Homothetisch expandierende Lösungen des mittleren Krümmungsflusses, die asymptotisch an einen Kegel sind

Bachelorarbeit im Fach Mathematik

von
Maximilian Simon

betreut von
Prof. Dr. Oliver C. Schnürer

eingereicht am Fachbereich Mathematik der Universität Konstanz

September 2022

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Ich möchte Prof. Dr. Oliver C. Schnürer für die hervorragende Betreuung bei dem Verfassen dieser Arbeit danken.

Zusammenfassung

Wir betrachten graphische, rotationssymmetrische, homothetisch expandierende Lösungen des mittleren Krümmungsflusses, die asymptotisch an einen Kegel sind und deren Zeitfunktionen T. Zunächst beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften von expandierenden Lösungen und zeigen die Existenz von asymptotischen Expandierern für eine Klasse von Kegeln. Schließlich weisen wir starke Selbstkonkordanz und eine verschärfte Form der Konvexität für $F = -\log(T)$ nach, da Funktionen mit diesen Eigenschaften eine wichtige Rolle in der konvexen Optimierung spielen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Hauptaussagen

Wir zeigen zunächst die wichtigsten Aussagen und das Vorgehen der Arbeit auf, ohne dafür alle notwendigen Begriffe präzise einzuführen.
Sei $a > 0$ und $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von der Form

$$K = \{(\hat{x}, x_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > a|\hat{x}|\}$$

Wir betrachten Mengenfamilien $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit den Eigenschaften

- M_t ist für alle $t > 0$ der Graph einer C^2-Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
- M_t ist für alle $t > 0$ rotationssymmetrisch zur x_{n+1}-Achse,
- M_t ist für alle $t > 0$ asymptotisch an ∂K,
- $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ erfüllt den mittleren Krümmungsfluss mit $M_0 = \partial K$,
- $(M_t)_{t\in[0,\infty)}$ ist homothetisch expandierend.

Für solch eine Mengenfamilie blättert $(M_t)_{t\in(0,\infty)}$ den Kegel K. Insbesondere existiert für jedes $x \in K$ genau ein $t_x > 0$ mit $x \in M_{t_x}$. Wir definieren die Zeitfunktion $T : K \to (0,\infty)$ durch $T(x) := t_x$. Des Weiteren setzen wir $F := -\log(T)$.
Im Fall $n > 1$ weisen wir die beiden Ungleichungen

$$|\langle \nabla F(x), y\rangle|^2 \leq 2\, D^2F(x)\langle y, y\rangle,$$
$$(D^3F(x)\langle y, y, y\rangle)^2 \leq C(D^2F(x)\langle y, y\rangle)^3,$$

für alle $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und mit einem $C > 0$ nach. Unter leicht stärkeren Voraussetzungen an y kann $C = 4$ gewählt werden. Wir untersuchen diese Kriterien, da sie in der konvexen Optimierung von Interesse sind.
Für die Berechnung der Ableitungen von F möchten wir die Symmetrie der M_t ausnutzen. Hierfür untersuchen wir zunächst die Gestalt der M_t genauer, um diese nach dem Polarwinkel parametrisieren zu können. Wir leiten eine Differentialgleichung für diese Parametrisierung her und zeigen eine Reihe von Abschätzungen für deren Lösungen, welche wir schließlich für die Beweise der gewünschten Kriterien verwenden.

Um das Lesen einiger Rechnungen zu erleichtern, sind wichtige Zwischenergebnisse in Anhang A festgehalten.

1. Grundlegende Eigenschaften homothetischer Expandierer

In diesem Kapitel werden wir den mittleren Krümmungsfluss einführen und definieren, wann dessen Lösungen homothetisch expandierend sind. Des Weiteren werden wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für graphische, rotationssymmetrische Expandierer herleiten und Lösungen dieser auf Konvexität untersuchen. Hierbei orientieren wir uns an [6].

1.1. Geometrische Grundbegriffe.

Um den mittleren Krümmungsfluss für Hyperflächen definieren zu können, benötigen wir einige geometrische Grundbegriffe. Die Definitionen sind leicht abgeändert aus [5] entnommen. Sei stets $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.1.1 (Immersion)**.** Seien $r \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^r-Abbildung. Wir nennen X eine **C^r-Immersion**, oder auch **immersierte C^r-Hyperfläche**, falls $DX(x)\langle\cdot\rangle$ für alle $x \in \Omega$ injektiv ist.

Bemerkung 1.1.2 (Notation)**.** Wir werden partielle Ableitungen durch Subskripte abkürzen. Beispielsweise verwenden wir für eine Immersion X und $i = 1, ..., n$ die Schreibweise

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = X_i.$$

Ist die partielle Ableitung nicht bezüglich einer Komponente im $\mathbb{R}^n$, so werden wir beispielsweise auch

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \partial_\vartheta$$

schreiben. Außerdem verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention.

Definition 1.1.3 (Metrik)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Immersion. Wir definieren die **Metrik** $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ komponentenweise durch

$$g_{ij}(x) := \langle X_i(x), X_j(x)\rangle.$$

Definition 1.1.4 (Normale)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Immersion. Eine stetige Abbildung $\nu : \Omega \to \mathbb{S}^n$ ist eine **Normale** an X, falls

$$\langle \nu(x), X_i(x)\rangle = 0$$

für alle $x \in \Omega$ und $i = 1, ..., n$ gilt.

Definition 1.1.5 (Zweite Fundamentalform)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Immersion und $\nu : \Omega \to \mathbb{S}^n$ eine Normale an X. Wir definieren die **zweite Fundamentalform** $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Komponenten $A = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ durch

$$h_{ij}(x) := -\langle X_{ij}(x), \nu(x)\rangle$$

für $x \in \Omega$, $i, j = 1, ..., n$.

Definition 1.1.6 (Hauptkrümmung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Immersion mit Normale ν und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist λ eine **Hauptkrümmung** von X in der Stelle $x \in \Omega$, falls ein $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, das

$$h_{ij}(x)\xi^j = \lambda \cdot g_{ij}(x)\xi^j$$

für alle $i = 1, ..., n$ erfüllt.

Bemerkung 1.1.7. Sei X eine C^2-Immersion. In [5] wird bewiesen, dass X in jedem Punkt, mit Vielfachheiten gezählt, genau n Hauptkrümmungen besitzt.

Definition 1.1.8 (Mittlere Krümmung)**.** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Immersion und $\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ die n Hauptkrümmungen, entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach aufgeführt. Dann definieren wir die **mittlere Krümmung** $H : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x).$$

1.2. **Mittlerer Krümmungsfluss und homothetische Expandierer.**

Definition 1.2.1 (Mittlerer Krümmungsfluss)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $T > 0$. Dann erfüllt eine stetige Abbildung $X : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ den **mittleren Krümmungsfluss**, falls $X(\cdot, t)$ für alle $t \in (0, T)$ eine immersierte C^2-Hyperfläche ist, X für $t > 0$ nach dem zweiten Argument differenzierbar ist und für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ die Gleichung

$$\langle \dot{X}, \nu \rangle = -H$$

erfüllt ist.

Definition 1.2.2 (Homothetische Expandierer)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$. Sei $X : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Dann heißt X **homothetisch expandierend**, falls eine monoton wachsende Funktion $\lambda \in C^1((0, \infty), (0, \infty))$ mit $\lim_{t \to 0} \lambda(t) = 0$ und ein $t_0 \in (0, T)$ existieren, so dass

$$X(x, t) = \lambda(t) \cdot X(x, t_0)$$

für alle $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$ gilt.

Bemerkung 1.2.3. Im Folgenden werden wir homothetisch expandierende Lösungen einfach **Expandierer** nennen. Außerdem werden wir mit $t_0 = \frac{1}{2}$ arbeiten. Dies entspricht, wie wir am Beweis von Lemma 1.2.4 sehen können, nur einer Multiplikation von λ mit einem Faktor $C > 0$.

Nun wollen wir das Skalierungsverhalten von Expandierern untersuchen, also λ aus Definition 1.2.2 explizit angeben. Das Vorgehen ist wie in [6].

Lemma 1.2.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$ und $X : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein Expandierer mit $H \not\equiv 0$. Dann ist $\lambda(t) = \sqrt{2t}$ für $t \in (0, T)$ und*

$$\langle X, \nu \rangle = -H$$

auf $\Omega \times \{t_0\}$.

Beweis. Durch das Skalierungsverhalten der mittleren Krümmung und der Normalen erhalten wir

$$H(x, t) = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t)} H(x, t_0) \quad \text{und} \quad \nu(x, t) = \nu(x, t_0).$$

Da X ein Expandierer ist, gelten $\dot{X}(x, t) = \dot{\lambda}(t) X(x, t_0)$ und $\lambda(t_0) = 1$. Damit erhalten wir aus der Gleichung für den mittleren Krümmungsfluss

$$\dot{\lambda}(t)\langle X(x, t_0), \nu(x, t_0)\rangle = \langle \dot{X}(x, t), \nu(x, t)\rangle = -H(x, t) = -\frac{1}{\lambda(t)} H(x, t_0).$$

Nun betrachten wir diese Gleichung in einem Punkt $x \in \Omega$ mit $H(x, t_0) \neq 0$. Da die einzigen zeitabhängigen Terme λ, $\dot{\lambda}$ sind und $\lambda, \dot{\lambda} > 0$ gilt, erhalten wir $\dot{\lambda}(t)\lambda(t) = c$ für ein $c > 0$. Lösungen dieser Differentialgleichung mit $\lambda(t_0) = 1$ haben die Form

$$\lambda(t) = \sqrt{2ct - 2t_0 c + 1}.$$

Da $\lambda(t) \to 0$ für $t \to 0$, erhalten wir $c = \frac{1}{2t_0}$, also $\lambda(t) = \sqrt{\frac{t}{t_0}} = \sqrt{2t}$. Die gewünschte Gleichheit auf $\Omega \times \{t_0\}$ folgt durch

$$\dot{\lambda}(t_0)\langle X(x,t_0), \nu(x,t_0)\rangle = -\frac{1}{\lambda(t_0)} H(x,t_0),$$

da $\lambda(t_0) = \dot{\lambda}(t_0) = 1$. □

Bemerkung 1.2.5. Aus den Rechnungen wird klar, dass wir aus einer immersierten C^2-Hyperfläche $\tilde{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\langle \tilde{X}, \nu\rangle = -H$ durch

$$X : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}; \quad (x,t) \mapsto \sqrt{2t} \cdot \tilde{X}(x)$$

einen Expandierer X erhalten. Wir nennen $\tilde{X}$ einen **zeitunabhängigen Expandierer** und X den durch $\tilde{X}$ **erzeugten Expandierer**. Hierdurch können wir auch annehmen, dass Expandierer zeitlich auf $[0,\infty)$ definiert sind, da wir sie stets in positive Zeitrichtung fortsetzen können.

1.3. **Differentialgleichung für rotationssymmetrische Expandierer.**

Bemerkung 1.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine graphische C^2-Immersion, existiere also ein $U \in C^2(\Omega)$ mit $X(x) = (x, U(x))^{\mathrm{T}}$. Sei U zusätzlich rotationssymmetrisch und lasse sich durch $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : R_1 < |x| < R_2\}$, $u \in C^2((R_1,R_2))$ mit $U(x) = u(|x|) \equiv u(r)$ darstellen. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+u'(r)^2}} \begin{pmatrix} u'(r)\frac{x}{r} \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1(x) &= \frac{u''(r)}{(1+u'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\lambda_2(x) = \ldots = \lambda_n(x) &= \frac{u'(r)}{r \cdot \sqrt{1+u'(r)^2}}, \\
H(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+u'(r)^2}} \left(\frac{u''(r)}{1+u'(r)^2} + \frac{n-1}{r} u'(r) \right).
\end{aligned}$$

Dies wird in [6] bewiesen.

Lemma 1.3.2. *Sei $I \subset (0,\infty)$ ein offenes Intervall und $u \in C^2(I)$. Definiere $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in I\}$ und $U : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $U(x) := u(r)$. Dann ist* $\operatorname{graph} U$ *genau dann ein zeitunabhängiger Expandierer, wenn*

$$u''(r) = (1+u'^2(r)) \left(u(r) - \left(r + \frac{n-1}{r} \right) u'(r) \right) \tag{1.1}$$

gilt.

Beweis. Aus Bemerkung 1.3.1 erhalten wir

$$\langle X(x), \nu(x)\rangle = \frac{ru'(r) - u(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}}$$

und

$$-H(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+u'(r)^2}} \left(\frac{u''(r)}{1+u'(r)^2} + \frac{n-1}{r} u'(r) \right).$$

Die Äquivalenz von $\langle X(x), \nu(x)\rangle = -H(x)$ zu der angegebenen Differentialgleichung für u folgt nun durch Umstellen. □

Das folgende Lemma ist aus [6] entnommen.

Lemma 1.3.3. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $R > 0$. Sei*

$$u \in C^2((0,R)) \cap C^0([0,R)).$$

Dann ist

$$U : B_R(0) \to \mathbb{R},$$
$$U(x) := u(r)$$

genau dann von der Klasse C^2, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{u'(r)}{r} \quad \text{und} \quad \lim_{r \downarrow 0} u''(r)$$

existieren und übereinstimmen.

Bemerkung 1.3.4. Für jedes $h > 0$ existiert eine Funktion $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = h$, welche die Differentialgleichung (1.1) auf $(0,\infty)$ löst und die Regularitätsbedingungen aus Lemma 1.3.3 erfüllt. Dies wird in [1] bewiesen. Wir werden nun stets annehmen, dass u eine Lösung dieser Art ist, also die Regularitätsbedingung aus Lemma 1.3.3 erfüllt und auf $[0,\infty)$ definiert ist. Für eine Lösung u der Differentialgleichung (1.1) ist auch $\tilde{u}(r) := -u(r)$ eine Lösung derselben. Für $u(0) = 0$ erhalten wir durch $u \equiv 0$ eine Lösung. Somit ist $h > 0$ keine Einschränkung, weshalb wir zusätzlich $u(0) > 0$ annehmen werden, wenn wir von einer Lösung der Differentialgleichung (1.1) sprechen.

1.4. **Konvexität.** In diesem Abschnitt werden wir $n \geq 2$ annehmen, da die Resultate in [2] für $n = 1$ gezeigt werden.

Lemma 1.4.1. *Sei $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1)*. Dann ist $u''(0) > 0$.*

Beweis. Da u die Regularitätsbedingung aus Lemma 1.3.3 erfüllt, gilt

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{u'(r)}{r} = \lim_{r \downarrow 0} u''(r) = u''(0).$$

Insbesondere ist $u'(0) = 0$. Damit berechnen wir folgende Grenzwerte:

$$\lim_{r \downarrow 0} (1 + u'(r)^2) = 1,$$
$$\lim_{r \downarrow 0} \left(r + \frac{n-1}{r} \right) u'(r) = (n-1) \cdot \lim_{r \downarrow 0} \frac{u'(r)}{r} = (n-1) u''(0).$$

Mit der Differentialgleichung (1.1) erhalten wir nun durch Grenzwertbildung auf beiden Seiten

$$u''(0) = u(0) - (n-1) u''(0),$$

beziehungsweise $u''(0) = \frac{u(0)}{n} > 0$. □

Lemma 1.4.2. *Sei $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1)*. Dann gilt $u'(r) > 0$ für $r \in (0,\infty)$.*

Beweis. Nach Lemma 1.4.1 ist $u''(0) > 0$. Da u die Regularitätsbedingung aus Lemma 1.3.3 erfüllt, gilt $u'(0) = 0$. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $u'(r) > 0$ für $r \in (0,\varepsilon]$ gilt. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es existiert ein $r > \varepsilon$ mit $u'(r) = 0$. Wir wählen $r_0 > \varepsilon$ minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist $u' \geq 0$ auf $(0, r_0]$, womit $u(r_0) \geq u(0) > 0$ folgt. Da u die Differentialgleichung (1.1) erfüllt, erhalten wir mit $u'(r_0) = 0$

$$u''(r_0) = (1 + u'(r_0)^2) \left(u(r_0) - \left(r_0 + \frac{n-1}{r_0} \right) u'(r_0) \right) = u(r_0) > 0.$$

Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass $u'' > 0$ auf $[r_0 - \delta, r_0]$. Dies ist ein Widerspruch zu $u' > 0$ auf $[\varepsilon, r_0)$ und $u'(r_0) = 0$. Es existiert also kein $r > \varepsilon$ mit $u'(r) = 0$. □

Lemma 1.4.3. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1). *Dann gilt $u'' > 0$ auf $[0, \infty)$.*

Beweis. Wir definieren $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(r) := u(r) - \left(r + \frac{n-1}{r}\right) u'(r).$$

Hierbei ist φ durch die Regularitätsbedingungen aus Lemma 1.3.3 stetig bis zu $r = 0$. Die Differentialgleichung (1.1) wird damit zu

$$u''(r) = (1 + u'(r)^2)\varphi(r).$$

Somit stimmen die Vorzeichen von u'' und φ überein. Es ist

$$\varphi'(r) = \frac{n-1}{r^2} u'(r) - \left(r + \frac{n-1}{r}\right) u''(r)$$

für $r > 0$. Nach Lemma 1.4.1 ist $\varphi(0) > 0$. Angenommen $\varphi > 0$ gilt nicht auf $[0, \infty)$. Dann existiert, aufgrund der Stetigkeit von φ, ein minimales $r_0 > 0$ mit $\varphi(r_0) = u''(r_0) = 0$. Somit gilt

$$\varphi'(r_0) = \frac{n-1}{r_0^2} u'(r_0).$$

Mit Lemma 1.4.2 folgt $\varphi'(r_0) > 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\varphi > 0$ auf $[0, r_0)$ und $\varphi(r_0) = 0$. Es gilt also $\varphi > 0$, beziehungsweise $u'' > 0$, auf $[0, \infty)$. □

Bemerkung 1.4.4. Nach Lemma 1.4.2 und Lemma 1.4.3 gilt $u'', u' > 0$ auf $(0, \infty)$. Mit der Differentialgleichung (1.1)

$$u''(r) = (1 + u'^2(r)) \left(u(r) - \left(r + \frac{n-1}{r}\right) u'(r)\right)$$

erhalten wir direkt $u(r) - ru'(r) > 0$ für $r \in (0, \infty)$.

Bemerkung 1.4.5. Mit Bemerkung 1.3.1, sowie den Lemmata 1.4.2 und 1.4.3 erhalten wir, dass die Hauptkrümmungen von Expandierern dieser Form positiv sind.

Korollar 1.4.6. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1). *Dann ist $(0, \infty) \ni r \mapsto \frac{u(r)}{r}$ streng monoton fallend.*

Beweis. Mit Bemerkung 1.4.4 folgt

$$\left(\frac{u(r)}{r}\right)' = \frac{ru'(r) - u(r)}{r^2} < 0$$

für $r > 0$. □

Lemma 1.4.7. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Ursprungsgerade, existiere also ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax$. Dann existiert höchstens ein $r_0 \in [0, \infty)$ mit $u(r_0) = f(r_0)$.*

Beweis. Seien $r_0, r_1 \in [0, \infty)$ mit $u(r_0) = f(r_0)$ und $u(r_1) = f(r_1)$. Da $u(0) > 0$ und $f(0) = 0$ sind, folgt $r_0, r_1 \neq 0$. Es gilt

$$\frac{u(r_0)}{r_0} = \frac{f(r_0)}{r_0} = a = \frac{f(r_1)}{r_1} = \frac{u(r_1)}{r_1}.$$

Mit der strengen Monotonie von $r \mapsto \frac{u(r)}{r}$ aus Korollar 1.4.6 erhalten wir
$r_0 = r_1$. □

2. Existenz eines asymptotischen Expandierers

In diesem Kapitel wollen wir nachweisen, dass für beliebige $a > 0$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) existiert, die aysmptotisch an $r \mapsto ar$ ist. Nach Rotation erhalten wir also einen Expandierer, der asymptotisch an $\operatorname{graph}(x \mapsto a|x|)$ ist. Hierfür leiten wir zunächst asymptotische Abschätzungen her, um dann den Zwischenwertsatz anwenden zu können. Das Vorgehen orientiert sich an [2].

2.1. **Asymptotik.**

Lemma 2.1.1. *Sei $A > 0$. Dann existiert ein $C(A, n) > 0$, so dass für jede Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1.1) mit $u(0) \le A$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} u(r) &\le C(1 + r), \\ u'(r) &\le C \end{aligned}$$

für $r \in [0, \infty)$ gelten.

Beweis. Definiere $s : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$s(r) := r + \frac{n-1}{r}.$$

Nach Lemma 1.4.3 ist $u'' > 0$, also $su' < u$, beziehungsweise $u' < \frac{u}{s}$. Somit gilt auch $u' \le \frac{ur}{n-1} \le u$ für $r \le 1$. Wir erhalten mit dem Hauptsatz und dem Lemma von Gronwall

$$u(\tau) \le u(0) \cdot e^{\tau}$$

für $0 \le \tau \le 1$. Hieraus folgen die gewünschten Abschätzungen in diesem Fall. Betrachte nun die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} w'(r) &= \frac{w(r)}{s(r)} \quad \text{für} \quad r \in [1, \infty) \\ w(1) &= u(1). \end{aligned}$$

Dann ist $u \le w$ auf $[1, \infty)$, da $w'(1) > u'(1)$ gilt und in einem Punkt $r > 1$ mit $w(r) = u(r)$ schon $w'(r) > u'(r)$ folgt. Die Lösung w der obigen Differentialgleichung ist durch

$$w(r) = \frac{u(1)}{\sqrt{n}} \sqrt{n - 1 + r^2}$$

gegeben. Nun existiert eine, nur von n abhängige, Konstante $D > 0$ mit

$$\sqrt{n - 1 + r^2} \le D(1 + r)$$

für $r \ge 0$. Mit $E := D\frac{A \cdot e}{\sqrt{n}}$ erhalten wir also für $r \ge 1$

$$u(r) \le w(r) = \frac{u(1)}{\sqrt{n}} \sqrt{n - 1 + r^2} \le D\frac{A \cdot e}{\sqrt{n}}(1 + r) = E(1 + r).$$

Wir setzen $C := 2E$. Dann gilt

$$u'(r) \le \frac{u(r)}{s(r)} \le \frac{E(1 + r)}{r + \frac{n-1}{r}} \le E\left(\frac{1}{r} + 1\right) \le 2E = C.$$

Hierbei haben wir $r + \frac{n-1}{r} \ge r$ und $\frac{1}{r} \le 1$ für $r \ge 1$ verwendet. □

Lemma 2.1.2. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1)*. Dann existiert ein (eindeutiges) $a \geq 0$ mit*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{u(r)}{r} = a.$$

Beweis. Nach Korollar 1.4.6 ist $r \mapsto \frac{u(r)}{r}$ monoton fallend. Da u nach Lemma 1.4.3 konvex ist und durch die Regularitätsbedingung aus Lemma 1.3.3 $u'(0) = 0$ gilt, erhalten wir

$$\frac{u(r)}{r} \geq \frac{u(0) + ru'(0)}{r} \geq 0.$$

Somit ist $\frac{u}{r}$ nach unten beschränkt. Mit der Monotonie folgt die Konvergenz gegen ein $a \geq 0$. □

Bemerkung 2.1.3. Für eine Lösung u der Differentialgleichung (1.1) setzen wir

$$a_u := \lim_{r\to\infty} \frac{u(r)}{r}.$$

Geben wir $u(0) = h \geq 0$ explizit vor, so schreiben wir auch u_h für eine Lösung von (1.1) mit diesem Anfangswert. Bisher ist nur die Existenz einer solchen Lösung, aber nicht deren Eindeutigkeit klar. Deshalb wählen für jedes $h > 0$ eine beliebige, aber nun feste, Lösung u_h mit Anfangswert $u_h(0) = h$. Zusätzlich wählen wir für $h = 0$ die Nulllösung $u_0 \equiv 0$. Da wir die Lösungsschar $(u_h)_{h\geq 0}$ nun fest gewählt haben, ist die Abbildung $h \mapsto a_{u_h}$ wohldefiniert.

Lemma 2.1.4. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1)*. Dann ist $u(r) > a_u r$ für alle $r > 0$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Konvergenz $\frac{u(r)}{r} \to a_u$ und der strengen Monotonie von $r \mapsto \frac{u(r)}{r}$. □

Lemma 2.1.5. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1)*. Dann gilt $u'(r) < a_u$ für alle $r \geq 0$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $u'(r) \leq a_u$ und führen hierfür einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es existiert ein $r_0 \geq 0$ mit $u'(r_0) > a_u$. Da u nach Lemma 1.4.3 konvex ist, erhalten wir

$$a_u = \lim_{r\to\infty} \frac{u(r)}{r} \geq \limsup_{r\to\infty} \frac{u(r_0) + (r - r_0)u'(r_0)}{r} = u'(r_0) > a_u.$$

Widerspruch. Durch die strikte Konvexität von u folgt auch die strikte Ungleichung. □

Lemma 2.1.6. *Seien $A > 0$ und $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1) *mit $u(0) \leq A$. Dann existieren $C, r_0 > 0$ mit*

$$|u(r) - ru'(r)| \leq \frac{C}{r}$$

für alle $r \geq r_0$, wobei C, r_0 nur von A und n abhängen.

Beweis. Wir definieren $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $w(r) := u(r) - ru'(r)$. Mit Bemerkung 1.4.4 erhalten wir $w \geq 0$. Durch Lemma 2.1.1 können wir in Abhängigkeit von A und n ein $C > 0$ mit

$$C \geq (n-1)(1 + u'^2)u'$$

wählen. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Angenommen es gilt $w(r) \geq \frac{C+\varepsilon}{r}$ für ein $r > 0$. Dann folgt

$$w'(r) = -ru''(r) = -r(1+u'(r)^2)w(r)+(n-1)(1+u'(r)^2)u'(r) \leq -rw(r)+C \leq -\varepsilon.$$

Mit $\varepsilon := \frac{1}{2}$ folgt $w' \leq -\frac{1}{2}$ für $w \geq \frac{C+\frac{1}{2}}{r}$. Wir erhalten also die Existenz eines $r_0 > 0$, so dass $w(r) \leq \frac{C+1}{r}$ für $r \geq r_0$ gilt. Durch den mindestens linearen Abstieg können wir r_0 in Abhängigkeit von A und C wählen. Da auch $w \geq 0$ gilt, folgt die Aussage. □

Lemma 2.1.7. *Seien $A > 0$ und $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1) *mit $u(0) \leq A$. Dann existieren $C, r_0 > 0$ mit*

$$|a_u - u'(r)| \leq \frac{C}{r^2}$$

für alle $r \geq r_0$, wobei C, r_0 nur von A und n abhängen.

Beweis. Wir verwenden $C, r_0 > 0$ aus Lemma 2.1.6. Nach Lemma 2.1.4 gilt $\frac{u(r)}{r} - a_u \geq 0$. Mit Lemma 2.1.6 erhalten wir

$$\frac{C}{r^2} \geq \frac{u(r)}{r} - u'(r) = \left(\frac{u(r)}{r} - a_u\right) + (a_u - u'(r)) \geq a_u - u'(r) \geq 0$$

für beliebiges $r \geq r_0$. Für die letzte Abschätzung haben wir Lemma 2.1.5 verwendet. □

Lemma 2.1.8. *Seien $A > 0$ und $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1) *mit $u(0) \leq A$. Dann existieren $C, r_0 > 0$ mit*

$$\left|a_u - \frac{u(r)}{r}\right| \leq \frac{C}{r^2}$$

für alle $r \geq r_0$, wobei C, r_0 nur von A und n abhängen.

Beweis. Wir verwenden $C, r_0 > 0$ aus den Lemmata 2.1.6 und 2.1.7. Dann erhalten wir

$$\left|a_u - \frac{u(r)}{r}\right| \leq |a_u - u'(r)| + \left|u'(r) - \frac{u(r)}{r}\right| \leq \frac{2C}{r^2}$$

für beliebiges $r \geq r_0$. □

2.2. **Anwendung des Zwischenwertsatzes.** Wir weisen zunächst die Existenz von Lösungen mit großer asymptotischer Steigung nach. Dann beweisen wir die stetige Abhängigkeit der asymptotischen Steigung vom Anfangswert, um schließlich den Zwischenwertsatz anwenden zu können. Wir zeigen auch eine streng monotone Abhängigkeit der asymptotischen Steigung vom Anfangswert und erhalten dadurch zusätzlich die Eindeutigkeit der Lösung mit gegebener asymptotischer Steigung.

Lemma 2.2.1. *Sei $a > 0$ beliebig. Dann existiert ein $h > 0$, so dass $a_{u_h} \geq a$ gilt.*

Beweis. Wir definieren wieder $s : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $s(r) := r + \frac{n-1}{r}$ und setzen

$$h := a + a \cdot \sup_{r \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]} s(r) < \infty.$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Wir nehmen zunächst an, dass $u_h(r) - s(r)u_h'(r) \geq a$ für alle $r \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ gilt. Nach Lemma 2.1.5 ist $a_{u_h} \geq u_h'\left(\frac{3}{2}\right)$ und nach Lemma 1.4.2 gilt $u_h'\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Da u_h die Differentialgleichung (1.1) erfüllt, erhalten wir damit

$$a_{u_h} \geq u_h'\left(\frac{3}{2}\right) = u_h'\left(\frac{1}{2}\right) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (1 + u_h'(\rho)^2)(u_h(\rho) - s(\rho)u_h'(\rho))\,\mathrm{d}\rho \geq \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} a\,\mathrm{d}\rho = a.$$

In diesem Fall folgt also die Aussage. Nun nehmen wir an, dass ein $r_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ mit $u_h(r_0) - s(r_0)u_h'(r_0) < a$ existiert. Nach Lemma 1.4.3 und Lemma 2.1.5 gilt

$u_h'(r_0) \leq u_h'\left(\frac{3}{2}\right) \leq a_{u_h}$. Aus Lemma 1.4.2 erhalten wir $h \leq u_h(r_0)$. Daraus folgt durch Umstellen und mit der Definition von h

$$a \leq \frac{h-a}{s(r_0)} \leq \frac{u_h(r_0)-a}{s(r_0)} \leq u_h'(r_0) \leq u_h'\left(\frac{3}{2}\right) \leq a_{u_h}.$$

Somit folgt die Aussage auch in diesem Fall. □

Lemma 2.2.2. *Seien $u, v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung* (1.1) *mit $u(0) > v(0)$. Dann ist $u' - v' \geq 0$. Insbesondere ist $u - v$ monoton wachsend.*

Beweis. Wir definieren $w : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $w(r) := u'(r) - v'(r)$. Aus den Rechnungen in Lemma 1.4.1 sehen wir

$$w'(0) = u''(0) - v''(0) = \frac{u(0)-v(0)}{n} > 0.$$

Somit ist $w > 0$ auf $[0, \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$. Angenommen $w > 0$ gilt nicht auf $(0,\infty)$. Dann gibt es ein minimales $r_0 > \varepsilon$ mit $w(r_0) = 0$, beziehungsweise $u'(r_0) = v'(r_0)$. Nach Wahl von r_0 gilt $w'(r_0) \leq 0$, also $u''(r_0) \leq v''(r_0)$. Des Weiteren gilt $u' > v'$ auf $(0, r_0)$ und $u(0) > v(0)$, also auch $u(r_0) > v(r_0)$. Aus der Differentialgleichung (1.1) erhalten wir durch $u''(r_0) \leq v''(r_0)$ und $u'(r_0) = v'(r_0)$ jedoch $u(r_0) \leq v(r_0)$. Widerspruch. □

Lemma 2.2.3. *Sei $r_0 > 0$ beliebig. Dann sind die Abbildungen $0 \leq h \mapsto u_h(r_0)$ und $0 \leq h \mapsto u_h'(r_0)$ stetig.*

Beweis. Wir möchten das Lemma von Gronwall anwenden. Aufgrund des $\frac{u'}{r}$ Terms ist dies nicht direkt möglich.
Seien $h_1, h_2 \geq 0$, sowie $r_0 > 0$ beliebig und setze $A := \max\{h_1, h_2\} + 1$, $u_i := u_{h_i}$ für $i = 1, 2$. Sei ohne Einschränkung $h_1 > h_2$. Wir definieren $\varphi : [0, r_0] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi := (u_1 - u_2) + (u_1' - u_2') =: \varphi_1 + \varphi_2.$$

Nach Lemma 2.2.2 gelten $u_1' \geq u_2'$ und $\varphi > 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} u_1'^2 u_1 - u_2'^2 u_2 &= (u_2' + \varphi_2)^2 (u_2 + \varphi_1) - u_2'^2 u_2 \\ &= u_2'^2 \varphi_1 + 2u_2' u_2 \varphi_2 + 2u_2' \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2 u_2 + \varphi_2^2 \varphi_1 \\ &= (u_2'^2 + 2u_2' \varphi_2 + \varphi_2^2)\varphi_1 + (2u_2' u_2 + \varphi_2 u_2)\varphi_2. \end{aligned}$$

Es existiert also ein $C(n, r_0, A) > 0$ mit

$$u_1'^2 u_1 - u_2'^2 u_2 \leq C\varphi_1 + C\varphi_2 = C\varphi.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi' = u_1' - u_2' + u_1'' - u_2'' &= \varphi + u_1'^2 u_1 - u_2'^2 u_2 \\ &+ \left(r + \frac{n-1}{r}\right)(u_2' - u_1' + u_2'^3 - u_1'^3) \\ &\leq (1 + C)\varphi, \end{aligned}$$

da der Term in der zweiten Zeile negativ ist. Nun können wir das Lemma von Gronwall auf φ anwenden und erhalten die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert, da $\varphi(0) = h_1 - h_2$ gilt. □

Bemerkung 2.2.4. In Bemerkung 2.1.3 haben wir für $h > 0$ eine beliebige Lösung u_h mit $u_h(0) = h$ gewählt. Durch Lemma 2.2.3 erhalten wir die Eindeutigkeit dieser Lösung. Angenommen es gibt zwei Lösungen mit gleichem Anfangswert, die sich in einem Punkt unterscheiden. Dann können die Abbildungen aus Lemma 2.2.3 nicht für beide Wahlen stetig sein. Da wir die Stetigkeit für eine beliebige Wahl der u_h gesehen haben, folgt die Eindeutigkeit.

Lemma 2.2.5. *Die Abbildung* $0 \le h \mapsto a_{u_h}$ *ist stetig.*

Beweis. Sei $h \ge 0$ beliebig. Da $u_0 \equiv 0$ die Nulllösung ist, treffen die Aussagen über die Asymptotik aus den Lemmata 2.1.6, 2.1.7 und 2.1.8 auch auf $h = 0$ zu. Aus Lemma 2.1.7 erhalten wir $r_0 > 0$, so dass $|a_{u_\tau} - u'_\tau(r_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $0 \le \tau \le h+1$ gilt. Nach Lemma 2.2.3 existiert ein $0 < \delta \le 1$, so dass

$$|u'_\tau(r_0) - u'_h(r_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $|h - \tau| < \delta$ gilt. Wir erhalten also

$$|a_{u_\tau} - a_{u_h}| \le |a_{u_\tau} - u'_\tau(r_0)| + |u'_\tau(r_0) - u'_h(r_0)| + |u'_h(r_0) - a_{u_h}| < \varepsilon$$

für alle $\tau \ge 0$ mit $|\tau - h| < \delta$. □

Lemma 2.2.6. *Die Abbildung* $0 < h \mapsto a_{u_h}$ *ist streng monoton wachsend.*

Beweis. Seien $0 < h_1 < h_2$ beliebig. Mit Lemma 2.2.2 erhalten wir $u_{h_2} - u_{h_1} \ge \varepsilon := h_2 - h_1 > 0$. Durch Lemma 2.1.8 folgt

$$a_{u_{h_2}} - a_{u_{h_1}} = \frac{u_{h_2}(r)}{r} - \frac{u_{h_1}(r)}{r} + \left(a_{u_{h_2}} - \frac{u_{h_2}(r)}{r}\right) - \left(a_{u_{h_1}} - \frac{u_{h_1}(r)}{r}\right) \ge \frac{\varepsilon}{r} - \frac{C}{r^2} > 0$$

für $r, C > 0$ groß genug. □

Lemma 2.2.7. *Sei* $a > 0$ *beliebig. Dann existiert ein eindeutiges* $h > 0$ *mit* $a_{u_h} = a$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt mit der strengen Monotonie aus Lemma 2.2.6. Da $0 \le h \mapsto a_{u_h}$ nach Lemma 2.2.5 stetig ist, folgt die Existenz, unter Betrachtung von Lemma 2.2.1 und der Nulllösung, aus dem Zwischenwertsatz. □

Mit gleichen Methoden wie in [2] erhält man aus diesen Resultaten folgendes:

Korollar 2.2.8. *Die Abbildung* $\mathbb{R}^+ \ni h \mapsto a_{u_h} \in \mathbb{R}^+$ *ist ein Homöomorphismus.*

3. Zusätzliche Regularität im Ursprung

Wir weisen stärkere Regularitätsaussagen als in Lemma 1.3.3 nach.

3.1. **Dritte Ableitungen im Ursprung.**

Lemma 3.1.1. *Sei* $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1). *Dann gilt*

$$\left(\frac{u'(r)}{r}\right)' = \frac{ru''(r) - u'(r)}{r^2} \to 0$$

für $0 < r \to 0$.

Beweis. Wir berechnen für $r > 0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u'}{r}\right)' &= \frac{ru''(r) - u'(r)}{r^2} = (1 + u'^2)\left(\frac{u}{r} - \left(1 + \frac{n-1}{r^2}\right)u'\right) - \frac{u'}{r^2} \\
&= \frac{u}{r} - \left(1 + \frac{n-1}{r^2}\right)u' - \frac{u'}{r^2} + u'^2\left(\frac{u}{r} - \left(1 + \frac{n-1}{r^2}\right)u'\right) \\
&= \frac{u}{r} - n\frac{u'}{r^2} - u' + u'^2\left(\frac{u}{r} - \left(1 + \frac{n-1}{r^2}\right)u'\right) \\
&=: \frac{u}{r} - n\frac{u'}{r^2} + I \\
&=: \varphi + I,
\end{aligned}$$

mit $I \to 0$ für $r \to 0$, da $\frac{u'}{r}$ durch die Regularitätskriterien aus Lemma 1.3.3 nahe 0 beschränkt ist. Es genügt also $\varphi \to 0$ für $r \to 0$ nachzuweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - n\frac{u''}{r^2} + 2n\frac{u'}{r^3} \\ &= -\frac{1}{r}\left(\frac{u}{r} - n\frac{u'}{r^2}\right) - \frac{n}{r}\left(\frac{ru'' - u'}{r^2}\right) + \frac{u'}{r} \\ &= -\frac{\varphi}{r} - n\frac{\varphi + I}{r} + \frac{u'}{r}.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $C > 0$ eine obere Schranke an $\frac{u'}{r}$. Diese existiert, da $\frac{u'}{r}$ durch die Regularitätskriterien nahe 0 und durch Lemma 2.1.1 global beschränkt ist. Wähle $r_0 > 0$ mit $|I| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{\varepsilon}{r} > C$ für $r \in (0, r_0]$. Angenommen, es gilt $\varphi(r) > \varepsilon$ für ein $r \in (0, r_0]$. Dann folgt

$$\varphi'(r) \leq -\frac{\varepsilon}{r} - \frac{n\varepsilon}{2r} + C \leq -\frac{n\varepsilon}{2r}.$$

Somit gilt $\varphi(\tau) > \varepsilon$ und $\varphi'(\tau) \leq -\frac{n\varepsilon}{2\tau}$ für $\tau \in (0, r]$. Also divergiert $\varphi(\tau)$ gegen $+\infty$ für $\tau \to 0$. Für $\varphi(r) < -\varepsilon$ führen wir ein identisches Argument und erhalten in diesem Fall, dass $\varphi(\tau)$ für $\tau \to 0$ gegen $-\infty$ divergiert. Insgesamt erhalten wir, dass φ (bestimmt) divergiert, oder $\varphi \to 0$ für $r \to 0$ gilt. Wir zeigen nun, dass φ nicht divergiert. Angenommen φ divergiert. Gelte ohne Einschränkung $\varphi \to \infty$ für $r \to 0$, sonst führen wir ein analoges Argument. Dann existiert ein $r_1 > 0$ mit

$$\varphi' \leq -\frac{\varphi}{r} - \frac{n\varphi}{2r} = -\left(1 + \frac{n}{2}\right)\frac{\varphi}{r}$$

und $\varphi > 0$ auf $(0, r_1]$. Sei $1 < q < 1 + \frac{n}{2}$ beliebig. Nun existiert $C > 0$ klein genug mit

$$\varphi(r_1) > \frac{C}{r_1^q}.$$

Definiere $f(r) := \frac{C}{r^q}$ auf $(0, r_1]$. Es gilt

$$\varphi'(r_1) \leq -\left(1 + \frac{n}{2}\right)\frac{C}{r_1^{q+1}} < -q\frac{C}{r_1^{q+1}} = f'(r_1),$$

da $1 < q < 1 + \frac{n}{2}$ ist. Somit folgt $\varphi > f$ auf $[r_1 - \varepsilon, r_1]$ für $\varepsilon > 0$ klein genug. Angenommen die strikte Ungleichung gilt nicht auf $(0, r_1]$. Sei $r_2 \in (0, r_1]$ maximal mit $\varphi(r_2) = f(r_2)$. Damit erhalten wir

$$\varphi'(r_2) \leq -\left(1 + \frac{n}{2}\right)\frac{\varphi(r_2)}{r_2} = -\left(1 + \frac{n}{2}\right)\frac{f(r_2)}{r_2} < -q\frac{f(r_2)}{r_2} = f'(r_2).$$

Ein Widerspruch zur Maximalität von r_2. Somit gilt $\varphi > f$ auf $(0, r_1]$, φ ist also nicht integrabel. Ein Widerspruch zu

$$\left(\frac{u'}{r}\right)' = \varphi + I$$

und der Beschränktheit von $\frac{u'}{r}$ und I nahe 0. Wir erhalten also die Beschränktheit von φ und damit $\varphi \to 0$ für $r \to 0$. □

Lemma 3.1.2. *Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (1.1). *Dann gilt $u'''(r) \to 0$ für $0 < r \to 0$.*

Beweis. Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung (1.1) und erhalten

$$\begin{aligned}u'''(r) &= (1 + u'^2)\left(\frac{n-1}{r^2}u' - \left(r + \frac{n-1}{r}\right)u''\right) + 2\frac{uu'u''}{1 + u'^2} \\ &= (1 + u'^2)\left(-ru'' + (n-1)\frac{(u' - ru'')}{r^2}\right) + 2\frac{uu'u''}{1 + u'^2}\end{aligned}$$

für $r > 0$. Durch die Beschränktheit von u, u'' nahe 0 und mit $u' \to 0$ für $r \to 0$ erhalten wir, dass der zweite Summand für $r \to 0$ gegen 0 konvergiert. Da $ru'' \to 0$ für $r \to 0$ und mit Lemma 3.1.1 erhalten wir, dass auch der erste Summand gegen 0 konvergiert. Somit folgt die Aussage. $\square$

4. ϑ-Parametrisierung

In diesem Kapitel werden wir eine neue Parametrisierung einführen, um die Zeitfunktionen rotationssymmetrischer, homothetischer Expandierer effektiver untersuchen zu können, indem wir deren Symmetrie und Skalierungseigenschaft nutzen. Wir werden eine Differentialgleichung für Expandierer in dieser Parametrisierung herleiten und Abschätzungen für deren Lösungen zeigen.

4.1. **Umparametrisierung.**

Definition 4.1.1 (Polarwinkel)**.** Wir definieren den **Polarwinkel** $\vartheta : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ durch

$$\vartheta(x) := \sphericalangle(x, e_{n+1}) = \arccos\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, e_{n+1} \right\rangle\right) = \arccos\left(\frac{x_{n+1}}{|x|}\right).$$

Hierbei ist $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$.

Bemerkung 4.1.2 (ϑ-Parametrisierung)**.** Sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) und $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $U(x) = u(r)$, so dass $\operatorname{graph} U$ ein zeitunabhängiger Expandierer ist. Wir haben gesehen, dass U asymptotisch zu dem Kegelrand $\operatorname{graph}(x \mapsto a_u|x|)$ ist. Sei ϑ_{max} dessen Öffnungswinkel und $V := \vartheta^{-1}([0, \vartheta_{max})) \cap \mathbb{S}^n$. Da $u'(0) = 0$ gilt, ist die asymptotische Steigung a_u des Expandierers durch die strikte Konvexität von u stets positiv. Es gilt also auch $0 < \vartheta_{max} < \frac{\pi}{2}$. Aufgrund von Lemma 1.4.7 und der Rotationssymmetrie schneidet $\operatorname{graph} U$ Ursprungsgeraden höchstens einmal. Dadurch können wir U auch über der Sphäre parametrisieren. Es existiert also eine eindeutige Abbildung $U_S : V \to [0, \infty)$ mit

$$\operatorname{im}(V \ni e \mapsto U_S(e) \cdot e) = \operatorname{graph} U.$$

Da U_S, wie auch $\operatorname{graph} U$, rotationssymmetrisch bezüglich der x_{n+1}-Achse ist, existiert eine eindeutige Abbildung $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ mit

$$w(\vartheta(e)) = U_S(e)$$

für alle $e \in V$. Wir nennen w die **ϑ-Parametrisierung** und u die **r-Parametrisierung** des Expandierers.

4.2. **Differentialgleichung in der ϑ-Parametrisierung.** Wir möchten eine Differentialgleichung für w herleiten, die äquivalent dazu ist, dass die, durch w in der ϑ-Parametrisierung dargestellte, Rotationsfläche ein zeitunabhängiger Expandierer ist. Sei hierzu $b : \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega \to \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung der Sphäre und $w : (0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ mit $0 < \vartheta_{max} < \frac{\pi}{2}$. Desweiteren sei $X : (0, \vartheta_{max}) \times \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$X(\vartheta, x) = w(\vartheta) \begin{pmatrix} b(x)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir bezeichnen die Metrik der Sphäre mit σ und berechnen

$$\begin{aligned}
X_\vartheta &= \begin{pmatrix} b(w'\sin + w\cos) \\ w'\cos - w\sin \end{pmatrix}, \\
X_i &= \begin{pmatrix} b_i w \sin \\ 0 \end{pmatrix}, \\
X_{\vartheta\vartheta} &= \begin{pmatrix} b(w''\sin + 2w'\cos - w\sin) \\ w''\cos - 2w'\sin - w\cos \end{pmatrix}, \\
X_{ij} &= \begin{pmatrix} b_{ij} w \sin \\ 0 \end{pmatrix}, \\
X_{i\vartheta} &= \begin{pmatrix} b_i(w'\sin + w\cos) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\nu &= -\frac{1}{\sqrt{w^2 + w'^2}} \begin{pmatrix} b(w\sin - w'\cos) \\ w'\sin + w\cos \end{pmatrix}, \\
\langle X, \nu \rangle &= \frac{-w^2}{\sqrt{w^2 + w'^2}}, \\
g &= \begin{pmatrix} w^2 + w'^2 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & \sigma_{ij} w^2 \sin^2 \end{pmatrix}, \\
A &= -\frac{1}{\sqrt{w^2 + w'^2}} \begin{pmatrix} w^2 + 2w'^2 - w''w & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & \sigma_{ij} w \sin(w\sin - w'\cos) \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 &= \frac{w''w - w^2 - 2w'^2}{(w^2 + w'^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\lambda_2, ..., \lambda_n &= \frac{w'\cos - w\sin}{w\sin\sqrt{w^2 + w'^2}}, \\
H &= -\frac{1}{\sqrt{w^2 + w'^2}} \left((n-1)\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right) + \frac{w^2 + 2w'^2 - w''w}{w^2 + w'^2} \right).
\end{aligned}$$

Damit wird die Gleichung $\langle X, \nu \rangle = -H$ äquivalent zu

$$w^2 = -\left((n-1)\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right) + \frac{w^2 + 2w'^2 - w''w}{w^2 + w'^2} \right) \tag{4.1}$$

beziehungsweise

$$w'' = \frac{w^2 + 2w'^2 + (w^2 + w'^2)\left(w^2 + (n-1)\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right)\right)}{w}. \tag{4.2}$$

Dies ist also unsere Differentialgleichung für Expandierer in der ϑ-Parametrisierung. Wir werden, wie bei der r-Parametrisierung, voraussetzen, dass $w(0) > 0$ gilt. Außerdem werden wir stets annehmen, dass $0 < \vartheta_{max} < \frac{\pi}{2}$ der Öffnungswinkel des Kegels ist, an den der durch w erzeugte Expandierer asymptotisch ist.

Bemerkung 4.2.1. Da dieser Term bei der Untersuchung höherer Ableitungen von w häufig auftritt, wollen wir

$$\Gamma := w^2 + (n-1)\left(1 - \frac{w' \cos}{w \sin}\right)$$

definieren. In dem Beweis von Lemma 4.3.2 werden wir $\Gamma > 0$ sehen. Außerdem folgt direkt aus der Differentialgleichung (4.2)

$$\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} = \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)(1+\Gamma)$$

beziehungsweise

$$\frac{w''}{w} - 2\frac{w'^2}{w^2} - 1 = \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma.$$

Lemma 4.2.2. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : (0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2). *Dann lässt sich w stetig auf $[0, \vartheta_{max})$ fortsetzen. Außerdem gilt*

$$\lim_{\vartheta \to 0} w'(\vartheta) = 0$$

und der Grenzwert

$$\lim_{\vartheta \to 0} w''(\vartheta)$$

existiert.

Beweis. Sei $X : (0, \vartheta_{max}) \times \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ wie bisher. Da X ein rotationssymmetrischer, zeitunabhängiger Expandierer ist, existiert ein Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1.1), so dass $X_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$X_u(x) := \begin{pmatrix} x \\ u(|x|) \end{pmatrix}$$

für $x \neq 0$ den gleichen Expandierer beschreibt. Nun setzen wir X, beziehungsweise w, durch die Wahl $w(0) := u(0)$ auf $[0, \vartheta_{max})$ fort und nennen die Fortsetzung wieder X. Also ist $\operatorname{im} X = \operatorname{im} X_u$. Mit

$$\lim_{\vartheta \to 0} w(\vartheta) = \lim_{\vartheta \to 0} w(\vartheta)\cos(\vartheta) = \lim_{x \to 0} u(|x|) = u(0) = w(0)$$

erhalten wir die Stetigkeit von w. Da die Normalen übereinstimmen, also $\langle X, \nu \rangle = \langle X_u, \nu_u \rangle$ gilt, erhalten wir mit

$$\langle X, \nu \rangle = \frac{-w^2}{\sqrt{w^2 + w'^2}}$$

und $\langle X_u(0), \nu_u(0) \rangle = \langle X_u(0), -e_{n+1} \rangle = -u(0) = -w(0)$, dass

$$\lim_{\vartheta \to 0} w'(\vartheta) = 0.$$

Da die Hauptkrümmungen außerhalb von $\vartheta = 0$, beziehungsweise $x = 0$, übereinstimmen, erhalten wir auch die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\vartheta \to 0} \lambda_1(\vartheta) = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{w''(\vartheta) w(\vartheta) - w(\vartheta)^2 - 2w'(\vartheta)^2}{(w(\vartheta)^2 + w'(\vartheta)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Somit folgt die Existenz von

$$\lim_{\vartheta \to 0} w''(\vartheta).$$

□

Bemerkung 4.2.3. Wir werden nun stets die stetige Fortsetzung betrachten, ohne dies explizit zu erwähnen.

Lemma 4.2.4. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Dann gilt $w'''(\vartheta) \to 0$ für $\vartheta \to 0$.*

Beweis. Wir werden in Lemma 6.2.3, unabhängig von diesem Resultat, die kartesischen Ableitungen des Polarwinkels berechnen. Damit erhalten wir

$$\partial_1 \vartheta(|x| \sin(\vartheta) e_1 + |x| \cos(\vartheta) e_{n+1}) = \frac{\sin \cos}{|x|\sqrt{1 - \cos^2}} = \frac{\cos}{|x|} \to \frac{1}{|x|}$$

für $\vartheta \to 0$. Nun gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}\vartheta} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x_1}.$$

Da $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_1} = \frac{x_1}{|x|}$ beschränkt ist und $\partial_1 \vartheta \to \frac{1}{|x|} > 0$ für $\vartheta \to 0$ gilt, folgt aus

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}r} \to 0$$

für $r \to 0$ schon

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}\vartheta} \to 0$$

für $\vartheta \to 0$. Wir differenzieren den Ausdruck für λ_1 aus Bemerkung 1.3.1 und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}r} = \frac{u'''}{(1 + u'^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{u' u''^2}{(1 + u'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Mit Lemma 3.1.2 erhalten wir also $\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}r} \to 0$ für $r \to 0$. Da auch

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{w''' w + w'' w' - 2ww' - 4w' w''}{(w^2 + w'^2)^{\frac{3}{2}}} - 3(ww' + w' w'')\frac{w'' w - w^2 - 2w'^2}{(w^2 + w'^2)^{\frac{5}{2}}}$$

gilt, erhalten wir mit Lemma 4.2.2 ebenfalls $w'''(\vartheta) \to 0$ für $\vartheta \to 0$. □

Lemma 4.2.5. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Dann ist*

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{w'(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = w''(0)$$

und

$$\frac{w''(0)}{w(0)} = 1 + \frac{w(0)^2}{n}.$$

Beweis. Wir verwenden $w'(0) = 0$ aus Lemma 4.2.2. Mit dem Satz von de l'Hospital folgt

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{w'(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{w''(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} = w''(0).$$

Mit der Differentialgleichung (4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{w''(0)}{w(0)} &= \lim_{\vartheta \to 0} \frac{w^2 + 2w'^2 + (w^2 + w'^2)\left(w^2 + (n-1)\left(1 - \frac{w' \cos}{w \sin}\right)\right)}{w^2} \\ &= 1 + w(0)^2 + (n-1) \cdot \left(1 - \frac{w''(0)}{w(0)}\right)\end{aligned}$$

und nach Umstellen

$$\frac{w''(0)}{w(0)} = 1 + \frac{w(0)^2}{n}.$$

□

Lemma 4.2.6. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Dann ist $w''(\vartheta) > 0$ für alle $\vartheta \in (0, \vartheta_{max})$.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.4.5 sind die Hauptkrümmungen des durch w parametrisierten Expandierers positiv. Somit ist

$$0 \le \lambda_1 = \frac{w''w - w^2 - 2w'^2}{(w^2 + w'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da $w > 0$ ist, folgt die Aussage. □

4.3. **Abschätzungen.** Nun wollen wir Abschätzungen für Lösungen der Differentialgleichung (4.2) herleiten. Abschätzungen bis zu der zweiten Ableitung können wir direkt aus der Positivität der Hauptkrümmungen gewinnen. Um Aussagen über die dritten Ableitungen treffen zu können, müssen wir die Differentialgleichung genauer untersuchen.

Lemma 4.3.1. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Gelte $n > 1$. Dann folgt*

$$\frac{w'(\vartheta)}{w(\vartheta)} > \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}$$

für alle $\vartheta \in (0, \vartheta_{max})$.

Beweis. Nach Bemerkung 1.4.5 sind die Hauptkrümmungen des durch w parametrisierten Expandierers positiv. Somit folgt

$$0 < \lambda_n = \frac{w' \cos - w \sin}{w \sin \sqrt{w^2 + w'^2}},$$

also

$$1 < \frac{w' \cos}{w \sin}$$

und damit die Aussage. □

Lemma 4.3.2. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Dann gilt*

$$\frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)} - 2\frac{w'(\vartheta)^2}{w(\vartheta)^2} > 1$$

für alle $\vartheta \in [0, \vartheta_{max})$.

Beweis. Wir erhalten mit der Differentialgleichung (4.2)

$$\frac{w''}{w} - 2\frac{w'^2}{w^2} - 1 = \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma.$$

Aus der Gleichung (4.1) und der Formel für λ_1 folgt

$$\Gamma = -\frac{w^2 + 2w'^2 - w''w}{w^2 + w'^2} = \lambda_1 \sqrt{w^2 + w'^2} > 0,$$

da die Hauptkrümmungen des Expandierers nach 1.4.5 positiv sind. Dies zeigt die Aussage. □

Lemma 4.3.3. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Dann ist $\frac{w'}{w^2}$ monoton wachsend.*

Beweis. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta} \frac{w'}{w^2} = \frac{w''}{w^2} - 2\frac{w'^2}{w^3} > \frac{1}{w} \ge 0,$$

nach Lemma 4.3.2. □

Bemerkung 4.3.4. Mit Lemma 4.3.3 erhalten wir insbesondere $\frac{w'}{w} \to \infty$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$, da w divergiert.

Lemma 4.3.5. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Sei $\tau \in [2, 3)$ beliebig. Dann ist $\frac{w'}{w^\tau}$ unbeschränkt.*

Beweis. Definiere
$$\varphi := \frac{w'}{w^\tau}.$$
Angenommen $\varphi \leq C$ für ein $C > 0$. Dann ist
$$\Gamma \geq w^2 - (n-1)\varphi \frac{w^{\tau-1}\cos}{\sin} \geq \frac{w^2}{2}$$
für ϑ nahe ϑ_{max}, da $\tau - 1 < 2$ gilt. Des Weiteren ist
$$\begin{aligned}
\varphi' &= \frac{w''}{w^\tau} - \tau \frac{w'^2}{w^{1+\tau}} = \frac{1}{w^{\tau-1}} \left(1 - (\tau-2)\frac{w'^2}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma\right) \\
&\geq \frac{1}{w^{\tau-1}} \left(\frac{w'^2}{2} - (\tau-2)\frac{w'^2}{w^2}\right) \geq \frac{w'^2}{4w^{\tau-1}} \geq \frac{w'^2}{4w^2} \\
&\geq \frac{w'}{4w}
\end{aligned}$$
für ϑ nahe ϑ_{max}. Mit Integration folgt $\varphi(\vartheta) > C$ für ein $\vartheta < \vartheta_{max}$. Widerspruch. □

Lemma 4.3.6. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Gelte $n > 1$. Dann ist $\frac{w'}{w^3}$ beschränkt.*

Beweis. Wir verwenden $\Gamma \geq 0$. Angenommen $\frac{w'}{w^3}$ ist nicht beschränkt. Dann existiert $\vartheta \in [0, \vartheta_{max})$, so dass
$$\frac{\Gamma}{w^2} = 1 + (n-1)\left(\frac{1}{w^2} - \frac{w'\cos}{w^3\sin}\right)$$
negativ ist. Widerspruch. □

Lemma 4.3.7. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Gelte $n > 1$. Dann folgt*
$$\frac{w'\cos}{w^3\sin} \to \frac{1}{n-1},$$
beziehungsweise
$$\frac{w'}{w^3} \to \frac{\sin(\vartheta_{max})}{(n-1)\cos(\vartheta_{max})} = \frac{\tan(\vartheta_{max})}{n-1}$$
für $\vartheta \to \vartheta_{max}$.

Beweis. Definiere
$$\varphi := \frac{w'}{w^3}.$$
Damit gelten
$$\frac{\Gamma}{w^2} = 1 + (n-1)\left(\frac{1}{w^2} - \varphi\frac{\cos}{\sin}\right)$$
und
$$\begin{aligned}
\varphi' &= \frac{w''}{w^3} - 3\frac{w'^2}{w^4} = \frac{1}{w^2} - \frac{w'^2}{w^4} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\frac{\Gamma}{w^2} \\
&= \frac{1}{w^2} - \frac{w'^2}{w^4} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\left(1 + (n-1)\left(\frac{1}{w^2} - \varphi\frac{\cos}{\sin}\right)\right).
\end{aligned}$$

Angenommen es gilt $\varphi\frac{\cos}{\sin} \geq \frac{1}{n-1} + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann folgt für ϑ nahe ϑ_{max}

$$\begin{aligned}
\varphi' &\leq \frac{1}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\left(1 + (n-1)\left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{n-1} - \varepsilon\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\left(1 + (n-1)\left(-\frac{1}{n-1} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{w^2} - (n-1)\varepsilon\frac{w'^2}{2w^2} \\
&\leq -(n-1)\varepsilon\frac{w'^2}{4w^2}.
\end{aligned}$$

Somit kann die Ungleichung nahe ϑ_{max} nicht gelten. Sei nun angenommen, dass $\varphi\frac{\cos}{\sin} \leq \frac{1}{n-1} - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Dann erhalten wir für ϑ nahe ϑ_{max}

$$\varphi' \geq -\frac{w'^2}{w^4} + (n-1)\varepsilon\frac{w'^2}{2w^2} \geq (n-1)\varepsilon\frac{w'^2}{4w^2}.$$

Diese Ungleichung kann also nahe ϑ_{max} ebenfalls nicht gelten. Somit erhalten wir die gewüschte Konvergenz. □

Lemma 4.3.8. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2). *Dann ist Γ beschränkt, falls $n > 1$ gilt.*

Beweis. Nach Lemma 4.2.5 ist Γ für $\vartheta \to 0$ beschränkt, wir müssen also nur die Beschränktheit für $\vartheta \to \vartheta_{max}$ nachweisen. Es ist

$$\frac{\cos(\vartheta_{max})}{\sin(\vartheta_{max})} =: C_{max} \leq \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}$$

für $\vartheta \in (0, \vartheta_{max})$. Aus Lemma 4.3.7 erhalten wir $0 < C_1 < C_2$ mit

$$C_1 < \frac{w'}{w^3} < C_2$$

für ϑ nahe ϑ_{max}. Sei C mit

$$C > \frac{4C_2}{(n-1)C_{max}C_1^2}$$

beliebig und angenommen es gilt $\Gamma > C$. Wir berechnen, für ϑ nahe ϑ_{max},

$$\begin{aligned}
\Gamma' &= 2ww' - (n-1)\frac{\cos}{\sin}\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right) + (n-1)\left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w} \\
&= 2ww' - (n-1)\frac{\cos}{\sin}\left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)(1 + \Gamma) + (n-1)\left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w} \\
&\leq 2ww' - C(n-1)\frac{\cos}{\sin}\frac{w'^2}{w^2} + (n-1)\left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w} \\
&\leq 2C_2w^4 - \frac{C(n-1)\cos w'^2}{2\sin w^2} \\
&\leq 2C_2w^4 - \frac{C(n-1)\cos C_1^2 w^4}{2\sin} \\
&= \left(2C_2 - \frac{C(n-1)\cos C_1^2}{2\sin}\right)w^4 \\
&\leq \left(2C_2 - \frac{C(n-1)C_{max}C_1^2}{2}\right)w^4.
\end{aligned}$$

Nach Annahme an C und mit $w^4 \geq w^2 \geq \frac{w'}{C_2 w}$ kann $\Gamma > C$ nahe ϑ_{max}, durch Argumente wie oben, nicht gelten. Somit ist Γ nach oben beschränkt. Da wir bereits $\Gamma \geq 0$ gesehen haben, folgt die Aussage. □

Lemma 4.3.9. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Ist $n > 1$, so gilt $\Gamma \to 1$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$.*

Beweis. Wir schreiben $C_i : [0, \vartheta_{max}) \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ für Funktionen, die auf $[\vartheta_0, \vartheta_{max})$ mit $\vartheta_0 \in (0, \vartheta_{max})$ beschränkt sind. Mit dieser Notation berechnen wir

$$\begin{aligned}
\Gamma' &= 2ww' - (n-1)\left(\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right)\frac{\cos}{\sin} - \left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w}\right) \\
&= \frac{w'}{w}\left(2w^2 + (n-1)\left(\left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right) - \left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right)\frac{w\cos}{w'\sin}\right)\right) \\
&= \frac{w'}{w}\left(C_1 + 2w^2 - (n-1)\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right)\frac{w\cos}{w'\sin}\right) \\
&= \frac{w'}{w}\Bigg(C_1 + 2\left(\Gamma - (n-1)\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right)\right) \\
&\qquad - (n-1)\left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)(1+\Gamma)\frac{w\cos}{w'\sin}\Bigg) \\
&= \frac{w'}{w}\left(C_2 + 2(n-1)\frac{w'\cos}{w\sin} - (n-1)(1+\Gamma)\frac{w'\cos}{w\sin} + \frac{C_3 w}{w'}\right) \\
&= (n-1)\frac{w'^2\cos}{w^2\sin}(1-\Gamma) + \frac{C_2 w'}{w} + C_3.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass Γ nach Lemma 4.3.8 beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $\Gamma \geq 1 + \varepsilon$ erhalten wir

$$\Gamma' \leq -\varepsilon C \frac{w'^2}{w^2}$$

für ein $C > 0$ und nahe ϑ_{max}. Gilt $\Gamma \leq 1 - \varepsilon$, so erhalten wir

$$\Gamma' \geq \varepsilon C \frac{w'^2}{w^2}$$

für ein $C > 0$ nahe ϑ_{max}. Somit folgt $\Gamma \to 1$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$. □

Lemma 4.3.10. *Sei $\vartheta_{max} > 0$ und $w : [0, \vartheta_{max}) \to [0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (4.2)*. Falls $n > 1$ gilt, existiert ein $\vartheta_0 \in (0, \vartheta_{max})$, so dass $\frac{\Gamma' w}{w'}$ auf $[\vartheta_0, \vartheta_{max})$ beschränkt ist.*

Beweis. Wir verwenden die Notation und die Rechnungen aus dem Beweis von Lemma 4.3.9. Die Beschränktheit von $\frac{\Gamma' w}{w'}$, auf einem Intervall der angegebenen Form, ist äquivalent zu der Beschränktheit von

$$\varphi := (1 - \Gamma)\frac{w'}{w}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\varphi' &= (1-\Gamma)\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right) - \Gamma'\frac{w'}{w} \\
&= (1-\Gamma)(1+\Gamma)\left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right) - (n-1)\frac{w'^3\cos}{w^3\sin}(1-\Gamma) + \frac{C_2 w'^2}{w^2} + \frac{C_3 w'}{w} \\
&= -(n-1)\frac{w'^2\cos}{w^2\sin}\varphi + \frac{C_4 w'^2}{w^2} + \frac{C_3 w'}{w} + C_5 \\
&= \left(C_4 - (n-1)\frac{\cos}{\sin}\varphi\right)\frac{w'^2}{w^2} + \frac{C_3 w'}{w} + C_5 \\
&= \left(C_6 - (n-1)\frac{\cos}{\sin}\varphi\right)\frac{w'^2}{w^2}.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Beschränktheit von φ nahe ϑ_{max}. □

5. Die Zeitfunktion

In diesem Kapitel werden wir die Zeitfunktion einführen und ihre Ableitungen berechnen.

5.1. **Grundlegende Eigenschaften und Ableitungen der Zeitfunktion.**

Definition 5.1.1 (Zeitfunktion)**.** Sei $a > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein rotationssymmetrischer, graphischer, homothetischer Expandierer, so dass $X(\cdot, t)$ für alle $t > 0$ asymptotisch zu $\operatorname{graph}(\mathbb{R}^n \ni x \mapsto a|x|)$ ist. Wir definieren den Kegel

$$K := \{(\hat{x}, x_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > a|\hat{x}|\}$$

und die **Zeitfunktion** $T : K \to (0, \infty)$ durch $T(x) = t$ mit $x \in \operatorname{im}(X(\cdot, t))$.

Lemma 5.1.2. *Die Zeitfunktion ist wohldefiniert.*

Beweis. Wir verwenden die Notation aus Definition 5.1.1 und weisen nach, dass für jedes $x \in K$ genau ein $t > 0$ mit $x \in \operatorname{im}(X(\cdot, t))$ existiert. Sei $x \in K$ beliebig. Zunächst zur Existenz: Sei ϑ_{max} der Öffnungswinkel des Kegels und $w \in C^2([0, \vartheta_{max}))$ die ϑ-Parametrisierung von $X\left(\cdot, \frac{1}{2}\right)$. Sei $b : \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega' \to \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ wie in der Herleitung von Differentialgleichung (4.2) eine lokale Parametrisierung der Sphäre, die ohne Einschränkung den gewünschten Bereich der Sphäre parametrisiert. Dann erhalten wir aus Lemma 1.2.4

$$X(\vartheta, p, t) = w(\vartheta)\sqrt{2t} \begin{pmatrix} b(p)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Wähle $p \in \Omega'$, so dass

$$\frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} b(p)\sin(\vartheta(x)) \\ \cos(\vartheta(x)) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$t := \frac{|x|^2}{2w(\vartheta(x))^2} > 0$$

und erhalten die Existenz. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus der strengen Monotonie von $t \mapsto \sqrt{2t}$. □

Bemerkung 5.1.3. Wir werden nun stets annehmen, dass ein Kegel K der angegebenen Form und der asymptotische, homothetische Expandierer X fest gewählt sind und nur noch von der Zeitfunktion reden. Die Funktion w soll dabei die ϑ-Parametrisierung von $X\left(\cdot, \frac{1}{2}\right)$ sein. Durch die Rotationssymmetrie fassen wir die Zeitfunktion auch als Abbildung der Form

$$T : (0, \infty) \times [0, \vartheta_{max}) \to (0, \infty), \quad (r, \vartheta) \mapsto T(r, \vartheta)$$

auf.

Aus dem Existenzbeweis in Lemma 5.1.2 erhalten wir folgendes:

Korollar 5.1.4. *Die Zeitfunktion* $T : (0, \infty) \times [0, \vartheta_{max}) \to (0, \infty)$ *ist durch*

$$T(r, \vartheta) = \frac{r^2}{2w(\vartheta)^2}$$

gegeben.

Lemma 5.1.5. *Die Ableitungen der Zeitfunktion* $T : (0,\infty) \times [0, \vartheta_{max}) \to (0,\infty)$ *sind durch*

$$\begin{aligned} \partial_r T(r,\vartheta) &= \frac{2T(r,\vartheta)}{r} = \frac{r}{w(\vartheta)^2}, \\ \partial_r^2 T(r,\vartheta) &= \frac{2T(r,\vartheta)}{r^2} = \frac{1}{w(\vartheta)^2}, \\ \partial_\vartheta T(r,\vartheta) &= -\frac{r^2 w'(\vartheta)}{w(\vartheta)^3}, \\ \partial_\vartheta^2 T(r,\vartheta) &= r^2 \left(3\frac{w'(\vartheta)^2}{w(\vartheta)^4} - \frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)^3} \right) \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Direktes Nachrechnen mit der Formel aus Korollar 5.1.4. □

6. Barriereneigenschaft

In diesem Kapitel werden wir die nötigen Begriffe einführen und untersuchen, ob $F(\cdot) = -\log(T(\cdot))$ eine 2-logarithmisch homogene, α-selbstkonkordante Barrierenfunktion zum Kegel K ist.

6.1. Definition von F und die Barriereneigenschaft.

Definition 6.1.1. Sei $T : K \to (0,\infty)$ die Zeitfunktion auf dem Kegel K. Wir definieren $F : K \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := -\log(T(x)).$$

Wie bei der Zeitfunktion werden wir F auch als Funktion

$$F : (0,\infty) \times (0, \vartheta_{max}) \to \mathbb{R}, \quad (r,\vartheta) \mapsto -\log(T(r,\vartheta))$$

auffassen.

Die nachfolgenden Definitionen sind aus [3] entnommen. Sei $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hierfür stets offen und konvex.

Definition 6.1.2 (α-selbstkonkordante Barrierenfunktion)**.** Sei $\alpha > 0$ und $F : Q \to \mathbb{R}$. F heißt **α-selbstkonkordant**, falls F konvex ist, $F \in C^3(Q;\mathbb{R})$ und

$$\left| D^3F(x)\langle h,h,h\rangle \right| \le \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(D^2F(x)\langle h,h\rangle \right)^{\frac{3}{2}}$$

für alle $x \in Q$, $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ gelten. F heißt **stark selbstkonkordant**, falls F zusätzlich eine Barriere ist, also $F(x) \to \infty$ für $x \to \partial Q$ erfüllt ist. Hierbei ist der Grenzwert so zu verstehen, dass für jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset K$, die gegen ein $x \in \partial K$ konvergiert, $F(x_m) \to \infty$ für $m \to \infty$ gilt.

Bemerkung 6.1.3. In der konvexen Optimierung spielen 1-selbstkonkordante Barrierenfunktionen, die

$$|DF(x)\langle h\rangle|^2 \le C\, D^2F(x)\langle h,h\rangle$$

für alle $x \in K$, $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ und mit einem $C > 0$ erfüllen, eine wichtige Rolle.

Definition 6.1.4 (λ-logarithmische Homogenität)**.** Sei Q zusätzlich ein **regulärer Kegel**, also ein konvexer Kegel mit $\mathring{Q} \neq \emptyset$ und

$$x \in Q \quad \Longrightarrow \quad -x \notin Q.$$

Sei $\lambda > 0$. $F : Q \to \mathbb{R}$ ist **λ-logarithmisch homogen**, falls

$$F(cx) = F(x) - \lambda \log(c)$$

für alle $x \in Q$, $c > 0$ gilt.

Lemma 6.1.5. *$F : K \to \mathbb{R}$ ist 2-logarithmisch homogen. Insbesondere ist K ein regulärer Kegel.*

Beweis. Nach unserer Wahl des Kegels $K = \{(\hat{x}, x_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > a|\hat{x}|\}$, für ein $a > 0$, ist K regulär. Seien $c > 0$ und $x \in K$ beliebig. Nach Korollar 5.1.4 ist

$$F(cx) = -\log\left(\frac{c^2|x|^2}{2w(\vartheta(x))^2}\right) = -\log\left(\frac{|x|^2}{2w(\vartheta(x))^2}\right) - 2\log(c) = F(x) - 2\log(c).$$

□

6.2. **Konvexität von F.**

Bemerkung 6.2.1. Nun wollen wir zeigen, dass F konvex ist. Um die Rotationssymmetrie zu nutzen, führen wir die Ableitungen von F in kartesischen Koordinaten auf Ableitungen bezüglich r und ϑ zurück. Wir werden die Notation $\bar{x} = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ verwenden. Damit gilt $\vartheta(x) = \arccos \bar{x}_{n+1}$. Außerdem setzen wir für $x \neq 0$

$$\sigma(x) := \sqrt{1 - \frac{x_{n+1}^2}{|x|^2}} = \sqrt{1 - \bar{x}_{n+1}^2}.$$

Da $\bar{x}_{n+1} = \cos(\vartheta(x))$ gilt, erhalten wir $\sigma(x) = \sin(\vartheta(x))$ für $x \in K$. Wir werden auch $|x| = r(x) \equiv r$ schreiben.
Durch die Rotationssymmetrie ist die Differenzierbarkeit von F auf der e_{n+1}-Achse nicht klar. Wir definieren $\tilde{K} := \{x \in K : |x| \neq x_{n+1}\}$ und betrachten die Ableitungen von F zunächst auf $\tilde{K}$. Schließlich leiten wir die Differenzierbarkeit von F auf ganz K mit nachfolgendem Hebbarkeitssatz, den wir ohne Beweis aus [4] entnehmen, her.

Lemma 6.2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in \Omega$. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und f in $\Omega \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar mit $f' = g$ in $\Omega \setminus \{0\}$. Dann ist f in ganz Ω stetig differenzierbar und es gilt dort $f' = g$.*

Wir möchten zunächst die ersten beiden Ableitungen des Polarwinkels bestimmen.

Lemma 6.2.3. *Seien $x \in \tilde{K}$ und $h, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Dann gelten für $i, j = 1, ..., n+1$*

$$\begin{aligned}
\vartheta_i(x) &= \frac{\bar{x}_i\bar{x}_{n+1} - \delta_{i\,n+1}}{r\sigma}, \\
\sigma_j(x) &= \frac{\bar{x}_{n+1}^2\bar{x}_j - \bar{x}_{n+1}\delta_{j\,n+1}}{r\sigma}, \\
\vartheta_{ij}(x) &= \frac{\bar{x}_{n+1}\delta_{ij} + \bar{x}_i\delta_{j\,n+1} - 3\bar{x}_i\bar{x}_j\bar{x}_{n+1} + \bar{x}_j\delta_{i\,n+1}}{r^2\sigma} \\
&\quad + \frac{(\delta_{i\,n+1} - \bar{x}_i\bar{x}_{n+1})\left(\bar{x}_{n+1}^2\bar{x}_j - \bar{x}_{n+1}\delta_{j\,n+1}\right)}{r^2\sigma^3}, \\
\langle\nabla\vartheta(x), h\rangle &= \frac{\bar{x}_{n+1}\langle\bar{x}, h\rangle - h_{n+1}}{r\sigma}, \\
\langle\nabla\sigma(x), h\rangle &= \frac{\bar{x}_{n+1}^2\langle\bar{x}, h\rangle - \bar{x}_{n+1}h_{n+1}}{r\sigma}, \\
D^2\vartheta(x)\langle h, w\rangle &= \frac{\bar{x}_{n+1}\langle h, w\rangle + w_{n+1}\langle\bar{x}, h\rangle - 3\bar{x}_{n+1}\langle\bar{x}, h\rangle\langle\bar{x}, w\rangle + h_{n+1}\langle\bar{x}, w\rangle}{r^2\sigma} \\
&\quad + \frac{\left(h_{n+1} - \bar{x}_{n+1}\langle\bar{x}, h\rangle\right)\left(\bar{x}_{n+1}^2\langle\bar{x}, w\rangle - \bar{x}_{n+1}w_{n+1}\right)}{r^2\sigma^3}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir nutzen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\arccos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}$$

für $-1 < \varphi < 1$ und erhalten

$$\vartheta_i(x) = \partial_i \arccos \bar{x} = -\frac{\partial_i \frac{x_{n+1}}{|x|}}{\sqrt{1-\frac{x_{n+1}^2}{|x|^2}}} = -\frac{|x|\delta_{i\,n+1} - \frac{x_i x_{n+1}}{|x|}}{|x|^2\sigma} = \frac{\bar{x}_i\bar{x}_{n+1} - \delta_{i\,n+1}}{r\sigma}.$$

Des Weiteren ist

$$\sigma_j(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial_j \frac{x_{n+1}^2}{|x|^2}}{\sigma} = -\frac{2|x|^2 x_{n+1}\delta_{j\,n+1} - 2x_j x_{n+1}^2}{2|x|^4\sigma} = \frac{\bar{x}_{n+1}^2\bar{x}_j - \bar{x}_{n+1}\delta_{j\,n+1}}{r\sigma}$$

und damit

$$\begin{aligned}\vartheta_{ij}(x) &= \partial_j\left(\frac{x_i x_{n+1}}{|x|^3\sigma} - \frac{\delta_{i\,n+1}}{|x|\sigma}\right)\\ &= \frac{x_{n+1}\delta_{ij} + x_i\delta_{j\,n+1}}{|x|^3\sigma} - \frac{x_i x_{n+1}\left(3x_j|x|\sigma + |x|^3\sigma_j\right)}{|x|^6\sigma^2} + \frac{\delta_{i\,n+1}\left(\frac{x_j\sigma}{|x|} + |x|\sigma_j\right)}{|x|^2\sigma^2}\\ &= \frac{\bar{x}_{n+1}\delta_{ij} + \bar{x}_i\delta_{j\,n+1} - 3\bar{x}_i\bar{x}_j\bar{x}_{n+1} + \bar{x}_j\delta_{i\,n+1}}{r^2\sigma} + \frac{\left(\delta_{i\,n+1} - \bar{x}_i\bar{x}_{n+1}\right)\sigma_j}{r\sigma^2}.\end{aligned}$$

Mit der Formel für σ_j ergibt sich die behauptete Gleichheit. Die letzten drei Formeln folgen direkt durch Einsetzen in die schon hergeleiteten Gleichungen. □

Nun drücken wir die Ableitungen von T in kartesischen Koordinaten durch Ableitungen bezüglich r und ϑ aus.

Lemma 6.2.4. *Sei $x \in \tilde{K}$ beliebig. Dann gelten für $i, j = 1, ..., n+1$*

$$\begin{aligned}T_i(x) &= \partial_\vartheta T\vartheta_i + 2\frac{Tx_i}{r^2},\\ \partial_i\partial_\vartheta T(x) &= \partial_\vartheta^2 T\vartheta_i + 2\frac{\partial_\vartheta T x_i}{r^2},\\ T_{ij}(x) &= \partial_j\partial_\vartheta T\vartheta_i + \partial_\vartheta T\vartheta_{ij} + 2\frac{x_i T_j + T\delta_{ij}}{r^2} - 4\frac{Tx_ix_j}{r^4}.\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\langle\nabla T(x), h\rangle &= \partial_\vartheta T\langle\nabla\vartheta, h\rangle + 2\frac{T\langle\bar{x}, h\rangle}{r},\\ \langle\nabla\partial_\vartheta T(x), h\rangle &= \partial_\vartheta^2 T\langle\nabla\vartheta, h\rangle + 2\frac{\partial_\vartheta T\langle\bar{x}, h\rangle}{r},\\ D^2T(x)\langle h, w\rangle &= \langle\nabla\partial_\vartheta T, w\rangle\langle\nabla\vartheta, h\rangle + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle h, w\rangle\\ &\quad + 2\frac{\langle\nabla T, w\rangle\langle\bar{x}, h\rangle}{r} + 2\frac{T\langle h, w\rangle}{r^2} - 4\frac{T\langle\bar{x}, h\rangle\langle\bar{x}, w\rangle}{r^2},\end{aligned}$$

für beliebige $h, w \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Es ist

$$T_i(x) = \partial_\vartheta T\vartheta_i + \partial_r T r_i.$$

Wir verwenden

$$\partial_r T(x) = 2\frac{T(x)}{r}$$

aus Lemma 5.1.5 und $r_i = \frac{x_i}{r}$ um die angegebene Formel zu erhalten. Aus Lemma 5.1.5 folgt auch

$$\partial_r\partial_\vartheta T = 2\frac{\partial_\vartheta T}{r}.$$

Somit gilt

$$\partial_i \partial_\vartheta T(x) = \partial_\vartheta^2 T \vartheta_i + \partial_r \partial_\vartheta T r_i = \partial_\vartheta^2 T \vartheta_i + 2\frac{\partial_\vartheta T x_i}{r^2}.$$

Die dritte Gleichung folgt durch das Differenzieren der ersten Gleichung. Die letzten drei Gleichungen folgen direkt durch Einsetzen in die ersten drei Gleichungen. □

Bemerkung 6.2.5. Es ist anzumerken, dass $\partial_\vartheta T$ und $\partial_\vartheta^2 T$ aus Lemma 5.1.5 und ϑ_i, ϑ_{ij} aus Lemma 6.2.3 bekannt sind. Durch Lemma 6.2.4 sind die Ableitungen der Zeitfunktion in kartesischen Koordinaten also vollständig bestimmt. Außerdem ist zu beachten, dass im Allgemeinen $\partial_j \partial_\vartheta T \neq \partial_\vartheta T_j$ gilt, da ∂_ϑ und ∂_j nicht kommutieren.

Nun können wir die ersten beiden Ableitungen von F in kartesischen Koordinaten angeben.

Lemma 6.2.6. *Sei $x \in \tilde{K}$ beliebig. Dann gilt für $i, j = 1, ..., n+1$*

$$\begin{aligned}
F_i(x) &= -\frac{1}{T}\left(\partial_\vartheta T \vartheta_i + \frac{2T x_i}{r^2}\right), \\
F_{ij}(x) &= \frac{T_j}{T^2}\left(\partial_\vartheta T \vartheta_i + 2\frac{T x_i}{r^2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{T}\left(\partial_j \partial_\vartheta T \vartheta_i + \partial_\vartheta T \vartheta_{ij} + 2\frac{T_j x_i + T\delta_{ij}}{r^2} - 4\frac{T x_i x_j}{r^4}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\langle \nabla F(x), h\rangle &= -\frac{1}{T}\left(\partial_\vartheta T \langle \nabla\vartheta, h\rangle + 2\frac{T\langle \bar{x}, h\rangle}{r}\right), \\
D^2 F(x)\langle h, w\rangle &= \frac{\langle \nabla T, w\rangle}{T^2}\left(\partial_\vartheta T \langle \nabla\vartheta, h\rangle + 2\frac{T\langle \bar{x}, h\rangle}{r}\right) \\
&\quad - \frac{1}{T}\Big(\langle \nabla \partial_\vartheta T, w\rangle \langle \nabla\vartheta, h\rangle + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle h, w\rangle \\
&\quad + 2\frac{\langle \nabla T, w\rangle\langle \bar{x}, h\rangle}{r} + 2\frac{T\langle h, w\rangle}{r^2} - 4\frac{T\langle \bar{x}, h\rangle\langle \bar{x}, w\rangle}{r^2}\Big)
\end{aligned}$$

für beliebige $h, w \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Direktes Nachrechnen mit Kettenregel, Produktregel, den Formeln aus Lemma 6.2.4 und $F = -\log(T)$. □

Lemma 6.2.7. *Seien $x \in K$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt*

$$D^k F(x) = \frac{1}{|x|^k} D^k F\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

falls eine der beiden Ableitungen existiert.

Beweis. Wir verwenden Lemma 6.1.5. Sei $x_0 \in K$ zunächst beliebig. Setze $c = \frac{1}{|x_0|} \equiv$ *const.* in der 2-logarithmischen Homogenität. Dann folgt

$$\frac{1}{|x_0|^k} D^k F\left(\frac{x}{|x_0|}\right) = c^k D^k F(cx) = D^k\left(F(cx)\right) = D^k\left(F(x) - 2\log(c)\right) = D^k F(x).$$

Mit der Wahl $x_0 := x$ erhalten wir die Aussage. □

Bemerkung 6.2.8. Nach Lemma 6.2.7 sind die Konvexität von F und die α-Selbstkonkordanz unabhängig von $|x|$. Deshalb werden wir nur noch $x \in \mathbb{S}^n \cap K$ betrachten. Um die strikte Konvexität von F, also $D^2F(x)\langle y, y\rangle > 0$ für beliebige $x \in \mathbb{S}^n \cap K$, $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, nachzuweisen, werden wir y bezüglich einer, von x abhängigen, Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{n+1}$ darstellen. Hierfür testen wir die Ableitungen im nächsten Lemma zunächst mit den Basisvektoren.

Lemma 6.2.9. *Sei $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ beliebig und $x^\perp \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})$ mit $\langle x, x^\perp \rangle = 0$, $|x^\perp| = 1$ und $\langle x^\perp, e_{n+1} \rangle \geq 0$. Des Weiteren sei $h \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})^\perp$ mit $|h| = 1$ beliebig. Dann gelten mit unterdrücktem Argument $\vartheta(x)$*

$$\begin{aligned}
\langle \nabla F(x), x \rangle &= -2, \\
\langle \nabla F(x), x^\perp \rangle &= -2\frac{w'}{w}, \\
\langle \nabla F(x), h \rangle &= 0, \\
D^2F(x)\langle x, x \rangle &= 2, \\
D^2F(x)\langle x, x^\perp \rangle &= 2\frac{w'}{w}, \\
D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp \rangle &= 2\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right), \\
D^2F(x)\langle h, h \rangle &= 2\left(\frac{w' \cos}{w \sin} - 1\right), \\
D^2F(x)\langle x, h \rangle &= 0, \\
D^2F(x)\langle x^\perp, h \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Für die Rechnungen verwenden wir die Formeln aus den Lemmata 5.1.5, 6.2.3, 6.2.4 und 6.2.6, ohne an jeder Stelle explizit auf diese zu verweisen. Durch die Rotationssymmetrie von F können wir ohne Einschränkung

$$x = (\sin(\vartheta), 0, ..., 0, \cos(\vartheta))^{\mathrm{T}}$$

für ein $0 < \vartheta < \vartheta_{max}$ annehmen. Dann ist

$$x^\perp = (-\cos(\vartheta), 0, ..., 0, \sin(\vartheta))^{\mathrm{T}}.$$

Es gelten $\langle x, x \rangle = 1$ und

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\vartheta(x), x \rangle &= \frac{\langle x, x \rangle x_{n+1} - x_{n+1}}{\sigma} = \frac{x_{n+1} - x_{n+1}}{\sigma} = 0, \\
D^2\vartheta(x)\langle x, x \rangle &= \frac{x_{n+1} + x_{n+1} - 3x_{n+1} + x_{n+1}}{\sigma} + \frac{(x_{n+1} - x_{n+1})(x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2)}{\sigma^3} = 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\langle \nabla F(x), x \rangle = -\frac{2T}{T} = -2$$

und

$$\begin{aligned}
D^2F(x)\langle x, x \rangle = {} & \frac{\langle \nabla T, x \rangle}{T^2} \left(\partial_\vartheta T \langle \nabla\vartheta, x \rangle + 2T\langle x, x \rangle\right) - \frac{1}{T}\Big(\langle \nabla\partial_\vartheta T, x \rangle \langle \nabla\vartheta, x \rangle \\
& + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x, x \rangle + 2\langle \nabla T, x \rangle\langle x, x \rangle + 2T\langle x, x \rangle - 4T\langle x, x \rangle^2\Big) \\
= {} & 2\frac{\langle \nabla T, x \rangle}{T} - 2\frac{\langle \nabla T, x \rangle - T}{T} = 2.
\end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\vartheta(x), x^\perp \rangle &= -\frac{\sin}{\sigma} = -1, \\
D^2\vartheta(x)\langle x, x^\perp \rangle &= \frac{\sin}{\sigma} + \frac{0}{\sigma^3} = 1, \\
\langle \nabla T(x), x^\perp \rangle &= \partial_\vartheta T \langle \nabla\vartheta, x^\perp \rangle = -\partial_\vartheta T, \\
\frac{\partial_\vartheta T}{T} &= -2\frac{w'}{w}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\langle \nabla F(x), x^\perp \rangle = \frac{\partial_\vartheta T}{T} = -2\frac{w'}{w}$$

und

$$\begin{aligned}
D^2F(x)\langle x, x^\perp\rangle = {} & \frac{\langle \nabla T, x^\perp\rangle}{T^2}\left(\partial_\vartheta T\langle \nabla\vartheta, x\rangle + 2T\langle x, x\rangle\right) \\
& - \frac{1}{T}\Big(\langle \nabla\partial_\vartheta T, x^\perp\rangle\langle\nabla\vartheta, x\rangle + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x, x^\perp\rangle \\
& + 2\langle\nabla T, x^\perp\rangle\langle x, x\rangle + 2T\langle x, x^\perp\rangle - 4T\langle x, x\rangle\langle x, x^\perp\rangle\Big) \\
= {} & -2\frac{\partial_\vartheta T}{T} - \frac{\partial_\vartheta T - 2\partial_\vartheta T}{T} = -\frac{\partial_\vartheta T}{T} = 2\frac{w'}{w}.
\end{aligned}$$

Außerdem gelten

$$\begin{aligned}
D^2\vartheta(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle &= \frac{\cos}{\sin} - \frac{\cos\sin^2}{\sin^3} = 0, \\
\langle \nabla\partial_\vartheta T(x), x^\perp\rangle &= \partial_\vartheta^2 T\langle\nabla\vartheta, x^\perp\rangle = -\partial_\vartheta^2 T, \\
\frac{\partial_\vartheta^2 T}{T} &= 6\frac{w'^2}{w^2} - 2\frac{w''}{w}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle = {} & \frac{\langle \nabla T, x^\perp\rangle}{T^2}\big(\partial_\vartheta T\langle \nabla\vartheta, x^\perp\rangle + 2T\langle x, x^\perp\rangle\big) \\
& - \frac{1}{T}\Big(\langle \nabla\partial_\vartheta T, x^\perp\rangle\langle\nabla\vartheta, x^\perp\rangle + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x^\perp, x^\perp\rangle \\
& + 2\langle\nabla T, x^\perp\rangle\langle x, x^\perp\rangle + 2T\langle x^\perp, x^\perp\rangle - 4T\langle x, x^\perp\rangle\langle x, x^\perp\rangle\Big) \\
= {} & \frac{(\partial_\vartheta T)^2}{T^2} - \frac{\partial_\vartheta^2 T + 2T}{T} = 4\frac{w'^2}{w^2} - 6\frac{w'^2}{w^2} + 2\frac{w''}{w} - 2 \\
= {} & 2\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Für $h \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})^\perp$ mit $|h| = 1$ gelten

$$\begin{aligned}
h_{n+1} &= \langle h, e_{n+1}\rangle = 0, \\
\langle\nabla\vartheta(x), h\rangle &= 0, \\
D^2\vartheta(x)\langle h, h\rangle &= \frac{x_{n+1}}{\sigma} = \frac{\cos}{\sin}, \\
\langle \nabla T(x), h\rangle &= 0
\end{aligned}$$

und damit auch

$$\langle \nabla F(x), h\rangle = 0$$

und

$$\begin{aligned}
D^2F(x)\langle h, h\rangle = {} & \frac{\langle \nabla T, h\rangle}{T^2}\left(\partial_\vartheta T\langle \nabla\vartheta, h\rangle + 2T\langle x, h\rangle\right) \\
& - \frac{1}{T}\Big(\langle \nabla\partial_\vartheta T, h\rangle\langle\nabla\vartheta, h\rangle + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle h, h\rangle \\
& + 2\langle\nabla T, h\rangle\langle x, h\rangle + 2T\langle h, h\rangle - 4T\langle x, h\rangle\langle x, h\rangle\Big) \\
= {} & -\frac{\partial_\vartheta T\frac{\cos}{\sin} + 2T}{T} = 2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right).
\end{aligned}$$

Da für $h \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})^\perp$

$$D^2\vartheta(x)\langle x, h\rangle = 0$$

gilt, ist

$$\begin{aligned}D^2F(x)\langle x,h\rangle &= \frac{\langle \nabla T, h\rangle}{T^2}\left(\partial_\vartheta T\langle \nabla\vartheta, x\rangle + 2T\langle x,x\rangle\right)\\ &\quad - \frac{1}{T}\Big(\langle \nabla\partial_\vartheta T, h\rangle\langle\nabla\vartheta,x\rangle + \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x,h\rangle\\ &\quad + 2\langle\nabla T,h\rangle\langle x,x\rangle + 2T\langle x,h\rangle - 4T\langle x,x\rangle\langle x,h\rangle\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Da auch

$$\begin{aligned}\langle \nabla\partial_\vartheta T(x), h\rangle &= 0,\\ D^2\vartheta(x)\langle x^\perp, h\rangle &= 0\end{aligned}$$

gelten, folgt die letzte Gleichungen durch eine identische Rechnung. □

Nun möchten wir dieses Resultat auf $\mathbb{S}^n \cap K$ erweitern.

Lemma 6.2.10. *Es gilt $F \in C^3(K;\mathbb{R})$.*

Beweis. Sei u die r-Parametrisierung des Expandierers und $U(x) := u(|x|)$. Wir möchten zunächst nachweisen, dass $x \mapsto (x, U(x))^{\mathrm{T}}$ eine C^3-Einbettung ist, also $U \in C^3$ gilt.
Wir haben bereits $U \in C^2$ gesehen. Durch direktes Nachrechnen erhalten wir für $i,j = 1,...,n$

$$U_{ij} = u''\frac{x_ix_j}{r^2} + \frac{u'}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{r^2}\right).$$

Wir berechnen weiter für $k = 1,...,n$

$$\begin{aligned}U_{ijk} &= u'''\frac{x_ix_jx_k}{r^3} + u''\left(\frac{\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i}{r^2} - 2\frac{x_ix_jx_k}{r^4}\right)\\ &\quad + \left(\frac{u''x_k}{r^2} - \frac{u'x_k}{r^3}\right)\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{r^2}\right) - \frac{u'}{r}\left(\frac{\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i}{r^2} - 2\frac{x_ix_jx_k}{r^4}\right)\\ &= u'''\frac{x_ix_jx_k}{r^3} + \left(u'' - \frac{u'}{r}\right)\left(\frac{\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i + \delta_{ij}x_k}{r^2} - 3\frac{x_ix_jx_k}{r^4}\right).\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1.2 konvergiert der erste Term für $r \to 0$ gegen 0. Nach Lemma 3.1.1 konvergiert der zweite Term für $r \to 0$ gegen 0. Wir erhalten also $U_{ijk}(x) \to 0$ für $x \to 0$ und dadurch mit dem Hebbarkeitssatz 6.2.2 auch $U \in C^3$.
Sei nun $X : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to K$ der durch u parametrisierte zeitabhängige Expandierer. Dann ist $X(\cdot, \frac{1}{2})$ eine C^3-Einbettung. Somit ist DX zu jedem Zeitpunkt injektiv. Da außerdem $\langle \dot{X}, \nu\rangle = H > 0$ gilt, ist die Matrix $(DX, \dot{X})$ in jedem Punkt (x,t) invertierbar. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung ist X ein lokaler C^3-Diffeomorphismus. Da X bijektiv ist, ist X ein C^3-Diffeomorphismus. Sei π_t die Projektion auf die Zeitkomponente. Dann folgt

$$T = \pi_t \circ X^{-1} \in C^3,$$

da $\pi_t \in C^\infty$ gilt. Da $T > 0$ und $\log \in C^\infty((0,\infty))$ gelten, erhalten wir auch $F \in C^3$. □

Lemma 6.2.11. *Die Funktion $F : K \to \mathbb{R}$ ist strikt konvex.*

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ beliebig. Nach Bemerkung 6.2.8 reicht es $D^2F(x)\langle y,y\rangle > 0$ für $x \in \mathbb{S}^n \cap K$ nachzuweisen. Sei zunächst $x \neq e_{n+1}$, also $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ beliebig. Sei $x^\perp \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})$ mit $\langle x, x^\perp\rangle = 0$, $|x^\perp| = 1$ und $\langle x^\perp, e_{n+1}\rangle \geq 0$. Dann existieren $h \in \operatorname{span}(x,e_{n+1})^\perp \cap \mathbb{S}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$y = \lambda_1 x + \lambda_2 x^\perp + \lambda_3 h.$$

Mit der Bilinearität von $D^2F(x)\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Lemma 6.2.9 erhalten wir

$$\begin{aligned}D^2F(x)\langle y,y\rangle &= \lambda_1^2 D^2F(x)\langle x,x\rangle + 2\lambda_1\lambda_2 D^2F(x)\langle x,x^\perp\rangle + \lambda_2^2 D^2F(x)\langle x^\perp,x^\perp\rangle \\ &\quad + \lambda_3^2 D^2F(x)\langle h,h\rangle \\ &= 2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2\frac{w'}{w} + 2\lambda_2^2\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right) + 2\lambda_3^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right).\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3.1 ist

$$\lambda_3^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right) \geq 0.$$

Ist $\lambda_3 \neq 0$, so gilt sogar die strikte Ungleichung. Für die ersten drei Terme nutzen wir Lemma 4.3.2 und erhalten

$$\begin{aligned}2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2\frac{w'}{w} + 2\lambda_2^2\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right) &\geq 2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2\frac{w'}{w} + 2\lambda_2^2\frac{w'^2}{w^2} \\ &= 2\left(\lambda_1 + \lambda_2\frac{w'}{w}\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ist $\lambda_2 \neq 0$, so ist die Ungleichung im ersten Schritt strikt. Ist $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$, so ist die Ungleichung im letzten Schritt strikt. Insgesamt ist die Ungleichung also, ausser für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, eine strikte Ungleichung. Wir erhalten $D^2F(x)\langle y,y\rangle \geq 0$. Da $y \neq 0$ gilt, ist mindestens ein λ_i, $i = 1,2,3$ ungleich Null. Wir haben bereits gesehen, dass dann für einen der Summanden die strikte Ungleichung gilt.
Sei nun $x = e_{n+1}$. In diesem Fall verwenden wir die Lemmata 6.2.9 und 6.2.10 um

$$D^2F(x) = 2\cdot\operatorname{diag}\left(\frac{w''(0)}{w(0)} - 1, \frac{w''(0)}{w(0)} - 1, ..., \frac{w''(0)}{w(0)} - 1, 1\right)$$

zu erhalten. Mit Lemma 4.2.5 folgt die Aussage. □

Bemerkung 6.2.12. Mit ähnlichen Methoden erhalten wir nicht nur die Konvexität, sondern auch, dass wir die zweiten Ableitungen wie in Bemerkung 6.1.3 durch die ersten Ableitungen abschätzen können.

Theorem 6.2.13. *Seien $x \in K$ und $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Dann gilt*

$$|\langle\nabla F(x), y\rangle|^2 \leq 2D^2F(x)\langle y,y\rangle.$$

Beweis. Nach Lemma 6.2.7 können wir wieder $|x| = 1$ annehmen. Wir zerlegen y in

$$y = \lambda_1 x + \lambda_2 x^\perp + \lambda_3 h$$

wie in Lemma 6.2.11. Mit Lemma 6.2.9 erhalten wir

$$|\langle\nabla F(x), y\rangle|^2 = 4\left(\lambda_1 + \lambda_2\frac{w'}{w}\right)^2 = 4\left(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2\frac{w'}{w} + \lambda_2^2\frac{w'^2}{w^2}\right).$$

In dem Beweis von Lemma 6.2.11 haben wir bereits

$$D^2F(x)\langle y,y\rangle = 2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2\frac{w'}{w} + 2\lambda_2^2\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right) + 2\lambda_3^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right)$$

gesehen. Somit ist

$$2D^2F(x)\langle y,y\rangle - |\langle\nabla F(x), y\rangle|^2 = 4\lambda_2^2\left(\frac{w''}{w} - 2\frac{w'^2}{w^2} - 1\right) + 4\lambda_3^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right).$$

Mit den Lemmata 4.3.1 und 4.3.2 folgt also

$$2D^2F(x)\langle y,y\rangle - |\langle\nabla F(x), y\rangle|^2 \geq 0.$$

□

6.3. α**-Selbstkonkordanz.** Wir gehen wie bei der Konvexität vor. Wir berechnen zunächst die dritten Ableitungen von F auf $\tilde{K}$ und testen dann $D^3F(x)\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$ mit $x, x^\perp, h$ wie in Lemma 6.2.9.

Lemma 6.3.1. *Seien $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ und $h, w, p \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Dann gelten*

$$\begin{aligned}
D^2\sigma(x)\langle w,p\rangle = {} & \frac{1}{\sigma}\Big(x_{n+1}^2\langle w,p\rangle + 2\langle x,w\rangle x_{n+1}p_{n+1} + 2\langle x,p\rangle x_{n+1}w_{n+1} \\
& - w_{n+1}p_{n+1} - 4\langle x,w\rangle\langle x,p\rangle x_{n+1}^2\Big) \\
& - \frac{\langle\nabla\sigma,p\rangle(\langle x,w\rangle x_{n+1}^2 - x_{n+1}w_{n+1})}{\sigma^2}, \\
D^3\vartheta(x)\langle h,w,p\rangle = {} & \frac{1}{\sigma}\Big(\langle h,w\rangle p_{n+1} + \langle h,p\rangle w_{n+1} - 3x_{n+1}\langle h,w\rangle\langle x,p\rangle \\
& - 3\langle x,h\rangle\langle x,p\rangle w_{n+1} - 3\langle h,p\rangle\langle x,w\rangle x_{n+1} - 3\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle p_{n+1} \\
& - 3\langle x,h\rangle\langle w,p\rangle x_{n+1} + 15\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle\langle x,p\rangle x_{n+1} \\
& + h_{n+1}(\langle w,p\rangle - 3\langle x,w\rangle\langle x,p\rangle)\Big) \\
& - \frac{1}{\sigma^2}\Big(\langle h,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle x_{n+1} + \langle x,h\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle w_{n+1} \\
& + \langle h,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle x_{n+1} + \langle x,h\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle p_{n+1} \\
& + 3\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle x_{n+1} + 3\langle x,h\rangle\langle x,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle x_{n+1} \\
& + x_{n+1}\langle x,h\rangle D^2\sigma\langle w,p\rangle - 6\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle x_{n+1} \\
& - 6\langle x,h\rangle\langle x,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle x_{n+1} - h_{n+1}\big(D^2\sigma\langle w,p\rangle - \langle x,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle \\
& - \langle x,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle\big)\Big) + \frac{2\langle\nabla\sigma,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle}{\sigma^3}(\langle x,h\rangle x_{n+1} - h_{n+1}).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir differenzieren die Formel für σ_j aus Lemma 6.2.3 und erhalten

$$\begin{aligned}
\sigma_{jk}(x) = {} & \frac{\delta_{jk}x_{n+1}^2 + 2x_jx_{n+1}\delta_{k\,n+1} - 2x_kx_{n+1}\delta_{j\,n+1} - r^2\delta_{k\,n+1}\delta_{j\,n+1}}{r^4\sigma} \\
& - \frac{(x_jx_{n+1}^2 - r^2x_{n+1}\delta_{j\,n+1})(4r^2x_k\sigma + r^4\sigma_k)}{r^8\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Da $|x| = r = 1$ folgt die angegebene Gleichheit für $D^2\sigma(x)\langle w,p\rangle$ direkt durch Einsetzen. Nun differenzieren wir ϑ_{ij} aus Lemma 6.2.3

$$\begin{aligned}
\vartheta_{ijk}(x) = {} & \frac{\delta_{ij}\delta_{k\,n+1} + \delta_{ik}\delta_{j\,n+1}}{r^3\sigma} - \frac{(x_{n+1}\delta_{ij} + x_i\delta_{j\,n+1})(3rx_k\sigma + r^3\sigma_k)}{r^6\sigma^2} \\
& - \frac{(\delta_{ik}x_{n+1} + \delta_{k\,n+1}x_i)(3x_jr\sigma + r^3\sigma_j)}{r^6\sigma^2} \\
& - \frac{x_ix_{n+1}(3\delta_{jk}r\sigma + 3x_j(r\sigma_k + \bar{x}_k\sigma) + 3rx_k\sigma_j + r^3\sigma_{jk})}{r^6\sigma^2} \\
& + \frac{x_ix_{n+1}(3x_jr\sigma + r^3\sigma_j)(6r^4x_k\sigma^2 + 2r^6\sigma\sigma_k)}{r^{12}\sigma^4} \\
& + \frac{\delta_{i\,n+1}\left(\left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_jx_k}{r^3}\right)\sigma + \bar{x}_j\sigma_k + \bar{x}_k\sigma_j + r\sigma_{jk}\right)}{r^2\sigma^2} \\
& - \frac{\delta_{i\,n+1}(\bar{x}_j\sigma + r\sigma_j)(2x_k\sigma^2 + 2r^2\sigma\sigma_k)}{r^4\sigma^4}.
\end{aligned}$$

Wir nutzen $r = 1$ und gruppieren nach $\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}, \frac{1}{\sigma^3}$ um

$$\begin{aligned}\vartheta_{ijk}(x) = \frac{1}{\sigma}\Big(&\delta_{ij}\delta_{k\,n+1} + \delta_{ik}\delta_{j\,n+1} - 3x_{n+1}\delta_{ij}x_k - 3x_ix_k\delta_{j\,n+1} - 3x_{n+1}\delta_{ik}x_j \\ &- 3\delta_{k\,n+1}x_ix_j - 3x_ix_{n+1}\delta_{jk} - 3x_ix_jx_kx_{n+1} + 18x_ix_jx_kx_{n+1} + \delta_{i\,n+1}\delta_{jk} \\ &- \delta_{i\,n+1}x_jx_k - 2\delta_{i\,n+1}x_jx_k\Big) \\ &- \frac{1}{\sigma^2}\Big(x_{n+1}\delta_{ij}\sigma_k + x_i\delta_{j\,n+1}\sigma_k + \delta_{ik}x_{n+1}\sigma_j + \delta_{k\,n+1}x_i\sigma_j + 3x_ix_{n+1}x_j\sigma_k \\ &+ 3x_ix_{n+1}x_k\sigma_j + x_ix_{n+1}\sigma_{jk} - 6x_ix_{n+1}x_j\sigma_k - 6x_ix_{n+1}x_k\sigma_j \\ &- \delta_{i\,n+1}(x_j\sigma_k + x_k\sigma_j + \sigma_{jk}) + \delta_{i\,n+1}(2x_j\sigma_k + 2x_k\sigma_j)\Big) \\ &+ \frac{1}{\sigma^3}\Big(2x_ix_{n+1}\sigma_j\sigma_k - 2\delta_{i\,n+1}\sigma_j\sigma_k\Big)\end{aligned}$$

zu erhalten. Die angegebene Gleichheit folgt nun durch Einsetzen. □

Lemma 6.3.2. *Seien $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ und $h, w, p \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Dann gelten*

$$\begin{aligned}\partial_\vartheta^3 T(x) &= 9\frac{w''w'}{w^4} - \frac{w'''}{w^3} - 12\frac{w'^3}{w^5}, \\ \langle \nabla\partial_\vartheta^2 T(x), p\rangle &= \partial_\vartheta^3 T\langle \nabla\vartheta, p\rangle + 2\partial_\vartheta^2 T\langle x, p\rangle, \\ D^2\partial_\vartheta T(x)\langle w, p\rangle &= \langle \nabla\partial_\vartheta^2 T, p\rangle\langle\nabla\vartheta, w\rangle + \partial_\vartheta^2 T D^2\vartheta\langle w, p\rangle + 2\langle\nabla\partial_\vartheta T, p\rangle\langle x, w\rangle \\ &\quad + 2\partial_\vartheta T\langle w, p\rangle - 4\partial_\vartheta T\langle x, w\rangle\langle x, p\rangle, \\ D^3T(x)\langle h, w, p\rangle &= D^2\partial_\vartheta T\langle w, p\rangle\langle\nabla\vartheta, h\rangle + \langle\nabla\partial_\vartheta T, w\rangle D^2\vartheta\langle h, p\rangle \\ &\quad + \langle\nabla\partial_\vartheta T, p\rangle D^2\vartheta\langle h, w\rangle + \partial_\vartheta T D^3\vartheta\langle h, w, p\rangle + 2\big(\langle\nabla T, w\rangle\langle h, p\rangle \\ &\quad + D^2T\langle w, p\rangle\langle x, h\rangle + \langle\nabla T, p\rangle\langle h, w\rangle\big) - 4\big(\langle\nabla T, w\rangle\langle x, h\rangle\langle x, p\rangle \\ &\quad + T\langle x, p\rangle\langle h, w\rangle + \langle\nabla T, p\rangle\langle x, h\rangle\langle x, w\rangle + T\langle x, w\rangle\langle h, p\rangle \\ &\quad + T\langle x, h\rangle\langle w, p\rangle\big) + 16\,T\langle x, h\rangle\langle x, w\rangle\langle x, p\rangle.\end{aligned}$$

Beweis. Die Gleichheit für $\partial_\vartheta^3 T$ folgt mit $r = 1$ direkt durch Differenzieren von $\partial_\vartheta^2 T$ aus Lemma 5.1.5. Die zweite Gleichheit folgt durch

$$\partial_k\partial_\vartheta^2 T(x) = \partial_\vartheta^3 T\partial_k\vartheta + \partial_r\partial_\vartheta^2 T\partial_k r = \partial_\vartheta^3 T\partial_k\vartheta + 2\frac{\partial_\vartheta^2 T x_k}{r^2}$$

und $r = 1$. Für die letzten beiden Formeln differenzieren wir $\partial_i\partial_\vartheta T$ und T_{ij} aus Lemma 6.2.4

$$\begin{aligned}\partial_j\partial_i\partial_\vartheta T &= \partial_j\partial_\vartheta^2 T\vartheta_i + \partial_\vartheta^2 T\vartheta_{ij} + 2\frac{\partial_j\partial_\vartheta T x_i + \partial_\vartheta T\delta_{ij}}{r^2} - 4\frac{\partial_\vartheta T x_jx_k}{r^4}, \\ T_{ijk} &= \partial_k\partial_j\partial_\vartheta T\vartheta_i + \partial_j\partial_\vartheta T\vartheta_{ik} + \partial_k\partial_\vartheta T\vartheta_{ij} + \partial_\vartheta T\vartheta_{ijk} \\ &\quad + 2\frac{\delta_{ik}T_j + x_iT_{jk} + T_k\delta_{ij}}{r^2} - 4\frac{(x_iT_j + T\delta_{ij})x_k}{r^4} \\ &\quad - 4\frac{T_kx_ix_j + T(x_j\delta_{ik} + x_i\delta_{jk})}{r^4} + 16\frac{Tx_ix_jx_k}{r^6}\end{aligned}$$

und setzen ein. □

Lemma 6.3.3. *Seien $x \in \tilde{K}$ und $h, w, p \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Dann gilt*

$$\begin{aligned}D^3F(x)\langle h, w, p\rangle = &-\frac{D^3T\langle h, w, p\rangle}{T} + \frac{D^2T\langle h, w\rangle\langle\nabla T, p\rangle + D^2T\langle h, p\rangle\langle\nabla T, w\rangle}{T^2} \\ &+ \frac{D^2T\langle w, p\rangle\langle\nabla T, h\rangle}{T^2} - 2\frac{\langle\nabla T, h\rangle\langle\nabla T, w\rangle\langle\nabla T, p\rangle}{T^3}.\end{aligned}$$

Beweis. Durch mehrmaliges Differenzieren folgt

$$\begin{aligned} F_i(x) &= -\frac{T_i}{T}, \\ F_{ij}(x) &= \frac{T_i T_j}{T^2} - \frac{T_{ij}}{T}, \\ F_{ijk}(x) &= -\frac{T_{ijk}}{T} + \frac{T_{ij}T_k + T_{ik}T_j + T_{jk}T_i}{T^2} - 2\frac{T_i T_j T_k}{T^3} \end{aligned}$$

und damit durch Einsetzen die Aussage. □

Lemma 6.3.4. *Sei $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ beliebig und $x^\perp \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})$ mit $\langle x, x^\perp \rangle = 0$, $|x^\perp| = 1$ und $\langle x^\perp, e_{n+1} \rangle \geq 0$. Sei außerdem $h \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})^\perp$ mit $|h| = 1$ beliebig. Dann gelten*

$$\begin{aligned} D^3F(x)\langle x, x, x \rangle &= -4, \\ D^3F(x)\langle x, x^\perp, x^\perp \rangle &= 4\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} + 1\right), \\ D^3F(x)\langle x, x, x^\perp \rangle &= -4\frac{w'}{w}, \\ D^3F(x)\langle x, h, h \rangle &= 4\left(1 - \frac{w' \cos}{w \sin}\right), \\ D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp \rangle &= 2\left(3\frac{w''w'}{w^2} - \frac{w'''}{w} - 2\frac{w'^3}{w^3} + 2\frac{w'}{w}\right), \\ D^3F(x)\langle x^\perp, h, h \rangle &= 2\left(\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}\right)\frac{\cos}{\sin} + \left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w}\right), \\ D^3F(x)\langle x, x, h \rangle &= 0, \\ D^3F(x)\langle x, x^\perp, h \rangle &= 0, \\ D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, h \rangle &= 0, \\ D^3F(x)\langle h, h, h \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Wir werden die Resultate aus den Lemmata 5.1.5, 6.2.3, 6.2.4, 6.2.6, 6.3.1, 6.3.2 und 6.3.3 verwenden ohne an jeder Stelle einzeln darauf zu verweisen. Außerdem gehen die Rechnungen aus dem Beweis von Lemma 6.2.9 ein. Nach Rotation ist ohne Einschränkung $x = (\sin, 0, ..., 0, \cos)^{\mathrm{T}}$. Damit ist $x^\perp = (-\cos, 0, ..., 0, \sin)^{\mathrm{T}}$. Aus Lemma 6.1.5 folgt

$$D^3F(x)\langle x, x, x \rangle = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} F(tx)\Big|_{t=1} = -2\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} \log(t)\Big|_{t=1} = -4.$$

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla T(x), x\rangle &= 2T\langle x, x\rangle = 2T,\\
\langle \nabla T(x), x^\perp\rangle &= \partial_\vartheta T\langle \nabla\vartheta, x^\perp\rangle = -\partial_\vartheta T,\\
\langle \nabla \partial_\vartheta T(x), x^\perp\rangle &= \partial_\vartheta^2 T\langle \nabla\vartheta, x^\perp\rangle = -\partial_\vartheta^2 T,\\
D^2T(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle &= \langle \nabla\partial_\vartheta T(x), x^\perp\rangle\langle\nabla\vartheta, x^\perp\rangle + 2T\langle x^\perp, x^\perp\rangle = \partial_\vartheta^2 T + 2T,\\
D^2T(x)\langle x, x^\perp\rangle &= \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x, x^\perp\rangle + 2\langle \nabla T, x^\perp\rangle = -\partial_\vartheta T,\\
\langle \nabla\sigma(x), x^\perp\rangle &= -\frac{x_{n+1}x_1}{\sigma} = -x_{n+1},\\
D^2\vartheta(x)\langle x, x^\perp\rangle &= 1,\\
D^2\vartheta(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle &= 0,\\
D^3\vartheta(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle &= -2\frac{x_{n+1}}{\sigma} + \frac{2x_1x_{n+1} - x_{n+1}(D^2\sigma\langle x^\perp, x^\perp\rangle - D^2\sigma\langle x^\perp, x^\perp\rangle)}{\sigma^2}\\
&\quad + \frac{2x_{n+1}^3 - 2x_{n+1}^3}{\sigma^3} = -2\frac{x_{n+1}}{\sigma} + 2\frac{x_{n+1}}{\sigma}\\
&= 0,\\
D^3T(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle &= 2\langle\nabla\partial_\vartheta T, x^\perp\rangle + 2D^2T\langle x^\perp, x^\perp\rangle - 4T\\
&= -2\partial_\vartheta^2 T + 2\partial_\vartheta^2 T + 4T - 4T = 0
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
D^3F(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle &= \frac{D^2T\langle x^\perp, x^\perp\rangle\langle\nabla T, x\rangle + 2D^2T\langle x, x^\perp\rangle\langle\nabla T, x^\perp\rangle}{T^2}\\
&\quad - 2\frac{\langle\nabla T, x\rangle\langle\nabla T, x^\perp\rangle^2}{T^3}\\
&= \frac{2T(\partial_\vartheta^2 T + 2T) + 2(\partial_\vartheta T)^2}{T^2} - 4\frac{(\partial_\vartheta T)^2}{T^2}\\
&= 2\left(\frac{\partial_\vartheta^2 T}{T} - \frac{(\partial_\vartheta T)^2}{T^2} + 2\right).
\end{aligned}
$$

Da für $r = 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial_\vartheta T}{T} &= -2\frac{w'}{w},\\
\frac{\partial_\vartheta^2 T}{T} &= 6\frac{w'^2}{w^2} - 2\frac{w''}{w}
\end{aligned}
$$

gilt, erhalten wir

$$
D^3F(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle = 2\left(6\frac{w'^2}{w^2} - 2\frac{w''}{w} - 4\frac{w'^2}{w^2} + 2\right) = 4\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} + 1\right).
$$

Nun zur dritten Gleichheit. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla\sigma(x), x\rangle &= \frac{x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2}{\sigma} = 0,\\
D^3\vartheta(x)\langle x, x, x^\perp\rangle &= -2\frac{\sin}{\sigma} + \frac{x_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 + 3x_{n+1}^2 - x_{n+1}D^2\sigma\langle x, x^\perp\rangle - 6x_{n+1}^2}{\sigma^2}\\
&\quad + \frac{x_{n+1}D^2\sigma\langle x, x^\perp\rangle + x_{n+1}^2}{\sigma^2} + \frac{0}{\sigma^3} = -2,\\
D^2T(x)\langle x, x\rangle &= 2\langle\nabla T, x\rangle + 2T - 4T = 2T,\\
D^2\partial_\vartheta T(x)\langle x, x^\perp\rangle &= \partial_\vartheta^2 T + 2\langle\nabla\partial_\vartheta T, x^\perp\rangle = -\partial_\vartheta^2 T,\\
\langle\nabla\partial_\vartheta T(x), x\rangle &= 2\partial_\vartheta T,\\
D^3T(x)\langle x, x, x^\perp\rangle &= \langle\nabla\partial_\vartheta T, x\rangle - 2\partial_\vartheta T + 2D^2T\langle x, x^\perp\rangle\\
&\quad + 2\langle\nabla T, x^\perp\rangle - 4\langle\nabla T, x^\perp\rangle\\
&= 2\partial_\vartheta T - 2\partial_\vartheta T - 2\partial_\vartheta T - 2\partial_\vartheta T + 4\partial_\vartheta T\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

also ist

$$
\begin{aligned}
D^3F(x)\langle x, x, x^\perp\rangle &= \frac{D^2T\langle x, x\rangle\langle\nabla T, x^\perp\rangle + 2D^2T\langle x, x^\perp\rangle\langle\nabla T, x\rangle}{T^2}\\
&\quad - 2\frac{\langle\nabla T, x^\perp\rangle\langle\nabla T, x\rangle^2}{T^3}\\
&= -6\frac{T\partial_\vartheta T}{T^2} + 8\frac{T^2\partial_\vartheta T}{T^3} = 2\frac{\partial_\vartheta T}{T}\\
&= -4\frac{w'}{w}.
\end{aligned}
$$

Des Weiteren ist

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla\sigma(x), h\rangle &= 0,\\
D^2\vartheta(x)\langle x, h\rangle &= 0,\\
D^2\vartheta(x)\langle h, h\rangle &= \frac{x_{n+1}}{\sigma} = \frac{\cos}{\sin},\\
D^3\vartheta(x)\langle x, h, h\rangle &= -2\frac{x_{n+1}}{\sigma} + \frac{x_{n+1}D^2\sigma\langle h, h\rangle - x_{n+1}D^2\sigma\langle h, h\rangle}{\sigma^2} + \frac{0}{\sigma^3} = -2\frac{\cos}{\sin},\\
\langle\nabla T(x), h\rangle &= 0,\\
D^2T(x)\langle h, h\rangle &= \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle h, h\rangle + 2T = \partial_\vartheta T\frac{\cos}{\sin} + 2T,\\
D^3T(x)\langle x, h, h\rangle &= \partial_\vartheta T D^3\vartheta\langle x, h, h\rangle + 2D^2T\langle h, h\rangle - 4T\\
&= -2\partial_\vartheta T\frac{\cos}{\sin} + 2\partial_\vartheta T\frac{\cos}{\sin} = 0
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
D^3F(x)\langle x, h, h\rangle &= -\frac{D^3T\langle x, h, h\rangle}{T} + \frac{D^2T\langle h, h\rangle\langle\nabla T, x\rangle}{T^2}\\
&= 4 + 2\frac{\partial_\vartheta T\cos}{T\sin} = 4\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right).
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
D^2\sigma(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle &= \frac{\cos^2-\sin^2}{\sigma} - \frac{\cos^2\sin}{\sigma^2} = -\sin,\\
D^3\vartheta(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle &= 3\frac{\sin}{\sigma} + \frac{2\cos^2-\sin^2}{\sigma^2} - 2\frac{\sin\cos^2}{\sigma^3} = 2,\\
D^2\partial_\vartheta T(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle &= \langle \nabla\partial_\vartheta^2 T, x^\perp\rangle\langle\nabla\vartheta, x^\perp\rangle + 2\partial_\vartheta T = \partial_\vartheta^3 T + 2\partial_\vartheta T,\\
D^3 T(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle &= -D^2\partial_\vartheta T\langle x^\perp, x^\perp\rangle + 2\partial_\vartheta T + 4\langle\nabla T, x^\perp\rangle\\
&= -\partial_\vartheta^3 T - 4\partial_\vartheta T
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle &= -\frac{D^3T\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle}{T} + 3\frac{D^2T\langle x^\perp, x^\perp\rangle\langle\nabla T, x^\perp\rangle}{T^2}\\
&\quad - 2\frac{\langle\nabla T, x^\perp\rangle^3}{T^3}\\
&= \frac{\partial_\vartheta^3 T + 4\partial_\vartheta T}{T} - 3\frac{\partial_\vartheta T(\partial_\vartheta^2 T + 2T)}{T^2} + 2\frac{(\partial_\vartheta T)^3}{T^3}.
\end{aligned}$$

Da für $r = 1$

$$\frac{\partial_\vartheta^3 T}{T} = 18\frac{w''w'}{w^2} - 2\frac{w'''}{w} - 24\frac{w'^3}{w^3}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}
D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle &= 18\frac{w''w'}{w^2} - 2\frac{w'''}{w} - 24\frac{w'^3}{w^3} - 8\frac{w'}{w} + 6\frac{w'}{w}\left(6\frac{w'^2}{w^2} - 2\frac{w''}{w} + 2\right)\\
&\quad - 16\frac{w'^3}{w^3}\\
&= 2\left(3\frac{w''w'}{w^2} - \frac{w'''}{w} - 2\frac{w'^3}{w^3} + 2\frac{w'}{w}\right).
\end{aligned}$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
\langle\nabla\sigma(x), h\rangle &= 0,\\
D^2\vartheta(x)\langle x^\perp, h\rangle &= 0,\\
D^2\sigma(x)\langle h, h\rangle &= \frac{\cos^2}{\sigma} = \frac{\cos^2}{\sin},\\
D^3\vartheta(x)\langle x^\perp, h, h\rangle &= \frac{\sin}{\sigma} + \frac{\sin D^2\sigma\langle h,h\rangle}{\sigma^2} + \frac{0}{\sigma^3} = 1 + \frac{\cos^2}{\sin^2},\\
D^2\partial_\vartheta T(x)\langle h, h\rangle &= \partial_\vartheta^2 T D^2\vartheta\langle h, h\rangle + 2\partial_\vartheta T = \partial_\vartheta^2 T\frac{\cos}{\sin} + 2\partial_\vartheta T,\\
D^3T(x)\langle x^\perp, h, h\rangle &= -D^2\partial_\vartheta T\langle h, h\rangle + \partial_\vartheta T D^3\vartheta\langle x^\perp, h, h\rangle\\
&= \partial_\vartheta T\left(\frac{\cos^2}{\sin^2} - 1\right) - \partial_\vartheta^2 T\frac{\cos}{\sin}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D^3F(x)\langle x^\perp, h, h\rangle &= -\frac{D^3T\langle x^\perp, h, h\rangle}{T} + \frac{D^2T\langle h, h\rangle\langle\nabla T, x^\perp\rangle}{T^2}\\
&= \frac{\partial_\vartheta^2 T\cos}{T\sin} + \left(1 - \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{\partial_\vartheta T}{T} - \frac{(\partial_\vartheta T)^2\cos}{T^2\sin} - 2\frac{\partial_\vartheta T}{T}\\
&= 2\left(\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}\right)\frac{\cos}{\sin} + \left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w}\right).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla T(x), h\rangle &= 0,\\
D^2T(x)\langle x, h\rangle &= \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x, h\rangle = 0,\\
D^3\vartheta(x)\langle x, x, h\rangle &= \frac{0}{\sigma} + \frac{-x_{n+1}D^2\sigma\langle x, h\rangle + x_{n+1}D^2\sigma\langle x, h\rangle}{\sigma^2} + \frac{0}{\sigma^3} = 0,\\
D^3T(x)\langle x, x, h\rangle &= \partial_\vartheta T D^3\vartheta\langle x, x, h\rangle = 0,
\end{aligned}
$$

also folgt

$$D^3F(x)\langle x, x, h\rangle = 0.$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
D^2T(x)\langle x^\perp, h\rangle &= \partial_\vartheta T D^2\vartheta\langle x^\perp, h\rangle = 0,\\
D^3\vartheta(x)\langle x, x^\perp, h\rangle &= \frac{0}{\sigma} + \frac{-x_{n+1}D^2\sigma\langle x^\perp, h\rangle + x_{n+1}D^2\sigma\langle x^\perp, h\rangle}{\sigma^2} + \frac{0}{\sigma^3} = 0,\\
\langle \nabla\partial_\vartheta T(x), h\rangle &= 0,\\
D^3T(x)\langle x, x^\perp, h\rangle &= 0
\end{aligned}
$$

und mit den vorherigen Rechnungen

$$D^3F(x)\langle x, x^\perp, h\rangle = 0.$$

Außerdem gelten

$$
\begin{aligned}
D^2\sigma(x)\langle x^\perp, h\rangle &= 0,\\
D^3\vartheta(x)\langle x^\perp, x^\perp, h\rangle &= 0,\\
\langle \nabla\partial_\vartheta^2 T(x), h\rangle &= 0,\\
D^2\partial_\vartheta T\langle x^\perp, h\rangle &= 0,\\
D^3T(x)\langle x^\perp, x^\perp, h\rangle &= 0,
\end{aligned}
$$

also auch

$$D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, h\rangle = 0.$$

Die letzte Gleichheit folgt mit

$$D^3F(x)\langle h, h, h\rangle = -\frac{D^3T(x)\langle h, h, h\rangle}{T} = -\frac{\partial_\vartheta T D^3\vartheta(x)\langle h, h, h\rangle}{T} = 0.$$

□

Lemma 6.3.5. *Sei $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ beliebig und $x^\perp \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})$ mit $\langle x, x^\perp\rangle = 0$, $|x^\perp| = 1$ und $\langle x^\perp, e_{n+1}\rangle \geq 0$. Sei $y \in \operatorname{span}(x^\perp)^\perp$ beliebig. Dann gilt*

$$\left(D^3F(x)\langle y, y, y\rangle\right)^2 \leq 4\left(D^2F(x)\langle y, y\rangle\right)^3.$$

Beweis. Wir schreiben

$$y = \lambda_1 x + \lambda_2 h$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $h \in \operatorname{span}(x, x^\perp)^\perp$ mit $|h| = 1$. Ist $\lambda_1 = 0$, so folgt die Aussage aus den Lemmata 4.3.1, 6.2.9 und 6.3.4. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so können wir mit $\frac{1}{\lambda_1}$ reskalieren und damit ohne Einschränkung

$$y = x + \lambda h$$

mit $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ betrachten. Aus den Lemmata 6.2.9 und 6.3.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
D^2F(x)\langle y,y\rangle &= D^2F(x)\langle x,x\rangle + 2\lambda D^2F(x)\langle x,h\rangle + \lambda^2 D^2F(x)\langle h,h\rangle \\
&= 2 + 2\lambda^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right), \\
\left(D^2F(x)\langle y,y\rangle\right)^3 &= 8 + 24\lambda^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right) + 24\lambda^4\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right)^2 \\
&\quad + 8\lambda^6\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right)^3, \\
D^3F(x)\langle y,y,y\rangle &= D^3F(x)\langle x,x,x\rangle + 3\lambda D^3F(x)\langle x,x,h\rangle + 3\lambda^2 D^3F(x)\langle x,h,h\rangle \\
&\quad + \lambda^3 D^3F(x)\langle h,h,h\rangle \\
&= -4 - 12\lambda^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right), \\
\left(D^3F(x)\langle y,y,y\rangle\right)^2 &= 16 + 96\lambda^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right) + 144\lambda^4\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right)^2.
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$\tau := \left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right)$$

und berechnen

$$4\left(D^2F(x)\langle y,y\rangle\right)^3 - \left(D^3F(x)\langle y,y,y\rangle\right)^2 = 16\left(1 - 3\lambda^4\tau^2 + 2\lambda^6\tau^3\right) = 16p(\mu)$$

mit $\mu = \lambda^2\tau$ und $p(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$. Aus Lemma 4.3.1 folgt $\mu \geq 0$. Nun weisen wir nach, dass $p(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ gilt und erhalten daraus die Aussage. Es ist

$$p(x) = (2x+1)(x-1)^2.$$

Somit ist $x = 1$ die einzige positive Nullstelle von p und diese hat Vielfachheit 2. Da $p(0) = 1 > 0$ folgt $p \geq 0$ auf $[0,\infty)$. ☐

Lemma 6.3.6. *Sei $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ beliebig und $x^\perp \in \operatorname{span}(x, e_{n+1})$ mit $\langle x, x^\perp\rangle = 0$, $|x^\perp| = 1$ und $\langle x^\perp, e_{n+1}\rangle \geq 0$. Sei $n > 1$. Dann existiert eine, von x unabhängige, Konstante $C > 0$ mit*

$$\left(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2 \leq C\left(D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle\right)^3.$$

Beweis. Die rechte Seite ist für $x \in \mathbb{S}^n \cap \tilde{K}$ nach den Lemmata 4.2.5, 4.3.2 und 6.2.9 gleichmäßig durch ein $c > 0$ nach unten beschränkt. Somit erhalten wir die Aussage, durch die Stetigkeit beider Seiten, auf jeder kompakten Teilmenge des Kegels. Es genügt also die Beschränktheit von

$$\frac{\left(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2}{\left(D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle\right)^3}$$

für $\vartheta(x) \to \vartheta_{max}$ nachzuweisen. Wir verwenden wieder

$$\Gamma := w^2 + (n-1)\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right)$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
w''' &= \frac{1}{w}\left(2ww' + 4w'w'' + 2(ww' + w'w'')\Gamma + (w^2 + w'^2)\Gamma'\right) - \frac{w'w''}{w} \\
&= \frac{1}{w}\left(2ww' + 3w'w'' + 2(ww' + w'w'')\Gamma + (w^2 + w'^2)\Gamma'\right).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 6.3.4 folgt

$$D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle = -2\left(2\frac{w'^3}{w^3} + 2\left(\frac{w'}{w} + \frac{w'w''}{w^2}\right)\Gamma + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma'\right).$$

Des Weiteren erhalten wir aus Lemma 6.2.9

$$D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle = 2\left(\frac{w'^2}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma\right).$$

Da Γ nach Lemma 4.3.9 für $\vartheta \to \vartheta_{max}$ gegen 1 konvergiert, reicht es die Beschränktheit von

$$\frac{\left(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2 w^6}{w'^6}$$

nahe ϑ_{max} nachzuweisen. Mit der Youngschen Ungleichung erhalten wir, mit variierendem $c > 0$,

$$\begin{aligned}
\left(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2 &\le c\left(\frac{w'^6}{w^6} + \left(\frac{w'}{w} + \frac{w'w''}{w^2}\right)^2\Gamma^2 + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)^2\Gamma'^2\right) \\
&\le c\left(\frac{w'^6}{w^6} + \frac{w'^2}{w^2} + \frac{w'^2w''^2}{w^4} + \frac{w'^4}{w^4}\Gamma'^2\right) \\
&\le c\left(\frac{w'^6}{w^6} + \frac{w'^2w''^2}{w^4} + \frac{w'^4}{w^4}\Gamma'^2\right) \\
&=: I + II + III,
\end{aligned}$$

da Γ nach Lemma 4.3.8 beschränkt ist und $\frac{w'}{w} \ge 1$ nahe ϑ_{max} gilt. Die Beschränktheit von $I\frac{w^6}{w'^6}$ ist klar. Nahe ϑ_{max} gilt

$$II\frac{w^6}{w'^6} = \frac{w^2w''^2}{w'^4} = \frac{\left(w^2 + 2w'^2 + (w^2 + w'^2)\Gamma\right)^2}{w'^4} \le C$$

für ein $C > 0$, da Γ beschränkt ist und $\frac{w}{w'} \to 0$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$ nach Bemerkung 4.3.4 gilt. Außerdem gilt nach Lemma 4.3.10 nahe ϑ_{max}

$$III\frac{w^6}{w'^6} = \frac{w^2\Gamma'^2}{w'^2} \le C$$

für ein $C > 0$. Da alle Summanden nahe ϑ_{max} beschränkt sind, zeigt dies auch die Beschränktheit von

$$\frac{\left(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2}{\left(D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle\right)^3}$$

und damit die Aussage. □

Lemma 6.3.7. *Sei $n = 1$. Sei $x^\perp$ für $x \in \mathbb{S}^1 \cap \tilde{K}$ das Element von $\mathbb{S}^1$ mit $\langle x, x^\perp\rangle = 0$ und $\langle x^\perp, e_2\rangle \ge 0$. Dann ist*

$$\frac{\left(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2}{\left(D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle\right)^3}$$

nicht unabhängig von x beschränkt.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 6.3.6 erhalten wir

$$D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle = -2\left(2\frac{w'^3}{w^3} + 2\left(\frac{w'}{w} + \frac{w'w''}{w^2}\right)\Gamma + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma'\right)$$

und

$$D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle = 2\left(\frac{w'^2}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma\right).$$

Da für $n = 1$ gilt, dass $\Gamma = w^2$ und $\Gamma' = 2ww' \geq 0$, erhalten wir für ein $C > 0$

$$\big(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\big)^2 \geq w'^2 w''^2$$

und

$$\big(D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle\big)^3 \leq C w'^6$$

nahe ϑ_{max}. Da

$$\frac{w'^2 w''^2}{w'^6} = \frac{w''^2}{w'^4} \geq \frac{w'^4\Gamma^2}{w^2 w'^4} = \frac{\Gamma^2}{w^2} = w^2$$

unbeschränkt ist, folgt die Aussage. $\square$

Theorem 6.3.8. *Sei $x \in \mathbb{S}^n \cap K$ beliebig und $n \geq 2$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass*

$$\big(D^3F(x)\langle y, y, y\rangle\big)^2 \leq C\,\big(D^2F(x)\langle y, y\rangle\big)^3$$

für alle $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt.

Beweis. [1] Nach Lemma 6.2.11 ist $D^2F(x)\langle y, y\rangle > 0$ für $y \in \mathbb{S}^n$. Für eine kompakte Teilmenge $K_1 \subset \mathbb{S}^n \cap K$ erhalten wir also ein Konstante $c > 0$, so dass für $x \in K_1$ und $y \in \mathbb{S}^n$ auch $D^2F(x)\langle y, y\rangle > c$ gilt. Hierfür verwenden wir $F \in C^3$ aus Lemma 6.2.10. Somit reicht es die Beschränktheit von

$$\frac{\big(D^3F(x)\langle y, y, y\rangle\big)^2}{\big(D^2F(x)\langle y, y\rangle\big)^3}$$

für $\vartheta(x) \to \vartheta_{max}$ zu zeigen. Wir verwenden $x^\perp, h \in \mathbb{S}^n$ wie in Lemma 6.2.9 und stellen $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$y = \lambda_1 x + \lambda_2 h + \lambda_3 x^\perp$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ dar. Ist $\lambda_3 = 0$, so folgt die gewünschte Abschätzung aus Lemma 6.3.5. Wir können nach Division durch λ_3 also ohne Einschränkung

$$y = \lambda_1 x + \lambda_2 h + x^\perp =: z + x^\perp$$

annehmen. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\big(D^2F(x)\langle y, y\rangle\big)^3 &= \big(D^2F(x)\langle z, z\rangle + 2D^2F(x)\langle z, x^\perp\rangle + D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle\big)^3 \\
&=: (I + 2\,II + III)^3 \\
\big(D^3F(x)\langle y, y, y\rangle\big)^2 &\leq c \cdot \Big(\big(D^3F(x)\langle z, z, z\rangle\big)^2 + \big(D^3F(x)\langle z, z, x^\perp\rangle\big)^2 \\
&\quad + \big(D^3F(x)\langle z, x^\perp, x^\perp\rangle\big)^2 + \big(D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle\big)^2 \Big) \\
&=: c \cdot (I' + II' + III' + IV')
\end{aligned}$$

für ein $c > 0$. Wir weisen darauf hin, dass I', II', III' und IV' nicht als Ableitungen zu verstehen sind. Mit den Lemmata 6.2.9 und 6.3.4 berechnen wir für ϑ nahe ϑ_{max}

[1] Der Beweis entspricht nicht der ursprünglichen Version. Die Begründung für die Abschätzung $(I + 2II + III)^3 \gtrsim I^3 + III^3$ wurde überarbeitet.

mit positiven Konstanten $c_I, c_{III}, c_{II'}$ und $c_{III'}$

$$\begin{aligned}
I^3 &= 8\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right)\right)^3 \geq c_I \cdot \left(\lambda_1^6 + \lambda_2^6 \frac{w'^3}{w^3}\right),\\
II^3 &= 8\lambda_1^3 \frac{w'^3}{w^3},\\
III^3 &= 8\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right)^3 \geq c_{III} \cdot \frac{w'^6}{w^6},\\
II' &= \left(\lambda_1^2 D^3F(x)\langle x, x, x^\perp\rangle + 2\lambda_1\lambda_2 D^3F(x)\langle x, h, x^\perp\rangle + \lambda_2^2 D^3F(x)\langle h, h, x^\perp\rangle\right)^2\\
&= \left(\lambda_1^2 D^3F(x)\langle x, x, x^\perp\rangle + \lambda_2^2 D^3F(x)\langle h, h, x^\perp\rangle\right)^2\\
&\leq 2\left(\lambda_1^2 D^3F(x)\langle x, x, x^\perp\rangle\right)^2 + 2\left(\lambda_2^2 D^3F(x)\langle h, h, x^\perp\rangle\right)^2\\
&\leq c_{II'} \cdot \left(\lambda_1^4 \frac{w'^2}{w^2} + \lambda_2^4 \frac{w'^4}{w^4}\right),\\
III' &= \left(\lambda_1 D^3F(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle + \lambda_2 D^3F(x)\langle h, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2\\
&= \left(\lambda_1 D^3F(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle\right)^2 \leq c_{III'} \cdot \lambda_1^2 \frac{w'^4}{w^4}.
\end{aligned}$$

Wir wollen

$$(I + 2\,II + III)^3 \geq c(I^3 + III^3)$$

für ein $c > 0$ nachweisen. Wir verwenden $\gtrsim$ für eine Ungleichung bis auf positive Konstante. Es gilt (mit $\Gamma > c > 0$, da $\Gamma > 0$ und $\Gamma \to 1$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$ nach Lemma 4.3.9)

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 + II + \frac{III}{2} &= \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \frac{w'}{w} + \left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right)\\
&= \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \frac{w'}{w} + \frac{w'^2}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma\\
&\gtrsim \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \frac{w'}{w} + 2\frac{w'^2}{w^2}\\
&= \left(\lambda_1 + \frac{w'}{w}\right)^2 + \frac{w'^2}{w^2}\\
&\gtrsim \lambda_1^2 + \frac{w'^2}{w^2}.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt mit

$$\begin{aligned}
5\left(\lambda_1 + \frac{w'}{w}\right)^2 + 5\frac{w'^2}{w^2} - \lambda_1^2 - \frac{w'^2}{w^2} &= 4\lambda_1^2 + 10\lambda_1 \frac{w'}{w} + 9\frac{w'^2}{w^2}\\
&= \left(2\lambda_1 + 3\frac{w'}{w}\right)^2 - 2\lambda_1 \frac{w'}{w}\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Für $\lambda_1 \geq 0$ folgt die Ungleichung aus der ersten und für $\lambda_1 < 0$ aus der zweiten Zeile. Somit erhalten wir auch

$$\begin{aligned} I + 2II + III &= 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 \left(\frac{w' \cos}{w \sin} - 1 \right) + 2II + III \\ &\gtrsim 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 \left(\frac{w' \cos}{w \sin} - 1 \right) + 2\frac{w'^2}{w^2} \\ &= I + 2\frac{w'^2}{w^2} \\ &\gtrsim I + III, \end{aligned}$$

da

$$\frac{w'^2}{w^2} \gtrsim \frac{w'^2}{w^2} + \left(1 + \frac{w'^2}{w^2}\right)\Gamma \gtrsim III$$

nahe ϑ_{max} durch die Beschränktheit von Γ und $\frac{w'}{w} \to \infty$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$ aus der Differentialgleichung für w folgt. Nun erhalten wir mit der Monotonie und Konvexität von $0 \leq x \mapsto x^3$ die gewünschte Abschätzung

$$(I + 2II + III)^3 \gtrsim (I + III)^3 \gtrsim I^3 + III^3.$$

Somit genügt es die Beschränktheit von

$$\frac{I' + II' + III' + IV'}{I^3 + III^3}$$

nachzuweisen. Nach den Lemmata 6.3.5 und 6.3.6 kann I' in I^3 und IV' in III^3 absorbiert werden. Es reicht also die Beschränktheit von

$$\frac{II' + III'}{I^3 + III^3}$$

zu zeigen. Somit genügt es ein $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} 0 &\leq C\left(\lambda_1^6 + \lambda_2^6 \frac{w'^3}{w^3} + \frac{w'^6}{w^6}\right) - \left(\lambda_1^4 \frac{w'^2}{w^2} + \lambda_2^4 \frac{w'^4}{w^4} + \lambda_1^2 \frac{w'^4}{w^4}\right) \\ &= \left(C\lambda_1^6 + \frac{C}{2}\frac{w'^6}{w^6} - \lambda_1^4 \frac{w'^2}{w^2} - \lambda_1^2 \frac{w'^4}{w^4}\right) + \left(C\lambda_2^6 \frac{w'^3}{w^3} + \frac{C}{2}\frac{w'^6}{w^6} - \lambda_2^4 \frac{w'^4}{w^4}\right) \\ &=: I'' + II'' \end{aligned}$$

für ϑ nahe ϑ_{max} zu finden. Wir wenden die Youngsche Ungleichung mit den Konstanten 3 und $\frac{3}{2}$ auf die negativen Terme in I'' an und erhalten $I'' \geq 0$ für große C. Des Weiteren gilt

$$II'' = \frac{w'^3}{w^3}\left(C\lambda_2^6 + \frac{C}{2}\frac{w'^3}{w^3} - \lambda_2^4 \frac{w'}{w}\right).$$

Wir wenden die Youngsche Ungleichung mit den selben Konstanten auf den negativen Term in der Klammer an und erhalten $II'' \geq 0$ für große C, da $\frac{w'^3}{w^3}$ positiv ist. Damit folgt die Aussage. $\square$

6.4. **Starke Selbstkonkordanz.**

Lemma 6.4.1. *Die Funktion $F : K \to \mathbb{R}$ ist eine Barriere. Es gilt also*

$$F(x) \to \infty \quad \textit{für} \quad x \to \partial K.$$

Beweis. Sei $x \in \partial K$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Da nach Definition $F(x_n) = -\log(T(x_n))$ gilt, reicht es $T(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$ zu zeigen. Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Sei zunächst $x = 0$. Dann gilt $|x_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Da nach Lemma 4.2.6 $w' \geq 0$, also $w(\vartheta(x_n)) \geq w(0) > 0$ gilt, erhalten wir mit Korollar 5.1.4

$$0 \leq T(x_n) = \frac{|x_n|^2}{2w(\vartheta(x_n))^2} \leq \frac{|x_n|^2}{2w(0)} \to 0$$

für $n \to \infty$.
Sei nun $x \neq 0$. Dann gilt $\vartheta(x_n) \to \vartheta(x) = \vartheta_{max}$ für $n \to \infty$. Außerdem ist $|x_n| \leq C$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und geeignetes $C > 0$. Da der durch w parametrisierte Expandierer asymptotisch an den Kegel K ist, gilt $w(\vartheta) \to \infty$ für $\vartheta \to \vartheta_{max}$. Damit folgt

$$0 \leq T(x_n) = \frac{|x_n|^2}{2w(\vartheta(x_n))^2} \leq \frac{C}{2w(\vartheta(x_n))^2} \to 0$$

für $n \to \infty$. In beiden Fällen gilt $T(x_n) \to 0$, also $F(x_n) \to \infty$ für $n \to \infty$. $\square$

Anhang A. Wichtige Formeln

Hier wollen wir einige Formeln, auf die häufig verwiesen wird, angeben um das Lesen der Arbeit zu erleichtern.

Ableitungen Polarwinkel und σ:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_i(x) &= \frac{x_i x_{n+1} - r^2\delta_{i\,n+1}}{r^3\sigma},\\
\vartheta_{ij}(x) &= \frac{x_{n+1}\delta_{ij} + x_i\delta_{j\,n+1}}{r^3\sigma} - \frac{x_i x_{n+1}\left(3x_j r\sigma + r^3\sigma_j\right)}{r^6\sigma^2} + \frac{\delta_{i\,n+1}\left(\frac{x_j\sigma}{r} + r\sigma_j\right)}{r^2\sigma^2},\\
\sigma_j(x) &= \frac{x_j x_{n+1}^2}{r^4\sigma} - \frac{x_{n+1}\delta_{j\,n+1}}{r^2\sigma}
\end{aligned}
$$

und für $x \in \mathbb{S}^n \cap K,\ h, w, p \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
D^2\sigma(x)\langle w,p\rangle &= \frac{1}{\sigma}\Big(x_{n+1}^2\langle w,p\rangle + 2\langle x,w\rangle x_{n+1}p_{n+1} + 2\langle x,p\rangle x_{n+1}w_{n+1}\\
&\quad - w_{n+1}p_{n+1} - 4\langle x,w\rangle\langle x,p\rangle x_{n+1}^2\Big)\\
&\quad - \frac{\langle\nabla\sigma,p\rangle(\langle x,w\rangle x_{n+1}^2 - x_{n+1}w_{n+1})}{\sigma^2},\\
D^3\vartheta(x)\langle h,w,p\rangle &= \frac{1}{\sigma}\Big(\langle h,w\rangle p_{n+1} + \langle h,p\rangle w_{n+1} - 3x_{n+1}\langle h,w\rangle\langle x,p\rangle\\
&\quad - 3\langle x,h\rangle\langle x,p\rangle w_{n+1} - 3\langle h,p\rangle\langle x,w\rangle x_{n+1} - 3\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle p_{n+1}\\
&\quad - 3\langle x,h\rangle\langle w,p\rangle x_{n+1} + 15\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle\langle x,p\rangle x_{n+1}\\
&\quad + h_{n+1}(\langle w,p\rangle - 3\langle x,w\rangle\langle x,p\rangle)\Big)\\
&\quad - \frac{1}{\sigma^2}\Big(\langle h,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle x_{n+1} + \langle x,h\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle w_{n+1}\\
&\quad + \langle h,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle x_{n+1} + \langle x,h\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle p_{n+1}\\
&\quad + 3\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle x_{n+1} + 3\langle x,h\rangle\langle x,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle x_{n+1}\\
&\quad + x_{n+1}\langle x,h\rangle D^2\sigma\langle w,p\rangle - 6\langle x,h\rangle\langle x,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle x_{n+1}\\
&\quad - 6\langle x,h\rangle\langle x,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle x_{n+1} - h_{n+1}\big(D^2\sigma\langle w,p\rangle - \langle x,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle\\
&\quad - \langle x,p\rangle\langle\nabla\sigma,w\rangle\big)\Big) + \frac{2\langle\nabla\sigma,w\rangle\langle\nabla\sigma,p\rangle}{\sigma^3}(\langle x,h\rangle x_{n+1} - h_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Ableitungen T:

$$
\begin{aligned}
T_i(x) &= \partial_\vartheta T\vartheta_i + 2\frac{Tx_i}{r^2},\\
\partial_i\partial_\vartheta T(x) &= \partial_\vartheta^2 T\vartheta_i + 2\frac{\partial_\vartheta T x_i}{r^2},\\
T_{ij}(x) &= \partial_j\partial_\vartheta T\vartheta_i + \partial_\vartheta T\vartheta_{ij} + 2\frac{x_iT_j + T\delta_{ij}}{r^2} - 4\frac{Tx_ix_j}{r^4}
\end{aligned}
$$

und für $x \in \mathbb{S}^n \cap K,\ h, w, p \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla \partial_\vartheta^2 T(x), p\rangle &= \partial_\vartheta^3 T \langle \nabla\vartheta, p\rangle + 2\partial_\vartheta^2 T\langle x, p\rangle,\\
D^2\partial_\vartheta T(x)\langle w, p\rangle &= \langle \nabla\partial_\vartheta^2 T, p\rangle\langle\nabla\vartheta, w\rangle + \partial_\vartheta^2 T D^2\vartheta\langle w, p\rangle + 2\langle\nabla\partial_\vartheta T, p\rangle\langle x, w\rangle\\
&\quad + 2\partial_\vartheta T\langle w, p\rangle - 4\partial_\vartheta T\langle x, w\rangle\langle x, p\rangle,\\
D^3 T(x)\langle h, w, p\rangle &= D^2\partial_\vartheta T\langle w, p\rangle\langle\nabla\vartheta, h\rangle + \langle\nabla\partial_\vartheta T, w\rangle D^2\vartheta\langle h, p\rangle\\
&\quad + \langle\nabla\partial_\vartheta T, p\rangle D^2\vartheta\langle h, w\rangle + \partial_\vartheta T D^3\vartheta\langle h, w, p\rangle + 2\big(\langle\nabla T, w\rangle\langle h, p\rangle\\
&\quad + D^2 T\langle w, p\rangle\langle x, h\rangle + \langle\nabla T, p\rangle\langle h, w\rangle\big) - 4\big(\langle\nabla T, w\rangle\langle x, h\rangle\langle x, p\rangle\\
&\quad + T\langle x, p\rangle\langle h, w\rangle + \langle\nabla T, p\rangle\langle x, h\rangle\langle x, w\rangle + T\langle x, w\rangle\langle h, p\rangle\\
&\quad + T\langle x, h\rangle\langle w, p\rangle\big) + 16\, T\langle x, h\rangle\langle x, w\rangle\langle x, p\rangle.
\end{aligned}
$$

Quotienten von partiellen Ableitungen und T:

Für $x \in \mathbb{S}^n \cap K$ gelten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial_\vartheta T}{T} &= -2\frac{w'}{w},\\
\frac{\partial_\vartheta^2 T}{T} &= 6\frac{w'^2}{w^2} - 2\frac{w''}{w},\\
\frac{\partial_\vartheta^3 T}{T} &= 18\frac{w''w'}{w^2} - 2\frac{w'''}{w} - 24\frac{w'^3}{w^3}.
\end{aligned}
$$

Ableitungen F:

Für $x \in \mathbb{S}^n \cap K$ gelten:

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla F(x), x\rangle &= -2,\\
\langle\nabla F(x), x^\perp\rangle &= -2\frac{w'}{w},\\
\langle\nabla F(x), h\rangle &= 0,\\
D^2F(x)\langle x, x\rangle &= 2,\\
D^2F(x)\langle x, x^\perp\rangle &= 2\frac{w'}{w},\\
D^2F(x)\langle x^\perp, x^\perp\rangle &= 2\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1\right),\\
D^2F(x)\langle h, h\rangle &= 2\left(\frac{w'\cos}{w\sin} - 1\right),\\
D^2F(x)\langle x, h\rangle &= 0,\\
D^2F(x)\langle x^\perp, h\rangle &= 0,
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
F_{ijk}(x) &= -\frac{T_{ijk}}{T} + \frac{T_{ij}T_k + T_{ik}T_j + T_{jk}T_i}{T^2} - 2\frac{T_iT_jT_k}{T^3}, \\
D^3F(x)\langle x, x, x\rangle &= -4, \\
D^3F(x)\langle x, x^\perp, x^\perp\rangle &= 4\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} + 1\right), \\
D^3F(x)\langle x, x, x^\perp\rangle &= -4\frac{w'}{w}, \\
D^3F(x)\langle x, h, h\rangle &= 4\left(1 - \frac{w'\cos}{w\sin}\right), \\
D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, x^\perp\rangle &= 2\left(3\frac{w''w'}{w^2} - \frac{w'''}{w} - 2\frac{w'^3}{w^3} + 2\frac{w'}{w}\right), \\
D^3F(x)\langle x^\perp, h, h\rangle &= 2\left(\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}\right)\frac{\cos}{\sin} + \left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2}\right)\frac{w'}{w}\right), \\
D^3F(x)\langle x, x, h\rangle &= 0, \\
D^3F(x)\langle x, x^\perp, h\rangle &= 0, \\
D^3F(x)\langle x^\perp, x^\perp, h\rangle &= 0, \\
D^3F(x)\langle h, h, h\rangle &= 0.
\end{aligned}
$$

Anhang B. 1-homogene Krümmungsfunktionen

In diesem Abschnitt möchten wir andeuten, wie einige Resultate auf Expandierer anderer Krümmungsfunktionen erweitert werden können.

Sei $\tilde{F}$ eine 1-homogene Krümmungsfunktion und $X : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein graphischer Expandierer mit Normalengeschwindigkeit $\tilde{F}$. Des Weiteren sei X zu jeder positiven Zeit rotationssymmetrisch zur x_{n+1}-Achse und asymptotisch an einen (zeitunabhängigen) Kegel der Form

$$K = \{(\hat{x}, x_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > a|\hat{x}|\}.$$

Wir wollen außerdem annehmen, dass wir X bezüglichen dem Polarwinkel parametrisieren können. Sei w wieder die ϑ-Parametrisierung des Expandierers.
In Lemma 1.2.4 haben wir nur die 1-Homogenität der mittleren Krümmung verwendet, das Skalierungsverhalten des Expandierers bleibt also unverändert. Somit können wir die Zeitfunktion auch in diesem Fall durch

$$T(r, \vartheta) = \frac{r^2}{2w^2(\vartheta)}$$

berechnen. Hiermit können auch die Ableitungsberechnungen für F aus dieser Arbeit übernommen werden. Für den Beweis von Theorem 6.2.13 benötigen wir ausschließlich die beiden Ungleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{w''}{w} - 2\frac{w'^2}{w^2} &\geq 1, \\
\frac{w'\cos}{w\sin} &\geq 1.
\end{aligned}
$$

Die Ungleichungen sind sogar äquivalent zu der Behauptung in Theorem 6.2.13. Für Lemma 6.3.5 benötigen wir nur die zweite Ungleichung. Diese Eigenschaften können also durch nur zwei Ungleichungen für die ϑ-Parametrisierung nachgewiesen werden. Das Vorgehen zum Beweis der α-Selbstkonkordanz kann nicht direkt übernommen werden, da wir die konkrete Gestalt von w''' in Abhängigkeit der niedrigeren Ableitungen verwenden.

Anhang C. Offene Problemstellung

Für die konvexe Optimierung wäre die 1-Selbstkonkordanz von F wünschenswert. In Lemma 6.3.5 haben wir die geforderte Abschätzung bereits für beliebige $x \in K$ und Testvektoren y aus einem, von x abhängigen, n-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ gesehen. Ob die 1-Selbstkonkordanz auch für beliebige $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt, ist noch offen. Dies ist dem Vorgehen in Lemma 6.3.6 und Theorem 6.3.8 geschuldet. Wir reduzieren die Aussage auf ein Beschränkheitsargument nahe ∂K, wodurch wir weniger scharfe Abschätzungen für Lösungen der Differentialgleichung (4.2) benötigen, jedoch auch jegliche Kontrolle über die Konstante α verlieren. Nun müsste, siehe Lemmata 6.2.9 und 6.3.4,

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^2 \leq 4\, \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^3$$

mit

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= 2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 \frac{w'}{w} + 2\lambda_2^2 \left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2} - 1 \right) + 2\lambda_3^2 \left(\frac{w' \cos}{w \sin} - 1 \right), \\
\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= -4\lambda_1^3 + 12\lambda_1\lambda_2^2 \left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} + 1 \right) - 12\lambda_1^2\lambda_2 \frac{w'}{w} \\
&\quad + 12\lambda_1\lambda_3^2 \left(1 - \frac{w' \cos}{w \sin} \right) + 2\lambda_2^3 \left(3\frac{w''w'}{w^2} - \frac{w'''}{w} - 2\frac{w'^3}{w^3} + 2\frac{w'}{w} \right) \\
&\quad + 6\lambda_2\lambda_3^2 \left(\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w} \right) \frac{\cos}{\sin} + \left(1 + \frac{\cos^2}{\sin^2} \right) \frac{w'}{w} \right)
\end{aligned}$$

für Lösungen w der Differentialgleichung (4.2)

$$w'' = \frac{w^2 + 2w'^2 + (w^2 + w'^2)\left(w^2 + (n-1)\left(1 - \frac{w' \cos}{w \sin} \right) \right)}{w}$$

nachgewiesen oder widerlegt werden. Nach Reskalierung beider Seiten ist dies äquivalent zu

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{S}^2 : \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^2 \leq 4\, \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^3.$$

Eine numerische Untersuchung dieser Bedingung für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{S}^2$ und $\vartheta \in [0, \vartheta_{max})$ erscheint gut durchführbar.

Literatur

[1] Jonas Blessing. **Translatierende und homothetisch expandierene Lösungen des mittleren Krümmungsflusses**. Bachelorarbeit. 2017.

[2] Oliver C. Schnürer und Felix Schulze. "Self-similarly expanding networks to curve shortening flow". In: **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)** 6.4 (2007), pp. 511–528.

[3] Osman Güler. "Barrier Functions in Interior Point Methods". In: **Mathematics of Operations Research** 21.4 (1996).

[4] Oliver C. Schnürer. **Analysis II**. Skript zur Vorlesung. 2016.

[5] Oliver C. Schnürer. **Differentialgeometrie I**. Skript zur Vorlesung. 2021.

[6] Oliver C. Schnürer. **Geometric ODEs**. Skript zur Vorlesung. 2021.