^{2r_3}+W_k'^2(r_3)\right)\left(W_k'(r_3)-W_k(r_3)-W_k'(r_3)e^{-2r_3}(n-1)\right)}_{<0}.\end{aligned}$$

Widerspruch. Also gilt die Behauptung auf ganz I_k.

(vi) Beweis für (ii):
Es gilt nun auch $W_k''(r_1) < 0$.

$$\begin{aligned}
0 > W_k''(r_1) &= W_k'(r_1) + \left(e^{2r_1} + W_k'^2(r_1)\right) \left(W_k'(r_1)\left(1 - e^{-2r_1}(n-1)\right) - \underbrace{W_k(r_1)}_{=0} \right) \\
&= W_k'(r_1) + \left(e^{2r_1} + W_k'^2(r_1)\right) \left(\underbrace{W_k'(r_1)\left(1 - e^{-2r_1}(n-1)\right)}_{>0} \right) \\
&> W_k'(r_1) + e^{2r_1} W_k'(r_1)\left(1 - e^{-2r_1}(n-1)\right) \\
&= W_k'(r_1)\left(2 - n + e^{2r_1}\right) \\
&= \begin{cases} W_k'(r_1)e^{2r_1} & n = 2 \text{ Widerspruch zu (v)}, \\ W_k'(r_1)\left(2 + e^{2r_1} - n\right) > 0 & n \geq 3 \text{ Widerspruch} \end{cases}
\end{aligned}$$

also muss schon $W_k > 0$ auf I_k gelten.
Weiter gelten dann auch (iii), (iv), (v) auf I_k.

(vii) Es gilt ${W_k}' > -\frac{3he^{2r}}{n}$ auf I_k:
Nach (*iv*) gilt $W_k'\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right) - W_k \leq 0$. Für $n \geq 2$ gilt

$$(n-1)e^{-2r} - 1 > \frac{ne^{-2r}}{3}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|{W_k}'| &\leq \frac{W_k}{(n-1)e^{-2r} - 1} \\
&< \frac{h}{\frac{ne^{-2r}}{3}} = \frac{3he^{2r}}{n} \Rightarrow {W_k}' > -\frac{3he^{2r}}{n}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt.

(viii) Es gilt $-h < W_k' < 0$ auf I_k
Für $r = -k$ gilt $-h < -\frac{e^{-2k}h}{n} = W_k'(-k) < 0$.
Da W_k konkav auf I_k ist und $W_k'(-k) < 0$, gilt bereits $W_k' < 0$ auf I_k. Angenommen, es existiert ein $r_4 \in I_k$ minimal, mit $W_k'(r_4) = -h$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\geq W_k'(r_4)\left(1 - (n-1)e^{-2r_4}\right) - W_k(r_4) \\
&= -h\left(1 - (n-1)e^{-2r_4}\right) - W_k(r_4) \\
&\geq -h\left(2 - (n-1)e^{-2r_4}\right) \\
&> 0 \text{ für } r_4 \leq -1.
\end{aligned}$$

Widerspruch.
Es gilt also $-h < W_k' < 0$ auf $I_k \cap [-k, -1]$.

(ix) Es gilt $-h\left(2 + h^2\right) < W_k'' < 0$ auf $I_k \cap [-k, -1]$: Da W_k konkav ist, folgt die 2. Ungleichung direkt. Die erste folgt mithilfe von (vii), denn

$$\begin{aligned}
W_k''(r) &= W_k'(r) + \left(e^{2r} + W_k'(r)^2\right) \left(\underbrace{W_k'(r)\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right)}_{>0} - W_k(r) \right) \\
&> W_k'(r) - \left(e^{2r} + W_k'(r)^2\right) W_k(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq -h-h\left(e^{2r}+h^2\right)\\&\geq -h-h\left(1+h^2\right)=-h\left(2+h^2\right).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also.

(x) Es gilt $-10h-11h^3-2h^5 \leq {W_k}''' \leq h\left(2+h^2\right)(n-1)\left(1+\frac{9h^2}{n^2}\right)$ auf I_k:
Es gilt

$$\begin{aligned}{W_k}'''(r) = {W_k}''(r) &+ \underbrace{\left(2{W_k}'(r){W_k}''(r)+2e^{2r}\right)}_{\geq 0}\underbrace{\left(W_k'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right)-W_k(r)\right)}_{\leq 0}\\&+\left({W_k}'(r)^2+e^{2r}\right)\left({W_k}''(r)\left(1-(n-1)e^{2r}\right)+\underbrace{{W_k}'(r)\left(2(n-1)e^{-2r}-1\right)}_{<0}\right).\end{aligned}$$

Damit folgt mit (iv),(vii),(viii) und (ix)

$$\begin{aligned}{W_k}'''(r) &\leq 0+0+\left({W_k}'(r)^2+e^{2r}\right)\left({W_k}''(r)(1-(n-1)e^{-2r})+0\right)\\&= {W_k}''(r)\left(e^{2r}-(n-1)\right)+{W_k}''(r)\left({W_k}'(r)^2-(n-1)\left({W_k}'(r)e^{-r}\right)^2\right)\\&\leq h\left(2+h^2\right)(0+(n-1))-h\left(2+h^2\right)\left(0-(n-1)\left(\frac{3he^r}{n}\right)^2\right)\\&\leq h\left(2+h^2\right)(n-1)\left(1+\frac{9h^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}{W_k}'''(r) &\geq -h\left(2+h^2\right)+\left(2h^2\left(2+h^2\right)+2\right)(0-h)+\left(h^2+1\right)\left(0+2(n-1)\left(-\frac{3h}{n}\right)\right)\\&\geq -h\left(2+h^2\right)-h\left(2h^2\left(2+h^2\right)+2\right)+\left(h^2+1\right)(2(-3h))\\&= -10h-11h^3-2h^5.\end{aligned}$$

Wir erhalten also gerade das Behauptete.

(xi) Angenommen, es gilt $I_k \subsetneq [-k,-1]$, dann können wir aufgrund der Abschätzung $0 < W_k \leq h$ und $-h < W_k' < 0$ W_k über I_k hinaus fortsetzen und erhielten einen Widerspruch. Somit muss $[-k,-1] \subseteq I_k$ gelten.
Da $-h < W_k' < 0$, $-h\left(2+h^2\right) < W_k'' < 0$ und $-10h-11h^3-2h^5 \leq {W_k}''' \leq h\left(2+h^2\right)(n-1)\left(1+\frac{9h^2}{n^2}\right)$, haben wir gleichmäßige Abschätzungen für W_k', W_k'' und W_k''', unabhängig von k und r.

(xii) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Abschneidefunktion mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 0$ auf $[-\infty, 0)$, $\varphi \equiv 1$ auf $(1,\infty]$. Dann ist φ in C^3 gleichmäßig beschränkt.
Wir definieren

$$Z_k(r) := \begin{cases}\varphi(r+k)\left(W_k(r)-h\right)+h & \text{für } r\in[-k,-1],\\ h & \text{für } r<-k.\end{cases}$$

Dann gilt $Z_k \equiv h$ auf $(-\infty,-k]$ und $Z_k \equiv W_k$ auf $[-k+1,-1]$. Außerdem ist Z_k auf $[-k+1,-1]$ eine Lösung von (2.2). Da φ in C^3 und W_k, W_k', W_k'', W_k''' unabhängig von k und r gleichmäßig beschränkt sind, ist auch Z_k gleichmäßig in C^3 beschränkt.
Wir wenden nun den Satz von Arzela-Ascoli an und erhalten eine Teilfolge Z_{k_l} mit $Z_{k_l} \to W$ in $C^2_{\text{loc}}\left((-\infty,-1]\right)$. Für alle $l\in\mathbb{N}$ löst Z_{k_l} auf $[-k_l+1,-1]$

die Differentialgleichung. Damit folgt mit der $C^2_{loc}-$Konvergenz, dass W die Gleichung (2.2) auf $(-\infty, 0]$ löst.

(xiii) Es gilt $\lim\limits_{r\to-\infty} W(r) = h$:

Es gilt $W_k \leq h$ für alle $k \in \mathbb{N}$, damit folgt bereits $W(r) = \lim\limits_{l\to\infty} Z_{k_l}(r) \leq h$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\bar{r} < -1$ mit $\frac{h}{n}e^{2\bar{r}} < \varepsilon$ beliebig aber fest. Weiter wählen wir $l \in \mathbb{N}$ beliebig, mit $k_l < \bar{r}$. Nun gilt mit (vii)

$$\begin{aligned} Z_{k_l}(\bar{r}) &= Z_{k_l}(-k) + \int_{-k}^{\bar{r}} Z'_{k_l}(t)dt \\ &\geq h - \frac{2h}{n}\int_{-k}^{\bar{r}} e^{2t}dt \\ &= h - \frac{h}{n}\left(e^{2\bar{r}} - e^{-2k}\right) \\ &\geq h - \frac{h}{n}e^{2\bar{r}} \\ &\geq h - \varepsilon. \end{aligned}$$

Sei nun $r \in [-k_l, \bar{r}]$ beliebig, dann erhalten wir

$$W_{k_l}(r) \geq W_{k_l}(\bar{r}) \geq h - \varepsilon.$$

Wir erhalten also insgesamt im Grenzwert für $r \leq \bar{r}$

$$W(r) = \lim_{l\to\infty} W_{k_l}(r) \geq h - \varepsilon.$$

Damit folgt also auf $(-\infty, \bar{r}]$ $h - \varepsilon \leq W \leq h$.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt damit $\lim\limits_{r\to-\infty} W(r) = h$. □

Bemerkung 2.2.3. Aus dem obigen Beweis erhält man neben der Existenz einer rotationssymmetrischen, homothetisch schrumpfenden Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses mit Geschwindigkeit -1 in $r = 0$ die folgenden Abschätzungen an W auf $(-\infty, -1]$

(i) $0 \leq W$
(ii) $W'\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right) - W \leq 0$
(iii) $W'' \leq 0$

Beweis. Aus dem Beweis von Theorem 2.2.2 erhalten wir $W(r) = \lim\limits_{l\to\infty} Z_{k_l}(r)$ in $C^2_{loc}((-\infty, -1])$.

(i) Es gilt $Z_{k_l}(r) \geq 0$ auf $[-k_l, -1]$ unabhängig von k_l. Damit gilt $W(r) = \lim\limits_{l\to\infty} Z_{k_l}(r) \geq 0$ auf $(-\infty, -1]$.
(ii) Es gilt $Z'_{k_l}(r)\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right) - Z_{k_l}(r) \leq 0$ auf $[-k_l, -1]$ unabhängig von k_l. Damit gilt $W'(r)\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right) - W(r) \leq 0$ auf $(-\infty, -1]$.
(iii) Es gilt $Z''_{k_l}(r) = Z'_{k_l}(r) + \left(Z'_{k_l}(r)^2 + e^{-2r}\right)\left(Z'_{k_l}(r)\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right) - Z_{k_l}(r)\right) \leq 0$ auf $[-k_l, -1]$ unabhängig von k_l. Damit gilt $W''(r) \leq 0$ auf $(-\infty, -1]$.

□

2.3. **Abschätzungen an W.** Um genauere Abschätzungen an W zu erhalten, betrachten wir wie in Theorem 2.2.2 im aktuellen Kapitel die Lösung W_k des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} W''(r) = & W'(r) + \left(e^{2r} + W'^2(r)\right)\left(W'(r) - W(r) - W'(r)e^{-2r}(n-1)\right) \\ W'(-k) = & \frac{-e^{-2k}h}{n} \\ W(-k) = & h \end{cases} \qquad (\star)$$

auf $[-k,-1]$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $h \leq \sqrt{n}$ beliebig, aber fest. Um dann am Ende analog wie in Theorem 2.2.2 und Bemerkung 2.2.3 im Übergang zum Grenzwert die Abschätzung auch für W zu erhalten.

Lemma 2.3.1. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $\frac{h}{n} > \varepsilon$, $r_\varepsilon = \frac{-\ln\left(\frac{2h}{n\varepsilon}\right)}{2} > -k$. Dann erfüllt die Lösung W_k von $(\star)$ für alle $r \in [-k, r_\varepsilon)$ die Ungleichung*

$$W_k'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W_k(r) \leq -\frac{h}{n} + \varepsilon.$$

Beweis. Es gilt $W_k'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W_k(r) \leq 0$. Da $W_k' < 0$ und für $r < 0$ auch $\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) < 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq W_k'\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) \leq W_k \\ |W_k'| &\leq \frac{W_k}{|1-(n-1)e^{-2r}|} \end{aligned}$$

und da $|1-(n-1)e^{-2r}| = (n-1)e^{-2r} - 1 \geq (n-1)e^{-2r} - \frac{1}{2}e^{-2r} = \left(n - \frac{3}{2}\right)e^{-2r}$ für $r < -1$, erhalten wir $|W_k'| \leq \frac{W_k e^{2r}}{\left(n-\frac{3}{2}\right)} \leq \frac{h}{\left(n-\frac{3}{2}\right)}e^{2r}$.

Nun gilt für $r \in [-k,-1]$

$$\begin{aligned} W_k(r) &= W_k(-k) + \int_{-k}^{r} W_k'(s)ds \\ &\geq h + \int_{-k}^{r} -\frac{h}{\left(n-\frac{3}{2}\right)}e^{2s}ds \\ &= h - \frac{h}{2\left(n-\frac{3}{2}\right)}\left(e^{2r} - e^{-2k}\right) \\ &\geq h\left(1 - \frac{e^{2r}}{2\left(n-\frac{3}{2}\right)}\right) \\ &\geq h\left(1-2e^{2r}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $C_\varepsilon := \frac{h}{n} - \varepsilon > 0$ und $F(r) := W_k'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W_k(r)$. Es gilt

$$\begin{aligned} F(-k) &= -e^{-2k}\frac{h}{n}\left(1-(n-1)e^{2k}\right) - h \\ &= -e^{-2k}\frac{h}{n} + h - \frac{h}{n} - h \\ &< -\frac{h}{n} < -C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Angenommen, es gibt ein minimales $r_0 > -k$ mit $F(r_0) = -C_\varepsilon$.
Da $F(r_0) > F(r)$ für alle $r < r_0$ gilt, erhalten wir $F'(r_0) \geq 0$. Weiter folgt mit $F(r_0) = -C_\varepsilon$ auch

$$W_k'(r_0) - W_k(r_0) + C_\varepsilon = W_k'(r_0)(n-1)e^{-2r_0}.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
0 \leq F'(r_0) &= {W_k}''(r_0)\left(1-(n-1)e^{-2r_0}\right) + 2(n-1)e^{-2r_0}{W_k}'(r_0) - {W_k}'(r_0)\\
&= \left(W_k''(r_0) - {W_k}'(r_0)\right)\left(1-(n-1)e^{-2r_0}\right) + (n-1)e^{-2r_0}{W_k}'(r_0)\\
&= -C_\varepsilon\left(e^{2r_0} + {W_k}'^2\right)\left(1-(n-1)e^{-2r_0}\right) + {W_k}'(r_0) - W_k(r_0) + C_\varepsilon\\
&= -C_\varepsilon e^{2r_0} - C_\varepsilon {W_k}'(r_0)^2 + nC_\varepsilon - C_\varepsilon\\
&\quad + (n-1){W_k}'(r_0)e^{-2r_0}{W_k}'(r_0)C_\varepsilon + {W_k}'(r_0) - W_k(r_0) + C_\varepsilon\\
&= -C_\varepsilon e^{2r_0} - C_\varepsilon {W_k}'(r_0)^2 + nC_\varepsilon - C_\varepsilon\\
&\quad + \left({W_k}'(r_0) - W_k(r_0) + C_\varepsilon\right){W_k}'(r_0)C_\varepsilon + {W_k}'(r_0) - W_k(r_0) + C_\varepsilon\\
&= -C_\varepsilon e^{2r_0} + nC_\varepsilon + \left(\underbrace{-W_k(r_0)}_{\geq -h} + C_\varepsilon\right)\underbrace{{W_k}'(r_0)}_{<0}C_\varepsilon + {W_k}'(r_0) - W_k(r_0)\\
&\leq -C_\varepsilon e^{2r_0} + nC_\varepsilon + (-h + C_\varepsilon){W_k}'(r_0)C_\varepsilon + {W_k}'(r_0) - W_k(r_0)\\
&= {W_k}'(r_0)\left(C_\varepsilon^2 + 1 - hC_\varepsilon\right) - C_\varepsilon e^{2r_0} + nC_\varepsilon - W_k(r_0)\\
&= {W_k}'(r_0)\left(C_\varepsilon^2 + 1 - hC_\varepsilon\right) - \frac{h}{n}e^{2r_0} + \varepsilon e^{2r_0} + h - n\varepsilon - W_k(r_0)\\
&\leq {W_k}'(r_0)\left(C_\varepsilon^2 + 1 - hC_\varepsilon\right) - \frac{h}{n}e^{2r_0} + \varepsilon e^{2r_0} + h - n\varepsilon - h + 2he^{2r_0}\\
&= {W_k}'(r_0)\left(\frac{h^2}{n^2} + \varepsilon^2 + 1 + h\varepsilon - \frac{h^2}{n} - \frac{2h\varepsilon}{n}\right) + e^{2r_0}\left(-\frac{h}{n} + \varepsilon - n\varepsilon e^{-2r_0} + 2h\right)\\
&= \underbrace{{W_k}'(r_0)}_{<0}\left(\underbrace{\frac{n-h^2}{n}}_{\geq 0} + \varepsilon h\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\geq 0} + \frac{h^2}{n^2} + \varepsilon^2\right) + e^{2r_0}\left(\underbrace{-\frac{h}{n} + \varepsilon}_{<0} - n\varepsilon e^{-2r_0} + 2h\right)\\
&< 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } r_0 < r_\varepsilon &= \frac{-\ln\left(\frac{2h}{n\varepsilon}\right)}{2}\\
&\Rightarrow e^{2r_0} < e^{-\ln\left(\frac{2h}{n\varepsilon}\right)}\\
&\Leftrightarrow e^{2r_0} < \frac{n\varepsilon}{2h}\\
&\Leftrightarrow 2h - n\varepsilon e^{-2r_0} < 0.
\end{aligned}$$

Widerspruch. Somit existiert kein solches r_0 und die Behauptung folgt. $\square$

Proposition 2.3.2. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $\varepsilon \leq \frac{h}{n}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Es existiert ein $c_k \in \left(\left(\varepsilon - \frac{h}{n}\right)e^{-k}, \varepsilon e^{-k}\right)$ mit $\tan\left(\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)e^{-k} + c_k\right) = e^{-k}\frac{h}{n}$. Weiter löst $P_k(r) :=$*

$-e^r \tan\left(\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right) e^r + c_k\right)$ *das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} Q'(r) &= Q(r) - \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\left(e^{2r} + Q(r)^2\right) r \in [-k, 0] \\ Q(-k) &= -e^{-2k}\frac{h}{n} \end{cases}.$$

Beweis. Es gilt $\frac{h}{n} < 1$ und $e^r \leq 1$ für $r \leq 0$, daher gilt $\frac{h}{n}e^r \leq 1$. Weiter wissen wir, dass $\tan(0) = 0$ und $\tan\left(\frac{h}{n}e^{-k}\right) > \frac{h}{n}e^{-k}$ gilt. Aufgrund der Stetigkeit des Tangens und der Exponentialfunktion existiert also ein $c_k \in \left(\left(\varepsilon - \frac{h}{n}\right)e^{-k}, \varepsilon e^{-k}\right)$ mit $\tan\left(\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)e^{-k} + c_k\right) = e^{-k}\frac{h}{n}$. Damit erhalten wir $P_k(-k) = -e^{-2k}\frac{h}{n}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} P_k'(r) = &- e^r \tan\left(\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right) e^r + c_k\right) - e^r\left(1 + \tan^2\left(\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)e^r + c_k\right)\right)\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)e^r \\ = &P_k(r) - \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\left(e^{2r} + P_k(r)^2\right). \end{aligned}$$

Damit löst P_k das Anfangswertproblem. □

Lemma 2.3.3. *Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $\varepsilon < \frac{h}{n}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $c_k \in \left(\left(\varepsilon - \frac{h}{n}\right)e^{-k}, \varepsilon e^{-k}\right)$ mit $\tan\left(\left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)e^{-k} + c_k\right) = e^{-k}\frac{h}{n}$ und P_k Lösung des Anfangswertproblems aus Proposition (2.3.2). Gilt $\varepsilon \leq \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\frac{h^2}{n^2}e^{-2k}$, so erfüllt P_k die Ungleichung $P_k(r) \leq -e^{2r}\frac{h}{n}$ auf $[-k, 0]$.*

Beweis. Sei $\varepsilon \leq \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\frac{h^2}{n^2}e^{-2k}$, so erhalten wir $\varepsilon \leq \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\frac{h^2}{n^2}e^{2r}$ für $r \geq -k$ und insbesondere $\frac{h}{n} \leq \frac{h}{n} - \varepsilon + \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\frac{h^2}{n^2}e^{2r}$. Definiere $L_k(r) := -\frac{h}{n}e^{2r}$ auf dem Intervall $[-k, 0]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_k'(r) = &- 2\frac{h}{n}e^{2r} \\ = &L_k(r) - \frac{h}{n}e^{2r} \\ \geq &L_k(r) - \left(\frac{h}{n} - \varepsilon + \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\frac{h^2}{n^2}e^{2r}\right)e^{2r} \\ = &L_k(r) - \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\left(e^{2r} + \frac{h^2}{n^2}e^{4r}\right) \\ = &L_k(r) - \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\left(e^{2r} + L_k(r)^2\right). \end{aligned}$$

Da $L_k(-k) = -\frac{h}{n}e^{-2k} = P_k(-k)$, liefert nun das Vergleichsprinzip $L_k(r) \geq P_k(r)$ auf $[-k, 0]$, also gerade $-\frac{h}{n}e^{2r} \geq P_k(r)$. □

Theorem 2.3.4. *Sei $h \leq \sqrt{n}$. Ist W_k Lösung von $(\star)$, so erfüllt W_k die Ungleichung $e^{-2r}W_k{}' \leq -\frac{h}{n} \leq -\frac{W_k}{n}$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $\varepsilon < \frac{h}{n}$, $\varepsilon \leq \left(\frac{h^3}{n^3}e^{-2k}\right)\left(1 + \frac{h^2}{n^2}e^{-2k}\right)^{-1}$.
Damit erhalten wir durch Umstellen die Ungleichung

$$\varepsilon + \varepsilon\frac{h^2}{n^2}e^{-2k} \leq \frac{h^3}{n^3}e^{-2k} \Leftrightarrow \varepsilon \leq \left(\frac{h}{n} - \varepsilon\right)\frac{h^2}{n^2}e^{-2k}.$$

Es gilt

$$W_k{}''(r) = W_k{}'(r) + \left(e^{2r} + W_k{}'(r)^2\right)\left(W_k{}'(r)\left(1 - (n-1)e^{-2r}\right) - W_k(r)\right)$$

$$\leq {W_k}'(r) + \left(e^{2r} + {W_k}'(r)^2\right)\left(-\frac{h}{n} + \varepsilon\right)$$

für $r \leq r_\varepsilon$ mit r_ε wie in Lemma 2.3.1. Sei $P_k(r)$ wie in Proposition (2.3.2). Dann gilt $P_k'(r) = P_k(r) + \left(e^{2r} + P_k(r)^2\right)\left(-\frac{h}{n} + \varepsilon\right)$ und $P_k(-k) = -\frac{h}{n}e^{-2k} = {W_k}'(-k)$. Aufgrund des Vergleichsprinzips und Lemma 2.3.3 erhalten wir also ${W_k}'(r) \leq P_k(r) \leq -\frac{h}{n}e^{2r} \leq -\frac{W_k(r)}{n}e^{2r}$. Durch Multiplizieren mit der Exponentialfunktion folgt also $e^{-2r}{W_k}' \leq -\frac{h}{n} \leq -\frac{W_k}{n}$. □

Bemerkung 2.3.5. Wenn wir nun wieder zum Grenzwert übergehen, wie in Theorem 2.2.2 und Bemerkung 2.2.3, so erhalten wir für W die Abschätzung $e^{-2r}W' \leq -\frac{h}{n} \leq -\frac{W}{n}$.

2.4. **Regularität im Ursprung.**

Lemma 2.4.1 (Regularität im Ursprung)**.** *Die Funktion $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, mit $U(x) = V(|x|)$ mit $V \in C^2_{loc}((0, r_m))$, $r_m > 0$ ist genau dann im Ursprung von der Klasse C^2, wenn*

(i) $\lim\limits_{r \searrow 0} \frac{V'(r)}{r}$ *in $\mathbb{R}$ existiert und*
(ii) $\lim\limits_{r \searrow 0} V'(r) = 0$ *und*
(iii) $\lim\limits_{r \searrow 0} \frac{-V'(r)}{r} + V''(r) = 0$ *gelten.*

Beweis. „ $\Longleftarrow$ “:

(1) Es gilt $\nabla U(0) = 0$:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ beliebig. Wir definieren $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto U(x) - U(tx)$. Damit gilt $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(0) = U(x) - U(0)$. Da $\varphi \in C^1((0,1))$, erhalten wir mithilfe des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned} |\underbrace{U(x) - U(0)}_{=\varphi(0)} - 0 \cdot x| &= |\varphi(0) - \varphi(1)| \\ &\leq \sup_{t \in (0,1)} |\varphi'(t)| \cdot 1 \\ &= \sup_{t \in (0,1)} |\langle \nabla U(tx), x\rangle| \\ &= \sup_{t \in (0,1)} \frac{|V'(|tx|)|}{|tx|} t|x|^2 \\ &= \sup_{t \in (0,1)} |V'(|tx|)||x|. \end{aligned}$$

Da wir aus (ii) $\lim\limits_{r \searrow 0} V'(r) = 0$ erhalten, existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in B_\delta(0)$ $|V'(|x|)| < \varepsilon$ gilt. Wir erhalten also insgesamt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in B_\delta(0) \text{ gilt } |U(x) - U(0) - 0 \cdot x| < \varepsilon |x|.$$

Damit folgt also gerade $\nabla U(0) = 0$.

(2) ∇U ist stetig in 0:
Sei $x \neq 0$:

$$\text{Es gilt } \nabla U(x) = \frac{V'(|x|)}{|x|} x \to 0 = \nabla U(0) \text{ für } |x| \to 0 \text{ nach } (i).$$

(3) Es gilt $Hess_U(0) = a \cdot \mathbb{1}$ mit $a := \lim_{r \searrow 0} \frac{V'(r)}{r} \in \mathbb{R}$ nach (i):
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wir definieren $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \nabla U(x) - \nabla U(tx) - a(1-t)x$ für ein $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ beliebig. Damit gilt $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(0) = \nabla U(x) - \nabla U(0) - ax$. Da $\varphi \in C^1((0,1))$, erhalten wir mithilfe des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned}
|\underbrace{\nabla U(x) - \nabla U(0) - ax}_{=\varphi(0)}| &= |\varphi(0) - \varphi(1)| \\
&\leq \sup_{t \in (0,1)} |\varphi'(t)| \cdot 1 \\
&= \sup_{t \in (0,1)} |Hess_U(tx)\, x - ax| \\
&\leq \sup_{t \in (0,1)} |V''(|tx|) - \frac{V'(|tx|)}{|tx|}| \frac{|xx^t|}{|x|^2} |x| + |\frac{V'(|tx|)}{|tx|} - a||x|.
\end{aligned}$$

Da wir aus (i) $\lim_{r \searrow 0} \frac{V'(r)}{r} - a = 0$ und aus (iii) $\lim_{r \searrow 0} \frac{-V'(r)}{r} + V''(r) = 0$ erhalten, existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in B_\delta(0)$

$$|V''(|tx|) - \frac{V'(|tx|)}{|tx|}| \frac{|xx^t|}{|x|^2} + |\frac{V'(|tx|)}{|tx|} - a| < \varepsilon$$

gilt. Wir erhalten also insgesamt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in B_\delta(0) \text{ gilt } |\nabla U(x) - \nabla U(0) - ax| < \varepsilon |x|.$$

Damit folgt $Hess_U(0) = a \cdot \mathbb{1}$.

(4) $Hess_U$ ist stetig in 0:
Sei $x \in R^n \backslash \{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
Hess_U(x) &= \frac{V'(|x|)}{|x|}(\mathbb{1} - \frac{xx^t}{|x|^2}) + V''(|x|) \frac{xx^t}{|x|^2} \\
&= \frac{V'(|x|)}{|x|} \mathbb{1} + (V''(|x|) - \frac{V'(|x|)}{|x|}) \frac{xx^t}{|x|^2} \\
&\to a\mathbb{1} = Hess_U(0).
\end{aligned}$$

„ $\Longrightarrow$ “ :

$$\begin{aligned}
U_i(x) &= \frac{V'(|x|)}{|x|} x_i \\
U_{ij}(x) &= \frac{V'(|x|)}{|x|}(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}) + V''(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \text{ für } x \neq 0.
\end{aligned}$$

(1) U'' ist nach Voraussetzung stetig, also gilt insbesondere

$$\mathbb{R} \ni U_{22}(0) = \lim_{r \to 0} U_{22}(re_1) = \lim_{r \to 0} \frac{V'(r)}{r},$$

damit erhalten wir (i).

(2) Angenommen, (ii) gilt nicht, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(r_n)_n \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $r_n \to 0$ und $V'(r_n) > \varepsilon$ oder $V'(r_n) < -\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit

gilt aber auch

$$\frac{V'(r_n)}{r_n} \geq \frac{\varepsilon}{r_n} \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

oder

$$\frac{V'(r_n)}{r_n} \leq \frac{-\varepsilon}{r_n} \to -\infty \text{ für } n \to \infty.$$

Widerspruch zu (i). Also folgt (ii).

(3) Es gilt

$$U_{11}(0) = \lim_{r\to 0} U_{11}(re_1) = \lim_{r\to 0} V''(r)$$
$$U_{11}(0) = \lim_{r\to 0} U_{11}(re_2) = \lim_{r\to 0} \frac{V'(r)}{r}$$

und damit folgt insgesamt

$$\lim_{r\to 0} V''(r) - \frac{V'(r)}{r} = U_{11}(0) - U_{11}(0) = 0.$$

□

Lemma 2.4.2. *Die Regularitätsbedingungen aus Lemma 2.4.1 werden für $W(r) = V(e^r)$ zu*

(i) $\lim_{r\to -\infty} W'(r)e^{-2r}$ *existiert in* $\mathbb{R}$

(ii) $\lim_{r\to -\infty} W'(r)e^{-r} = 0$

(iii) $\lim_{r\to -\infty} e^{-2r}\left(W''(r) - 2W'(r)\right) = 0.$

Beweis. Es gilt

(i) $\lim_{r\to 0} \frac{V'(r)}{r} = \lim_{r\to -\infty} \frac{V'(e^r)}{e^r} = \lim_{r\to -\infty} W'(r)e^{-2r}$,

(ii) $\lim_{r\to 0} V'(r) = \lim_{r\to -\infty} V'(e^r) = \lim_{r\to -\infty} W'(r)e^{-r}$,

(iii) $\lim_{r\to 0} V''(r) - \frac{V'(r)}{r} = \lim_{r\to -\infty} -W'(r)e^{-2r} + V''(e^r) = \lim_{r\to -\infty} -W'(r)e^{-2r} + W''(r)e^{-2r} - e^{-2r}W'(r) = \lim_{r\to -\infty} e^{-2r}\left(W''(r) - 2W'(r)\right) = 0.$

□

Theorem 2.4.3. *Sei $n \geq 2$, $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $h \leq \sqrt{n}$. Es existiert ein $h_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Lösung $W \in C^2((-\infty, r_0])$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} W''(r) = & W'(r) + \left(e^{2r} + W'^2(r)\right)\left(W'(r) - W(r) - W'(r)e^{-2r}(n-1)\right) \\ W(r_0) = & h_0 \end{cases}.$$

Diese Lösung W erfüllt die Regularitätsbedingungen aus Lemma 2.4.2.

Beweis. (i) Die Existenz eines solchen $h_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer Lösung W liefert uns Theorem 2.2.2.

(ii) $\lim_{r\to -\infty} W'(r)e^{-r} = 0$: Wie im Beweis von Lemma 2.3.1 erhalten wir für $W'(r)$ die Abschätzung $|W'(r)| \leq \frac{W(r)e^{2r}}{\left(n-\frac{3}{2}\right)}$. Damit gilt auch $|W'(r)e^{-r}| \leq \frac{W(r)e^{r}}{\left(n-\frac{3}{2}\right)} \leq \frac{he^{r}}{\left(n-\frac{3}{2}\right)} \to 0$ für $r \to -\infty$.

Wir erhalten $\lim_{r\to -\infty} W'(r)e^{-r} = 0$.

(iii) $\lim_{r\to-\infty} W'(r)e^{-2r}$ existiert in $\mathbb{R}$:
Aus Theorem 2.3.4 erhalten wir die Abschätzung

$$e^{-2r}W' \leq -\frac{h}{n} \leq -\frac{W}{n}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und definiere $X(r) := e^{-2r}W'(r)$. Wir wollen nun zeigen, dass es ein $r_0 < 0$ gibt, sodass für alle $r \leq r_0$ auch $-\frac{h}{n} - \varepsilon < X(r)$ gilt. Sei $\bar{r} < 0$ so klein, dass für alle $r \leq \bar{r}$ gilt:

$$\left(e^{-r}W'(r)\right)^2 < \frac{n\varepsilon}{2h},$$
$$|W'| < (n-1)\varepsilon.$$

Aus dem Beweis von Lemma 2.3.1 erhalten wir die Abschätzung $|X(r)| = |e^{-2r}W'(r)| \leq \frac{W(r)}{\left(n-\frac{3}{2}\right)} \leq \frac{h}{\left(n-\frac{3}{2}\right)}$. Angenommen, es existiert ein $r_1 < \bar{r}$ mit $X(r_1) \leq -\frac{h}{n} - \varepsilon$.
Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
X'(r_1) &= e^{-2r_1}W''(r_1) - 2e^{-2r_1}W'(r_1) \\
&= \left(1 + e^{-2r_1}W'(r_1)^2\right)\left(W'(r_1)\left(1-(n-1)e^{-2r_1}\right) - W(r_1)\right) - e^{-2r_1}W'(r_1) \\
&= \left(1 + \left(e^{-r_1}W'(r_1)\right)^2\right)\left(W'(r_1) - (n-1)e^{-2r_1}W'(r_1) - W(r_1)\right) - e^{-2r_1}W'(r_1) \\
&> \left(1 + \frac{n\varepsilon}{2h}\right)\left(-(n-1)\varepsilon - (n-1)(-\frac{h}{n} - \varepsilon) - h\right) - \left(-\frac{h}{n} - \varepsilon\right) \\
&= \left(1 + \frac{n\varepsilon}{2h}\right)\left(-\frac{h}{n}\right) + \frac{h}{n} + \varepsilon \\
&= -\frac{h}{n} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{h}{n} + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Somit muss es ein $r_0 < 0$ geben mit $X(r_0) > -\frac{h}{n} - \varepsilon$.
Diese Ungleichung bleibt dann auf $(-\infty, r_0]$ erhalten:
Angenommen, es existiert ein $r_2 < r_0$ maximal mit $X(r_2) = -\frac{h}{n} - \varepsilon$, dann gilt mit obigem Beweis $X'(r_2) > 0$. Für $r < r_2$ erhalten wir dann die Abschätzung $X(r) < X(r_2)$. Wir erhalten damit aber $X(r) \to -\infty$ für $r \to -\infty$. Widerspruch zu $|X(r)| \leq \frac{h}{\left(n-\frac{3}{2}\right)} \leq \infty$. Also bleibt die Ungleichung auf $(-\infty, r_0]$ erhalten.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir für $r \to -\infty$ $W'(r) \to -\frac{h}{n}$. Also existiert der Grenzwert.

(iv) $\lim_{r\to-\infty} e^{-2r}\left(W''(r) - 2W'(r)\right) = 0$: Es gilt

$$\begin{aligned}
W'' &= W' + \left(e^{2r} + W'^2\right)\left(W'\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W\right), \\
e^{-2r}W'' &= e^{-2r}W' + \left(1 + \left(W'e^{-r}\right)^2\right)\left(W'\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W\right),
\end{aligned}$$

$$\lim_{r\to-\infty} W'(r)e^{-2r} = -\frac{h}{n},$$
$$\lim_{r\to-\infty} \left(W'(r)e^{-r}\right)^2 = 0,$$
$$\lim_{r\to-\infty} W'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) = 0 + \frac{h}{n}(n-1),$$

$$\lim_{r\to-\infty} -W(r) = -h,$$

$$\lim_{r\to-\infty} 2W'(r)e^{-2r} = -2\frac{h}{n},$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to-\infty} e^{-2r}W''(r) = -\frac{h}{n} + (1+0)\left(0 + h - \frac{h}{n} - h\right) = -2\frac{h}{n}.$$

Wir erhalten $\lim\limits_{r\to-\infty} e^{-2r}\left(W''(r) - 2W'(r)\right) = 0.$

□

3. 60°-Bedingung

3.1. **60°-Bedingung.**

Proposition 3.1.1. *Sei $h > 0$. Existiert eine Lösung V des Anfangswertproblemes*

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & h \end{cases}$$

auf einem Intervall $0 \le r \le r_{max}$, so ist V strikt konkav.

Beweis. Sei $W(r) := V(e^r)$ wie in Lemma 2.2. Dann gilt

$$\begin{aligned} W'(r) &= V'(e^r)e^r \\ W''(r) &= V''(e^r)e^{2r} + V'(e^r)e^r = V''(e^r)e^{2r} + W'(r) \end{aligned}$$

$\Rightarrow V''(e^r) = e^{-2r}\left(W''(r) - W'(r)\right).$

Mit Theorem 2.4.3 erhalten wir dann

$$V''(0) = \lim_{r\to-\infty} V''(e^r) = \lim_{r\to-\infty} e^{-2r}\left(W''(r) - W'(r)\right) = \lim_{r\to-\infty} e^{-2r}W'(r) = -\frac{h}{n} < 0.$$

Somit gilt die Behauptung für r nahe 0. Angenommen, es gibt ein minimales $r_0 \in [0, r_{max}]$ mit $r_0 > 0$ und $V''(r_0) = 0$. Dann ist

$$\left(1+V'(r_0)^2\right)\left(V'(r_0)\left(r_0 - \frac{(n-1)}{r_0}\right) - V(r_0)\right) = 0$$

und da

$$1 + V'(r_0)^2 \ge 1 > 0. \text{ gilt } V'(r_0)\left(r_0 - \frac{(n-1)}{r_0}\right) - V(r_0) = 0.$$

Wegen $0 = V''(r_0) \ge V''(r)$ für alle r mit $0 \le r \le r_0$ erhalten wir $V'''(r_0) \ge 0$. Weiter gilt $V'(r_0) < 0$, denn $V'(0) = 0$, $V''(0) < 0$ und $r_0 > 0$ ist minimal mit der Eigenschaft $V''(r_0) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \le V'''(r_0) = \left(1+V'(r_0)^2\right) & \left(\underbrace{V''(r_0)}_{=0}\left(r_0 - \frac{(n-1)}{r_0}\right) + V'(r_0)\left(1 + \frac{(n-1)}{r_0^2} - 1\right)\right) \\ & + 2V''(r_0)V'(r_0)\underbrace{\left(V'(r_0)\left(1 - \frac{(n-1)}{r_0}\right) - V(r_0)\right)}_{=0} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left(1+V'(r_0)^2\right)\frac{(n-1)}{r_0^2}}_{>0}\underbrace{V'(r_0)}_{<0}$$
$$< 0.$$

Widerspruch. Somit existiert kein solches r_0 und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.1.2. Der Schnittwinkel von V und der Ursprungsgeraden mit Steigung 0 lässt sich durch die Gleichung $|V'(r_0)| = \tan(\alpha)$ berechnen. Wir fordern einen 60° Schnittwinkel. Also erhalten wir $V'(r_0) = -\sqrt{3}$.

Lemma 3.1.3. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $h \in (0, \sqrt{n})$ und V_h Lösung von*

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & h \end{cases}.$$

Falls V_h' beschränkt ist, existiert ein $r_0^h \in [0, 2ne+1]$ mit $V_h\left(r_0^h\right) = 0$ und $V_h(r) > 0$ für alle $r \in [0, r_0^h)$.

Beweis. Wir erhalten durch Umformen und Anwendung von Lemma 2.3.1 mit $\varepsilon = \frac{h}{2n}$

$$\begin{aligned} V_h''(e^r) &= e^{-2r}\left(W''(r) - W'(r)\right) \\ &= e^{-2r}\left(e^{2r} + W'(r)^2\right)\left(W'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W(r)\right) \\ &\le e^{-2r}e^{2r}\left(W'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W(r)\right) \\ &= \left(W'(r)\left(1-(n-1)e^{-2r}\right) - W(r)\right) \\ &\le -\frac{h}{n} + \frac{h}{2n} = -\frac{h}{2n} \end{aligned}$$

für alle $r \in (-\infty, r_\varepsilon]$ mit $r_\varepsilon = -\frac{\ln\left(\frac{2h}{n\varepsilon}\right)}{2} = -\frac{\ln\left(\frac{2h}{n\frac{h}{2n}}\right)}{2} = -\frac{\ln(4)}{2} = -\ln(2)$. Da $-\ln(2) > -1$, also auch für alle $r \in (-\infty, -1]$. Damit erhalten wir also

$$\begin{aligned} V_h''(r) &\le -\frac{h}{2n} \text{ für } r \in [0, e^{-1}], \\ V_h'(r) &\le -\frac{h}{2n}r \text{ für } r \in [0, e^{-1}], \\ V_h'(r) &\le -\frac{he^{-1}}{2n} \text{ für } r \in [e^{-1}, \infty), \text{ da } V \text{ konkav ist.} \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} V_h(r) &\le h - \frac{h}{4n}r^2 \text{ für } r \in [0, e^{-1}], \\ V_h(e^{-1}) &\le h - \frac{h}{4n}e^{-2}, \\ \Rightarrow V_h(r) &\le h - \frac{h}{4n}e^{-2} - \frac{he^{-1}}{2n}\left(r - e^{-1}\right) = h + \frac{h}{4n}e^{-2} - \frac{he^{-1}}{2n}r \text{ für } r \in [e^{-1}, \infty). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} h + \frac{h}{4ne^2} - \frac{h}{2ne} r &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(h + \frac{h}{4ne^2}\right)\frac{2ne}{h} &\leq r \\ \Leftrightarrow 2ne + \frac{1}{2e} &\leq r \\ \Leftrightarrow \frac{4ne^2+1}{2e} &\leq r. \end{aligned}$$

Also existiert ein $r_0^h \in [0, 2ne+1]$ mit $V_h\left(r_0^h\right) = 0$ und $V_h(r) > 0$ für alle $r \in [0, r_0^h)$. □

Lemma 3.1.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. $K_n(r) := \sqrt{n - r^2}$. Dann löst $K_n(r)$ das Anfangswertroblem*

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1 + V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & \sqrt{n} \end{cases}$$

für $r \in [0, \sqrt{n})$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} K_n'(r) &= \frac{-r}{\sqrt{n-r^2}} \\ K_n''(r) &= \frac{-1}{\sqrt{n-r^2}} - \frac{r^2}{\sqrt{n-r^2}^3} \\ &= \frac{-n}{\sqrt{n-r^2}^3}. \end{aligned}$$

Damit gilt also $K_n(0) = \sqrt{n}$, $K_n'(0) = 0$ und durch Einsetzen von $K_n'(r)$ und $K_n''(r)$ in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{-n}{\sqrt{n-r^2}^3} &= \left(1 + \frac{r^2}{n-r^2}\right)\left(\frac{-r}{\sqrt{n-r^2}}\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - \sqrt{n-r^2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{-n}{\sqrt{n-r^2}^3} &= \left(1 + \frac{r^2}{n-r^2}\right)\left(\frac{-r^2 + (n-1) - n + r^2}{\sqrt{n-r^2}}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{-n}{\sqrt{n-r^2}^2} &= \left(1 + \frac{r^2}{n-r^2}\right)(-1) \\ \Leftrightarrow \frac{-n}{n-r^2} &= \left(-1 - \frac{r^2}{n-r^2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{-n}{n-r^2} &= \left(\frac{-(n-r^2) - r^2}{n-r^2}\right) = \frac{-n}{n-r^2}. \end{aligned}$$

Also löst $K_n(r)$ das Anfangswertproblem. □

Lemma 3.1.5. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $h \in (0, \sqrt{n})$ und V_h Lösung von*

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & h \end{cases}.$$

Auf dem Intervall $[0, e^{-1}]$ erfüllt V_h die folgenden Abschätzungen:

(i) $0 \le V_h \le h < \sqrt{n}$,

(ii) $-\frac{\sqrt{n}}{n-\frac{3}{2}} e^{-1} \le -\frac{h}{n-\frac{3}{2}} r \le V'(r) \le -\frac{h}{n} r \le 0$,

(iii) $-5\sqrt{n}^3 \le V_h'' \le 0$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und $h \in (0, \sqrt{n})$. Es gilt

$$\begin{aligned} V_h(e^r) &= W(r) \\ V_h'(e^r) &= e^{-r} W'(r). \end{aligned}$$

(i) Bemerkung 2.2.3 liefert uns

$$0 \le W \text{ auf } (-\infty, -1].$$

Damit gilt dann für V_h

$$0 \le V(e^r) \text{ auf } (-\infty, -1] \Rightarrow 0 \le V_h(r) \text{ auf } [0, e^{-1}].$$

Da V_h nach Lemma 3.1.1 strikt konkav ist, gilt insbesondere auch

$$V_h(r) \le h < \sqrt{n} \text{ auf } [0, e^{-1}].$$

(ii) Aus Theorem 2.3.4 und dem Beweis von Lemma 2.3.1 erhalten wir

$$-\frac{h}{n-\frac{3}{2}} e^r \le e^{-r} W'(r) \le -\frac{h}{n} e^r \text{ auf } (-\infty, -1].$$

Wir erhalten also für V_h'

$$-\frac{h}{n-\frac{3}{2}} e^r \le V'(e^r) \le -\frac{h}{n} e^r \text{ auf } (-\infty, -1] \Rightarrow -\frac{h}{n-\frac{3}{2}} r \le V'(r) \le -\frac{h}{n} r \text{ auf } [0, e^{-1}].$$

Insbesondere auch

$$-\frac{\sqrt{n}}{n-\frac{3}{2}} e^{-1} \le -\frac{h}{n-\frac{3}{2}} r \le V'(r) \le -\frac{h}{n} r \le 0 \text{ auf } [0, e^{-1}].$$

(iii) Es gilt für $0 \le r \le e^{-1}$

$$\begin{aligned} V_h''(r) &= \left(1 + V_h'(r)^2\right)\left(\underbrace{V_h'(r)}_{\le 0}\underbrace{\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right)}_{\le 0} - V_h(r)\right) \\ &\ge \left(1 + V_h(r)'^2\right)\left(-V_h(r)\right) \\ &\ge \left(1 + \left(\frac{\sqrt{n}}{n-\frac{3}{2}} e^{-1}\right)^2\right)(-h) \\ &\ge \left(1 + \frac{n}{(n-\frac{3}{2})^2}\right)(-h) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \left(1 + \frac{n}{\frac{1}{2}^2}\right)(-h) \\
&\geq (1+4n)(-h) \geq -5\sqrt{n}^3 .
\end{aligned}
$$

Aus Proposition 3.1.1 und dem gerade Gezeigtem, gelten für V_h'' die Abschätzungen

$$-5\sqrt{n}^3 \leq V_h'' \leq 0 \text{ auf } [0, e^{-1}].$$

□

Lemma 3.1.6. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $h \in (0, \sqrt{n})$ und V_h Lösung von*

$$
\begin{cases}
V''(r) = & \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\
V'(0) = & 0 \\
V(0) = & h
\end{cases} .
$$

Dann ist $V_h^{(k)}(0) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ ungerade und $V''''(0) = -\frac{3h\left(1+2\left(\frac{h}{n}\right)^2\right)}{n^2+2n}$.

Beweis. Wir schreiben nun statt V_h nur noch V.

(i) Wir können V durch $V(-r) = V(r)$ ins Negative fortsetzen. Somit erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$ beliebig $V^{(k)}(r) = (-1)^k V^{(k)}(-r)$. Für k ungerade gilt also $V^{(k)}(r) = -V^{(k)}(-r)$. Ist nun $r = 0$, so gilt $V^{(k)}(0) = (-1)^k V^{(k)}(0)$. Damit muss also schon $V^{(k)}(0) = 0$ für k ungerade gelten.

(ii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
V''(r) &= \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{n-1}{r}\right) - V(r)\right), \\
rV''(r) &= \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r^2-(n-1)\right) - rV(r)\right), \\
\left(rV''(r)\right)' &= V''(r) + rV'''(r) \\
&= 2V'V''\left(V'(r)\left(r^2-(n-1)\right) - rV(r)\right) \\
&\quad + \left(1+V'(r)^2\right)\left(V''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + rV'(r) - V(r)\right), \\
\left(rV''(r)\right)'' &= 2V'''(r) + rV''''(r) \\
&= 2\left(V''(r)^2 + V'(r)V'''(r)\right)\left(V'(r)\left(r^2-(n-1)\right) - rV(r)\right) \\
&\quad + 4V'(r)V''(r)\left(V''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + rV'(r) - V(r)\right) \\
&\quad + \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 3rV''(r)\right), \\
\left(rV''(r)\right)''' &= 3V''''(r) + rV'''''(r) \\
&= 2\left(3V''(r)V'''(r) + V'(r)V''''(r)\right)\left(V'(r)\left(r^2-(n-1)\right) - rV(r)\right) \\
&\quad + 2\left(V''(r)^2 + V'(r)V'''(r)\right)\left(V''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + rV'(r) - V(r)\right) \\
&\quad + 4\left(V''(r)^2 + V'(r)V'''(r)\right)\left(V''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + rV'(r) - V(r)\right) \\
&\quad + 4V'(r)V''(r)\left(V'''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 3rV''(r)\right) \\
&\quad + 2V'(r)V''(r)\left(V'''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 3rV''(r)\right) \\
&\quad + \left(1+V'(r)^2\right)\left(V''''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 5rV'''(r) + 3V''(r)\right) \\
&= 2\left(3V''(r)V'''(r) + V'(r)V''''(r)\right)\left(V'(r)\left(r^2-(n-1)\right) - rV(r)\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&+ 6\left(V''(r)^2 + V'(r)V'''(r)\right)\left(V''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + rV'(r) - V(r)\right)\\
&+ 6V'(r)V''(r)\left(V'''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 3rV''(r)\right)\\
&+ \left(1+V'(r)^2\right)\left(V''''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 5rV'''(r) + 3V''(r)\right).
\end{aligned}$$

Weiter gilt nun da $\lim r \to 0 |V''''(r)| < \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} 3V''''(r) &= \lim_{r\to 0} 3V''''(r) + 0\\
&= \lim_{r\to 0} \left(3V''''(r) + rV'''''(r)\right)\\
&= \lim_{r\to 0} 2\left(3V''(r)V'''(r) + V'(r)V''''(r)\right)\left(V'(r)\left(r^2-(n-1)\right) - rV(r)\right)\\
&\quad + \lim_{r\to 0} 6\left(V''(r)^2 + V'(r)V'''(r)\right)\left(V''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + rV'(r) - V(r)\right)\\
&\quad + \lim_{r\to 0} 6V'(r)V''(r)\left(V'''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 3rV''(r)\right)\\
&\quad + \lim_{r\to 0} \left(1+V'(r)^2\right)\left(V''''(r)\left(r^2-(n-1)\right) + 5rV'''(r) + 3V''(r)\right).
\end{aligned}$$

Da $V(0) = h$, $V'(0) = 0$, $V''(0) = -\frac{h}{n}$, $V'''(0) = 0$, und $\lim r \to 0|V''''(r)| < \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
3V''''(0) =& 2\left(-3\frac{h}{n}0 + 0V''''(0)\right)\left(0\left(0-(n-1)\right) - 0h\right)\\
&+ 6\left(\left(\frac{h}{n}\right)^2 + 0\right)\left(-\frac{h}{n}\left(0-(n-1)\right) + 0 - h\right)\\
&- 6\cdot 0\frac{h}{n}\left(0\left(0-(n-1)\right) - 0\frac{h}{n}\right)\\
&+ (1+0)\left(V''''(0)\left(0-(n-1)\right) + 0 - 3\frac{h}{n}\right)\\
=& 0 + 6\left(\frac{h}{n}\right)^2\left(\frac{h}{n}(n-1) - h\right) - 0 + \left(-V''''(0)(n-1) - 3\frac{h}{n}\right)\\
=& -6\left(\frac{h}{n}\right)^3 - 3\frac{h}{n} - V''''(0)(n-1).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$V''''(0) = -\frac{3h\left(1 + 2\left(\frac{h}{n}\right)^2\right)}{n^2+2n}.$$

$\square$

Lemma 3.1.7. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $h \in (0, \sqrt{n})$ und V_h Lösung von*

$$\begin{cases}
V''(r) = & \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right)\\
V'(0) = & 0\\
V(0) = & h
\end{cases}.$$

Die Lösung V_h ist eindeutig.
D.h. es gibt keine weitere Lösung $\tilde{V}_h \in C^2([0, r_{max}))$ mit $\tilde{V}_h \neq V_h$, die das Anfangswertproblem löst.

Beweis. Wir betrachten die Lösung U der Gleichung

$$-U(x) + U_i(x)x^i = \Delta U(x) - \frac{U_{ij}(x)U^i(x)U^j(x)}{1 + |DU(x)|^2}$$

aus Bemerkung 2.1.1 (ii) auf $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit [3] erhalten wir, dass die Lösung U, falls sie in $C^2(\overline{B_r(0)})$ liegt, schon in $C^\omega(\overline{B_R(0)})$ liegt, also reell analytisch ist.
Für unsere Lösung V_h gilt $V_h(r) = U(|x|)$. Damit erhalten wir, da mit Theorem 2.4.3 $V_h \in C^2([-r_m, r_m])$ gilt, also auch $V_h \in C^\omega([-r_m, r_m])$.
Wie in Lemma 3.1.6 erhält man für V_h alle höheren Ableitungen in 0. Es gilt

$$V_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ für } x \in [-r_m, r_m].$$

Die Darstellung ist eindeutig, da $V^{(n)}(0)$ nur von h abhängt, damit ist also auch V_h eindeutig. $\square$

Proposition 3.1.8. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$, $h \in (0, \sqrt{n})$ und V_h Lösung von*

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1 + V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & h \end{cases}.$$

Auf dem Intervall $[0, e^{-1}]$ hängt V_h und V_h' stetig von h ab.

Beweis. Angenommen, V_h oder V_h' hängt nicht stetig von h ab. Dann existiert $n \geq 2$, $\varepsilon > 0$ und $h \in (0, \sqrt{n})$, $(h_k)_k \subseteq (0, \sqrt{n})$ mit $|h_k - h| < \frac{1}{k}$ und $|| \begin{pmatrix} V_{h_k} \\ V_{h_k}' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_h \\ V_h' \end{pmatrix} ||_{C^0([0,e^{-1}],\mathbb{R}^2)} > \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Aus Lemma 3.1.5 erhalten wir gleichmäßige Abschätzungen für V_{h_k}, V_h, V_{h_k}', V_h', V_{h_k}'' und V_h'' auf $[0, e^{-1}]$. Wir erhalten nun mit Arzela Ascoli eine konvergente Teilfolge V_{h_l} in $C^1([0, e^{-1}])$ mit $\begin{pmatrix} V_{h_l} \\ V_{h_l}' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{V}_h \\ \tilde{V}_h' \end{pmatrix}$. Da nach Annahme $|| \begin{pmatrix} V_{h_k} \\ V_{h_k}' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_h \\ V_h' \end{pmatrix} ||_{C^0([0,e^{-1}],\mathbb{R}^2)} > \varepsilon$ gilt, muss $\begin{pmatrix} V_h \\ V_h' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \tilde{V}_h \\ \tilde{V}_h' \end{pmatrix}$ gelten. Widerspruch zur Eindeutigkeit nach Lemma 3.1.7. $\square$

Proposition 3.1.9. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ beliebig. Es existiert ein h_0 mit $0 < h_0 < \sqrt{n}$ und ein $r_0^{h_0} > 0$, sodass V_{h_0}, Lösung von*

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1 + V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r - \frac{(n-1)}{r}\right) - V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & h_0 \end{cases}$$

$V(r_0^{h_0}) = 0$, $V'\left(r_0^{h_0}\right) = -\sqrt{3}$, $V(r) > 0$ für $r \in [0, r_0^{h_0})$ erfüllt.
Dann ist beschreibt $u : \overline{B^n_{r_0^{h_0}}(0)} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto V_{h_0}(|x|)$ mit $\Omega = B^n_{r_0^{h_0}}(0)$ eine graphische Linse.

Beweis. Sei $0 < h < \sqrt{n}$ und sei V_h Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} V''(r) = & \left(1+V'(r)^2\right)\left(V'(r)\left(r-\frac{(n-1)}{r}\right)-V(r)\right) \\ V'(0) = & 0 \\ V(0) = & h \end{cases}$$

auf dem maximalen Existenzintervall $[0, R_h)$. Sei

$\mathcal{S} := \{h \in \left(0, \sqrt{n}\right) : \exists\, r_0^h \in (0, 2ne+1) \text{ mit } V_h|_{[0,r_0^h)} > 0,\, V_h\left(r_0^h\right) = 0,\ V_h'|_{[0,r_0^h]} > -\sqrt{3}\}.$

Definiere $h_0 := \sup \mathcal{S}$.
Wir wollen nun zeigen, dass h_0 die oben genannten Bedingungen erfüllt.
Um das zu zeigen, zeigen wir zuerst, dass $\mathcal{S}$ nicht leer und offen ist:
Falls V_h' beschränkt ist, erhalten wir mit Lemma 3.1.3 ein $r_0^h \in [0, 2ne+1]$ mit $V_h(r) > 0$ für $r \in [0, r_0^h)$ und $V_h\left(r_0^h\right) = 0$.
$V_0 \equiv 0$ löst das Anfangswertproblem. Damit erhalten wir aufgrund der stetigen Abhängigkeit von h ein h_1 mit $h_1 \ll \sqrt{n}$ und $|V_{h_1}'| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ auf $[0, 2ne+1]$.
Also existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $r_0^\varepsilon > 0$ mit $V_\varepsilon\left(r_0^\varepsilon\right) = 0$, $V_\varepsilon(r) > 0$ für $r \in [0, r_0^\varepsilon)$ und $V_\varepsilon'(r) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ für $r \in [0, r_0^\varepsilon]$.
Folglich ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
Da V_h nach Proposition 3.1.1 strikt konkav ist, ist V_h ist strikt monoton fallend für $r > 0$ und $h > 0$. Weiter hängt r_0^h stetig von h ab, falls $V_h'\left(r_0^h\right) > -\infty$ gilt, auch hängt V_h' stetig von h ab.
Damit erhalten wir $\mathcal{S}$ offen. Nun wollen wir noch $h_0 < \sqrt{n}$ zeigen:
Sei ${r_{-\sqrt{3}}}^h$ der Wert, mit $V_h'\left({r_{-\sqrt{3}}}^h\right) = -\sqrt{3}$. Sei $K_n(r) := \sqrt{n - r^2}$, dann löst $K_n(r)$ nach Lemma 3.1.4 mit $h = \sqrt{n}$ das Anfangswertproblem. Weiter gilt

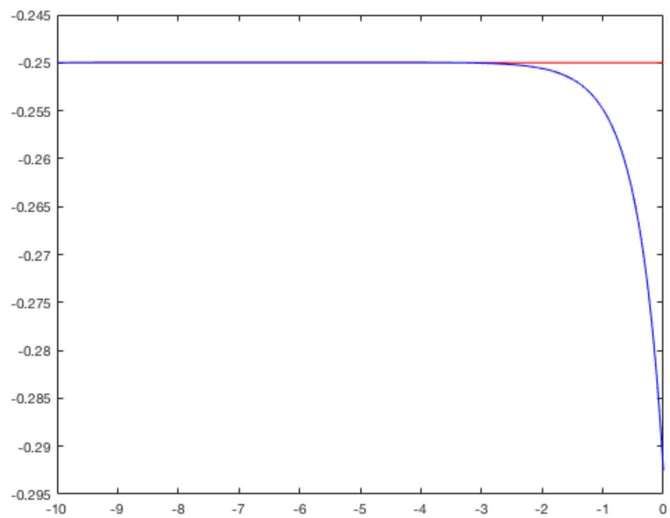
$$K_n'\left(\sqrt{\frac{3n}{4}}\right) = \frac{-\sqrt{\frac{3n}{4}}}{\sqrt{n - \frac{3n}{4}}} = \frac{-\sqrt{\frac{3n}{4}}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = -\sqrt{3}.$$

Es gilt also $r_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{3n}{4}} < \sqrt{n}$ und $K_n(r) > 0$ auf $[0, r_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{n}}]$.
Für h nahe $h = \sqrt{n}$ hängt ${r_{-\sqrt{3}}}^h$ stetig von h ab, da V_h nach Proposition 3.1.1 strikt konkav ist. K_n existiert nicht bis $r = \sqrt{n}$, sondern nur auf $[0, \sqrt{n})$ als Lösung der Gleichung und $K_n(r) > 0$ für alle $r \in [0, \sqrt{n})$. Damit gilt auch $h_0 < \sqrt{n}$.
Es gilt $h_0 \notin \mathcal{S}$, da $\mathcal{S}$ offen ist. Seien nun $(h_n)_n \subseteq \mathcal{S}$ mit $h_n \to h_0$. Dann gilt $r_0^{h_n} \to r_0^{h_0} \leq 2ne + 1$. Damit muss aber auch schon $V_{h_0}'(r_0^{h_0}) \geq -\sqrt{3}$ gelten. Aus Stetigkeitgründen erhalten wir auch $V_{h_0}'(r_0^{h_0}) \leq -\sqrt{3}$ und damit gilt $V_{h_0}'(r_0^{h_0}) = -\sqrt{3}$. h_0 erfüllt also gerade die Behauptung. $\square$

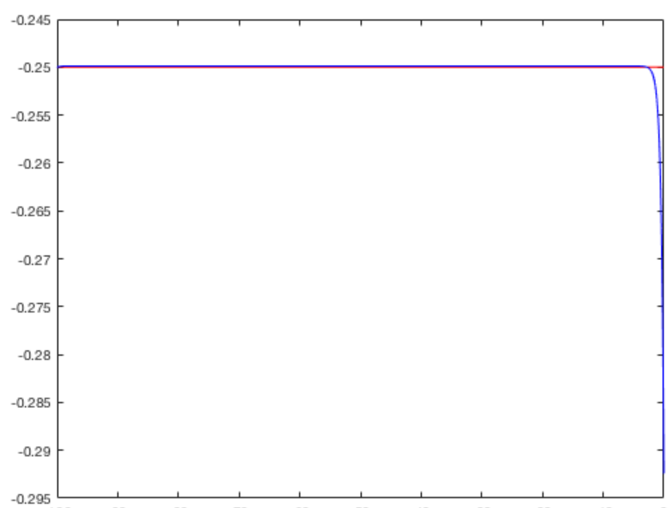
Anhang A. Numerische Untersuchungen

Die Konvergenz von $W'(r)e^{-2r} \to -\frac{h}{n}$ für $r \to -\infty$ lässt sich numerisch sehr gut erkennen. In den folgenden Graphiken sieht man für verschiedene $k \in \mathbb{N}_{>1}$ ${W_k}'(r)e^{-2r}$ auf dem Intervall $[-k, -1]$ für $h = \frac{1}{2}$ und $n = 2$.

$k = 10$

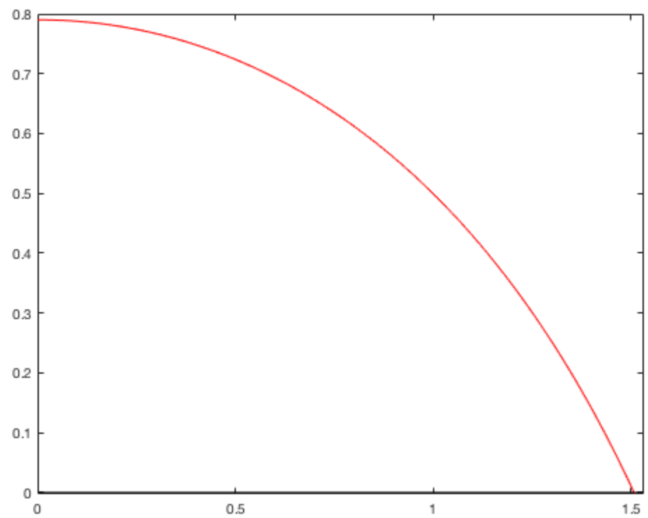


; $k = 100$

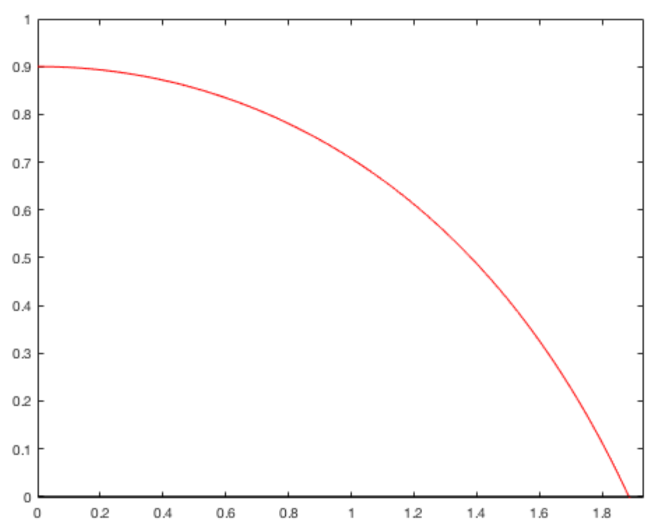


Numerische Untersuchungen liefern für $n = 2$ eine Starthöhe $h_2 \approx 0.79$, für $n = 3$ eine Starthöhe $h_3 \approx 0.9$ und für $n = 13$ eine Starthöhe $h_{13} \approx 1.38$, so dass man die Lösung aus Proposition 3.1.9 erhält.
Folgende Graphiken die jeweilige Lösung für die Dimension $2, 3$ und 13.

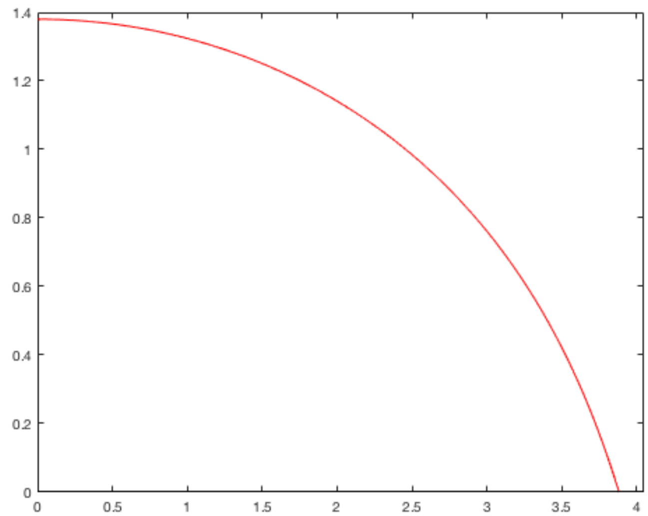
$n = 2, h = 0.79$



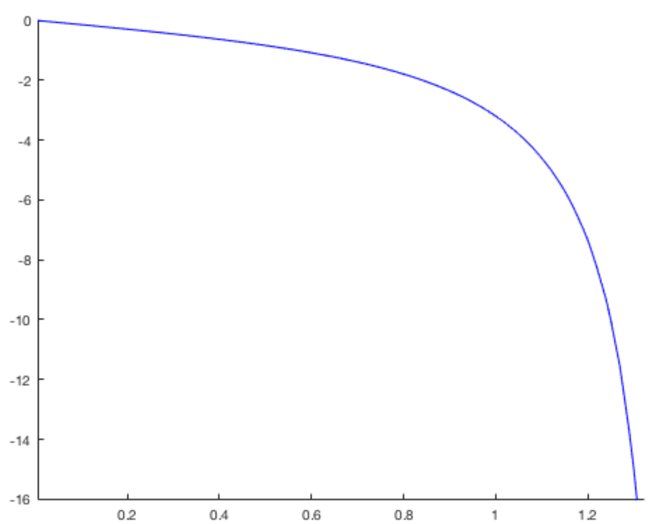
$n = 3, h = 0.9$



$n = 13, h = 1.38$



Numerische Untersuchungen lassen vermuten, dass die Lösung aus Proposition 3.1.9 auch für $n \geq 2$ eindeutig ist.
Die nachfolgende Graphik zeigt die Abbildung $h \mapsto V_h'(r_0^h)$ für $n = 2$. Für höhere Dimensionen sieht die Abbildung sehr ähnlich aus. Man kann vermuten, dass diese streng monoton fallend ist.



Literatur

[1] Oliver C. Schnürer, *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen*, 2016, Skript zur Vorlesung.

[2] Oliver C. Schnürer, Abderrahim Azouani, Marc Georgi, Juliette Hell, Nihar Jangle, Amos Koeller, Tobias Marxen, Sandra Ritthaler, Mariel SÃąez, Felix Schulze und Brian Smith, *Evolution of convex lens-shaped networks undr curve shortening flow*, 2007.

[3] Charles B. Morrey Jr., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008, Reprint of the 1966 Edition, 170-180.