ANALYSIS I

OLIVER C. SCHNÜRER

Inhaltsverzeichnis

Date: 27. Januar 2025.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 26-01.
In Konstanz in den Wintersemestern 2014/15, 2019/2020 und 2024/25 benutzt.
Vielen Dank an Olaf Schnürer für Korrekturen.

0. Vorbemerkungen

0.1. Warum betreibt man Mathematik?
Nach `http://www.maths.monash.edu.au/` .

- Die Welt um uns verstehen (Bewegung der Sterne, Sonnenprotuberanzen, schwarze Löcher, Wasserwellen, Windhose, Buschbrände)
- Systeme modellieren und verbessern (Verkehrsleitsysteme, Logistik für Containerschiffe, Börse, Produktion, Medizin)
- Die Schönheit in der Natur untersuchen (Seifenblasen, Symmetrien in Sonnenblumen oder geometrischen Mustern, Fraktale, Wassertropfen)
- Mathematik kann, darf und soll man ebenso als Kulturtechnik betreiben, weil sie einen auch ohne konkrete Anwendung fasziniert; so, wie andere einen Berg deshalb besteigen, weil es ihn gibt (Mt. Everest), oder, um sich daran zu erfreuen, ein Buch lesen, Musik hören oder selbst musizieren.

0.2. **Analysis in der Mathematik.** Analysis ist eine Grundvorlesung, deren Inhalte beinahe überall in der Mathematik wieder auftauchen werden, und daher ein guter Einstieg in die Mathematik.

0.3. **Zur Mathematik hinter den Umschlagbildern.**

Seifenhäute. Seifenhäute bilden sich so, dass ihre mittlere Krümmung H proportional zur Druckdifferenz zwischen den benachbarten Kammern ist. Mehrere Seifenhäute treffen sich nur in Konfigurationen mit einem ganz speziellen asymptotischen Verhalten: Drei Seifenhäute mit 120°-Winkeln entlang einer Geraden oder sechs Seifenhäute in einem Punkt in einer Konfiguration mit Tetraedersymmetrie. Ist u eine Funktion, deren Graph vorgeschriebene mittlere Krümmung f hat, so gilt die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$H = g^{ij}h_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\frac{\partial u}{\partial x^i}(x)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)\right)^2}} = f(x, u(x)).$$

In Differentialgeometrie und Partiellen Differentialgleichungen werden Fragestellungen aus diesem Bereich untersucht, beispielsweise hier in meiner Arbeitsgruppe.

Mandelbrotmenge. Betrachte die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ für ein festes $c \in \mathbb{C}$. Das untere Bild des Umschlags erhält man nun wie folgt: Man färbt alle $c \in \mathbb{C}$, so dass die zugehörige Folge beschränkt bleibt, schwarz. Für andere $c \in \mathbb{C}$ wählt man Grauwerte entsprechend der Anzahl der Iterationen, bis die Folge betragsmäßig 2 überschreitet. Die Menge aller schwarzen Punkte heißt Mandelbrotmenge. Sie ist abgeschlossen. Kenntnisse in Funktionentheorie und Dynamischen Systemen sind Grundlage für das Verständnis solcher fraktaler Mengen.

0.4. **Literatur.** Wir orientieren uns an [4], was an [3] orientiert ist, aber auch an [1, 2, 7, 8], empfehlen weiterhin [6, 10] und benutzen manchmal [11].

0.5. **Motivierendes Beispiel.** In der Vorlesung werden wir uns längere Zeit mit Grundlagen beschäftigen. Dies ist nötig um unserem mathematischen Gebäude ein solideres Fundament geben zu können als Sie es vermutlich aus der Schule kennen. Um trotzdem jetzt schon einen Eindruck geben zu können, was in Analysis passiert, starten wir mit einem motivierenden Beispiel, das auf Schulkenntnisse zurückgreift.

Nicht schlimm, wenn Sie Dinge hier noch nicht verstehen, weil Sie etwas nicht in der Schule hatten. Es reicht, wenn Sie die Dinge verstehen werden, wenn wir die entsprechenden Konzepte wie Konvergenz und dergleichin in der Vorlesung behandelt haben werden.

Ein Vorgehen wie hier besprochen kann man nutzen, um die Existenz von $\sqrt{2}$, also einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a^2 = 2$, zu zeigen.

sqrt 2 bsp

Beispiel 0.5.1. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 > 0$. Definiere rekursiv/nacheinander für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

$$x_{n+1} := \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} x_n.$$

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$, $x_n \to \sqrt{2}$ für $n \to \infty$, d. h. für $n \to \infty$ kommt x_n der Zahl $\sqrt{2}$ immer näher.

Beweis. Wir zeigen dies in mehreren Schritten.

(i) Es gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Für $n = 0$ gilt dies nach Voraussetzung. Ist $x_n > 0$, so folgt auch

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} x_n > 0.$$

Damit ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Diese Schlussweise nennen wir vollständige Induktion.
- Weil $x_n > 0$ ist, ist $\frac{1}{x_n}$ definiert. Wir sagen, dass x_{n+1} wohldefiniert ist.

(ii) Ist $n \geq 0$, so gilt $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$: Wegen $x_{n+1} > 0$ ist dies äquivalent zu / gleichbedeutend mit $x_{n+1}^2 \geq 2$.

Es gilt

$$x_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{x_n^2} + 1 + \frac{x_n^2}{4} - 2 = \left(\frac{1}{x_n} - \frac{x_n}{2}\right)^2 \geq 0.$$

(iii) Ist $x_n^2 \geq 2$, so gilt $x_{n+1} \leq x_n$: Wegen $x_{n+1} \geq 0$ können wir dafür $x_{n+1}^2 \leq x_n^2$ zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} x_n^2 - x_{n+1}^2 &= x_n^2 - \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}\right)^2 \\ &= x_n^2 - \frac{1}{x_n^2} - 1 - \frac{x_n^2}{4} \\ &= \frac{3}{4x_n^2}\left(\left(x_n^2\right)^2 - \frac{4}{3}x_n^2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{3}{4x_n^2}\left(x_n^2 - 2\right)\left(x_n^2 + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

- Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $x_n^2 = 2$ eine Nullstelle ist, und haben Polynomdivision angewandt.

Weil alle Faktoren auf der rechten Seite für $x_n^2 \geq 2$ nicht-negativ sind, ist auch $x_n^2 - x_{n+1}^2 \geq 0$ wie behauptet.

(iv) Wegen $0 \leq x_n \leq x_1$ und $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \geq 1$ ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und monoton. Nach Theorem 2.2.15 konvergiert sie daher. Wegen $x_n^2 \geq 2$ und $x_n \geq 0$ für $n \geq 1$ folgt $x_n \geq 1$. Wir dürfen also in der definierenden Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} x_n$$

zum Grenzwert übergehen und erhalten aufgrund von Grenzwertsätzen für $a := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$a = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} a \quad \text{oder} \quad a^2 = 2.$$

Aus $x_n \geq 1$ für $n \geq 1$ folgt $a \geq 1 \geq 0$. Somit folgt $x_n \to \sqrt{2}$ für $n \to \infty$. □

Bemerkung 0.5.2. $\star$ Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei weiteren Möglichkeiten, für dieses Beispiel Konvergenz bzw. die Existenz von $\sqrt{2}$ zu zeigen. Beide Möglichkeiten spielen in der Analysis eine große Rolle.

(i) **Kontraktionseigenschaft:** Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Dann gilt für $x, y \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}y \right| \\ &= \left| \frac{y-x}{xy} + \frac{x-y}{2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| \cdot |x-y| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot |x-y|, \end{aligned}$$

da $0 \leq \frac{1}{xy} \leq 1$ ist. Die Funktion f heißt Kontraktion, da $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x-y|$ für ein $c \in [0,1)$, hier $c = \frac{1}{2}$, gilt.

(ii) **Cauchyfolgeneigenschaft:** Wir erhalten in der Notation von Beispiel 0.5.1 für $n \geq 1$ wegen $x_n \geq \sqrt{2} \geq 1$

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_{n+1} - x_n|.$$

Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} |x_3 - x_2| &\leq \frac{1}{2} \cdot |x_2 - x_1|, \\ |x_4 - x_3| &\leq \frac{1}{2} \cdot |x_3 - x_2| \leq \frac{1}{2^2} \cdot |x_2 - x_1|, \\ |x_5 - x_4| &\leq \frac{1}{2} \cdot |x_4 - x_3| \leq \frac{1}{2^3} \cdot |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

und per Induktion für alle $k \geq 0$

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \frac{1}{2^k} \cdot |x_2 - x_1|.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$ folgt daraus für alle $k \geq l \geq 1$ (mit geeigneter Interpretation der „…“-Notation für kleine $k, l, k-l$)

$$\begin{aligned} |x_k - x_l| &= |x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + x_{k-2} \mp \ldots - x_{l+1} + x_{l+1} - x_l| \\ &\leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \ldots + |x_{l+1} - x_l| \\ &\leq \left(\frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-3}} + \ldots + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}} \right) \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{1}{2^{l-1}} \cdot \left(\frac{1}{2^{k-l-1}} + \frac{1}{2^{k-l-2}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot |x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{1}{2^{l-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot |x_2 - x_1| \\ &= \frac{4}{2^l} \cdot |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite für große l beliebig klein wird, ist $(x_n)_n$ eine reelle Cauchyfolge. Diese konvergiert nach Korollar 2.2.34. Die Aussage über den Grenzwert erhalten wir wie im Beispiel.

Statt mit der unendlichen Summe abzuschätzen, hätten wir auch

$$\frac{1}{2^{k-l-1}} + \frac{1}{2^{k-l-2}} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2^{k-l-1}} \le 2$$

nutzen können.

(iii) **Banachscher Fixpunktsatz:** Als letzte Alternative wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz nutzen. Sei $x \in [1,10]$. Dann gelten $f(x) \ge \sqrt{2} \ge 1$ und $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x \le 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 6 \le 10$. Weiterhin gilt für $x, y \in [1,10]$ die Abschätzung $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2} \cdot |x - y|$. Somit gibt es nach dem Banachschen Fixpunktsatz, siehe Analysis II, genau einen Fixpunkt $a \in [1,10]$ der Abbildung $f|_{[1,10]} \colon [1,10] \to [1,10]$. Es gilt $f(a) = a$. Wiederum folgt $a = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}a$ und wir erhalten $a^2 = 2$.

(iv) **Newtonverfahren:** Die hier angegebene Iteration bezeichnet man als Newtonverfahren. Mit dem Newtonverfahren kann man (unter Zusatzannahmen) Nullstellen von Funktionen finden. Hier suchen wir Nullstellen der Funktion $g : x \mapsto x^2 - 2$. Dabei definieren wir x_{n+1} als Nullstelle der Tangente an graph g in $(x_n, g(x_n))$. Im Beispiel ist diese Tangente als Graph der Funktion $h \colon x \mapsto g(x_n) + (x - x_n) \cdot g'(x_n) = x_n^2 - 2 + (x - x_n) \cdot 2x_n$ gegeben. Für $x_n \neq 0$ erhalten wir als Nullstelle von h den Wert $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2}x_n$.

1. Grundlagen: Logik, Mengenlehre und reelle Zahlen

Über Logik bzw. Mengenlehre gibt es ganze Vorlesungen. Wir vermitteln hier nur einige Grundlagen und folgen einem naiven Zugang.

1.1. Logische Grundlagen.

Eine Definition führt eine Bezeichnung ein.

Definition 1.1.1 (Naive Definition einer Aussage)**.**

(i) Eine **Aussage** ist etwas, dem entweder der **Wahrheitswert** „**wahr**“ oder „**falsch**“ zugeordnet ist. ⋆ Wir müssen den Wahrheitswert einer Aussage nicht kennen.
(ii) Eine **Aussageform** ist etwas, das eine noch nicht bestimmte oder **freie** Variable enthält. ⋆ Durch Ersetzen der Variablen durch eine Konstante wird eine Aussageform zu einer Aussage. Ihr Wahrheitswert ist möglicherweise nicht zu bestimmen, solange die Variable unbekannt ist.

Bemerkung 1.1.2. ⋆

(i) Wir schließen aus, dass eine Aussage
  - halb wahr, halb falsch oder
  - gleichzeitig wahr und falsch ist.
(ii) Statt „p ist wahr“ sagen wir auch
  - p gilt, bzw. p ist eine gültige Aussage,
  - p ist richtig oder
  - p ist korrekt.

Für die folgenden Beispiele greifen wir auf Schulwissen zurück.

Beispiele 1.1.3.

(a) Beispiele für Aussagen sind:
  (i) 6 ist durch 3 teilbar.
  (ii) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
  (Ich kenne den Wahrheitswert dieser Aussage momentan nicht.)

(b) Beispiele für Aussageformen sind:
- (i) x ist durch 3 teilbar. (unbekannter Wahrheitswert)
- (ii) Es gilt stets $x = y$ oder $x \neq y$. (ist stets wahr)

Definition 1.1.4 (Negation, Verneinung)**.** Sei p eine Aussage, so bezeichnen wir mit $\neg p$ die Aussage „**nicht** p“, also die Negation dieser Aussage.

Als Wahrheitstabelle schreiben wir dafür

p	$\neg p$
w	f
f	w

Dabei steht „w“ für „wahr“ und „f“ steht für „falsch“.

Wir sagen für $\neg p$ auch: „Es stimmt **nicht,** dass p gilt.“ oder „p ist falsch.“

Bemerkung 1.1.5. $\star$

(i) Sei p die Aussage „91 ist eine Primzahl“, so ist $\neg p$ die Aussage „Es stimmt nicht, dass 91 eine Primzahl ist“ oder kurz: „91 ist keine Primzahl“.

(ii) Anhand der Wahrheitstabelle überlegt man sich leicht, dass p und $\neg\neg p$ Aussagen mit den gleichen Wahrheitswerten sind.

Warnung: Die doppelte Negation wird im Alltag aber gelegentlich anders aufgefasst. Beispiel: „Magst du nicht den Müll runter bringen?“ – „Nein.“

Ist der Antwortende ein Mathematiker oder Logiker, so bringt er den Müll gerne nach unten.

Wir verwenden die folgenden Verknüpfungen von zwei Aussagen zu einer neuen Aussage.

Definition 1.1.6. Seien p, q zwei Aussagen. Dann schreiben wir
- $p \wedge q$ für „p **und** q“, die Konjunktion,
- $p \vee q$ für „p **oder** q“, die Disjunktion,
- $p \dot{\vee} q$ (kaum verwendetes Symbol) für „**entweder** p **oder** q“, die Kontravalenz oder aussschließende Disjunktion,
- $p \Longrightarrow q$ für „p **impliziert** q“ oder („aus p folgt q“ oder „wenn p, dann q“ oder „wenn p gilt, dann auch q“), die Implikation, und
- $p \Longleftrightarrow q$ für „p und q sind **äquivalent**“ oder („p ist äquivalent zu q“ oder „Genau dann, wenn p gilt, gilt auch q“), die Äquivalenz,

und definieren die Wahrheitswerte durch die folgende Tabelle:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	f	w	w

Bemerkung 1.1.7.

(i) In der Aussage $p \Longrightarrow q$ heißt p **Voraussetzung** oder **Prämisse** und q **Behauptung** oder **Konklusion**.

(ii) Gilt $p \Longrightarrow q$, so heißt p eine **hinreichende Bedingung** für q und q eine **notwendige Bedingung** für p.

(iii) Wir verwenden $p \Longrightarrow q$ und $q \Longleftarrow p$ gleichbedeutend.

(iv) Die Aussagen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (oder sogar einer ganzen Familie von Aussagen, was später erklärt wird) heißen äquivalent, wenn für je zwei Aussagen p und q davon $p \Longleftrightarrow q$ gilt.

(v) $\star$ Zwei wahre Aussagen sind:
- „Wenn 6 eine Primzahl ist, dann gilt $0 = 1$“ und

- „Wenn 6 eine Primzahl ist, dann ist 2 eine Primzahl“.

(vi) $\star$ Man beachte den Unterschied zwischen „oder“ und „endweder ... oder ...“.
(vii) $\star$ Die beiden Aussagen in einer Implikation müssen nicht kausal oder inhaltlich zusammenhängen.

Bemerkung 1.1.8 (Beweistechniken)**.** In Beweisen verwenden wir die folgenden Techniken. Vergleiche dies mit den Resultaten aus Proposition 1.1.10, die man auch ganz stupide mit Wahrheitstafeln zeigen kann.

(i) **Beweise** sind Begründungen, die zeigen, dass aus den Voraussetzungen die Behauptung folgt. Am Ende eines Beweises schreiben wir „$\square$“, „quod erat demonstrandum“, „q. e. d.“ oder „was zu zeigen war“.
(ii) **Ersetzung:**
   - Gilt $p \iff q$, so dürfen wir in einer aus Aussagen und Elementarverknüpfungen zusammengesetzten Aussage, an beliebig vielen Stellen p durch q ersetzen und erhalten eine äquivalente Aussage.
   - Gilt $A = B$, so dürfen wir an beliebig vielen Stellen in einer Aussage A durch B ersetzen und erhalten eine äquivalente Aussage.
   - Entsprechend dürfen wir auch in Formeln, ... ersetzen.

(iii) **Umbenennen:** Wir dürfen eine Variable überall durch eine andere noch nicht benutzte ersetzen.
(iv) **Sätze nutzen:** Wir dürfen ein bereits gezeigtes Resultat anwenden.
Benutzungstext: Wir wenden ... mit ... an und erhalten ....
Schulbeispiel: abc-abc-Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $1001 \cdot n$ durch 13 teilbar.

Beweis. Dies folgt aus $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. $\square$

In einem nachfolgenden Beweis können wir dann schreiben: Aus dem abc-abc-Satz erhalten wir, dass 243243 durch 13 teilbar ist.

($\star$ Hieraus ergibt sich der nette Zaubertrick, dass eine dreistellige Zahl, zweimal hintereinander geschrieben, durch 13 teilbar ist.)

(v) **Zwischenschritte:** Starte mit einer wahren Aussage und folgere daraus solange Neues, bis die gewünschte Behauptung dasteht.
Benutzungstext: Hieraus / Aus ... folgt ... und weiter ....
Dies wird auch mit „$\ldots \implies \ldots \implies \ldots$“ abgekürzt.
(vi) $\star$ **Permutieren:** Gültige Aussagen dürfen wir auch in anderer Reihenfolge aufschreiben.
(vii) $\star$ **Weglassen:** Seien k, n natürliche Zahlen mit $k \le n$ (Schulwissen). Sind p_1, $\ldots$, p_k, $\ldots$, p_n wahre Aussagen, so auch $p_1, \ldots, p_k$.

Bemerkung 1.1.9. $\star$ Standardtexte oder „Beweismechanik“ helfen uns bei der Formulierung von Beweisen.

(i) $p \implies q$:
   - **Nachweisregel:** Man nimmt an, dass p gilt und zeigt daraus q.
   - **Nachweistext:** Es gelte p. Wir wollen zeigen, dass q gilt.
     Alternativ: Zu zeigen: q gilt.
   - **Benutzungsregel:** Wenn $p \implies q$ gilt und p richtig ist, dürfen wir folgern, dass auch q gilt, vergleiche Bemerkung 1.1.12 (i).
   - **Benutzungstext:** Da $p \implies q$ und p gelten, gilt auch q.

(ii) Nachweisregel und -text, Benutzungsregel und -text:
   - Eine Nachweisregel sagt uns, was wir zu tun haben, um zu zeigen, dass eine Aussage wie $p \implies q$ wahr ist.
   - Ein Nachweistext sagt uns, was wir aufschreiben, um den Beweis von einer Aussage wie $p \implies q$ einzuleiten bzw. zu führen.

- Eine Benutzungsregel sagt uns, was wir in einem Beweis machen dürfen, wenn wir wissen, dass $p \Longrightarrow q$ gilt.
- Ein Benutzungstext sagt uns, was wir aufschreiben, wenn wir die Aussage $p \Longrightarrow q$ benutzen wollen.

(iii) $p \wedge q$:
- Nachweisregel: Man zeigt, dass p und q gelten.
- Nachweistext: Wir wollen zeigen, dass p und q gelten.
  Alternativ: Zeige: p und q gelten.
- Benutzungsregel: Wenn $p \wedge q$ gilt, dürfen wir benutzen, dass p gilt oder wir dürfen benutzen, dass q gilt.
- Benutzungstext: Da $p \wedge q$ gilt, gilt insbesondere auch p.
  Alternativ: Da $p \wedge q$ gilt, folgt q.

(iv) $p \vee q$:
- Nachweisregel: Man zeigt, dass p gilt oder dass q gilt.
- Nachweistext: Da p gilt, folgt $p \vee q$.
  Alternativ: Da q gilt, schließen wir, dass $p \vee q$ gilt.
- Benutzungsregel: Betrachte den Fall, dass p gilt und den Fall, dass q gilt. Möchte man aus $p \vee q$ auf r schließen, muss man für jeden der beiden Fälle zeigen, dass r gilt.
- Benutzungstext in einer Situation, wo wir r folgern wollen: Es gilt $p \vee q$. Im Falle, dass p gilt, erhalten wir ... und somit folgt r. Im andern Fall, wenn q gilt, erhalten wir .... Somit folgt ebenfalls r. Damit gilt r in jedem Fall.

(v) $\neg p$:
- Nachweisregel: Man nimmt an, dass p gilt und folgert daraus einen Widerspruch. Damit erhält man $\neg p$.
- Nachweistext: Angenommen es gilt p. Dann erhalten wir .... Dies widerspricht sich; Widerspruch bzw. Blitzsymbol. Somit gilt $\neg p$.
- Benutzungsregel: Ist $p = \neg q$, so gilt q.
- Benutzungstext: Wegen $\neg(\neg(p))$ folgt p.

(vi) $p \Longleftrightarrow q$:
- Nachweisregel: Man zeigt (separat) $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow p$.
- Nachweistext: Wir wollen zeigen, dass $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow p$ gelten.
- Benutzungsregel: Da $p \Longleftrightarrow q$ gilt, folgt auch $p \Longrightarrow q$.
- Benutzungstext: Da $p \Longleftrightarrow q$ gilt, folgen $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow p$.
  Alternativ: Da $p \Longleftrightarrow q$ gilt, folgt $p \Longrightarrow q$ (oder mit vertauschten Rollen).

Die logischen Elementarverknüpfungen $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$ und $\Longleftrightarrow$ erfüllen

`log elem prop` **Proposition 1.1.10.** *Seien p, q, r Aussagen. Sei t (true) eine stets wahre Aussage. Dann gelten*

`wahr und` *(i)* $\star\ p \wedge t \Longleftrightarrow p$, *(Wahres mit und)*
`wahr oder` *(ii)* $\star\ p \vee t \Longleftrightarrow t$, *(Wahres mit oder)*
`log i` *(iii)* $\star\ \neg\neg p \Longleftrightarrow p$, *(Doppelte Verneinung)*
`tertium non datur` *(iv)* $p \vee \neg p$, ... *(tertium non datur)*
`und symm` *(v)* $\star\ p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$, *(Symmetrie)*
`log v` *(vi)* $\star\ p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$, *(Symmetrie)*
`aequiv symm` *(vii)* $\star\ (p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow p)$, *(Symmetrie)*
`idem und` *(viii)* $\star\ (p \wedge p) \Longleftrightarrow p$, ... *(Idempotenz)*
`idem oder` *(ix)* $\star\ (p \vee p) \Longleftrightarrow p$, *(Idempotenz)*
`und weglassen` *(x)* $\star\ (p \wedge q) \Longrightarrow p$, *(Weglassen)*
`oder hinzu` *(xi)* $\star\ p \Longrightarrow (p \vee q)$, *(Hinzufügen)*
`log iv` *(xii)* $\star\ (p \Longleftrightarrow q) \implies ((p \vee r) \Longleftrightarrow (q \vee r))$, ... *(beidseitiges Hinzufügen)*
`aussage hinzu und` *(xiii)* $\star\ (p \Longleftrightarrow q) \implies ((p \wedge r) \Longleftrightarrow (q \wedge r))$, *(beidseitiges Hinzufügen)*

`aussage hinzu aequiv` *(xiv)* $\star$ $(p \iff q) \implies ((p \iff r) \iff (q \iff r))$, *(beidseitiges Hinzufügen)*
`ass und` *(xv)* $\star$ $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$, *(Assoziativität)*
`ass oder` *(xvi)* $\star$ $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$, ... *(Assoziativität)*
`dist i log` *(xvii)* $\star$ $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, *(Distributivität)*
`dist oder` *(xviii)* $\star$ $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, *(Distributivität)*
`morgan i log` *(xix)* $\star$ $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$, *(De Morgan)*
`morgan ii log` *(xx)* $\star$ $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$, ... *(De Morgan)*
`hin her zeigen` *(xxi)* $\star$ $(p \iff q) \iff ((p \implies q) \wedge (q \implies p))$, *(beide Richtungen zeigen)*
`mitte aequiv str` *(xxii)* $\star$ $((p \iff q) \wedge (q \iff r)) \implies (p \iff r)$, *(Zwischenschritt)*
`impl zs` *(xxiii)* $((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$, *(Zwischenschritt)*
`log ii` *(xxiv)* $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$, ... *(Implikation auflösen)*
`log iii` *(xxv)* $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$, *(Kontraposition)*
`fallunterscheidung` *(xxvi)* $\star$ $p \iff ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$. *(Fallunterscheidung)*

Bemerkung 1.1.11. $\star$

(i) Genauer sollte man $(p \wedge p) \iff p$ bzw. $((\neg p) \vee q)$ schreiben, d. h. Klammern verwenden um die Reihenfolge anzudeuten.

(ii) Aus der Assoziativität folgt, dass wir hier Klammern weglassen dürfen, also $p \wedge q \wedge r$ statt $(p \wedge q) \wedge r$ oder $p \wedge (q \wedge r)$ schreiben dürfen, da diese Aussagen äquivalent sind. Für mehr als drei Aussage ist noch (per Induktion) nachzuweisen, dass wir die Klammern weglassen dürfen.

(iii) Wir schreiben $p \iff q \iff r$ für $(p \iff q) \wedge (q \iff r)$.

(iv) Eine andere Vorgehensweise ist es, die Aussagen aus 1.1.10 mit Wahrheitstafeln zu zeigen und dann die entsprechenden Regeln zu formulieren. Da Wahrheitstafeln später jedoch keine große Rolle mehr spielen werden, haben wir die sehr plausiblen Regeln der Beweismechanik vorher „vom Himmel fallen" lassen und können so hier schon Beweise in der später üblichen Form führen.

$\star$ *Beweis von Proposition 1.1.10 mit Wahrheitstafeln.*
Diese Beweismethode wird später kaum noch verwendet.

- Man zeigt, dass in der Wahrheitstafel für eine Aussage stets ein „wahr" steht.
- Für (xxiv) ergibt sich beispielsweise

p	q	$p \implies q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	(xxiv)
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Daher sind diese Aussagen äquivalent. (Es genügt auch zu zeigen, dass in den beiden Spalten unter $p \implies q$ und $\neg p \vee q$ stets dieselben Wahrheitswerte stehen.) □

Beweis von Proposition 1.1.10. Wir führen dies exemplarisch für einige Aussagen vor ((xxiii), (xxiv) und (xxv)) und lassen den Rest als Übung.

(i): Aufgrund der Nachweisregel von $\iff$ zeigen wir, dass $p \wedge t \implies p$ und $p \implies p \wedge t$ gelten.

„$\Rightarrow$": Aufgrund der Nachweisregel von $\implies$ nehmen wir zunächst an, dass $p \wedge t$ gilt. Dann folgt aus der Benutzungsregel von „und", dass insbesondere p gilt. Somit folgt $p \wedge t \implies p$ aufgrund der Nachweisregel von $\implies$.

„$\Leftarrow$": Gelte nun p. Da t ebenfalls wahr ist, erhalten wir $p \wedge t$ aufgrund der Nachweisregel für „und". Gemäß Nachweisregel für $\implies$ erhalten wir $p \implies p \wedge t$.

Nach der Nachweisregel von $\iff$ ergibt sich daraus die Behauptung.

(ii): Analog zu (i); Übung.

(iii): Entsprechend der Nachweisregel für $\iff$ teilen wir den Beweis auf.

„$\Rightarrow$“: Nehme an, dass $\neg\neg p$ gilt. Nach der Benutzungsregel für die Negation erhalten wir daraus, dass p gilt.

„$\Leftarrow$“: Nehme nun an, dass p gilt. Wir wollen nun zeigen, dass auch $\neg\neg p$ gilt. Entsprechend der Nachweisregel für die Negation nehmen wir an, dass auch $\neg p$ gilt. Nach Definition der Negation ist somit p falsch. Da es aber nicht möglich ist, dass p gleichzeitig wahr und falsch ist, erhalten wir einen Widerspruch. Somit gilt $\neg\neg p$.

Aufgrund der Nachweisregel für $\iff$ erhalten wir daraus nun die Behauptung.

(iv): Benutze hierfür eine Wahrheitstabelle; Übung.

(v): Wir teilen den Beweis entsprechend der Nachweisregel für $\iff$ erneut auf.

„$\Rightarrow$“: Wir zeigen zunächst $p\wedge q \implies q\wedge p$: Laut Nachweisregel für $\implies$ dürfen wir annehmen, dass $p \wedge q$ gilt und müssen zeigen, dass dann $q \wedge p$ gilt. Nach Anwendungsregel von „und“ erhalten wir, dass p und q separat gelten. Somit gelten auch q und p und somit aufgrund der Nachweisregel von „und“ auch $q \wedge p$.

„$\Leftarrow$“: Mit vertauschten Rollen erhalten wir analog zu oben $q \wedge p \implies p \wedge q$. (Alternativ könnten wir die Ersetzungsregel benutzen.)

Aufgrund der Nachweisregel für $\iff$ folgt daraus $p \wedge q \iff q \wedge p$.

(vi): Verfahre analog wie bei (v).

(vii): Laut Nachweisregel für $\iff$ müssen wir $(p \iff q) \implies (q \iff p)$ und $(q \iff p) \implies (p \iff q)$ zeigen. Die zweite Aussage erhalten wir aus der ersten durch Umbenennen bzw. Ersetzen ($p \rightsquigarrow a$, $q \rightsquigarrow p$, $a \rightsquigarrow q$). Zum Beweis von $(p \iff q) \implies (q \iff p)$: Gemäß der Nachweisregel der Implikation nehmen wir an, dass $p \iff q$ gilt und zeigen, dass $q \iff p$ auch gilt. Aus der Anwendungsregel für $p \iff q$ erhalten wir, dass $p \implies q$ und $q \implies p$ gelten. Somit gelten auch $q \implies p$ und $p \implies p$. Nach der Nachweisregel für Äquivalenzen erhalten wir daraus $q \iff p$ wie gewünscht.

Beide Aussagen zusammengenommen liefern nun die Äquivalenz.

(viii): Erneut teilen wir den Beweis auf.

„$\Rightarrow$“: Zeige $(p \wedge p) \implies p$. Gelte $p \wedge p$. Dann folgt insbesondere p.

„$\Leftarrow$“: Zeige $p \implies (p \wedge p)$. Gelte p. Es gilt auch p (sic!). Somit folgt $p \wedge p$.

Beide Richtungen (Hinrichtung „$\implies$“ und Rückrichtung „$\impliedby$“) liefern nun aufgrund der Nachweisregel für Äquivalenzen die Behauptung.

(ix): Argumentiere analog zu (viii); Übung.

(x): Ergibt sich direkt aus der Benutzungsregel für „und“.

(xi): Ergibt sich direkt aus der Nachweisregel für „oder“.

(xii): Dies folgt aus der Ersetzungsregel.

(xiii): Dies folgt ebenso aus der Ersetzungsregel.

(xiv): Dies folgt nochmals aus der Ersetzungsregel.

(xv): Für $\implies$ teilen wir die linke Seite mit der Benutzungsregel in drei gültige Aussagen auf und setzen sie mit der Nachweisregel anschließend wieder zusammen.

(xvi): Analog zu (xv); Übung.

(xvii): Wir zeigen die Hin- und die Rückrichtung wieder separat.

„$\Rightarrow$“: Gelte $p \vee (q \wedge r)$. Dann ergeben sich zwei Fälle.

- Gilt p, so folgt $p\vee q$ und ebenso $p\vee r$ und folglich $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$.
- Gilt $q \wedge r$, so folgen
  - q und daraus $p \vee q$ und

· r und daraus $p \vee r$.

Aus diesen beiden Aussagen erhalten wir nun $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

„$\Leftarrow$": Gelte nun $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Daraus folgen $p \vee q$ und $p \vee r$. Nach Benutzungsregel kann aus jeder dieser Aussagen in einem Fall p folgen. Ist dies bei mindestens einer der Aussagen so, dann ergibt sich $p \vee (q \wedge r)$ und wir sind fertig. Sonst erhalten wir q und r, also $q \wedge r$ und schließlich $p \vee (q \wedge r)$.

Hieraus folgt die Äquivalenz.

(xviii): Übung.

(xix): Verwende Wahrheitstafeln.

(xx): Verwende Wahrheitstafeln.

(xxi): Dies entspricht gerade den Regeln für die Äquivalenz.

(xxii): Leite dies aus dem nachfolgenden (xxiii) her.

(xxiii): Gelte $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$. Es folgen $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow r$. Um $p \Longrightarrow r$ zu zeigen, nehmen wir an, dass p gilt. Dann folgt nach Voraussetzung zunächst q und dann nach Voraussetzung r. Also haben wir $p \Longrightarrow r$ gezeigt.

(xxiv): Erneut zeigen wir die Hin- und die Rückrichtung separat.

„$\Rightarrow$": Gelte $p \Longrightarrow q$. Wir wollen zeigen, dass $\neg p \vee q$ gilt. Nach (iv) gilt weiterhin $p \vee \neg p$.

∗ Gilt p, so folgt nach Voraussetzung q und wir erhalten $\neg p \vee q$.

∗ Gilt $\neg p$, so folgt direkt $\neg p \vee q$.

„$\Leftarrow$": Gelte $\neg p \vee q$. Um $p \Longrightarrow q$ nachzuweisen, dürfen wir annehmen, dass p gilt. Wegen $\neg p \vee q$ erhalten wir

∗ $\neg p$, was p widerspricht oder

∗ q und wir sind fertig.

Die Äquivalenz folgt.

(xxv): Erneut zeigen wir beide Richtungen.

„$\Rightarrow$": Wir erhalten aus $p \Longrightarrow q$ nacheinander $\neg p \vee q$, $q \vee \neg p$, $\neg\neg q \vee \neg p$ und $\neg q \Longrightarrow \neg p$.

„$\Leftarrow$": Aus $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$ erhalten wir durch Ersetzen $(p \rightsquigarrow \neg a$, $q \rightsquigarrow \neg b)$ $(\neg a \Longrightarrow \neg b) \Longrightarrow (\neg\neg b \Longrightarrow \neg\neg a)$. Wegen $\neg\neg a \Longleftrightarrow a$ und $\neg\neg b \Longleftrightarrow b$ erhalten wir durch erneutes Ersetzen $(\neg a \Longrightarrow \neg b) \Longrightarrow (b \Longrightarrow a)$. Durch erneutes Ersetzen $(a \rightsquigarrow q$, $b \rightsquigarrow p)$ folgt die Rückrichtung.

Beide Richtungen zusammen ergeben die Behauptung.

(xxvi): Nach (xxi) und der Nachweisregel für $\Longleftrightarrow$ weisen wir im Folgenden nach, dass $p \Longrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ und $((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \Longrightarrow p$ gelten.

„$\Rightarrow$": Wir wollen zeigen, das $p \Longrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ gilt. Gelte dazu p. Nach „tertium noch datur", vergleiche (iv), gilt $r \vee \neg r$.

∗ Nach der Benutzungsregel von „oder" betrachten wir zunächst die Situation, dass r gilt. Weil p ohnehin schon gilt, folgt nun $p \wedge r$. Aufgrund der Nachweisregel von „oder" folgt $(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$.

∗ Im Fall, dass $\neg r$ gilt, erhalten wir analog $p \wedge \neg r$ und dann $(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$.

Insgesamt erhalten wir also $p \Longrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r))$ wie gewünscht.

„$\Leftarrow$": Wir wollen zeigen, dass $((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \Longrightarrow p$ gilt. Gelte dazu $(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$.

∗ Nach der Benutzungsregel von „oder" nehmen wir im ersten Fall an, dass $p \wedge r$ gilt. Nach der Benutzungsregel von „und" folgt hieraus insbesondere p.

∗ Im zweiten Fall nehmen wir an, dass $p \wedge \neg r$ gilt und erhalten analog, dass p gilt.

Da wir in beiden Fällen gezeigt haben, dass p gilt, folgt $((p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \Longrightarrow p$ wie gewünscht.

Aus diesen beiden Richtungen ergibt sich nun aufgrund der Nachweisregel für $\Longleftrightarrow$ die Behauptung. □

taut rem

Bemerkung 1.1.12. ⋆ Es gibt noch zahlreiche weitere interessante Verknüpfungen von logischen Aussagen. Einige Beispiele sind:

mod pon

(i) $((p \Longrightarrow q) \wedge p) \Longrightarrow q$, (modus ponens)
(ii) $(p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$, (Abschwächung)
(iii) $((p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r) \wedge (p \vee q)) \Longrightarrow r$, (beidseitige Abschwächung)
(iv) $((p \vee q) \wedge (\neg p)) \Longrightarrow q$, ... (ausgeschlossene Variante)
(v) $((p \Longrightarrow q) \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg p$, (modus tollens)
(vi) $(\neg(p \wedge q) \wedge p) \Longrightarrow \neg q$, (ausgeschlossene Variante)
(vii) $((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s)) \Longrightarrow (\neg p \vee \neg r)$, (falsche Schlussfolgerungen)
(viii) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow (p \wedge q))$. .... (Wiederholen der Prämisse)

Die Benennung der Aussagen hier und in Proposition 1.1.10 ist teilweise keine Standardbenennung.

Hinweis: Beim Beweis kann es sinnvoll sein, eine stets falsche Aussage f einzuführen, beispielsweise $\neg t$.

Beweis. Übung. □

1.2. **Erste Mengenlehre.** Wir benutzen hier auch [5].

Definition 1.2.1 (Naive Definition einer Menge)**.** Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten, den sogenannten **Elementen** dieser Menge. Ist A eine Menge und x ein Objekt, so schreiben wir die Aussage $x \in A$, falls x ein Element dieser Menge ist und $x \notin A$ für $\neg(x \in A)$.

Für eine Menge, die aus den Elementen a, b, c besteht schreiben wir $\{a, b, c\}$. Dabei ist die Reihenfolge der aufgeführten Elemente, oder ob wir Elemente mehrfach aufführen, unerheblich. Eine analoge Schreibweise verwenden wir auch für Mengen mit einer anderen Anzahl (noch nicht definiert) von Elementen. Wir schreiben $\{x_1, x_2, \ldots, x_{20}\}$ oder $\{x_1, x_2, \ldots\}$, falls klar ist, welche Elemente gemeint sind.

Die obige Definition erklärt nicht wirklich, was Mengen sind. Wir wollen Mengen später von einer Menge, der leeren Menge, ausgehend, beschreiben.

Definition 1.2.2 (Teilmenge, Gleichheit)**.** Seien A, B zwei Mengen.

(i) Dann ist A eine **Teilmenge** von B, notiert als $A \subset B$ oder $A \subseteq B$, falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. (Inklusion)
(⋆ „für alle“ werden wir später mit einem Quantor abkürzen.)
(ii) Dann heißen A und B **gleich,** abgekürzt mit $A = B$, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten. (Extensionalitätsaxiom)
Gilt für zwei Mengen nicht $A = B$ so schreiben wir $A \neq B$.
(iii) Gelten $A \subset B$ und $A \neq B$ so kürzen wir das mit $A \subsetneq B$ ab.

Bemerkung 1.2.3. ⋆ Aus der Definition ergeben sich für $A \subset B$

- Nachweisregel: Um zu zeigen, dass $A \subset B$ gilt, zeigen wir, dass jedes $x \in A$ auch $x \in B$ erfüllt.
- Nachweistext: Wir wollen zeigen, dass $A \subset B$ gilt. Sei dazu $x \in A$. Dann folgt .... Somit erhalten wir $x \in B$ und daher $A \subset B$.
- Benutzungsregel: Aus $x \in A$ folgt $x \in B$.
- Benutzungstext: Da $x \in A$ ist, folgern wir, dass auch $x \in B$ gilt.

Ebenso ergibt sich für $A = B$

- Nachweisregel: Um zu zeigen, dass $A = B$ gilt, zeigt man, dass $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
- Nachweistext: Wir wollen nun zeigen, dass $A \subset B$ und $B \subset A$ gelten.
- Benutzungsregel: Aus $A = B$ folgen $A \subset B$ und $B \subset A$.
- Benutzungstext: Aus $A = B$ erhalten wir $A \subset B$.
  Alternativ: Aus $A = B$ erhalten wir $B \subset A$.

Lemma 1.2.4. *Seien A, B, C Mengen. Dann gelten*

(i) $A \subset A$, *(Reflexivität)*

incl ii *(ii)* $x \in A$ *und* $A \subset B$ *impliziert* $x \in B$.

(iii) $A \subset B \subset C$ *impliziert* $A \subset C$, *(Transitivität)*

Beweis.

(i) Zu zeigen ist, dass aus $x \in A$ auch $x \in A$ folgt. Das ist klar.

(ii) Gilt nach Definition von $A \subset B$.

(iii) Sei $x \in A$. Dann folgt $x \in B$ nach (ii). Nochmals nach (ii) folgt auch $x \in C$. Also gilt $A \subset C$. □

Axiom 1.2.5 (Aussonderungsaxiom)**.** Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform. Dann gibt es eine Menge B, deren Elemente genau die Elemente x aus A sind, die $a(x)$ erfüllen (Aussonderungsaxiom). Wir schreiben

$$B = \{x \in A \colon a(x)\}.$$

Bemerkung 1.2.6. ⋆

(i) Mit „genau“ in dieser Definition beschreiben wir, dass B alle Elemente $x \in A$ enthält, die $a(x)$ erfüllen, aber keine, für die $\neg a(x)$ gilt.

(ii) Da wir die Menge B hier definieren, schreiben wir auch $B := \{x \in A \colon a(x)\}$ und sagen, dass die Menge B als die Menge auf der rechten Seite definiert ist.

(iii) Es ist klar, dass $B \subset A$ gilt.

(iv) Wir erhalten die folgenden Regeln:
- Nachweisregel: Um zu zeigen, dass $y \in \{x \in A \colon a(x)\}$ gilt, müssen wir $y \in A$ und $a(y)$ zeigen.
- Nachweistext: Ergibt sich aus der Nachweisregel.
- Benutzungsregel: Übung.
- Benutzungstext: Aus $y \in \{x \in A \colon a(x)\}$ erhalten wir $y \in A$ und $a(y)$.

Bemerkung 1.2.7. ⋆ Zu jeder Menge B gibt es eine Menge A und eine Aussageform $p(x)$, so dass

$$B = \{x \in A \colon p(x)\}$$

gilt: Man nehme eine beliebige Obermenge von B als A, d. h. eine Menge A mit $B \subset A$, z. B. $A = B$, und für $p(x)$ die Aussageform $x \in B$.

Diese Bemerkung erlaubt es, mit Aussage(forme)n statt mit Mengen zu arbeiten.

Bemerkung 1.2.8 (Russelsche Antinomie)**.** ⋆ Naiverweise könnte man sich im Aussonderungsaxiom die Angabe sparen, aus welcher Menge man die Elemente aussondert, die eine gegebene Aussage erfüllen, würde also die Existenz einer „Allmenge“ annehmen. Dann hätte man zu jeder Aussage eine Menge, in der alle Objekte sind, die diese Aussage erfüllen. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch:

Angenommen, es gäbe eine Allmenge A, also eine Menge, die alle Elemente enthält. Dann definieren wir

$$B := \{x \in A \colon x \notin x\}.$$

Nach Definition ist nun $y \in B \iff (y \in A \land y \notin y)$. Da wir angenommen haben, dass A eine Allmenge ist, ist $y \in A$ stets erfüllt und wir erhalten $y \in B \iff y \notin y$.

Wenn wir nun überprüfen wollen, ob $B \in B$ gilt, können wir diese Bedingung mit $y = B$ anwenden und erhalten $B \in B \Longleftrightarrow B \notin B$. Dies ist ein Widerspruch.

Daher werden wir zukünftig Allmengen vermeiden.

Es ist üblich, in einem Widerspruchsbeweis die Annahme, die zu einem Widerspruch geführt werden soll, im Irrealis zu schreiben, bei den weiteren Folgerungen daraus aber wieder den Realis zu verwenden.

Ausgehend von einer beliebigen Menge zeigen wir die Existenz der leeren Menge. Wir haben bei unserem naiven Zugang angenommen, dass es Mengen gibt. Will man dies nicht, so fordert man die Existanz der leeren Menge als Axiom.

Lemma 1.2.9 (Existenz der leeren Menge)**.** *Es gibt eine Menge $\emptyset = \{\}$, die leere Menge, die kein Element enthält. Sie erfüllt*

`leere menge inklusion`

(i) $\emptyset \subset A$ für alle Mengen A und
(ii) $\emptyset$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei B eine beliebige Menge. Definiere
$$\emptyset := \{x \in B \colon x \neq x\}.$$
Aufgrund des Aussonderungsaxioms ist $\emptyset$ ein Menge.

(i) Sei A eine beliebige Menge. Wir müssen nachweisen, dass $\emptyset \subset A$ gilt, dass also $x \in \emptyset \implies x \in A$ gilt. Dazu zeigen wir, dass die Aussage $x \in \emptyset$ stets falsch ist. Sei $x \in \emptyset$ ein beliebiges Element, x ist also so gewählt, dass die Aussage $x \in \emptyset$ gilt. Aus der Aussage $x \in \emptyset$ folgt $x \neq x$. Dies ist stets falsch. Somit muss auch die Voraussetzung $x \in \emptyset$, unabhängig von x, falsch gewesen sein. Daher ist die Implikation insgesamt wahr. Dies wollten wir zeigen.
(ii) Seien $\emptyset_1$ und $\emptyset_2$ zwei leere Mengen. Dann folgen nach (i) $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$ und $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$. Somit gilt nach Definition $\emptyset_1 = \emptyset_2$. □

1.3. **Quantoren.**

Definition 1.3.1 (Quantoren)**.** Quantoren verwenden wir bei freien Variablen in Aussageformen. Sie beziehen sich stets auf Elemente einer Menge:

Sei A eine Menge und $a(x)$ eine Aussageform mit der freien Variablen x.

(i) **Existenzquantor:** Wir schreiben
$$\exists\, x \in A \colon a(x) \quad \text{oder} \quad \underset{x \in A}{\exists} a(x)$$
für die folgende Aussage: „**Es gibt** ein x in der Menge A, so dass für dieses x die Aussage $a(x)$ gilt.“
(ii) Wir schreiben
$$\exists!\, x \in A \colon a(x)$$
für die Aussage „Es gibt **genau ein** x aus A mit $a(x)$“. Sie gilt, falls es ein x in der Menge A gibt, so dass für dieses x und kein anderes Element aus A die Aussage $a(x)$ gilt.
(iii) **Allquantor:** Wir schreiben
$$\forall\, x \in A \colon a(x) \quad \text{oder} \quad \underset{x \in A}{\forall} a(x)$$
(in abgesetzten Formeln) oder auch $a(x)\ \forall x \in A$ für die Aussage: „**Für alle** x in der Menge A gilt die Aussage $a(x)$.“

⋆ Es gibt auch die Bezeichnungen
(i) $\bigvee$ für den Existenzquantor und
(ii) $\bigwedge$ für den Allquantor.

Beispiel 1.3.2. Wir verwenden für diese Beispiele nochmals Schulwissen.
(i) Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geq 0$.

(ii) Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = 2$.
Achtung: Der Existenzquantor schließt nicht aus, dass es auch mehrere solche x geben kann. Um dies zu verdeutlichen, sagt man für $\exists\, x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 2$ „Es gibt eine oder mehrere reelle Zahlen x, so dass $x^2 = 2$ gilt".
(iii) Falsch ist aber: $\exists!\, x \in \mathbb{R} \colon x^2 = 2$.

Bemerkung 1.3.3. Mit Quantoren können wir die Teilmengendefinition formaler angeben:

$$A \subset B \quad :\iff \quad \forall\, x \in A : x \in B.$$

$\star$ Dabei schreiben wir $:\iff$ um anzudeuten, dass der Ausdruck auf der linken Seite eine Abkürzung für die Aussage auf der rechten Seite ist.

def subset rem

Bemerkung 1.3.4. $\star$

(i) Für den Allquantor ergeben sich die folgenden Regeln im Falle $\forall x \in A \colon a(x)$:
- Nachweisregel: Man nimmt ein beliebiges Element $x \in A$ und zeigt, dass $a(x)$ gilt.
  Achtung: Der Variablenname x darf noch nicht verwendet worden sein.
- Nachweistext: Sei $x \in A$ (beliebig/gegeben/beliebig aber fest vorgegeben). Wir wollen nun zeigen, dass $a(x)$ gilt.
  Alternativ: Zu zeigen: Es gilt $a(x)$.
- Benutzungsregel: Wenn wir sicherstellen, dass $x \in A$ gilt, dürfen wir die Aussage $a(x)$ benutzen.
- Benutzungstext: Es gilt $\forall x \in A \colon a(x)$. Da $y \in A$ ist, folgt hieraus $a(y)$.

(ii) Regeln für $\exists\, x \in A \colon a(x)$:
- Nachweisregel: Man muss ein konkretes $y \in A$ angeben, das $a(y)$ erfüllt.
  Alternativ: Zeige, dass $\{x \in A \colon a(x)\} \neq \emptyset$ gilt.
- Nachweistext: Wir definieren $y := \ldots$. Wir zeigen nun, dass $y \in A$ und $a(y)$ gelten.
- Benutzungsregel: Man darf sich ein y (neuer Name!) mit $y \in A$ und $a(y)$ nehmen.
- Benutzungstext: Aus $\exists\, x \in A \colon a(x)$ folgt, dass es ein $y \in A$ mit $a(y)$ gibt.

(iii) Regeln für $\exists!$:
- Nachweisregel: Die Aussage $\exists!\, x \in A \colon a(x)$ zeigt man, indem man $\exists\, x \in A \colon a(x)$ zeigt und dass für alle $x, y \in \{z \in A \colon a(z)\}$, wobei wir $x, y \in \{\ldots\}$ für $x \in \{\ldots\}$ und $y \in \{\ldots\}$ schreiben, die Aussage $x = y$ folgt.
- Nachweistext: Wir wollen $\exists!\, x \in A \colon a(x)$ zeigen. Dazu zeigen wir zunächst $\exists\, x \in A \colon a(x)$: .... Seien nun $x, y \in A$ mit $a(x)$ und $a(y)$. Wir folgern, dass .... Somit ergibt sich $x = y$ und wir erhalten $\exists!\, x \in A \colon a(x)$.

Wir wollen die folgenden Quantorenregeln verwenden.

antoren elementar prop

Proposition 1.3.5. *Seien A, B Mengen und $p(x, y)$ bzw. $p(x)$ Aussageformen. Dann gelten*

quantoren lem eins

$$\forall_{x\in A} \forall_{y\in B}\, p(x,y) \iff \forall_{y\in B} \forall_{x\in A}\, p(x,y), \tag{1.1}$$

quantoren lem zwei

$$\exists_{x\in A} \exists_{y\in B}\, p(x,y) \iff \exists_{y\in B} \exists_{x\in A}\, p(x,y), \tag{1.2}$$

ine richtung quantoren

$$\exists_{x\in A} \forall_{y\in B}\, p(x,y) \implies \forall_{y\in B} \exists_{x\in A}\, p(x,y), \tag{1.3}$$

de morgan i

$$\neg\left(\forall_{x\in A}\, p(x)\right) \iff \exists_{x\in A} \neg p(x), \tag{1.4}$$

de morgan ii

$$\neg\left(\exists_{x\in A}\, p(x)\right) \iff \forall_{x\in A} \neg p(x). \tag{1.5}$$

Beweis.

- (1.1): $\star$ Klar, da es keine Rolle spielt, ob wir zuerst ein beliebiges Element $x \in A$ oder ein beliebiges Element $y \in B$ auswählen.
- (1.2): $\star$ Analog zu (1.1).
- (1.3): Um zu zeigen, dass
$$\underset{y\in B}{\forall}\,\underset{x\in A}{\exists}\,p(x,y) \quad \text{gilt, wenn} \quad \underset{x\in A}{\exists}\,\underset{y\in B}{\forall}\,p(x,y)$$
gilt, sei $y_0 \in B$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der Voraussetzung gibt es somit ein $x_0 \in A$, so dass $\forall\, y \in B\colon p(x_0, y)$ gilt. Da $y_0 \in B$ ist, erhalten wir, dass $p(x, y)$ gilt. Dies zeigt die Behauptung.
- (1.4): $\star$
  - „$\Rightarrow$“: Beruht darauf, dass es ein Gegenbeispiel geben muss, wenn die Aussage nicht für alle $x \in A$ gilt.
  - „$\Leftarrow$“: Da es nach Voraussetzung $\exists\, x \in A\colon \neg p(x)$ ein Gegenbeispiel gibt, kann die Aussage $\forall\, x \in Aa\colon p(x)$ nicht richtig sein.
- (1.5): Wir leiten dies aus (1.4) her. Mit Proposition 1.1.10 (xxi) und (x) erhalten wir daraus
$$\neg\left(\underset{x\in A}{\forall}\,p(x)\right) \quad\Longrightarrow\quad \underset{x\in A}{\exists}\,\neg p(x).$$
Weiter benutzen wir Proposition 1.1.10 (xxv) und folgern
$$\neg\left(\underset{x\in A}{\exists}\,\neg p(x)\right) \quad\Longrightarrow\quad \neg\neg\left(\underset{x\in A}{\forall}\,p(x)\right).$$
Nun ersetzen wir überall $p(x)$ durch $\neg p(x)$. Es ergibt sich
$$\neg\left(\underset{x\in A}{\exists}\,\neg\neg p(x)\right) \quad\Longrightarrow\quad \neg\neg\left(\underset{x\in A}{\forall}\,\neg p(x)\right).$$
Jetzt benutzen wir noch Proposition 1.1.10 (iii) und folgern
$$\neg\left(\underset{x\in A}{\exists}\,p(x)\right) \quad\Longrightarrow\quad \underset{x\in A}{\forall}\,\neg p(x).$$
Analog zeigen wir die umgekehrte Implikation und erhalten wegen Proposition 1.1.10 (xxi) die Behauptung (1.5). $\square$

Bemerkung 1.3.6.

(i) In (1.3) in Proposition 1.3.5 handelt es sich nicht um eine Äquivalenz: Ist $A = \mathbb{R}$ (die hier noch nicht definierten reellen Zahlen) und $p(x, y)$ die Aussage $x + y = 0$, so ist die rechte Seite wahr, die linke aber nicht.

(ii) $\star$ Die beiden Äquivalenzen (1.4) und (1.5) heißen De Morgansche Regeln.

1.4. **Weitere Mengenlehre.**

verein axiom

Axiom 1.4.1 (Vereinigung)**.**

(i) Seien A, B Mengen. Dann gibt es die **Vereinigung** von A und B, $A \cup B$, eine Menge, die genau die Elemente von A und B enthält. Es gilt
$$x \in A \cup B \quad\Longleftrightarrow\quad (x \in A \vee x \in B).$$

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann gibt es die **Vereinigung** der Mengen aus $\mathcal{M}$, $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{M}} A$, eine Menge, die genau die Elemente enthält, die in (mindestens) einer der Mengen $A \in \mathcal{M}$ enthalten sind. Es gilt
$$x \in \bigcup_{A\in\mathcal{M}} A \quad\Longleftrightarrow\quad \underset{A\in\mathcal{M}}{\exists}\, x \in A.$$

Bemerkung 1.4.2 (Existenz einer Obermenge)**.** Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann gibt es eine Menge M mit der Eigenschaft

$$A \in \mathcal{M} \implies A \subset M.$$

Sie heißt Obermenge.

Beweisidee. Setze $M := \bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A$. □

`schnitt def` **Definition 1.4.3** (Durchschnitt)**.**

(i) Seien A, B Mengen und sei X eine beliebige fixierte Obermenge von A und B. (Wir können beispielsweise $X = A \cup B$ wählen.) Dann definieren wir den **Durchschnitt**, den Schnitt oder die Schnittmenge von A und B, $A \cap B$, durch

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

(ii) Sei nun $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen und sei X eine gemeinsame Obermenge, gelte also $A \subset X$ für alle $A \in \mathcal{M}$. Dann definieren wir den Schnitt der Mengen aus $\mathcal{M}$, $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{M}} A$, durch

$$\bigcap_{A \in \mathcal{M}} A := \{x \in X : (\forall A \in \mathcal{M} : x \in A)\}.$$

Bemerkung 1.4.4. $\star$

(i) Eine Obermenge ist nicht eindeutig bestimmt. Nehmen wir ein weiteres Element hinzu, so erhalten wir eine weitere Obermenge.
(ii) Der Schnitt von zwei Mengen oder von einer **nichtleeren** Menge von Mengen hängt nicht von der gewählten Obermenge ab; Details: Übung.

Bemerkung 1.4.5.

(i) Enthält $\mathcal{M}$ keine Menge, so gilt nach Definition der Quantoren $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A = \emptyset$ sowie $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{M}} A = X$, falls klar ist, was die Obermenge X ist.
(ii) $\star$ Enthält $\mathcal{M}$ genau zwei Mengen, so stimmen die ersten und zweiten Teile der Axiome 1.4.1 und der Definition 1.4.3 überein.
(iii) $\star$ Wir werden sehen, dass es bei der Vereinigung oder beim Schnitt von mehr als zwei Mengen nicht auf die Reihenfolge ankommt. Daher ist die Definition der Vereinigung und des Schnittes eine sinnvolle Verallgemeinerung des Falles von zwei Mengen.

Wir behandeln dazu ein Lemma. Dabei geben wir nur einen knappen Beweis für einen Teil der Aussage.

- Ergänzen Sie die fehlenden Details!
- Welche Aussagen mit Quantoren werden hier eigentlich gezeigt?
- Warum folgt daraus die Behauptung?
- Beweisen Sie den noch fehlenden Rest!
- Die Einführung in das mathematische Arbeiten (EmA) eignet sich vorzüglich, um zu erlernen, wie man selbst solche Beweise eigenständig findet und formal korrekt aufschreibt.

Lemma 1.4.6. *Seien A, B Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

`ABae i` *(i)* $A \subset B$,
`ABae ii` *(ii)* $A \cup B = B$ *und*
`ABae iii` *(iii)* $A \cap B = A$.

Beweis. Wir zeigen nur (ii) $\iff$ (iii).

- „(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Es gilt stets $A \cap B \subset A$. Daher zeigen wir nur $A \subset A \cap B$: Sei $x \in A$ beliebig. Es folgt $x \in A \cup B$, also nach (ii) auch $x \in B$. Daher ist $x \in A \cap B$ wie behauptet.
- „(iii)$\Longrightarrow$(ii)“: Wiederum gilt $B \subset A \cup B$ stets. Es genügt also, $A \cup B \subset B$ zu zeigen: Sei $x \in A \cup B$ beliebig. Ist $x \in B$, so sind wir fertig. Sonst gilt $x \in A$. Nach (iii) folgt daraus $x \in A \cap B$. Somit gilt $x \in B$. Die Behauptung folgt. □

Definition 1.4.7 (Disjunkte Mengen)**.** Seien A, B zwei Mengen.

(i) Dann heißen A und B **disjunkt,** falls $A \cap B = \emptyset$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$.

(ii) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen. Dann heißt diese disjunkt, falls für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \neq B$ stets $A \cap B = \emptyset$ gilt. In diesem Falle schreiben wir auch $\dot{\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}}} A$ statt $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{M}} A$.

Definition 1.4.8 (Komplement)**.** Seien A und B Mengen mit fester Obermenge X. Dann definieren wir

(i) das **Komplement** von A in B durch
$$B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}.$$

(ii) das **Komplement** von A durch
$$\complement A := \{x \in X : x \notin A\}.$$

Proposition 1.4.9. *Seien A, B und C drei Mengen und sei X eine feste Obermenge. Dann gelten*

(i) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativität)*
(ii) $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität)*
(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Assoziativität)*
(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativität)*
dist i mengen *(v)* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(Distributivität)*
(vi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *(Distributivität)*
morgan i mengen *(vii)* $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ *(De Morgansche Regel)*
(viii) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ *(De Morgansche Regel)*
(ix) $\complement\complement A = A$
(x) $A \cup \complement A = X$
(xi) $A \setminus B = A \cap \complement B$

Beweis. Wir betrachten nur zwei der Aussagen und lassen den Rest als Übung.
Erster Teil der Distributivität (v):

„$\subset$“: Sei $x \in (A \cap B) \cup C$ beliebig. Wir erhalten
$$\begin{aligned} & x \in (A \cap B) \vee x \in C \\ \Longrightarrow\ & (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ \Longrightarrow\ & (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) && \text{(Proposition 1.1.10 (xvii))} \\ \Longrightarrow\ & (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) \\ \Longrightarrow\ & x \in (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

„$\supset$“: Folgt analog.

Erste De Morgansche Regel (vii):

„$\subset$“: Sei $x \in \complement(A \cup B)$. Es folgt

$$\begin{aligned} & x \notin (A \cup B) \\ \implies & \neg(x \in (A \cup B)) \\ \implies & \neg(x \in A \vee x \in B) \\ \implies & \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \qquad \text{(Proposition 1.1.10 (xx))} \\ \implies & x \notin A \wedge x \notin B \\ \implies & x \in \complement A \wedge x \in \complement B \\ \implies & x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

„$\supset$“: Folgt wieder analog. □

Axiom 1.4.10 (Potenzmenge)**.** Sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es die Menge $\mathcal{P}(A)$ (oder 2^A), die **Potenzmenge** von A. Ihre Elemente sind genau die Teilmengen von A.

Beispiel 1.4.11.

(i) Sei $A = \{a, b, c\}$, so ist
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$
(ii) Ist $A = \emptyset$, so ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$. Beachte, dass (insbesondere in diesem Fall) $\mathcal{P}(A) \neq A$ ist.
(iii) Die Aussagen $M \subset A$ und $M \in \mathcal{P}(A)$ sind nach Definition der Potenzmenge äquivalent.
(iv) $\star$ 2^A steht für die Menge aller Abbildungen $f\colon A \to 2$, wobei 2 für eine Menge mit zwei Elementen steht. Zwischen dieser Menge und $\mathcal{P}(A)$ gibt es eine Bijektion. Details dazu folgen später.

Axiom 1.4.12 (Kartesisches Produkt)**.** Seien A und B zwei Mengen. Dann gibt es eine Menge, das **kartesische Produkt** von A und B, $A \times B$, das aus allen **geordneten Paaren** (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ besteht. a heißt die erste und b die zweite Komponente dieses Paares. Es gilt
$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}.$$

Bemerkung 1.4.13. $\star$ Mengentheoretisch kann man solche Paare als gewisse zweielementige Mengen darstellen. Dabei wird $(a, b) \in A \times B$ durch $\{a, \{a, b\}\} \subset A \cup \mathcal{P}(A \cup B)$ oder $\{a, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A \cup B))$ dargestellt.

Damit können wir definieren, was eine Funktion oder Abbildung ist:

`def fkt` **Definition 1.4.14** (Funktion, Abbildung)**.** Seien A, B zwei Mengen.

(i) Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von A nach B, $f\colon A \to B$, ist eine Teilmenge von $A \times B$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ gibt:
$$\forall\, a \in A\, \exists!\, b \in B \colon (a, b) \in f.$$
Wir schreiben dafür auch $b = f(a)$ oder $a \mapsto b$.

Die Beschreibung einer Funktion als Teilmenge des kartesischen Produktes wird später kaum noch verwendet. Dafür definiert man dann den **Graphen** von f durch
$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) \in A \times B \colon x \in A\}.$$
Der Graph einer Funktion f ist gerade die oben betrachtete Teilmenge $f \subset A \times B$.

(ii) A heißt **Definitionsbereich** der Funktion f, bezeichnet mit $D(f)$, und

$$f(A) := \{f(x) \colon x \in A\} \equiv \{y \in B \colon (\exists\, x \in A \colon f(x) = y)\}$$

heißt **Bild** oder **Wertebereich** von f. Wir schreiben $\operatorname{im} f$ oder $R(f)$ für $f(A)$ (für image bzw. range).

potenzmengen induz fkt

(iii) Allgemeiner definieren wir für beliebige $M \subset A$ eine Menge $f(M)$, das **Bild** von M unter f, durch

$$f(M) := \{y \in B \colon (\exists x \in M \colon y = f(x))\} \equiv \{f(x) \colon x \in M\}.$$

Somit induziert f eine Abbildung $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, die wir wieder mit f bezeichnen.

(iv) Zu einer beliebigen Abbildung $f \colon A \to B$ definieren wir die **Urbildabbildung**

$$f^{-1} \colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$$

durch

$$f^{-1}(M) = \{x \in A \colon f(x) \in M\}$$

für beliebige $M \subset B$. Die Menge $f^{-1}(M) \subset A$ heißt das Urbild von M unter der Abbildung f.

Bemerkung 1.4.15. Zwei Funktionen $f \colon A \to B$ und $g \colon C \to D$ sind gleich, wenn f und g als Teilmengen von $A \times B$ bzw. $C \times D$ gleich sind. Insbesondere kann $f = g$ nur gelten, falls auch $A = C$ und $B = D$ gelten.

$\star$ Es gibt abweichende Definitionen, die nicht $B = D$ fordern.

Wir definieren einige fundamentale Eigenschaften von Funktionen.

Definition 1.4.16. Sei $f \colon A \to B$ eine Funktion.

(i) Dann heißt f **injektiv**, falls aus $f(x) = f(y)$ bereits $x = y$ folgt.

$\star$ Im Englischen sagt man, dass eine Abbildung “one to one” sei und in älteren Texten heißen solche Abbildungen eineindeutig.

(ii) f heißt **surjektiv**, falls $f(A) = B$ gilt.

Wir sagen, dass f die Menge A **auf** die Menge B abbildet. Ist f nicht notwendigerweise surjektiv, so heißt f im Gegensatz dazu eine Abbildung von A **nach** B oder von der Menge A **in** die Menge B.

(iii) f heißt **bijektiv,** falls f injektiv und surjektiv ist. Eine bijektive Abbildung heißt Bijektion.

(iv) Ist f injektiv, so definieren wir die **Inverse** oder **Umkehrabbildung** von f durch

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon \operatorname{im} f &\to A, \\ f(x) &\mapsto x, \end{aligned}$$

d. h. wir definieren $f^{-1}(f(x)) := x$.

Bemerkung 1.4.17. $\star$

(i) Die Inverse ist wohldefiniert: Zu jedem $a \in \operatorname{im} f$ gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = a$. Für ein beliebiges anderes $y \in A$ mit $f(x) = a$ folgt aufgrund der Injektivität von f bereits $x = y$. Damit ordnen wir jedem $a \in \operatorname{im} f$ ein eindeutig bestimmtes $x \in A$ zu.

(ii) Allgemeiner sprechen wir von **Wohldefiniertheit,** wenn wir etwas durch das Angegebene definieren. Bei einer Abbildung müssen wir zwei Mengen X (als Definitionsbereich) und Y und für jedes $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ angegeben. So erhalten wir eine Abbildung $g \colon X \to Y$.

(iii) Wir verwenden f^{-1} für die Inverse und für die Urbildabbildung. Die sollte nicht zu Verwirrungen führen, es gilt nämlich, falls beide definiert sind, für die Inverse I, die Urbildabbildung U und alle $x \in A$

$$\{I(f(x))\} = U(\{f(x)\}).$$

(iv) Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung, die $g\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ wie in Definition 1.4.14 (iii) induziert, so gilt

$$\{f(x)\} = g(\{x\})$$

für alle $x \in A$.

Definition 1.4.18 (Komposition von Abbildungen)**.** Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen. Dann definieren wir eine Abbildung $g \circ f\colon A \to C$ durch $x \mapsto g(f(x))$. $g \circ f$ heißt **Komposition** der Abbildungen f und g.

Bemerkung 1.4.19. $\star$ Man schreibt auch $g \circ f\colon A \to D$ für die Abbildung $x \mapsto g(f(x))$ im Falle von Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to D$, falls $B \subset C$ gilt.

Beispiele 1.4.20.

(i) Sei A eine Menge. Dann definieren wir die Diagonale $\Delta(A)$ von $A \times A$ durch

$$\Delta(A) := \{(x, x) \in A \times A \colon x \in A\}.$$

(ii) Die Abbildung $\Delta(A) \subset A \times A$ heißt Identität auf A, id_A oder id. (Wir verwenden „heißt“ für eine Definition und könnten dies auch wie folgt ausdrücken: Wir definieren die Identität auf A als die Abbildung $\Delta(A)$.) Es gilt $\mathrm{id}_A(x) = x$ für alle $x \in A$.
(iii) Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so gelten $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.
(iv) Sei A eine Menge und gelte $C \subset A$. Dann heißt die Abbildung $i\colon C \to A$ mit $x \mapsto x$ Inklusionsabbildung. i ist injektiv. Wir schreiben dafür manchmal $i\colon C \hookrightarrow A$.
(v) Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Sei $C \subset A$ eine Menge. Dann definieren wir die **Einschränkung** oder **Restriktion** von f auf C durch

$$\begin{aligned} f|_C\colon C &\to B,\\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Ist $i\colon C \hookrightarrow A$ die Inklusionsabbildung, so gilt $f|_C = f \circ i$.

Bemerkung 1.4.21. Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon C \to D$ drei Abbildungen. Dann gelten

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1},$$

wobei die zweite Gleichheit sowohl für die Urbildabbildungen als auch (falls definiert) für die Inversen gilt.

Definition 1.4.22 (Relationen)**.** Seien A, B Mengen.

(i) Eine Teilmenge $R \subset A \times B$ heißt **Relation**. Statt $(x, y) \in R$ sagen wir auch, dass $R(x, y)$ gilt.
(ii) Eine Relation $R \subset A \times A$ heißt
  (a) **reflexiv,** falls $R(x, x)$ für alle $x \in A$ gilt,
  (b) **symmetrisch,** falls für alle $x, y \in A$ aus $R(x, y)$ auch $R(y, x)$ folgt,
  (c) **antisymmetrisch,** falls für alle $x, y \in A$ aus $R(x, y)$ und $R(y, x)$ bereits $x = y$ folgt,

(d) **transitiv,** falls für alle $x, y, z \in A$ aus $R(x, y)$ und $R(y, z)$ auch $R(x, z)$ folgt,
(e) **total** oder **linear,** falls für alle $x, y \in A$ stets $R(x, y)$ oder $R(y, x)$ gilt.

(iii) Sei $R \subset A \times A$ eine Relation. Dann heißt R
(a) **Äquivalenzrelation,** falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Häufig schreiben wir $x \sim y$ statt $R(x, y)$ für Äquivalenzrelationen.
(b) **Ordnung** oder **Totalordnung,** falls R reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und total/linear ist.
(c) **Halbordnung** oder **partielle Ordnung,** falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Definition 1.4.23. Sei $R \subset A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Sei $x \in A$. Dann heißt

$$[x] := \{y \in A\colon R(x, y)\}$$

die **Äquivalenzklasse** oder **Restklasse** von x. Statt $y \in [x]$ schreiben wir auch $y \equiv x \mod R$.

Mit $A/R := \{[x]\colon x \in A\}$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Relation.

Beispiele 1.4.24. Die folgenden Beispiele verwenden Schulwissen.

(i) Die Relation „wohnt in der gleichen Stadt“ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bestehen jeweils aus allen Bürgerinnen und Bürgern von Konstanz, Kreuzlingen, ...
(ii) Auf der Menge $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch die Festlegung, dass $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann gilt, falls $ad = bc$ richtig ist. Fassen wir nun (a, b) als den Bruch $\frac{a}{b}$ auf, so bestehen die Äquivalenzklassen $A/\sim$ gerade aus den Brüchen, die dieselbe reelle Zahl ergeben.
(iii) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch:

$$a \sim b :\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}\colon a - b = kn.$$

Die Äquivalenzklassen $\mathbb{Z}/\sim$ bestehen dann gerade aus den ganzen Zahlen, die bei Division durch n denselben Rest lassen. Statt $a \sim b$ schreiben wir hier auch $a \equiv b \pmod n$.

1.5. **Die reellen Zahlen.**

Definition 1.5.1. Die **reellen Zahlen,** mit $\mathbb{R}$ bezeichnet, sind eine Menge $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften (schreibe auch $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$):

(A) $\mathbb{R}$ ist ein **Körper,** d. h. es gibt Abbildungen $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Addition, wobei wir $x + y$ statt $+(x, y)$ schreiben, und $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Multiplikation, mit $(x, y) \mapsto x \cdot y$ oder xy statt $x \cdot y$, und zwei ausgezeichnete Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$, d. h. $\neg(0 = 1)$, wobei 0 Null und 1 Eins heißt, die die folgenden Eigenschaften haben:
(K1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(K2) $x + y = y + x$,
(K3) $0 + x = x$,
(K4) $\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y \in \mathbb{R}}{\exists}\ x + y = 0$, wobei wir für die additive Inverse y auch $-x$ schreiben, also $x + (-x) = 0$,
(K5) $(xy)z = x(yz)$,
(K6) $xy = yx$,
(K7) $1x = x$,
(K8) $\underset{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}{\forall}\ \underset{y \in \mathbb{R}}{\exists}\ xy = 1$, wobei wir für die multiplikative Inverse y auch x^{-1} schreiben, also $xx^{-1} = 1$,
(K9) $x(y + z) = xy + xz$.

Falls nicht anders angegeben, gelten diese Gleichheiten jeweils für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wir haben hier die Konvention „Punkt vor Strich“ benutzt, d. h. wir schreiben $xy + z$ für $(x \cdot y) + z$.

(B) $\mathbb{R}$ ist ein **angeordneter Körper,** d. h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei wir $x \le y$ statt $R(x, y)$ schreiben, die die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ erfüllt:
(O1) $x \le y$ und $y \le z \Longrightarrow x \le z$, (Transitivität)
(O2) $x \le y$ und $y \le x \Longrightarrow x = y$, (Antisymmetrie)
(O3) es gilt $x \le y$ oder $y \le x$ ($\Longrightarrow x \le x$),
(O4) aus $x \le y$ folgt $x + z \le y + z$,
(O5) aus $0 \le x$ und $0 \le y$ folgt $0 \le xy$.
Statt $x \le y$ schreiben wir auch $y \ge x$ und statt $x \le y$ und $x \ne y$ schreiben wir $x < y$ oder $y > x$.

(C) $\mathbb{R}$ ist **vollständig,** d. h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.
$\star$ Die Definition des Supremums ist so wichtig, dass wir sie gesondert als Definition 1.5.2 notieren werden.

sup def

Definition 1.5.2 (Supremum)**.**

(i) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt,** falls es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y \le x$ für alle $y \in A$ gibt.
(ii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von $A \subset \mathbb{R}$, falls $x_0 \ge y$ für alle $y \in A$ gilt.
(iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das **Supremum** einer Menge $A \subset \mathbb{R}$, mit $x_0 = \sup A$ bezeichnet, falls x_0 obere Schranke von A ist und für jede obere Schranke x von A die Ungleichung $x \ge x_0$ gilt. x_0 heißt auch kleinste obere Schranke.
(iv) Gilt $\sup A \in A$, so heißt $\sup A$ auch **Maximum:** $\max A$.
(v) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so schreiben wir $\sup A = \infty$.
Wir vereinbaren, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $-\infty < x < \infty$ gelten.
(vi) $\star$ Entsprechend definieren wir **nach unten beschränkt**, **untere Schranke** sowie das **Infimum** als größte untere Schranke einer Menge und das **Minimum**. Für nach unten unbeschränkte Mengen $A \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $\inf A = -\infty$.
Gerne werden diese Begriffe auch wie folgt eingeführt: Setze
$$-A := \{-a \colon a \in A\}.$$
Dann ist A nach unten beschränkt, falls $-A$ nach oben beschränkt ist. x ist eine untere Schranke für A, falls $-x$ eine obere Schranke für $-A$ ist. $x = \inf A$, falls $-x = \sup(-A)$.
(vii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben und nach unten beschränkt, so heißt A beschränkt.

Bemerkung 1.5.3. Es gelten $\sup \emptyset = -\infty$ sowie $\inf \emptyset = \infty$.

R konst bem

Bemerkung 1.5.4. $\star$ Wir werden hier axiomatisch vorgehen und annehmen, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ existieren und lediglich skizzieren, wie man deren Existenz und Eindeutigkeit, bis auf eine Abbildung, die die jeweiligen Null- und Einselemente aufeinander abbildet und mit Multiplikation, Addition, Anordnung und Supremumsbildung verträglich ist, zeigen kann.

Wir nehmen an, dass eine Menge existiert. Dann gibt es auch die leere Menge. Nun bilden wir nacheinander die folgenden Mengen, die die natürlichen Zahlen werden: $0 = \emptyset$ und die mit $\cdot^+$ bezeichneten Nachfolger, bestehend aus allen Vorgängern, $0^+ \equiv 1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $1^+ \equiv 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, $2^+ = 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$ und verwenden die aus der Schule gebräuchlichen Bezeichnungen $0, 1, 2, 3, \ldots$. Für die Existenz dieser Menge $\mathbb{N}$ benötigen wir noch das Unendlichkeitsaxiom, das besagt, dass es die Menge, die aus der leeren Menge und allen ihren – wie oben beschrieben gebildeten – Nachfolgern besteht, gibt. Wir schreiben $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Auf den natürlichen Zahlen definiert man eine Addition vermöge $n + (m^+) = (n + m)^+$ und eine Multiplikation durch $n \cdot (m^+) = (n \cdot m) + n \equiv nm + n$ und weist die in der Schule benutzten Rechenregeln nach.

Dann konstruiert man die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Restklassen der Paare von natürlichen Zahlen (a, b) mit der Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d)$, falls $a + d = c + b$ gilt, d. h. (a, b) wäre (in Schulnotation) die ganze Zahl $a - b$, die wir als Differenz von zwei natürlichen Zahlen darstellen. Auch hier definiert man Addition, Subtraktion und Multiplikation und weist die in der Schule benutzten Rechenregeln nach.

Die rationalen Zahlen erhält man als Restklassen von Paaren $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ mit der Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d)$, falls $ad = bc$ gilt. Wir schreiben auch $\frac{a}{b} = (a, b)$ und definieren eine Addition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$ sowie eine Multiplikation $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$. Unabhängig von dieser Konstruktion schreiben wir ab jetzt $\frac{a}{b}$ statt $a \cdot b^{-1}$ falls $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ sind.

Ähnlich wie wir später in der Vorlesung Funktionalanalysis einen metrischen Raum vervollständigen werden, erhält man nun $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ (Übung).

Die Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ bis auf eine Abbildung φ, die die jeweiligen Null- und Einselemente aufeinander abbildet und $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ sowie $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle a, b erfüllt, erhält man, indem man sie in jedem Schritt der Konstruktion von $\mathbb{R}$ mitkonstruiert.

Definition 1.5.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die folgenden **Intervalle:**

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ (offenes Intervall)
(ii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
(iii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

a und b heißen **Endpunkte** der Intervalle.

$\star$ Wir vereinbaren, dass $[a, a] = \{a\}$ und $(b, a) = (b, a] = [b, a) = [b, a] = (a, a) = \emptyset$ gelten.

Lemma 1.5.6. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $0x = x0 = 0$.*

Beweis. Es gilt $0 = 0 + 0$. Wir multiplizieren mit x und erhalten $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$. Nun addieren wir auf beiden Seiten das additive Inverse von $0x$. Es folgt $0 = 0x + (-(0x)) = (0x + 0x) + (-(0x)) = 0x + (0x + (-(0x))) = 0x + 0 = 0x = x0$. $\square$

Lemma 1.5.7. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(i) $(-1)x = -x$,
(ii) $-(-x) = x$ *und*
(iii) $(-1)(-1) = 1$.

Beweis.

(i) Wir multiplizieren $(-1) + 1 = 0$ mit x und erhalten
$$(-1)x + x = (-1)x + 1x = ((-1) + 1)x \overset{\text{s. o.}}{=} 0x = 0.$$
Nun addieren wir das additive Inverse von x und erhalten
$$(-1)x = (-1)x + 0 = (-1)x + (x + (-x)) = ((-1)x + x) + (-x) \overset{\text{s. o.}}{=} 0 + (-x) = -x$$
wie behauptet.

(ii) Es gilt $0 = -(-x) + (-x)$. Addieren wir auf beiden Seiten x, so folgt die zweite Behauptung.

(iii) Setzen wir nun insbesondere $x = -1$ ein, so folgt aus den ersten Teilen
$$(-1)(-1) = -(-1) = 1. \qquad \square$$

Wir schreiben auch $x - y$ statt $x + (-y)$.

Lemma 1.5.8. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist das additive Inverse $-x$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $x + a = 0$ und $x + b = 0$. Somit folgt $a = a + 0 = a + (x + b) = (a + x) + b = 0 + b = b$. $\square$

eins pos lem **Lemma 1.5.9.** *Es gelten $0 < 1$ und $-1 < 0$.*

Beweis.

(i) Ist $1 \le 0$, so folgt durch Addition von (-1) die Ungleichung $0 \le (-1)$ und somit $0 \le (-1)(-1) = 1$. Dies ist aber nur möglich, falls $0 = 1$ gilt. Widerspruch. Somit ist $0 \le 1$. Aus $0 \ne 1$ folgt daher $0 < 1$.
(ii) Durch Addition von (-1) folgt aus $0 \le 1$ die Ungleichung $-1 \le 0$. Wie oben folgt nun $-1 < 0$. $\square$

Lemma 1.5.10. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:*
$$x < y, \quad x = y \quad \text{oder} \quad y < x.$$

Beweis.

(i) Ist $x < y$, so folgen $\neg(x = y)$ und $x \le y$. Wäre zusätzlich $y < x$, so folgte daraus $y \le x$ und somit $x = y$. Widerspruch.
(ii) Ist $y < x$, so argumentiert man analog.
(iii) Ist $x = y$, so sind die beiden anderen Aussagen nach Definition ausgeschlossen.
(iv) Angenommen, es gilt keine der drei Aussagen, so gilt nach Definition einer Ordnung zumindest $x \le y$ oder $y \le x$. Wegen $x \ne y$ folgt sogar $x < y$ oder $y < x$. Widerspruch. $\square$

Lemma 1.5.11. *Gelte $0 < x < y$. Dann gelten*
(i) $0 < x^{-1}$ *und*
(ii) $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Beweis.

(i) Es gilt $0 = x^{-1} + (-x^{-1})$. Dies multiplizieren wir mit x und erhalten $0 = 1 + x(-x^{-1})$. Somit ist $x(-x^{-1}) = -1 < 0$. Es gilt genau eine der folgenden drei Ungleichungen: $-x^{-1} > 0$, $-x^{-1} = 0$ oder $-x^{-1} < 0$. Die erste ist ausgeschlossen, denn dann wäre auch das Produkt mit $x > 0$ positiv, ebenso die zweite, denn dann wäre $x(-x^{-1}) = 0$. Somit ist $-x^{-1} < 0$, also $x^{-1} > 0$.
(ii) Aus $x < y$ folgt $x \le y$. Wir multiplizieren dies mit $x^{-1}y^{-1}$, dem Produkt zweier positiver Zahlen, und erhalten $y^{-1} \le x^{-1}$. Der Fall $y^{-1} = x^{-1}$ ist ausgeschlossen, denn dann wäre auch $x = y$. Somit folgt die Behauptung. $\square$

R nullteilerfrei **Lemma 1.5.12.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Gilt $xy = 0$, so folgt $x = 0$ oder $y = 0$.*

Beweis. Wären $x \ne 0$ und $y \ne 0$, so könnten wir die Gleichung $xy = 0$ nacheinander mit x^{-1} und y^{-1} multiplizieren. Es folgt $1 = 0$. Widerspruch. $\square$

Lemma 1.5.13. *Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.*

ungl mult i *(i) Gelten $a \le b$ und $x \ge 0$, so folgt $ax \le bx$.*
(ii) Gelten $a \le b$ und $x \le 0$, so folgt $ax \ge bx$.
(iii) Gelten $a < b$ und $x > 0$, so folgt $ax < bx$.
(iv) Gelten $a < b$ und $x < 0$, so folgt $ax > bx$.
ungl mult iv *(v) Aus $a \le b$ und $x < y$ folgt $a + x < b + y$.*

(vi) Aus $a \geq 0$, $b \geq 0$ *und* $a + b = 0$ *folgt* $a = b = 0$.

Beweis.

(i) Wir erhalten nacheinander $0 \leq b - a$, $0 \leq (b - a)x$ und $ax \leq bx$.
(ii) Argumentiere ähnlich und benutze $-x \geq 0$.
(iii) Nach (i) gilt $ax \leq bx$. Der Fall $ax = bx$ implizierte nach Multiplikation mit $x^{-1} \neq 0$ auch $a = b$. Widerspruch.
(iv) Folgt analog.
(v) Es ist klar, dass $a + x \leq b + y$ gilt. Wäre $a + x = b + y$, so erhielten wir $b + y = a + x \leq b + x$ und somit $y \leq x$. Widerspruch.
(vi) Falls nicht, so dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a > 0$ ist. Dann erhalten wir aber mit (v) $a + b > 0$. Widerspruch. □

`l quad ungl aequiv lem` **Lemma 1.5.14.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$.
(i) Aus $0 \leq a \leq b$ *folgt* $a^2 \leq b^2$.
(ii) Aus $a^2 \leq b^2$ *und* $b \geq 0$ *folgt* $a \leq b$.

Beweis.

(i) Wir multiplizieren $a \leq b$ mit a und mit b und erhalten $a^2 \leq ab$ und $ab \leq b^2$. Daraus folgt die behauptete Ungleichung.
(ii) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gilt $0 \leq b < a$. Dann folgen $0 \leq b \leq a$ und daraus $b^2 \leq a^2$. Wir folgern $a^2 = b^2$. Also ist $0 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Somit ist nach Lemma 1.5.12 $a + b = 0$ oder $a = b$. Wegen $a, b \geq 0$ erhalten wir in beiden Fällen $a = b$, einen Widerspruch und die Behauptung folgt. □

Wir werden die Konstruktion aus Bemerkung 1.5.4 nicht benutzen, um von $\emptyset$ ausgehend die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen zu definieren, sondern definieren stattdessen:

Definition 1.5.15 (Natürliche Zahlen)**.** Die **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ sind die kleinste Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit
`nat z 1` (N1) $0 \in A$ und
`nat z 2` (N2) $a + 1 \in A$ für alle $a \in A$.
$\mathbb{N}$ ist dabei die kleinste solche Menge in dem Sinn, dass jede weitere Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$, die (N1) und (N2) erfüllt, auch $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}$ erfüllt.

`nat z exist lem` **Lemma 1.5.16.** *Es gibt die natürlichen Zahlen. Sie sind eindeutig bestimmt.*

Beweis.

(i) **Existenz:** Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Teilmengen A von $\mathbb{R}$, so dass $0 \in A$ und $a + 1 \in A$ für alle $a \in A$ gelten. Dann ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$, da $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ ist. Definiere
$$\mathbb{N} := \bigcap_{A \in \mathcal{M}} A.$$
Da $0 \in A$ für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt, folgt auch $0 \in \mathbb{N}$. Sei $a \in \mathbb{N}$. Dann folgt $a \in A$ für alle $A \in \mathcal{M}$. Somit ist auch $a + 1 \in A$ für alle diese Mengen A und wir erhalten $a + 1 \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ ist die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$, die (N1) und (N2) erfüllt, da wir $\mathbb{N}$ als Schnitt aller Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit diesen beiden Eigenschaften definiert haben: Sei $B \subset \mathbb{R}$ beliebig mit (N1) und (N2). Dann gilt nach Definition von $\mathbb{N}$ als Schnitt solcher Mengen bereits $\mathbb{N} \subset B$.
(ii) **Eindeutigkeit:** Aufgrund der Minimalität folgt für zwei solche Mengen $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_2$ und $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$. □

Die natürlichen Zahlen werden auch häufig mit Hilfe der Peanoaxiome eingeführt. Bei unserem Zugang können wir deren Gültigkeit beweisen.

`peano axiome lem` **Lemma 1.5.17** (Peanoaxiome)**.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $0 \in \mathbb{N}$,
(ii) jedes $a \in \mathbb{N}$ *besitzt genau einen Nachfolger* $a^+ \in \mathbb{N}$,
(iii) 0 *ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.*
(iv) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ *folgt aus* $m^+ = n^+$ *bereits* $m = n$.
`peano v` *(v) Sei* $X \subset \mathbb{R}$ *beliebig mit* $0 \in X$ *und* $n^+ \in X$ *für alle* $n \in X$*, so folgt* $\mathbb{N} \subset X$.

Der Nachfolger einer Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $a^+ := a + 1 \in \mathbb{N}$.

Beweis.

(i) klar
(ii) klar
(iii) Wegen $(-1)+1 = 0$ genügt der Nachweis, dass $-1 < 0$ ist (siehe Lemma 1.5.9) und dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n \geq 0$ gilt.

Definiere $A := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Dann erfüllt A wegen $0 \leq 0$ (N1) und die Forderung (N2) gilt, da $a \geq 0$ und $1 \geq 0$ auch $a+1 \geq 0$ implizieren. Im Beweis von Lemma 1.5.16 ist also $A \in \mathcal{M}$ für diese Menge A. Somit folgt $n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Wir bemerken, dass man durch Betrachtung der Menge
$$A := \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \ldots, \underbrace{1+\ldots+1}_{\text{gleiche Anzahl}}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq \underbrace{1+\ldots+1}_{\text{wie hier}}\}$$
mit einem solchen Argument zeigen kann, dass bis zu einer Zahl $1+\ldots+1$ keine „unerwarteten" natürlichen Zahlen existieren. Da die Anzahl der Summanden beliebig groß ist und damit größer als jede beliebige vorgegebene reelle Zahl, was wir noch zeigen werden, folgt dann, dass sich jede natürliche Zahl als iterierter Nachfolger von 0 darstellen lässt.)

(iv) klar
(v) Die Menge X erfüllt (N1) und (N2) und ist daher eine der Mengen, die im Schnitt in Lemma 1.5.16 auftaucht. Somit gilt $\mathbb{N} \subset X$. ☐

`R archimedisch thm` **Theorem 1.5.18.** $\mathbb{R}$ *ist* ***archimedisch,*** *d. h. zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $m \geq n$ *die Ungleichung* $m \geq x$ *gilt.*

Beweis. Es genügt, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x$ zu finden. Falls es kein solches $n \in \mathbb{N}$ gibt, so ist x eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Als nichtleere Menge mit einer oberen Schranke besitzt $\mathbb{N}$ ein Supremum $\sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Es gilt $\sup \mathbb{N} - 1 < \sup \mathbb{N}$. Somit gibt es nach Definition des Supremums ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \sup \mathbb{N} - 1$. Daraus folgt jedoch $n+1 \geq \sup \mathbb{N}$ und $n+1+1 \geq \sup \mathbb{N} + 1 > \sup \mathbb{N}$. Wegen $n+1+1 \in \mathbb{N}$ widerspricht dies aber der Definition des Supremums und die Behauptung folgt. ☐

`le 1n impl le 0 cor` **Korollar 1.5.19.** $\star$ *Seien* $x, a, b \in \mathbb{R}$ *und sei* $a > 0$.

(i) Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ *mit* $an \geq x$.
(ii) Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ *mit* $0 < \frac{1}{m} \leq a$.
(iii) Ist $b \leq \frac{1}{n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *(oder für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq n_0$*), so ist* $b \leq 0$.

Beweis.

(i) Betrachte $n \geq \frac{x}{a}$.
(ii) Betrachte $m \geq \frac{1}{a}$.
(iii) Dies ist eine Umformulierung der letzten Aussage. ☐

`induktion thm` **Theorem 1.5.20** (Vollständige Induktion)**.** *Erfülle* $M \subset \mathbb{N}$ *die Bedingungen*

(i) $0 \in M$ *(Induktionsanfang) und*
(ii) *aus* $n \in M$ *folgt* $n+1 \in M$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *(Induktionsschritt),*
so gilt $M = \mathbb{N}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 1.5.17 (v). □

Theorem 1.5.21. ⋆ *Sei* p *eine Aussageform auf* $\mathbb{N}$. *Gelten*
(i) $p(0)$ *und*
(ii) $p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,
so gilt $p(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Definiere $M := \{n \in \mathbb{N} \colon p(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann folgt die Behauptung aus Theorem 1.5.20. □

Bemerkung 1.5.22. ⋆
(i) Wir können vollständige Induktion auch benutzen, wenn $p(0)$ gilt und wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $p(0) \wedge p(1) \wedge \ldots \wedge p(n)$ die Aussage $p(n+1)$ folgt: Wir benutzen dann die Aussageform
$$q(n) = (p(0) \wedge p(1) \wedge \ldots \wedge p(n)) = \underset{0 \le k \le n}{\forall} p(k).$$
Wiederum folgt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Gilt $p(n_0)$ für $n_0 \in \mathbb{N}$ und folgt aus $p(n)$ die Aussage $p(n+1)$ für alle $n \ge n_0$, so gilt $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$.

Bemerkung 1.5.23. ⋆ Genauso wie wir Aussagen induktiv beweisen können, kann man auch entsprechend definieren. Dies bezeichnet man als rekursive Definition. Da dies noch weitere Grundlagen benötigt, verschieben wir das noch.

Definition 1.5.24 (Familie, Folge)**.**
(i) Seien I, X Mengen und $f \colon I \to X$ eine Abbildung. Dann heißt f auch **Familie**. Wir schreiben $(x_i)_{i \in I}$. Dabei ist $x_i = f(i)$ für $i \in I$. I heißt Indexmenge.
(ii) Ist $I = \mathbb{N}$, so heißt $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine **Folge**. Wir schreiben auch $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ für eine solche Folge obwohl keine übliche Mengeninklusion vorliegt.
(iii) Ist $J \subset I$, so heißt $(y_j)_{j \in J}$ **Teilfamilie** von $(x_i)_{i \in I}$, falls die Werte der Familien auf J übereinstimmen: $\forall j \in J \colon y_j = x_j$. Wir schreiben auch $(x_j)_{j \in J}$ für die Teilfamilie.
(iv) Ist $I = \mathbb{N}$ und $J \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Menge (das wird noch definiert), so heißt $(x_i)_{i \in J}$ eine **Teilfolge** von $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ist $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J$ eine Folge mit $j_{k+1} > j_k$ für alle k und $J = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{j_k\}$, so schreiben wir $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ für die Teilfolge.
(v) Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie. Ist $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ so schreiben wir auch $(x_i)_{1 \le i \le n}$. Im Falle
  (a) $n = 2$ heißt die Familie ein Paar: (x_1, x_2),
  (b) $n = 3$ heißt die Familie ein Tripel: (x_1, x_2, x_3),
  (c) n heißt die Familie ein n-Tupel: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Analog zu Axiom 1.4.1 und zu Definition 1.4.3 haben wir:

Definition 1.5.25 (Schnitt und Vereinigung von Familien)**.** Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen mit Obermenge X, so definieren wir
(i) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{x \in X \colon (\exists\, i \in I \colon x \in A_i)\}$.
(ii) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i := \{x \in X \colon (\forall\, i \in I \colon x \in A_i)\}$.
(iii) Im Falle $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ schreiben wir $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \equiv \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ bzw. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \equiv \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

Definition 1.5.26 (Supremum und Infimum von Familien)**.** Ist $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie reeller Zahlen, so setzen wir

$$\sup_{i\in I} x_i := \sup\{x_i : i \in I\}$$

und $\inf\limits_{i\in I} x_i := \inf\{x_i : i \in I\}$.

Proposition 1.5.27.

(i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $A \subset B$. Dann gelten

$$\sup A \le \sup B \quad \textit{sowie} \quad \inf A \ge \inf B.$$

(ii) Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}$. Setze $A := \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Dann gelten

$$\sup A = \sup_{i\in I} \sup A_i \quad \textit{sowie} \quad \inf A = \inf_{i\in I} \inf A_i.$$

Beweis.

(i) Gilt nach Definition.

(ii) Wegen $\inf A = -\sup(-A)$ mit $-A := \{-x : x \in A\}$ genügt es, die Behauptung für das Supremum zu betrachten.

Aus $A_i \subset A$ folgt $\sup A_i \le \sup A$ für alle $i \in I$. Also gilt auch

$$\sup_{i\in I} \sup A_i \le \sup A.$$

Für die umgekehrte Ungleichung unterscheiden wir zwei Fälle:

(a) Ist $\sup A = \infty$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $x_n \ge n$. Da A die Vereinigung der A_i's ist, gilt $x_n \in A_{i(n)}$ für ein geeignetes $i(n) \in I$. Somit ist $\sup\limits_{i\in I} \sup A_i = \infty$.

(b) Ist $b := \sup A < \infty$, so gibt es nach Definition des Supremums zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $x_n \in A$ mit

$$b - \tfrac{1}{n} < x_n \le b.$$

Wiederum gilt $x_n \in A_{i(n)}$ für geeignete $i(n) \in I$. Somit erhalten wir

$$b \le x_n + \tfrac{1}{n} \le \sup A_{i(n)} + \tfrac{1}{n} \le \sup_{i\in I} \sup A_i + \tfrac{1}{n}.$$

Wir folgern $b \le \sup\limits_{i\in I} \sup A_i$ wie behauptet. □

Definition 1.5.28.

(i) Sei A eine Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **nach oben (unten) beschränkt,** falls dies für $f(A)$ gilt. Wir schreiben

$$\sup f(A) = \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{und} \quad \inf f(A) = \inf_{x\in A} f(x).$$

(ii) Sei A eine Menge und $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in I$, eine Familie von Funktionen. Gilt für alle $x \in A$

$$\sup_{i\in I} f_i(x) < \infty,$$

so definieren wir die Funktion

$$\sup_{i\in I} f_i : A \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad \left(\sup_{i\in I} f_i\right)(x) := \sup_{i\in I} f_i(x).$$

(iii) ⋆ Ohne die Voraussetzung, dass für alle $x \in A$ die punktweise in i gleichmäßige Beschränktheit $\sup\limits_{i\in I} f_i(x) < \infty$ gilt, erhalten wir im Fall $I \neq \emptyset$ mit derselben Definition eine Funktion $\sup\limits_{i\in I} f_i : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(iv) $\star$ Analog definieren wir $\inf\limits_{i\in I} f_i$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, wobei wir $-\infty$ hinzunehmen müssen, wenn $\inf\limits_{i\in I} f_i(x) = -\infty$ gilt.

(v) Ist $I = \{1, \ldots, n\}$, so schreiben wir auch
$$\sup_{i\in I} f_i = \sup(f_1, \ldots, f_n) = \max(f_1, \ldots, f_n) = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$$
und entsprechend für das Infimum bzw. Minimum.

Wir verallgemeinern nun das kartesische Produkt auf mehr als zwei Faktoren. Den Fall von zwei Faktoren erhalten wir dabei, wenn wir $I = \{1, 2\}$ verwenden.

Definition 1.5.29 (Kartesisches Produkt)**.**

(i) Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann definieren wir das **kartesische Produkt** durch
$$\prod_{i\in I} A_i = \{(x_i)_{i\in I} : \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x_i \in A_i\}.$$

(ii) Zu beliebigem $j \in I$ definieren wir die j-te **Projektion(sabbildung)**
$$\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j \quad \text{durch} \quad \pi_j((x_i)_{i\in I}) := x_j.$$

Beispiel 1.5.30. Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ und $A_i = \mathbb{R}$ für alle $i \in I$, so ist
$$\prod_{i=1}^{n} A_i \equiv \prod_{i\in I} A_i \equiv \mathbb{R}^n \equiv \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} = \left\{\left(x^1, \ldots, x^n\right) : x^i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \le i \le n\right\}.$$
$\pi_i\left(x^1, \ldots, x^n\right) = x^i$ heißt die i-te Komponente des n-Tupels $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$.

$\star$ Aus Kovarianzgründen schreiben wir hier die Indices nach oben. Dies sind keine Exponenten. Eine genauere Begründung dafür werden wir erst deutlich später in der Differentialgeometrie kennen lernen.

$\star$ Wir identifizieren hier $\prod\limits_{i=1}^{3} A_i \equiv (A_1 \times A_2) \times A_3 \equiv A_1 \times (A_2 \times A_3)$, da es sich letztlich in allen Fällen um geordnete Tripel handelt.

Beim ersten Lesen ist das folgende Axiom sicher schwer zugänglich. Ist I eine endliche Menge oder (allgemeiner) nicht mächtiger (noch zu definieren) als $\mathbb{N}$, so können wir die Aussage aus dem Bisherigen beweisen, i. a. klappt dies jedoch nicht.

Axiom 1.5.31 (Auswahlaxiom)**.** Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen A_i mit $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Dann existiert eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in A_i$ für alle $i \in I$. Insbesondere gilt dann $\prod\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. (Beachte $\prod\limits_{i\in\emptyset} A_i = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.)

Proposition 1.5.32. *Seien $I \neq \emptyset$ und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann gilt*
$$\prod_{i\in I} A_i = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{Es gibt ein } i \in I \textit{ mit } A_i = \emptyset.$$

Beweis. $\star$

„$\Leftarrow$“: Ist $i_0 \in I$ und $A_{i_0} = \emptyset$, so ist klar, dass es keine solche Familie $(x_i)_{i\in I}$ geben kann.

„$\Rightarrow$“: Gilt umgekehrt $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$, so folgt $\prod\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ gerade aus dem Auswahlaxiom. $\square$

Eine Folgerung des Auswahlaxioms ist das Zornsche Lemma. Wir werden es in der Analysis erst spät benutzen, in der Linearen Algebra zeigt man damit, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Lemma 1.5.33 (Zornsches Lemma)**.** *Sei M eine nichtleere Menge mit einer Teilordnung $\leq$. Nehme an, dass jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) eine obere Schranke $b \in M$ besitzt, d. h. dass $x \leq b$ für alle $x \in \Lambda$ gilt. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d. h. ein Element $x_0 \in M$, so dass aus $x \geq x_0$ bereits $x = x_0$ folgt. (Beachte, dass x_0 i. a. nicht eindeutig bestimmt ist.)*

Beweis. Logikvorlesung. □

Definition 1.5.34 (Ausschöpfung, Partition, Überdeckung)**.** Sei A eine Menge.

(i) Eine **Überdeckung** von A ist eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ mit

$$A \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

(ii) Eine **Partition** von A ist eine Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ von A mit $A_i \subset A$ für alle $i \in I$ durch paarweise disjunkte Mengen, d. h. es gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j \in I$. Wir schreiben

$$A = \dot{\bigcup_{i\in I}} A_i.$$

(iii) Eine **Ausschöpfung** von A ist eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von A, die also $A_m \subset A_n$ für $m \leq n$ erfüllen, mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$.

Proposition 1.5.35.

(i) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bilden die Restklassen von $\sim$ eine Partition von A.

(ii) Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Partition von A. Dann ist $\sim$ mit

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, i \in I\colon x, y \in A_i$$

eine Äquivalenzrelation auf A.

Beweis.

(i) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Betrachte die Familie $([x])_{[x]\in A/\sim}$.
  (a) Wegen $x \in [x]$ wird ganz A überdeckt und es gilt $[x] \subset A$ für alle $x \in A$.
  (b) Disjunktheit: Seien $x, y \in A$ beliebig. Sind $[x], [y]$ nicht disjunkt, so gibt es ein $z \in [x] \cap [y]$. Wir behaupten, dass dann auch $[x] = [y]$ gilt, dass es sich also um dieselben Äquivalenzklassen handelt. Seien $\bar{x} \in [x]$ und $\bar{y} \in [y]$. Dann gilt $\bar{x} \sim x \sim z \sim y$, also folgt $\bar{x} \in [y]$. Ebenso gilt $\bar{y} \in [x]$ und $[x] = [y]$ folgt.

(ii) (a) reflexiv: $x \sim x$ ist klar.
  (b) symmetrisch: $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ ist ebenso klar.
  (c) transitiv: Gelte $x \sim y$ und $y \sim z$. Somit gibt es $k, l \in I$ mit $x, y \in A_k$ und $y, z \in A_l$. Weil die Familie $(A_i)_{i\in I}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht und $y \in A_k \cap A_l$ gilt, folgt $k = l$. Somit gilt auch $x, z \in A_k = A_l$ und nach Definition folgt $x \sim z$ wie behauptet. □

Die nachfolgenden beiden Resultate rechtfertigen rekursive Definitionen.

definiert funktion lem

Lemma 1.5.36. ⋆ *Seien A, B Mengen. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Abbildungen $f_n\colon A_n \to B$ mit der Eigenschaft*

$$f_n|_{A_m} = f_m \quad \text{für alle} \quad m \leq n.$$

Dann gibt es genau eine Funktion $f\colon A \to B$ mit $f(x) = f_n(x)$ für alle $x \in A_n$ oder $f|_{A_n} = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

(i) Setze $f(x) := f_n(x)$ für $x \in A_n$.
(ii) Gilt $x \in A_n$ und $x \in A_m$ für $m \le n$, so stimmen die beiden Definitionen überein, da wegen $A_m \subset A_n$ und $f_n|_{A_m} = f_m$ die Gleichheit $f_n(x) = f_m(x)$ folgt.
(iii) Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von A ist, wird jedem $x \in A$ ein Funktionswert zugeordnet.
(iv) Eindeutigkeit: Seien f und g zwei solche Funktionen. Sei $x \in A$ beliebig. Dann gibt es ein A_n mit $x \in A_n$. Es folgt $f(x) = f|_{A_n}(x) = f_n(x) = g|_{A_n}(x) = g(x)$ und daher die Eindeutigkeit. □

Proposition 1.5.37 (Rekursive Definition)**.** ⋆ *Sei $B \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in B$ und $F\colon \mathbb{N} \times B \to B$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to B$ mit den Eigenschaften*

(i) $f(0) = x_0$ und
(ii) $f(n+1) = F(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen, dass f auf diese Weise rekursiv definiert ist.

Beweis.

(i) **Eindeutigkeit:** Seien f, g zwei solche Funktionen. Dann gilt $f(0) = g(0)$ und aus $f(n) = g(n)$ folgt
$$f(n+1) = F(n, f(n)) = F(n, g(n)) = g(n+1).$$
Somit erhalten wir per Induktion $f(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(ii) **Existenz:** Definiere $A_n := \{x \in \mathbb{N}\colon x \le n\}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{N}$. Wir definieren induktiv Abbildungen $f_n\colon A_n \to B$ durch
$$f_0(0) := x_0$$
und für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in A_{n+1}$, falls f_n schon definiert ist,
$$f_{n+1}(m) := \begin{cases} f_n(m) & \text{falls } m \in A_n, \\ F(n, f_n(x)) & \text{falls } m = n+1. \end{cases}$$
Wir sehen per Induktion, dass die Abbildungen $f_n\colon A_n \to B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind. Weiterhin sehen wir per Induktion, dass $f_n|_{A_m} = f_m$ für alle $m \le n$ gilt. Definiere $f\colon \mathbb{N} \to B$ als die in Lemma 1.5.36 definierte Funktion. Dann gelten $f(0) = f_n(0) = x_0$ und
$$f(n+1) = f|_{A_{n+1}}(n+1) = f_{n+1}(n+1) = F(n, f_n(n)) = F(n, f(n)).$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 1.5.38 (Dezimalschreibweise)**.** ⋆ Wir definieren $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $4 := 3+1$, $5 := 4+1$, $6 := 5+1$, $7 := 6+1$, $8 := 7+1$, $9 := 8+1$, $10 := 9+1$. Wir nennen $0, 1, 2, \ldots, 9$ Ziffern. Wir definieren induktiv $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ als $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ für Ziffern $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $10^0 := 1$ und induktiv $10^{n+1} := 10 \cdot 10^n$ definiert. Es sollte aus dem Zusammenhang klar sein, ob es sich bei einem Ausdruck wie 1234 um die hier beschriebene natürliche Zahl handelt oder um $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Da wir gesehen haben, dass sich jede natürliche Zahl als iterierter Nachfolger von 0 schreiben lässt, können wir auf diese Weise sämtliche natürlichen Zahlen darstellen und jede so dargestellte Zahl ist eine natürliche Zahl.

gauss summe bsp

Beispiel 1.5.39 (Summenschreibweise)**.** Seien $k \le l$ mit $k, l \in \mathbb{N}$. Seien a_n mit $k \le n \le l$ und $n \in \mathbb{N}$ (letzteres wird häufig nicht hingeschrieben, wenn dies selbstverständlich sein sollte) reelle Zahlen. Dann definieren wir

$$\sum_{n=k}^{l} a_n$$

induktiv durch

$$\sum_{n=k}^{k} a_n := a_k \quad \text{und} \quad \sum_{n=k}^{m+1} a_n := \sum_{n=k}^{m} a_n + a_{m+1}$$

für $k \le m < l$.

Eine entsprechende Notation werden wir später auch verwenden, wenn der Summationsbereich zwischen zwei ganzen Zahlen, die wir noch definieren werden, liegt.

Wir behaupten, dass

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen dies per Induktion:

(i) **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ müssen wir nachweisen, dass $\sum\limits_{i=0}^{0} i = 0$ gilt. Dies ist offensichtlich richtig.

(ii) **Induktionsschritt:** Wir nehmen nun an, dass die Aussage für ein festes $n \in \mathbb{N}$ richtig sei (Induktionsannahme) und wollen nachweisen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Aufgrund des Prinzips der vollständigen Induktion haben wir damit die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. □

Beispiele 1.5.40 (Rekursive Definition)**.** ⋆

(i) Fakultät: Wir setzen $0! := 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$.

Somit folgt $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $8! = 5760, \ldots$.

(ii) Fibonaccizahlen: Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $f(0) := 0$, $f(1) := 1$ und $f(n+2) := f(n+1) + f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(n)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Dieses Beispiel benutzt die Variante der rekursiven Definition, bei der auf mehrere Vorgängerwerte zurückgegriffen wird.

Mit Linearer Algebra (Eigenwerte) kann man eine geschlossene Formel für die Fibonaccizahlen herleiten.

1.6. **Mächtigkeit.** In diesem Kapitel untersuchen wir ein Maß für die Größe einer Menge.

Definition 1.6.1 (Mächtigkeit)**.** Seien A, B zwei Mengen.

(i) A und B heißen **gleich mächtig**, $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f\colon A \to B$ gibt.
(ii) B heißt **mächtiger** als A, $B \succ A$, oder A **weniger mächtig** als B, $A \prec B$, falls es eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.
(iii) A heißt **abzählbar**, falls $A \sim \mathbb{N}$ gilt.
(iv) A heißt **höchstens abzählbar**, h. a., falls $A \prec \mathbb{N}$ gilt.
(v) A heißt **überabzählbar**, falls A nicht höchstens abzählbar ist.
(vi) Sei A abzählbar, so heißt eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ **Abzählung** von A, falls für jedes $a \in A$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = a$ existiert und wenn $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ gilt.

Bemerkung 1.6.2.

(i) „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.
(ii) Aus $A \prec B \prec C$, d. h. $A \prec B$ und $B \prec C$, folgt $A \prec C$.
(iii) Es gilt stets $A \prec A$.
(iv) Sei $G := \{2n\colon n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden Zahlen. Dann gilt $\mathbb{N} \prec G$, da $n \mapsto 2n$ injektiv ist. Ebenso gilt $\mathbb{N} \sim G$.
(v) $\star$ Die Notation legt nahe, dass aus $A \prec B$ und $B \prec A$ auch $A \sim B$ folgt. Dies wäre klar, wenn wir $A \sim B$ als $A \prec B$ und $B \prec A$ definiert hätten. Da wir jedoch eine Bijektion gefordert haben, benötigen wir einen nichttrivialen Satz.

Theorem 1.6.3 (Schröder-Bernstein)**.** *Gelten $A \prec B$ und $B \prec A$, so folgt $A \sim B$.*

Beweis. $\star$ Wir gehen wie folgt vor: Zunächst zerlegen wir die Mengen A und B in jeweils drei disjunkte Mengen, $A = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup A_3$ und $B = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3$, und zeigen dann, dass $A_i \sim B_i$ gilt. D. h. es gibt bijektive Abbildungen $\varphi_i\colon A_i \to B_i$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist $f\colon A \to B$ mit $f|_{A_i} := \varphi_i$ die gesuchte Bijektion.

(1) **Konstruktion von A_i, B_i und φ_i:** Nach Voraussetzung gibt es injektive Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$. Sei $x \in A$. Definiere, solange dies möglich ist, die Folge
$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))), \ldots.$$
Aufgrund der Injektivität ist das Urbild – falls es existiert – jeweils eindeutig bestimmt. Daher dürfen wir $g^{-1}(x)$ statt $g^{-1}(\{x\})$ schreiben. Es gibt nun drei Möglichkeiten:
(i) Die Folge bricht nach einer ungeraden Anzahl von Schritten ab, hat also die Form x oder
$$x, g^{-1}(x), \ldots, f^{-1}(\ldots).$$
(ii) Die Folge bricht nach einer geraden Anzahl von Schritten ab, hat also die Form
$$x, g^{-1}(x), \ldots, g^{-1}(\ldots).$$
Insbesondere gilt also $x \in \operatorname{im} g$.
(iii) Die Folge bricht nicht ab, d. h. sie lässt sich **ad infinitum** fortsetzen.

Definiere die Mengen
$$A_{f^{-1}} = \left\{x \in A\colon \text{die Folge endet mit } x \text{ oder } f^{-1}(\ldots)\right\},$$
$$A_{g^{-1}} = \left\{x \in A\colon \text{die Folge endet mit } g^{-1}(\ldots)\right\},$$

$$A_\infty = \{x \in A\colon \text{die Folge bricht nicht ab}\}.$$

Nach Definition gilt

$$A = A_{f^{-1}} \dot{\cup} A_{g^{-1}} \dot{\cup} A_\infty.$$

Vollständig analog betrachten wir für $y \in B$ soweit wie möglich die Folge

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \ldots.$$

Wir definieren

$$B_{f^{-1}} = \{y \in B\colon \text{die Folge endet mit } f^{-1}(\ldots)\},$$
$$B_{g^{-1}} = \{y \in B\colon \text{die Folge endet mit } g^{-1}(\ldots)\}$$

sowie

$$B_\infty = \{y \in B\colon \text{die Folge bricht nicht ab}\}.$$

Ebenso wie oben folgt auch hier

$$B = B_{f^{-1}} \dot{\cup} B_{g^{-1}} \dot{\cup} B_\infty.$$

Die Bezeichnungen sind dabei stets so gewählt, dass der Index bei $A.$ oder $B.$ angibt, welche Inverse wir zuletzt anwenden konnten.

(2) **Bijektive Abbildungen:** Wir kommen nun zu den drei bijektiven Abbildungen:

(i) Wir behaupten, dass $f|_{A_{f^{-1}}}\colon A_{f^{-1}} \to B_{f^{-1}}$ bijektiv ist:
f ist injektiv. Somit müssen wir nachweisen, dass $f(A_{f^{-1}}) = B_{f^{-1}}$ gilt. Dazu zeigen wir, dass jedes Element der linken Menge auf ein Element der rechten Menge abgebildet wird und dass jedes Element dort getroffen wird.

(a) Das Bild ist in $B_{f^{-1}}$ enthalten: Ist $x \in A_{f^{-1}}$, so hört die Folge bei $f^{-1}(\ldots)$ auf und hat die Form

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \ldots, f^{-1}(\ldots).$$

In dieser Folge ersetzen wir nun x durch $f^{-1}(f(x))$ und fügen am Anfang noch den Term $f(x)$ hinzu. Beachte, dass $f^{-1}(f(x)) = x$ gilt. Wir erhalten

$$f(x), f^{-1}(f(x)), g^{-1}(f^{-1}(f(x))), \ldots, f^{-1}(\ldots).$$

Dies ist eine Folge, die bei einem Element in B startet, eine ungerade Anzahl an Folgegliedern hat und bei einem Element der Form $f^{-1}(\ldots)$ aufhört und nicht weiter fortgesetzt werden kann. Somit ist $f(x) \in B_{f^{-1}}$.

(b) Surjektivität: Sei $y \in B_{f^{-1}}$. Dann hat die zugehörige Folge die Gestalt

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \ldots f^{-1}(\cdot).$$

Wir definieren nun $x := f^{-1}(y)$, was wohldefiniert ist, lassen den ersten Term weg und erhalten

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \ldots, f^{-1}(\ldots).$$

Dies zeigt, dass $x \in A_{f^{-1}}$ ist. Somit ist $f(x) = y$. Daher ist f surjektiv.

(ii) Wir behaupten nun, dass $g|_{B_{g^{-1}}}\colon B_{g^{-1}} \to A_{g^{-1}}$ bijektiv ist:
Dies folgt genauso wie die erste Behauptung, wir müssen nur die Rollen von A und B sowie f und g vertauschen.

(iii) Schließlich behaupten wir noch, dass $f|_{A_\infty}\colon A_\infty \to B_\infty$ bijektiv ist:
Da f injektiv ist, genügt wiederum der Nachweis, dass $f(A_\infty) = B_\infty$ ist. Wir gehen dazu wieder genauso wie beim Beweis der ersten Behauptung vor.

(a) Wohldefiniertheit: Sei $x \in A_\infty$. Dann bricht die Folge
$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \ldots$$
nicht ab. Wir ersetzen x durch $f^{-1}(f(x))$ (ohne die Werte der Folgeglieder dadurch zu ändern) und fügen am Anfang den Term $f(x)$ hinzu. Somit erhalten wir eine bei $f(x)$ beginnende unendliche Folge, also $f(x) \in B_\infty$.

(b) Surjektivität: Sei nun $y \in B_\infty$ beliebig. Wir erhalten also die nicht abbrechende Folge
$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \ldots.$$
Wir ersetzen wiederum $f^{-1}(y)$ durch $x := f^{-1}(y)$ und lassen den ersten Term weg. Somit ist $x \in A_\infty$, $f(x) = y$ und somit ist $f|_{A_\infty} : A_\infty \to B_\infty$ surjektiv.

Die Behauptung folgt. □

inj surj inv prop

Proposition 1.6.4. *Seien A, B, C Mengen. Seien $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ Abbildungen. Sei $f\colon A \to B$ eine weitere Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

inj surj inv prop i

(i) Ist $\psi \circ \varphi$ injektiv, so ist φ injektiv.

inj surj inv prop ii

(ii) Ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv, so ist ψ surjektiv.

inj surj inv prop iii

(iii) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt.

inj surj inv prop iv

(iv) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gibt.

Beweis.

(i) Falls nicht, so gäbe es $x, y \in A$ mit $x \neq y$ und $\varphi(x) = \varphi(y)$. Daraus folgt auch $\psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi(y))$. Dies widerspricht der angenommenen Injektivität von $\psi \circ \varphi$. Somit folgt die Behauptung.

(ii) Übung.

(iii)

„$\Leftarrow$“: Folgt aus (ii).

„$\Rightarrow$“: Wir definieren **eine** solche Abbildung g wie folgt: Sei $y \in B$ beliebig. Da f surjektiv ist, ist die Menge $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Aus dieser Menge wählen wir ein x aus und definieren $g(y) := x$. Da $y \in B$ beliebig war, definiert dies eine Abbildung $g\colon B \to A$. Es folgt $f(g(y)) = f(x) = y = \mathrm{id}_B(y)$ wie gewünscht.
(Erläuterung zum Sprachgebrauch: „Wir definieren **die** Abbildung g wie folgt“ würde bedeuten, dass wir auch behaupten, dass es nur eine solche Abbildung g gibt, was hier im Allgemeinen nicht zutrifft.)

(iv) Übung. □

surj maechtiger cor

Korollar 1.6.5. *Es gilt $A \prec B$ genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung $f\colon B \to A$ gibt.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.6.6. Sei A eine Menge.

(i) A heißt **endlich**, falls es eine injektive Abbildung $f\colon A \to \mathbb{N}$ und eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < m$ für alle $x \in A$ gibt.

(ii) A heißt **unendlich**, falls A nicht endlich ist.

(iii) Gibt es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to \{0, \ldots, m-1\}$, so sagen wir dass A die **Kardinalität** m hat: $|A| = m$.
Gibt es keine solche Abbildung, so setzen wir $|A| = \infty$.

(iv) Sei P eine Aussageform auf A. Dann gilt P für **fast alle** $i \in A$, wenn
$$\{i \in A \colon \neg P(i)\}$$
endlich ist. Abkürzung: f. a..

Bemerkung 1.6.7. $\star$ Unsere obige Definition ist recht grob. Beispielsweise gelten $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ und $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, aber auch $|\mathbb{N}| = \infty = |\mathbb{R}|$ wie wir noch sehen werden.

`endl bij lem`

Lemma 1.6.8.

(i) Für jede endliche Menge A gilt $|A| < \infty$.
Insbesondere gibt es also für jede endliche Menge A ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f \colon A \to \{0, \ldots, m-1\}$.

(ii) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f \colon \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\}$ eine Bijektion. Dann gilt $m = n$. Dies zeigt, dass die Kardinalität einer Menge wohldefiniert ist.

Beweis. $\star$ (Ideen veranschaulichen)

(i) Sei A endlich, $m \in \mathbb{N}$ und $f \colon A \to \mathbb{N}$ eine injektive Abbildung mit $f(x) < m$ für alle $x \in A$. Ist $f \colon A \to \{0, \ldots, m-1\}$ nicht surjektiv, so konstruieren wir eine weitere injektive Abbildung $f_1 \colon A \to \{0, \ldots, m-2\}$: Ist $m - 1 \not\in \operatorname{im} f$, so sind wir fertig. Sonst gibt es ein $x_0 \in A$ mit $f(x_0) = m - 1$. Da $f \colon A \to \{0, \ldots, m-1\}$ nicht surjektiv ist, gibt es ein $n \in \{0, \ldots, m-1\} \setminus \operatorname{im} f$. Wir definiere
$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0, \\ n & x = x_0. \end{cases}$$
Auch die Abbildung $f_1 \colon A \to \mathbb{N}$ ist injektiv. Es gilt $f_1(x) < m - 1$ für alle $x \in A$. Ist f_1 nicht surjektiv, so konstruieren wir genauso wie wir f_1 aus f konstruiert haben eine weitere Abbildung f_2 aus f_1. Da jede natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ von der Gestalt 0, 1 oder $1 + \ldots + 1$ ist, bricht dieser Prozess nach endlich vielen Schritten ab und wir erhalten wie gewünscht eine bijektive Abbildung.

(ii) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei ohne Einschränkung $n < m$. Definiere $g \colon \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\}$ durch $g(f^{-1}(n)) = f(m)$ und $g(m) = n$ und $g(k) = f(k)$ für $k \not\in \{f^{-1}(n), m\}$, d. h. wir vertauschen gegebenenfalls zwei Funktionswerte, so dass auch g bijektiv ist und $g(m) = n$ erfüllt. Somit ist auch die Einschränkung
$$g|_{\{0,\ldots,m-1\}} \colon \{0, \ldots, m-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$$
bijektiv. Da jedes m von der Gestalt 0, 1 oder $1 + \ldots + 1$ ist, erhalten wir so induktiv nach endlich vielen Schritten eine Abbildung einer nichtleeren Mengen in die leere Menge. Widerspruch. Somit gilt $m = n$. $\square$

`endl fam min lem`

Lemma 1.6.9. *Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $(a_i)_{1 \le i \le m}$ sei eine endliche Familie natürlicher oder reeller Zahlen. Dann gibt es ein i mit $a_i \le a_j$ für alle $1 \le j \le m$.*

Endlich viele reelle Zahlen besitzen also stets ein kleinstes Element oder Minimum. Wir schreiben dafür
$$\min\{a_1, \ldots, a_m\} \quad \textit{oder} \quad \min(a_1, \ldots, a_m)$$
sowie
$$\max\{a_1, \ldots, a_m\} \quad \textit{oder} \quad \max(a_1, \ldots, a_m)$$
für das größte Element.

Beweis. $\star$ (Ideen veranschaulichen)
Wir führen einen Induktionsbeweis:

(i) Anfang: Ist $m = 1$, so ist die Aussage klar.

(ii) Schluss: Sei $m > 1$. Sei $i_0 \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit $a_{i_0} \le a_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Solch ein i_0 gibt es nach Induktionsvoraussetzung, dass die Behauptung für $m-1$ statt m bereits gilt. Ist $a_m \ge a_{i_0}$, so sind wir fertig, sonst ist m der gewünschte Index, denn dann gilt $a_m \le a_j$ für alle $1 \le j \le m$. □

Lemma 1.6.10. *Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind wohlgeordnet, d. h. jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ mit $M \neq \emptyset$ besitzt ein kleinstes Element, d. h. es gibt ein $a \in M$ mit $a \le b$ für alle $b \in M$. Solch ein a heißt kleinstes Element.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt kein kleinstes Element in $M \subset \mathbb{N}$. Wir zeigen durch Induktion, dass $M \cap \{0, 1, \ldots, n\} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 0$ ist dies richtig, denn sonst wäre $0 \in M$ das kleinste Element. Sei die Behauptung bereits für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Betrachte $M \cap \{0, 1, \ldots, n, n+1\}$. Diese Menge ist nach Induktionsannahme leer oder gleich $\{n+1\}$. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da sonst $n+1$ das kleinste Element in M wäre. Somit gilt der Induktionsschritt. Daher ist $M \cap \{0, \ldots, n\} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $M = \emptyset$. Widerspruch. □

abz teilm prop

Proposition 1.6.11. *Sei A eine unendliche Menge. Dann besitzt A eine abzählbare Teilmenge.*

Beweis. Es genügt der Nachweis, dass es eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ gibt. Wir definieren f induktiv.

(i) Anfang: Da A unendlich ist, ist A insbesondere nichtleer. Sei $x_0 \in A$ beliebig. Definiere $f(0) := x_0$.

(ii) Induktionsschritt: Sei $f|_{\{0,\ldots,n\}}$ bereits definiert. Setze $\tilde{A} := A \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} \{f(i)\}$. Da A unendlich ist, ist auch $\tilde{A}$ unendlich (da die Vereinigung von zwei endlichen Mengen wieder endlich ist) und es gibt $x_{n+1} \in \tilde{A}$. Setze $f(n+1) := x_{n+1}$.

Injektivität: Sei $m < n$. Dann ist $f(n) \in A \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \{f(i)\} \not\ni f(m)$. Somit ist f injektiv. □

Es gilt das folgende naheliegende Resultat:

Lemma 1.6.12. *Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn A endlich ist oder $A \sim \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis.

„$\Leftarrow$": Ist A endlich oder abzählbar, so gibt es offensichtlicherweise eine injektive Abbildung $f\colon A \to \mathbb{N}$.

„$\Rightarrow$": Sei A höchstens abzählbar, d. h. es gibt eine injektive Abbildung $f\colon A \to \mathbb{N}$. Also gilt $A \prec \mathbb{N}$. Gibt es ein injektives f, so dass $\operatorname{im} f \subset \mathbb{N}$ beschränkt ist, so ist A endlich und wir sind fertig.

Variante 1: Sonst besitzt $\operatorname{im} f$ nach Proposition 1.6.11 eine abzählbare Teilmenge, d. h. es gibt eine injektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to \operatorname{im} f$, also auch eine injektive Abbildung $f^{-1} \circ g\colon \mathbb{N} \to A$. Somit folgt $\mathbb{N} \prec A$. Nach dem Satz von Schröder-Bernstein erhalten wir somit $A \sim \mathbb{N}$.

Variante 2 $\star$: (Anschaulicher, aber technischer. Idee: Ziehe das Bild so weit nach links, dass Lücken im Bild geschlossen werden.) Induktiver Beweis im nicht-endlichen Fall ohne Schöder-Bernstein: Setze $f_{-1} := f$. Konstruiere für alle $n \in \mathbb{N}$ Abbildungen f_n durch $f_n := f_{n-1}$, falls $n \in \operatorname{im} f_{n-1}$, und sonst durch $f_n(a) := f_{n-1}(a)$, falls $f_{n-1}(a) < n$ und $f_n(a) := f_{n-1}(a) - m_n + n$ mit $m_n = \inf(\operatorname{im} f_{n-1} \cap \{k \in \mathbb{N} : k \ge n\})$. Es gilt stets $\operatorname{im} f_{n-1} \cap \{k \in \mathbb{N} : k \ge n\} \neq \emptyset$, da sonst $\operatorname{im} f_{n-1}$, $\operatorname{im} f_{n-2}$, $\ldots$,

$\operatorname{im} f$ beschränkt wären. Weiterhin gilt $\{0,\dots,n\} \subset \operatorname{im} f_n$ und jedes f_n ist injektiv. Für festes $a \in A$ mit $f(a) \le n$ ist $f_n(a) = f_m(a)$ für alle $m \ge n$. Daher ist $g\colon A \to \mathbb{N}$ mit $g(a) = f_{f(a)}(a)$ bijektiv. □

Lemma 1.6.13. *Sei A eine Menge. Dann ist A genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ gibt.*

Beweis.

„$\Rightarrow$": Sei A höchstens abzählbar. Dann gibt es eine injektive Abbildung $\varphi\colon A \to \mathbb{N}$. Somit gibt nach Proposition 1.6.4 (iv) und (ii) eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ mit $f \circ \varphi = \mathrm{id}_A$.

„$\Leftarrow$": Sei $f\colon \mathbb{N} \to A$ surjektiv. Dann gibt es nach Proposition 1.6.4 (iii) und (i) eine injektive Abbildung $g\colon A \to \mathbb{N}$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_A$. Somit gilt $A \prec \mathbb{N}$. □

N N N prop

Proposition 1.6.14. *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

Beweis. Wir verwenden das Cantorsche Diagonalverfahren. Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$(i,j) \mapsto \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$$

ist bijektiv (Übung unter Verwendung von Beispiel 1.5.39); sie „zählt" nacheinander die Elemente auf jeder der zur Diagonalen parallelen Linie $\{i + j = \text{konstant}\}$ durch. □

Bemerkung 1.6.15. $\star$ Alternativ hätte man in Proposition 1.6.14 auch nur die Injektivität von f nachrechnen können. Damit folgt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \prec \mathbb{N}$. Die Umkehrung ist klar und man erhält die Aussage aus dem Satz von Schröder-Bernstein.

N hoch k abz prop

Proposition 1.6.16. *Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist $\prod\limits_{i=1}^{k} \mathbb{N} = \mathbb{N}^k$ abzählbar.*

Die gilt auch für das endliche kartesische Produkt von beliebigen abzählbaren Mengen.

Beweisidee. Argumentiere ähnlich wie im Fall $k = 2$ oder benutze Induktion. □

abz ver abz abz lem

Lemma 1.6.17. *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Dann ist auch $A := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar.*

Beweis.

(i) Wegen $A_0 \subset A$ und $A_0 \sim \mathbb{N}$ folgt $\mathbb{N} \prec A$.
(ii) Sei $(x_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ für jedes A_i eine Abzählung der Elemente von A_i. Dann ist die Abbildung
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (i,j) \mapsto x_{i,j} \in A$$
surjektiv. Also folgt nach Korollar 1.6.5 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \succ A$. Wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ erhalten wir daraus $\mathbb{N} \succ A$.
(iii) Somit folgt $\mathbb{N} \sim A$ nach dem Satz von Schröder-Bernstein. □

Bemerkung 1.6.18. Proposition 1.6.16 und Lemma 1.6.17 gelten auch, wenn wir überall abzählbar durch höchstens abzählbar ersetzen.

Beweis. Übung. □

Das folgende Theorem liefert später die Existenz überabzählbarer Mengen.

zmenge ueberabzbar thm

Theorem 1.6.19 (Cantor)**.** *Sei A eine beliebige Menge. So ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ strikt mächtiger als A, d. h. es existiert eine injektive Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$, aber keine surjektive Abbildung $A \to \mathcal{P}(A)$.*

Beweis.

(i) Die Abbildung $A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ ist injektiv.

(ii) Wir führen einen Widerspruchsbeweis um zu zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ gibt. Angenommen, f sei eine solche surjektive Abbildung. Definiere

$$M := \{x \in A\colon x \notin f(x)\}.$$

Es gilt $M \subset A$, also $M \in \mathcal{P}(A)$. Da f nach Annahme surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = M$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(a) Ist $a \in M$, so folgt nach Definition von M, dass $a \notin f(a) = M$ gilt. Widerspruch.

(b) Ist $a \notin M$, so gilt $a \notin M = f(a)$. Also erhalten wir nach Definition von M die Aussage $a \in M$. Widerspruch.

Die Behauptung folgt. □

1.7. **Betrag und Wurzel.**

Definition 1.7.1.

(i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren den **Betrag** von x durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b, so heißt $|I| := |b - a|$ die **Länge** des Intervalles I.

Bemerkung 1.7.2. Wir verwenden die folgenden naheliegenden Abkürzungen:

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 0\} \equiv \mathbb{R}_+$$

und

$$\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\},$$

ebenso $\mathbb{N}_{>k} = \{n \in \mathbb{N}\colon n > k\}$ und $\mathbb{N}_{\geq k} = \{n \in \mathbb{N}\colon n \geq k\}$.

⋆ Dabei schreiben wir „≡“ für eine Definition, die häufig nur die Einführung einer Schreibweise ist.

Proposition 1.7.3. *Es gelten*

(i) $x \leq |x|$,

(ii) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ *und*

(iii) $|x| < a \iff -a < x < a$.

Beweis. Übung. □

Korollar 1.7.4. *Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist A genau dann beschränkt, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in A$ die Ungleichung $|x| \leq a$ gilt.*

Theorem 1.7.5 (Dreiecksungleichung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(i) $|a + b| \leq |a| + |b|$, *(Dreiecksungleichung)*

(ii) $|a - b| \geq |a| - |b|$ *und*

(iii) $|a - b| \geq ||a| - |b||$. *(umgekehrte Dreiecksungleichung)*

Beweis.

(i) Übung.

(ii) Es ist
$$|a| = |a - b + b| \le |a - b| + |b|$$
aufgrund der Dreiecksungleichung. Die Behauptung folgt nun durch Umordnen.

(iii) Dies folgt aus $|a - b| \ge |a| - |b|$ und $|a - b| = |b - a| \ge |b| - |a|$. □

Proposition 1.7.6 (Existenz der m-ten Wurzel)**.** *Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}_{\ge 0}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $x^m = a$.*

Beweis. Wir zeigen nur den Fall $m = 2$ und lassen den Rest als Übung. Gelte ohne Einschränkung $a > 0$.

Definiere
$$M := \left\{y \in \mathbb{R}_{\ge 0} \colon y^2 \le a\right\}.$$
Wir möchten zeigen, dass $(\sup M)^2 = a$ gilt.

(i) Es gilt $M \neq \emptyset$, da $0 \in M$ ist.

(ii) M ist nach oben beschränkt: $x \mapsto x^2$ ist für $x \ge 0$ monoton wachsend, d. h. aus $x \le y$ folgt $x^2 \le y^2$: Benutze Lemma 1.5.14 oder betrachte $y \ge x \ge 0$. Dann folgt $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \ge 0$, also die Monotonie. Sei nun $y \ge 1 + a$. Dann erhalten wir $y^2 \ge (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > a$. Somit ist M beschränkt.

(iii) Setze $x_0 := \sup M < \infty$. Wegen $a > 0$ und da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n^2} \le a$. Somit ist $x_0 > 0$.

(iv) Es gilt $x_0^2 \le a$: Wegen $x_0 > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ die Ungleichung $x_0 - \frac{1}{n} > 0$ gilt. Nach Definition des Supremums gibt es zu jedem solchen n ein $x_n \in M$ mit $x_n \ge x_0 - \frac{1}{n}$. Nun folgt aufgrund der Monotonie von $x \mapsto x^2$
$$a \ge x_n^2 \ge \left(x_0 - \tfrac{1}{n}\right)^2 = x_0^2 - \tfrac{2}{n}x_0 + \tfrac{1}{n^2} \ge x_0^2 - \tfrac{2}{n}x_0.$$
Somit ist $a \ge x_0^2$ nach Korollar 1.5.19.

(v) Es gilt $x_0^2 \ge a$: Nach Definition des Supremums gilt $x_0 + \frac{1}{n} \notin M$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir erhalten
$$a \le \left(x_0 + \tfrac{1}{n}\right)^2 = x_0^2 + \tfrac{2}{n}x_0 + \tfrac{1}{n^2} \le x_0^2 + \tfrac{1}{n}(2x_0 + 1).$$
Da dies für beliebige $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt, folgt $a \le x_0^2$.

(vi) Eindeutigkeit: Seien $x, y \ge 0$ mit $x^2 = y^2 = a$. Dann folgt $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ und daher $x = y$. □

Definition 1.7.7. Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei $a \ge 0$.

(i) Dann definieren wir $\sqrt{a}$ als die Zahl in $\mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt{a})^2 = a$.

(ii) Wir definieren weiterhin $\sqrt[m]{a}$ bzw. $a^{\frac{1}{m}}$ als die Zahl in $\mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt[m]{a})^m = a$.

(iii) Wir setzen schließlich $a^{\frac{n}{m}} := \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$ und $a^0 := 1$.

1.8. Weitere Zahlen und deren Kardinalität.

Definition 1.8.1.

(i) Die Menge der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die es $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $m - n = x$, heißt die Menge der **ganzen Zahlen:**
$$\mathbb{Z} := \{m - n \colon m, n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Die **rationalen Zahlen** sind als Quotienten von ganzen Zahlen (ohne Null im Nenner) definiert:
$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \colon p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}.$$

(iii) Die Menge $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt die Menge der **irrationalen Zahlen.**

(iv) Die **komplexen Zahlen** sind Paare von reellen Zahlen:

$$\mathbb{C} := \{(a,b)\colon a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ definieren wir eine Addition durch $(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$ sowie eine Multiplikation durch $(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$. Statt (a,b) schreiben wir auch $a+ib$. Somit gilt insbesondere $i^2=-1$. a heißt Realteil der komplexen Zahl $z=a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$, $a=\operatorname{Re} z$, und b heißt Imaginärteil der komplexen Zahl z, $b=\operatorname{Im} z$. Wir definieren $\overline{a+ib} := a-ib$, die zu $a+ib$ komplex konjugierte komplexe Zahl, und $|a+ib| := \sqrt{a^2+b^2}$, den Betrag der komplexen Zahl $a+ib$. Es gelten für $a,b\in\mathbb{R}$ und $z,w\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |a+ib|^2 &= (a+ib)\overline{(a+ib)},\\ \overline{z+w} &= \overline{z}+\overline{w},\\ \overline{zw} &= \overline{z}\cdot\overline{w},\\ |z|^2 &= |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2,\\ |z| &= |\overline{z}|. \end{aligned}$$

Wir betrachten $\mathbb{R}$ vermöge $x\mapsto(x,0)$ als Teilmenge der komplexen Zahlen und erhalten $\overline{x}=x$ für $x\in\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.8.2.

(i) $\star$ Summen, Differenzen und Produkte ganzer Zahlen sind wieder ganze Zahlen.
(ii) $\star$ Bis auf die Vollständigkeit erfüllen die rationalen Zahlen alle Eigenschaften aus der Definition der reellen Zahlen, d. h. sie bilden einen angeordneten Körper. Man kann zeigen, dass sie jedoch nicht vollständig sind.
(iii) $\star$ Die komplexen Zahlen bilden ebenfalls einen Körper. Er ist nicht angeordnet, aber, wie wir später sehen werden, als metrischer Raum vollständig.
(iv) Zum multiplikativen Inversen in $\mathbb{C}$: Es gilt

$$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2.$$

Ist $(a,b)\neq(0,0)$, so ist daher $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$ die multiplikative Inverse von $a+ib$.
(v) Seien $z,w\in\mathbb{C}$. Dann gilt $|z+w|\le|z|+|w|$.

Beweis. $\star$ Seien $z=a+ib$ und $w=c+id$. Dann gilt $z+w=(a+c)+i(b+d)$. Wir müssen also

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

für alle $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ zeigen. Nach Lemma 1.5.14 ist dies äquivalent zu

$$(a+c)^2+(b+d)^2 \le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

und auch äquivalent zu

$$2ac+2bd \le 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

und wiederum äquivalent (außer im trivialen Fall mit negativer linker Seite) zu

$$a^2c^2+2abcd+b^2d^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Wir müssen also

$$2abcd \le a^2d^2+b^2c^2$$

zeigen, was aus $0 \le (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ mit $A = ad$ und $B = bc$ direkt folgt. $\square$

Aus diesem Beweis erhält man wegen $|x| = \sqrt{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ im Spezialfall $b = d = 0$ auch die reelle Dreiecksungleichung.

(vi) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten $|zw| = |z| \cdot |w|$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Beweis. ⋆ Direktes Ausmultiplizieren. $\square$

`Q R dicht`

Theorem 1.8.3 (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I \neq \emptyset$. Dann ist $I \cap \mathbb{Q}$ unendlich.*

Beweis.

(i) Wir zeigen nur, dass es ein $c \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ gibt. Dann gibt es aufgrund derselben Argumentation ein $d \in \mathbb{Q} \cap (a, c)$, ein $e \in \mathbb{Q} \cap (a, d)$, ... und die Aussage folgt per Induktion.

(ii) Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $a > 0$ ist. Sonst benutzen wir, dass $\mathbb{R}$ archimedisch ist (Theorem 1.5.18) und addieren ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -a$. Gibt es dann eine rationale Zahl $c \in (a+n, b+n)$, so folgt $c - n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$.

(iii) Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b-a}$ oder, äquivalent dazu, $\frac{1}{n} < b - a$.

(iv) Betrachte
$$M := \left\{ m \in \mathbb{N} \colon b \le \tfrac{m}{n} \right\}.$$
Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, ist M nichtleer. Somit besitzt M ein kleinstes Element. Sei $q \in M$ dieses kleinste Element. Definiere $c := \frac{q-1}{n}$. Dann ist $c \in \mathbb{Q}$.

(v) Wegen $b \ge a > 0$ ist $q > 0$. Da $q = \min M$ gilt, folgt $c < b$.

(vi) Weiterhin gilt
$$a = b - (b-a) < b - \tfrac{1}{n} \le \tfrac{q}{n} - \tfrac{1}{n} = c.$$
Somit folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.8.4. ⋆ Wir werden später in Definition 3.1.18 Dichtheit definieren. Diese folgt aus Theorem 1.8.3, da aufgrund dieses Theorems für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$
gilt.

Proposition 1.8.5. *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweisidee. ⋆ Zeige, dass $\mathbb{Q}$ höchstens abzählbar und mindestens abzählbar ist und verwende den Satz von Schröder-Bernstein. Die Details lassen wir als Übung. $\square$

Die folgende Proposition zeigt, zusammen mit Theorem 1.6.19, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Proposition 1.8.6. *Es gilt $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Beweisschritte. ⋆

(i) Es gilt $\mathbb{R} \sim [0, 1)$.

(ii) Jede Zahl $a \in [0, 1)$ lässt sich binär als $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ schreiben. Dies entspricht der Dezimaldarstellung und liefert bis auf Uneindeutigkeiten wie bei $0,0111111\ldots = 0,1000000\ldots$ eine eindeutige Darstellung. Da dies nur bei rationalen Zahlen auftritt, beeinträchtigt dies die weiteren Überlegungen nicht.

Dezimaldarstellungen werden wir noch genauer betrachten.

(iii) Zwischen den Potenzmengen von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ und solchen Dezimaldarstellungen liefert
$$\mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \ni A \mapsto 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$
mit
$$a_i = \begin{cases} 0 & i \notin A, \\ 1 & i \in A \end{cases}$$
eine Bijektion.

Die Details lassen wir als Übung. □

Bemerkung 1.8.7. Das Cantorsche Diagonalverfahren erlaubt den Nachweis, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Beweisidee. ⋆ Man nimmt an, dass die reellen Zahlen im Intervall $[0, 1)$ abzählbar wären. Nun schreibt man diese untereinander. Darunter schreibt man eine Dezimalzahl, die sich an der i-ten Stelle von der i-ten Zahl in der Liste unterscheidet. Somit steht diese Dezimalzahl nicht in der Liste. Bis auf die Uneindeutigkeit bei Zahlen, die auf $9999\ldots$ oder $0000\ldots$ enden, hat man damit eine nicht aufgezählte Zahl gefunden. Somit ist $[0, 1)$ nicht abzählbar. □

Bemerkung 1.8.8. Es gilt $\mathbb{R} \sim (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, d. h. die Menge der reellen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen sind gleich mächtig.

Beweis. Übung. □

2. Konvergenz

2.1. **Metrische Räume.** Mit einer Metrik messen wir Abstände.

Definition 2.1.1 (Metrik)**.** Sei E eine Menge.

(a) Eine Funktion $d\colon E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Metrik,** falls sie die Bedingungen
   (i) $d(x, y) = d(y, x)$, (Symmetrie)
   (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ und ((positive) Definitheit)
   (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)
   für alle $x, y, z \in E$ erfüllt.
(b) Das Paar (E, d) heißt **metrischer Raum.**

Viele Beweise sind in $\mathbb{R}$ und in metrischen Räumen ähnlich. Als Beispiel dafür zeigen wir die umgekehrte Dreiecksungleichung in metrischen Räumen.

Lemma 2.1.2. *Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung*
$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$$
für alle $x, y, z \in E$.

Beweis. Nach Dreiecksungleichung gilt
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$
Umsortieren liefert nun eine Ungleichung. Durch Vertauschen von x und z erhalten wir analog eine zweite Ungleichung und insgesamt die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.3. ⋆ Wir benutzen nun Vektorräume aus der Linearen Algebra. In der Analysis benötigen wir nur Vektorräume über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Um beide Fälle gleichzeitig behandeln zu können, schreiben wir $\mathbb{K}$ statt $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Häufig genügt der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 2.1.4 (Normierter Raum)**.** Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Dann heißt $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ **Norm,** falls

(i) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ ((positive) Definitheit)
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ und (Homogenität)
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)
für alle $x, y \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten.

(b) Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum.**

Als einfaches Resultat über normierte Räume beweisen wir nochmals eine umgekehrte Dreiecksungleichung.

Lemma 2.1.5. *Sei E ein normierter Raum. Seien $x, y \in E$. Dann gilt*

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||.$$

Beweis. Gelte ohne Einschränkung $\|x\| \geq \|y\|$, also $|\|x\| - \|y\|| = \|x\| - \|y\|$. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Umordnen liefert nun die Behauptung. □

Definition 2.1.6 (Skalarproduktraum)**.** Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E \to \mathbb{K}$ **Skalarprodukt,** falls
(i) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (Linearität im ersten Argument)
(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$: symmetrisch/$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: hermitesch)
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ sowie $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (positiv definit)
für alle $x, y, z \in E$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten.

(b) Das Paar $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **Skalarproduktraum.**

Bemerkung 2.1.7. Sei E ein Skalarproduktraum. Dann gilt

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\langle \lambda y + z, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist das Skalarprodukt im zweiten Argument ebenfalls linear. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt dann bilinear.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so heißt das Skalarprodukt sesquilinear.

Bemerkung 2.1.8. ⋆

(i) Die folgenden Sätze lassen sich wie folgt veranschaulichen:

$$\boxed{\text{Metrische Räume}} \supset \boxed{\text{Normierte Räume}} \supset \boxed{\text{Skalarprodukträume}}$$

(ii) Falls wir zukünftig von einer Metrik auf einem normierten Raum oder einer Norm auf einem Skalarproduktraum sprechen, wollen wir stets die nachfolgend eingeführten Metriken bzw. Normen verwenden.

(iii) Laxerweise sprechen wir zukünftig von einem metrischen Raum E statt (E, d), wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind und haben dies auch bereits gemacht. Analog für E statt $(E, \|\cdot\|)$ oder E statt $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Als Vorbereitung benötigen wir

Theorem 2.1.9 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)**.** *Sei E ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

für alle $x, y \in E$. Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $y \neq 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ zunächst beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \overline{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle x,x\rangle - \overline{\lambda}\langle x,y\rangle - \lambda\overline{\langle x,y\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle.$$

Setze nun speziell $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, so erhalten wir nach Multiplikation mit $\langle y,y\rangle$

$$0 \le \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle - 2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2.$$

Dies ist gerade die behauptete Ungleichung.

Charakterisierung der Gleichheit: Übung. $\square$

Bemerkung 2.1.10. $\star$ Die Wahl von λ im Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung war unmotiviert. Unter Rückgriff auf Schulkenntnisse holen wir dies im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nun nach. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ funktioniert ähnlich.

Will man die Funktion

$$\lambda \mapsto \langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$$

minimieren, so betrachtet man einen Punkt, in dem die erste Ableitung verschwindet. Dort gilt

$$0 = -2\langle x,y\rangle + 2\lambda\langle y,y\rangle.$$

Hieraus ergibt sich der oben verwendete Wert für λ.

Theorem 2.1.11. *Sei E ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ für $x \in E$ eine Norm auf E.*

Beweis.

(i) Die positive Definitheit ist klar.

(ii) Da $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}_+$ ist und $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ für $a,b \in \mathbb{R}_+$ gilt, folgt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\cdot\|x\|^2} = |\lambda|\cdot\|x\|.$$

(iii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z + \overline{z} \equiv (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\operatorname{Re} z \le 2\cdot|z|.$$

Damit folgt die Dreiecksungleichung unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\le \langle x,x\rangle + 2\cdot|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \\ &\le \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2.\end{aligned}$$ $\square$

Theorem 2.1.12. *Sei E ein normierter Raum. Dann definiert $d(x,y) := \|x-y\|$ für alle $x,y \in E$ eine Metrik auf E.*

Beweis.

(i) Die Symmetrie ist klar.

(ii) Definitheit: Wegen der Definitheit der Norm folgt aus $0 = d(x,y) = \|x-y\|$ bereits $x = y$. Weiterhin gilt $\|0\| = \|0+0\| = 2\|0\|$ und daher folgt $\|x-x\| = \|0\| = 0$.

(iii) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$ impliziert die Dreiecksungleichung. $\square$

metr raum bsp

Beispiele 2.1.13.

(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ und $y = (y^1, \ldots, y^n)$. Dann definiert
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x^i \cdot y^i$$
ein Skalarprodukt, das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Die zugehörige euklidische Norm ist durch
$$\|x\| \equiv |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|x^i\right|^2}$$
und die euklidische Metrik ist durch
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|x^i - y^i\right|^2}$$
gegeben.

(ii) Insbesondere sind die reellen Zahlen mit $\langle x, y\rangle = xy$ ein Skalarproduktraum, mit $\|x\| = |x|$ ein normierter Raum und mit $d(x, y) := |x - y|$ ein metrischer Raum.

(iii) $\mathbb{C}^n$ ist ein Skalarproduktraum mit
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x^i \cdot \overline{y^i}.$$

(iv) Insbesondere ist $\mathbb{C}$ ein Skalarproduktraum mit $\langle z, w\rangle = z \cdot \overline{w}$. Es gilt im zugehörigen metrischen Raum $d(z, w) = |z - w|$.

(v) Sei $1 \le p < \infty$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann definiert
$$\|x\|_p \equiv \|x\|_{l^p(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{i=1}^n \left|x^i\right|^p\right)^{1/p}$$
eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. $\star$ Die Bezeichnung des Raumes könnte irreführend sein; $l^p(\{1, \ldots, n\})$ wäre auch möglich. (Momentan können wir diese Definition nur für $p \in \mathbb{Q}_{\ge 1}$ verstehen, da wir allgemeinere Potenzen noch nicht definiert haben.)

Ebenso erhält man Normen auf $\mathbb{C}^n$.

Der Vollständigkeit halber geben wir in Theorem 2.1.16 einen Beweis an. Dieser ist aktuell jedoch noch nicht mit den hier behandelten Kenntnissen verständlich.

Mit Hilfe der (noch nicht behandelten) Parallelogrammgleichung kann man sehen, dass diese Norm im Falle $p \neq 2$ nicht von einem Skalarprodukt herkommt.

Diese Norm bzw. Metrik heißt im Falle $p = 1$ Manhatten-Metrik, im Falle $p = 2$ euklidische Metrik und im Falle $p = \infty$ Box-Metrik.

Hierzu gibt es auch eine Version mit Integralen und $1 \le p < \infty$:
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

(vi) Im Fall $p = \infty$ definiert
$$\|x\|_\infty \equiv \|x\|_{l^\infty(\mathbb{R}^n)} := \max_{1 \le i \le n} \left|x^i\right|$$
eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Übung. Folgt mit $A = \{1, \ldots, n\}$ auch aus (vii). $\square$

sup norm item

(vii) Sei A eine nichtleere Menge. Auf dem Vektorraum der beschränkten Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$ definiert
$$\|f\|_{L^\infty(A)} := \sup_{x\in A} |f(x)|$$
eine Norm.

Beweis. Übung □

(viii) Sei E eine Menge. Definiere eine Metrik, die diskrete Metrik, durch
$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$
$\star$ Diese Metrik ist für $|E| \geq 2$ nicht von einer Norm induziert.

(ix) Sei (E,d) ein metrischer Raum und $A \subset E$. Dann ist $d_A\colon A\times A \to \mathbb{R}_+$ mit
$$d_A(x,y) := d(x,y)$$
für alle $x,y \in A$ eine Metrik auf A. d_A heißt die von d auf A induzierte Metrik.

(x) $\star$ Sei U ein Unterraum eines Skalarproduktraumes. Dann ist die Einschränkung des Skalarproduktes auf $U \times U$ ein Skalarprodukt auf U: Das induzierte Skalarprodukt.

(xi) $\star$ Sei U ein Unterraum eines normierten Raumes. Dann ist die Einschränkung der Norm auf U eine Norm auf U: Die induzierte Norm.

Das folgende Resultat gilt auch ohne die Definitheit eines Skalarproduktes.

Proposition 2.1.14 (Polarisationsformeln)**.**

(i) Sei E ein Skalarproduktraum über $\mathbb{K}$, so gilt
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle.$$
(ii) Ist E ein Skalarproduktraum über $\mathbb{R}$, so gilt
$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \tfrac12\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \tfrac12\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \tfrac14\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$
(iii) Ist E ein Skalarproduktraum über $\mathbb{C}$, so gilt
$$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

Beweis. Benutze die Multilinearität und $2\operatorname{Re} z = z + \overline{z}$. □

Proposition 2.1.15. *Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann gibt es genau dann ein Skalarprodukt, das die Norm induziert, falls die Parallelogrammgleichung*
$$2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$
gilt.

Beweisidee. $\star$

„$\Rightarrow$“: Ist einfaches Nachrechnen.

„$\Leftarrow$“: Benutze die Polarisationsformel um einen Kandidaten für ein Skalarprodukt zu definieren. Beim Nachweis der Linearität ist es einfach, Summen auseinanderzuziehen, bei reellen Faktoren zeigt man dies per Induktion zunächst für ganze und rationale Faktoren. Im komplexen Fall benutzt man zunächst, dass ein komplexer Vektorraum auch ein reeller Vektorraum ist und benutzt dann das Skalarprodukt aus dem reellen Fall.

Dieser Beweisteil ist etwas technischer. □

eiecks ungleichung thm

Theorem 2.1.16. *Seien $1 \le p, q \le \infty$ konjugierte Exponenten mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten*

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \cdot y^i \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

und

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Die erste Ungleichung heißt Höldersche Ungleichung, die zweite Minkowskische Ungleichung.

Beweis. $\star$ Wir folgen [9]. Die einfachen Fälle $p = \infty$, $q = \infty$, $x = 0$ oder $y = 0$ lassen wir als Übung.

(i) Für den Beweis der Hölderschen Ungleichung dürfen wir ohne Einschränkung $\|x\|_p = 1 = \|y\|_p$ annehmen. Für jedes i mit $1 \le i \le n$ und $x^i \neq 0 \neq y^i$ gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $\left|x^i\right| = e^{s/p}$ und $\left|y^i\right| = e^{t/q}$. Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ liefert die Konvexität der Exponentialfunktion
$$e^{s/p+t/q} \le \tfrac{1}{p} e^s + \tfrac{1}{q} e^t.$$
Also folgt
$$x^i \cdot y^i \le \left|x^i\right| \cdot \left|y^i\right| \le \tfrac{1}{p} \left|x^i\right|^p + \tfrac{1}{q} \left|y^i\right|^q.$$
Dies gilt nun auch wieder für $x^i = 0$ oder $y_i = 0$. Wir summieren nun auf beiden Seiten über i und erhalten auf der linken Seite die linke Seite in der Behauptung und auf der rechten Seite $\frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Somit folgt die Behauptung.

(ii) Zum Beweis der Minkowskischen Ungleichung schreiben wir
$$\left(x^i + y^i\right)^p = x^i \cdot \left(x^i + y^i\right)^{p-1} + y^i \cdot \left(x^i + y^i\right)^{p-1}.$$
Jeden der beiden Terme auf der rechten Seite können wir mit der Hölderschen Ungleichung behandeln. Es gelten
$$\sum_{i=1}^{n} x^i \left|x^i + y^i\right|^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x^i + y^i\right|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
sowie $(p-1)q = p$. Eine entsprechende Abschätzung bekommen wir für den zweiten Term. Also folgt
$$\sum_{i=1}^{n} \left|x^i + y^i\right|^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x^i + y^i\right|^p\right)^{1/q} \cdot \left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left|y^i\right|^p\right)^{1/p}\right\}.$$
Bringen wir nun den ersten Faktor auf der rechten Seite nach links und berücksichtigen, dass p und q konjugierte Exponenten sind, so folgt die Minkowskische Ungleichung oder Dreiecksungleichung für l^p-Räume. $\square$

Definition 2.1.17. Sei E ein metrischer Raum. Seien $A, B \subset E$ nicht leer.

(i) Dann heißt
$$\operatorname{diam} A := \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$
Durchmesser der Menge A.

(ii) Dann definieren wir die **Distanz** $\operatorname{dist}(A, B)$ zwischen den Mengen A und B durch
$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) \colon x \in A, y \in B\}.$$
Wir setzen weiterhin $\operatorname{dist}(x, B) := \operatorname{dist}(\{x\}, B)$ für $x \in E$.

Bemerkung 2.1.18. $\star$ Dies ist keine Metrik auf den nichtleeren Teilmengen von E. Als Metrik auf solchen Mengen werden wir später die Hausdorffmetrik kennenlernen.

2.2. **Folgen.**

Bemerkung 2.2.1. $\star$ Die Sätze dieses Kapitels über Konvergenz in metrischen Räumen könnte man alternativ auch zunächst in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ zeigen. Sie gelten aber auch allgemeiner wie hier angegeben in metrischen Räumen, manchmal sogar in topologischen Räumen. Allen, denen die Resultate beim ersten Lesen zu abstrakt sind, empfehlen wir daher, sie zunächst nur für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann für $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ und schließlich wie angegeben nachzuvollziehen. Ein guter Kompromiss zwischen Abstraktion und dem einfacheren Fall $\mathbb{R}$ sind die Fälle $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$.

Definition 2.2.2. Sei E ein metrischer Raum. Sei $x \in E$ und $\varepsilon > 0$. Dann definieren wir die ε-**Kugel** (engl. ball)

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in E \colon d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Wir nennen $B_\varepsilon(x)$ auch eine bzw. die ε-Umgebung von x.

Definition 2.2.3 (Konvergenz)**.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum.

(i) Dann **konvergiert** $(x_n)_n$ gegen $a \in E$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Folgeglieder in $B_\varepsilon(a)$ liegen.
(ii) Konvergiert $(x_n)_n$ nicht, d. h. gibt es kein $a \in E$, gegen das $(x_n)_n$ konvergiert, so heißt die Folge $(x_n)_n$ **divergent**.
(iii) Konvergiert $(x_n)_n$ gegen $a \in E$, so heißt a **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(x_n)_n$,
$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$
Wir schreiben auch $x_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Beispiele 2.2.4.

(i) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ konvergiert gegen Null.
(ii) Sei $0 < a < 1$. Dann konvergiert die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Null.
(iii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n = (-1)^n$ divergiert.
xn=n div item (iv) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n = n$ divergiert.
(v) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n = (-1)^n n$ divergiert.
(vi) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergente Folgen. Dann konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit
$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & n \quad \text{gerade,} \\ y_{\frac{n-1}{2}} & n \quad \text{ungerade} \end{cases}$$
genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Beweis. Bei den Übungen darf man auch die nachfolgend definierte Monotonie nutzen.

(i) Übung.
(ii) Übung.
(iii) Falls es $a \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$ gäbe, so gäbe es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ gilt. Es folgt für solche n (von der Mitte her lesen!)
$$2 = |1 - (-1)| = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < 2\frac{1}{2} = 1.$$
Widerspruch. Daher konvergiert die Folge $x_n = (-1)^n$ nicht.

(iv) Wegen $|x_n| = n$ ist die Folge (wie nachfolgend definiert) unbeschränkt. Daher kann sie nach Proposition 2.2.8 nicht konvergent sein.
(v) Wie für (iv).
(vi) Übung. $\square$

Bemerkung 2.2.5. $\star$ Die Definition von Konvergenz ist äquivalent zu

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$.
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass aus $n \geq n_0$ bereits $d(x_n, a) < \varepsilon$ folgt.
(iii) Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass aus $n \geq n_0$ bereits $d(x_n, a) < \varepsilon$ folgt.
(iv) Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass aus $n \geq n_0$ bereits $d(x_n, a) \leq \varepsilon$ folgt.

Definition 2.2.6 (Beschränktheit)**.** Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes E heißt **beschränkt,** falls es ein $x \in E$ und ein $r > 0$ mit $A \subset B_r(x)$ gibt.

Lemma 2.2.7. *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E ist genau dann beschränkt, wenn es ein $r > 0$ mit $A \subset B_r(0)$ (oder $\|a\| < r \quad \forall\, a \in A$) gibt.*

Beweis. Wir nutzen die induzierte Metrik auf E.

„$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung gibt es $x \in E$ und $r > 0$ mit $\|a - x\| < r$ für alle $x \in A$. Nach Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < r + \|a\| =: \tilde{r}.$$

„$\Leftarrow$“: Klar; nutze $x = 0$. $\square$

eind lim beschr prop

Proposition 2.2.8. *In einem metrischen Raum gilt:*

(i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt, d. h. $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ist eine beschränkte Menge.

Beweis.

(i) Angenommen a und b wären zwei verschiedene Grenzwerte einer konvergenten Folge $(x_n)_n$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{3} d(a,b) > 0$. Dann gibt es ein n_a und ein n_b mit $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_a$ und $d(x_n, b) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_b$. Sei $N := \max\{n_a, n_b\}$. Dann folgt für $n \geq N$

$$3\varepsilon = d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Widerspruch.
(ii) Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon = 1$. Dann gibt es n_0 mit $x_n \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$. Somit ist

$$d(x_n, a) \leq \max\left(1, \max_{0 \leq i \leq n_0} d(x_i, a)\right)$$

wie behauptet. $\square$

e prod vert limes prop

Proposition 2.2.9. *Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ konvergente Folgen in E.*

(i) Ist E ein normierter Vektorraum, so konvergiert auch die Folge $(x_n + y_n)_n$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(ii) Ist $E = \mathbb{R}$, so konvergiert auch die Folge $(x_n \cdot y_n)_n$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Beweis. Setze $a := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(i) Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt
$$\begin{aligned}\|x_n + y_n - (a+b)\| &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\le \|x_n - a\| + \|y_n - b\|.\end{aligned}$$
Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $x_n \to a$ gibt es $n_a \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - a\| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_a$. Ebenso gibt es n_b mit $\|x_n - b\| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_b$. Sei $n \ge n_a$ und $n \ge n_b$. Dann folgt $\|(x_n + y_n) - (a+b)\| < 2\varepsilon$. Hätten wir anfangs $\varepsilon > 0$ halb so groß gewählt, hätten wir nun „$< \varepsilon$“ erhalten. Somit folgt
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$$

(ii) Es gilt
$$x_n y_n - ab = (x_n - a)b + x_n(y_n - b).$$
Nach Dreiecksungleichung und $|st| = |s| \cdot |t|$ für $s, t \in \mathbb{R}$ folgt
$$|x_n y_n - ab| \le |b| \cdot |x_n - a| + |x_n| \cdot |y_n - b|.$$
Da $(x_n)_n$ konvergiert, gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $x_n \to a$ und $y_n \to b$ konvergieren, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| \le \varepsilon$ und $|y_n - b| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Somit ist
$$|x_n y_n - ab| \le |b| \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon = (|b| + c) \cdot \varepsilon.$$
Wie oben (vergleiche auch die nachfolgende Bemerkung) stört die Konstante $|b| + c$ nicht, da $\varepsilon > 0$ beliebig war, und wir erhalten $x_n y_n \to ab$. □

Im letzten Beweis haben wir gesehen, dass es auf Konstanten bei „$< \varepsilon$“ nicht ankommt, da $\varepsilon > 0$ anfangs beliebig war. Wir halten dies fest.

Bemerkung 2.2.10. Sei $(x_n)_n \subset E$ eine Folge. Sei $a \in E$. Sei $c > 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ die Ungleichung $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt.
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ die Ungleichung $d(x_n, a) < c \cdot \varepsilon$ gilt.

Proposition 2.2.11. *Gelte $x_n \to a$ in E.*

(i) Ist E ein normierter Raum, so folgt $\|x_n\| \to \|a\|$.
(ii) Ist $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{C}$ und gelten $x_n \ne 0$ für alle n sowie $a \ne 0$, so folgt $x_n^{-1} \to a^{-1}$.
(iii) Sei $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{C}$. Dann folgt aus $x_n \to a \ne 0$ bereits $x_n \ne 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

(i) Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt
$$\big|\|x_n\| - \|a\|\big| \le \|x_n - a\|.$$
Die Konvergenz $x_n \to a$ impliziert, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die rechte Seite für $n \ge n_0$ kleiner als ε ist. Dies gilt auch für die linke Seite.

(ii) Es gilt
$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n a}.$$
Gilt $\left|\frac{1}{x_n a}\right| \le c$ für eine Konstante $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir hieraus die Konvergenz. Wegen $x_n \ne 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, genügt es, die Ungleichung $|1/(x_n a)| \le c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

(iii) Sei $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$. Dann gilt $x_n \in B_\varepsilon(a)$ für fast alle n. Somit ist $|x_n| \ge |a| - |x_n - a| \ge 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$, also $\left|\frac{1}{x_n}\right| \le \frac{1}{\varepsilon}$. Die Behauptung folgt. □

Lemma 2.2.12 beweisen wir nicht, da der Beweis fast identisch zu dem von Proposition 2.2.13 ist.

ungl R lem

Lemma 2.2.12. ⋆ *Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Gilt $x_n \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt auch $a \le c$.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann ist $a > c$. Sei $\varepsilon := \frac{a-c}{2}$. Wegen $x_n \to a$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \ge n_0$. Es folgt $x_n - c = x_n - a + a - c \ge -\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon > 0$. Dies widerspricht der Annahme $x_n \le c$. □

Formuliere und zeige das folgende Resultat auch im Falle eines normierten Raumes mit $b = 0$!

ungl metr raum prop

Proposition 2.2.13. *Sei E ein metrischer Raum, seien $a, b \in E$ und sei $r > 0$. Sei $(x_n)_n \subset E$ eine Folge mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$.*

(i) Gilt $d(x_n, b) \le r$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt auch $d(a, b) \le r$.
(ii) Gilt $d(x_n, b) \ge r$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt auch $d(a, b) \ge r$.
(iii) Ist $E = \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ und $x_n \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $a \le c$.

Beweis.

(i) Widerspruchsbeweis. Definiere $s := \frac{d(a,b)-r}{2} > 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $x_n \in B_s(a)$ gilt. Dann folgt
$$r + 2s = d(a, b) \le d(a, x_n) + d(x_n, b) \le s + r. \qquad \square$$
(ii) Übung.
(iii) Argumentiere analog oder nutze Lemma 2.2.12.

Definition 2.2.14. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt $(x_n)_n$

(i) **monoton wachsend,** $x_n \nearrow$, falls $x_{n+1} \ge x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(ii) **streng** oder **strikt monoton wachsend,** falls $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(iii) ⋆ **monoton fallend,** $x_n \searrow$, falls $x_{n+1} \le x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(iv) ⋆ **Streng** oder **strikt monoton fallend** ist analog definiert.
(v) Wir schreiben $x_n \nearrow a$ für $x_n \nearrow$ und $x_n \to a$.

mon beschr konv R thm

Theorem 2.2.15. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert $(x_n)_n$.*

Beweis. Sei $(x_n)_n$ ohne Einschränkung monoton wachsend. Definiere $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Wir behaupten, dass $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gelten $x_n \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_{n_0} \ge M - \varepsilon$ ist. Da $(x_n)_n$ monoton wachsend ist, folgt auch $x_n \ge M - \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Wir erhalten $M - \varepsilon \le x_n \le M$ für alle $n \ge n_0$. Dies impliziert $|x_n - M| \le \varepsilon$ für solche n und damit die Behauptung. □

Aus dem Beweis ergibt sich

mon konv schranken kor

Korollar 2.2.16. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$*
$$x_k \le \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Ein analoges Resultat gilt für monoton fallende beschränkte Folgen.

Beispiel 2.2.17. Definiere für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Folgen

$$x_n := \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad y_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dann ist die Folge $(x_n)_n$ monoton wachsend und die Folge $(y_n)_n$ ist monoton fallend. Es gelten $x_n \le y_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Der Grenzwert wird später als Eulersche Zahl e wieder auftauchen.

Beweis. Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$

Der Beweis dieser Ungleichung ist ein einfacher Induktionsbeweis (Übung). Sei $n \ge 2$. Dann erhalten wir aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right)^n \overset{\text{Bern.}}{\ge} 1 - \tfrac{1}{n}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \\ &= \left(1 + \tfrac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n \overset{\text{Bern.}}{\ge} 1 + \tfrac{1}{n}.\end{aligned}$$

Umordnen der Ungleichungen liefert

$$x_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \ge \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{-(n-1)} = \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1}$$

und

$$y_{n-1} = \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^n = \left(\tfrac{n}{n-1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \ge \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n.$$

Somit gelten $x_n \nearrow$ und $y_n \searrow$. Wegen $y_n \ge x_n$ für alle n sind beide Folgen beschränkt und konvergieren daher. Aus $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

und die Grenzwerte stimmen überein. □

Definition 2.2.18. Sei E ein metrischer Raum und $(x_n)_n \subset E$. Dann heißt $a \in E$ ein **Häufungspunkt,** kurz HP, von $(x_n)_n$, falls in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen.

Beispiele 2.2.19.

(i) Gilt $x_n \to a$, so ist a Häufungspunkt von $(x_n)_n$.

(ii) Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Folgen mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Definiere eine Folge durch

$$z_n := \begin{cases} x_n & \text{für gerades } n, \\ y_n & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

(Dabei bedeutet gerade $n \equiv 0 \pmod 2$ und ungerade $n \equiv 1 \pmod 2$.) Dann besitzt z_n die Häufungspunkte a und b (die auch übereinstimmen können).

(iii) Sei $(x_n)_n$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Dann divergiert die Folge und, da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist, ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt der Folge. (Übung)

Proposition 2.2.20. *Sei $(x_n)_n \subset E$ eine Folge in einem metrischen Raum. Dann ist a genau dann ein Häufungspunkt der Folge, wenn eine Teilfolge von $(x_n)_n$ gegen a konvergiert.*

Beweis.

„$\Leftarrow$": Konvergiert eine Teilfolge von $(x_n)_n$ gegen a, so ist a nach Definition ein Häufungspunkt.

„$\Rightarrow$": Wir definieren die Teilfolge induktiv: Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Definition des Häufungspunktes gibt es ein $k_1 > k_0$ mit $x_{k_1} \in B_1(a)$. Dann gibt es $k_2 > k_1$ mit $x_{k_2} \in B_{1/2}(a)$, $k_3 > k_2$ mit $x_{k_3} \in B_{1/3}(a)$, ... Wegen $d(x_{k_i}, a) < \frac{1}{i}$ für alle $i \geq 1$ erhalten wir, dass die Folge $(x_{k_i})_i$ gegen a konvergiert. $\square$

Theorem 2.2.21 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt.*

Beweis. Seien $a_0 < b_0$ reelle Zahlen mit $a_0 \leq x_n \leq b_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren induktiv Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$: Seien a_n und b_n für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits definiert. Enthält das Intervall $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ unendlich viele Folgeglieder, so setzen wir $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$. Sonst setzen wir $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$ und $b_{n+1} := b_n$. In jedem Fall enthält das neue Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ebenfalls unendlich viele Folgeglieder.

Die Folge $(a_n)_n$ ist monoton wachsend, die Folge $(b_n)_n$ ist monoton fallend. Wegen $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$ für alle n (leicht einzusehen) sind beide Folgen beschränkt und konvergieren daher. Per Induktion erhalten wir $|a_n - b_n| \leq 2^{-n} \cdot |a_0 - b_0|$. Setze $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Wir behaupten, dass $a = b$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{-k} \cdot |a_0 - b_0| < \varepsilon$ gilt. Aufgrund der Konvergenz gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$. Wir erhalten

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b| \leq 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $a = b$.

Wir behaupten, dass a ein Häufungspunkt der Folge ist. Sei dazu nochmals $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to a$ gilt $a_n, b_n \in B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition des Intervalles gilt $[a_n, b_n] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Im abgeschlossenen Intervall liegen nach Konstruktion unendlich viele Folgeglieder. Somit gilt dies auch für das offene Intervall. Daher ist a ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_n$. $\square$

Um den Satz von Bolzano-Weierstraß auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen zu können, benötigen wir ein Resultat, das Konvergenz auf $\mathbb{R}^n$ und Konvergenz der Komponenten in Beziehung setzt. (Man überlege sich, dass diese Beziehung auch für die Eigenschaft, Cauchyfolge zu sein, die nachfolgend noch definiert wird, gilt.)

uiv konv komp konv thm

Theorem 2.2.22. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge mit $x_k = \left(x_k^i\right)_{1\leq i\leq n}$ und sei $a = \left(a^i\right)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

(i) $x_k \to a$ für $k \to \infty$.
(ii) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $x_k^i \to a^i$ für $k \to \infty$.

Beweis.

„$\Rightarrow$": Gelte $x_k \to a = (a^i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ für $k \to \infty$. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left|x_k^i - a^i\right| = \sqrt{\left|x_k^i - a^i\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left|x_k^j - a^j\right|^2} = \|x_k - a\|.$$

Die Behauptung folgt.

„⇐“: Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ aus $n \geq N$ bereits $\left|x_k^i - a^i\right| \leq \varepsilon$ folgt. Damit erhalten wir

$$\|x_k - a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_k^j - a^j\right|^2} \leq \sqrt{n\varepsilon^2} \leq n\varepsilon$$

und somit auch hier die Behauptung. □

Korollar 2.2.23 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Folge, d. h. es gibt ein $r > 0$ so dass $x_k \in B_r(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann besitzt $(x_k)_k$ eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert a erfüllt $|a| \leq r$.*

Beweis.

(i) **Existenz:** Jede Folge der Komponenten von $(x_k)_k$ ist beschränkt: Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\left|x_k^i\right| = \sqrt{\left|x_k^i\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_k^j\right|^2} = |x_k| < r.$$

Somit gibt es eine Teilfolge von $(x_k)_k$, so dass die erste Komponente konvergiert. Davon gibt es eine Teilfolge, so dass auch die zweite Komponente konvergiert. Nach n Schritten erhalten wir so eine Teilfolge, bei der alle Komponenten konvergieren. Sei $(y_k)_k$ diese Folge und seien $a^i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, die Grenzwerte der Komponenten, gelte also $y_k^i \to a^i$ für $k \to \infty$. Definiere $a := \left(a^1, \ldots, a^n\right)$. Die Konvergenz folgt nun aus Theorem 2.2.22.

(ii) **Normabschätzung:** Folgt aus Proposition 2.2.13 mit $b = 0$. □

`sup ist max hp prop` **Proposition 2.2.24.** *Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Folge. Sei M die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_n$. Sei M nicht leer. Dann besitzt M ein Maximum, d. h. $\sup M$ ist selber wieder ein Häufungspunkt.*

Eine entsprechende Aussage gilt auch für nach unten beschränkte Folgen und das Minimum der Häufungspunkte.

Beweis. Gelte $x_n \leq c$ für alle n. Dann ist jeder Grenzwert einer konvergenten Teilfolge ebenfalls $\leq c$. Somit ist M nach oben durch c beschränkt und $\sup M$ existiert in $\mathbb{R}$. Definiere $\gamma := \sup M$. Nach Definition des Supremums gibt es für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $a_k \in M$ mit $a_k \geq \gamma - \frac{1}{k}$. $a_0 \in M$ können wir beliebig wählen, ebenso $n_0 \in \mathbb{N}$ als Start für die folgende induktive Konstruktion. Da jedes a_k ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_n$ ist, finden wir induktiv n_k mit $n_k > n_{k-1}$, so dass $|a_k - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ gilt. Nach Dreiecksungleichung folgt nun

$$|\gamma - x_{n_k}| \leq |\gamma - a_k| + |a_k - x_{n_k}| \leq \tfrac{2}{k}.$$

Somit gilt $x_{n_k} \to \gamma$ für $k \to \infty$. □

Definition 2.2.25. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Sei M die Menge der Häufungspunkte von M. Dann definieren wir den **Limes superior** von $(x_n)_n$ durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup M$$

und den **Limes inferior** von $(x_n)_n$ als

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf M.$$

Ist $(x_n)_n$ nach oben beschränkt, so gilt $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ist $(x_n)_n$ nach unten beschränkt, so gilt $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Bemerkung 2.2.26. Nach Proposition 2.2.24 ist der Limes superior, falls die Menge der Häufungspunkte nicht leer ist, einer nach oben beschränkten Folge der größte Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.

`im sup inf gleich prop`

Proposition 2.2.27. *Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_n$ genau dann konvergent, wenn $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt.*

Beweis.

„⇒“: Konvergiert die Folge, so besitzt sie einen eindeutig bestimmten Häufungspunkt. Daher stimmen Limes inferior und Limes superior überein.

„⇐“: Angenommen, die Folge konvergiert nicht. Setze $a := \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgeglieder nicht in $B_\varepsilon(a)$ liegen. Betrachte eine entsprechende Teilfolge $(x_{n_k})_k \subset \mathbb{R} \setminus B_\varepsilon(a)$. Als beschränkte Folge besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_l$ mit $x_{n_{k_l}} \to b \in \mathbb{R}$. Nach Proposition 2.2.13 folgen $|b-a| \ge \varepsilon$ und weiter $a \neq b$.

Somit besitzt $(x_n)_n$ die beiden Häufungspunkte $a = \varliminf x_n$ und $b \neq a$ und daher gilt $\varlimsup x_n \neq \varliminf x_n$. Die Behauptung folgt. □

Allgemeiner gilt

`folgen komp thm`

Theorem 2.2.28. *Sei E ein metrischer Raum und sei $(x_n)_n \subset E$. Angenommen, jede Teilfolge besitzt eine konvergente Teilfolge und die Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen stimmen überein. Dann konvergiert bereits die gesamte Folge.*

Beweis. Sei a ein solcher Grenzwert. Wir führen eine Widerspruchsbeweis. Falls nicht die gesamte Folge konvergiert, finden wir ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgeglieder nicht in $B_\varepsilon(a)$ liegen. Eine Teilfolge davon, $(y_n)_n$, konvergiere gegen ein $b \in E$. Nach Proposition 2.2.13 folgt $d(b,a) \ge \varepsilon > 0$. Widerspruch zur Eindeutigkeit des Grenzwertes aller konvergenten Teilfolgen. Die Behauptung folgt. □

`cauchy folge def`

Definition 2.2.29 (Cauchyfolge, Vollständigkeit)**.**

(i) Eine Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum E heißt **Cauchyfolge,** CF, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ für alle $k, l \ge n_0$ gibt.
(ii) Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt **vollständiger** metrischer Raum.
(iii) Ein normierter Raum, der mit der induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist, heißt vollständiger normierter Raum oder **Banachraum** (BR).
(iv) Ein Skalarproduktraum, der mit der induzierten Norm ein Banachraum ist, heißt **Hilbertraum** (HR).

Bemerkung 2.2.30. ⋆ Die Cauchyfolgenbedingung kann man auch mit der Ungleichung $d(x_k, x_{k+l}) < \varepsilon$ für alle $k \ge n_0$ und alle $l \in \mathbb{N}$ formulieren.

`konv cauchy lem`

Lemma 2.2.31. *Sei E ein metrischer Raum. Sei die Folge $(x_n)_n \subset E$ konvergent. Dann ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $x_n \to a$ konvergiert, gibt es ein n_0, so dass für alle $n \ge n_0$ auch $d(x_n, a) < \varepsilon$ gilt. Seien nun $k, l \ge n_0$. Es folgt

$$d(x_k, x_l) \le d(x_k, a) + d(a, x_l) \le 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

`etr konv CF aequiv cor`

Korollar 2.2.32. *In einem vollständigen metrischen Raum konvergiert eine Folge genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Proposition 2.2.33. *In einem metrischen Raum gilt:*
(i) *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*
(ii) *Eine Cauchyfolge besitzt höchstens einen Häufungspunkt.*

Beweis.

(i) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon = 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq n_0$ bereits $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ folgt. Setze $r := \max\{d(x_i, x_{n_0}) \colon 0 \leq i \leq n_0 - 1\} + 1$. Dann gilt $x_n \in B_r(x_{n_0})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Angenommen, $a \neq b$ wären zwei Häufungspunkte. Setze $\varepsilon := \frac{1}{4}d(a, b)$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ für alle $k, l \geq n_0$ ist. Da a und b Häufungspunkte sind, gibt es $k, l \geq n_0$ mit $d(a, x_k) < \varepsilon$ und $d(b, x_l) < \varepsilon$. Es folgt
$$d(a, b) \leq d(a, x_k) + d(x_k, x_l) + d(x_l, b) < 3\varepsilon = \tfrac{3}{4}d(a, b).$$
Widerspruch. □

Rn Cauchykrit cor

Korollar 2.2.34. $\mathbb{R}^n$ *(mit der euklidischen Metrik) ist ein vollständiger metrischer Raum. Insbesondere konvergiert eine Folge in* $\mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Dies heißt Cauchykriterium.*

Dies gilt insbesondere auch für $\mathbb{R}$ selbst.

Beweis. Wir wollen Theorem 2.2.28 anwenden um zu zeigen, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert. Sei $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ eine Cauchyfolge. Sei $(x_{n_k})_k$ eine beliebige Teilfolge. Dann ist die Teilfolge ebenfalls Cauchyfolge und daher beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt $(x_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_l$: Es gibt $a \in \mathbb{R}^n$ mit $x_{n_{k_l}} \to a$ für $l \to \infty$. Damit ist a ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$. Hätten wir hier andere Teilfolgen gewählt, so wäre der Grenzwert wieder a, da eine Cauchyfolge maximal einen Häufungspunkt besitzt. Damit ist Theorem 2.2.28 anwendbar und die Behauptung folgt. □

Wir wollen nun zeigen, dass auch $l^p(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist. Dazu führen wir zunächst eine Äquivalenzrelation ein. Wir lassen den Nachweis, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt, als Übung.

Definition 2.2.35. Sei E ein Vektorraum. Dann heißen zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E **äquivalent,** falls es $c > 0$ gibt, so dass
$$\frac{1}{c} \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1$$
für alle $x \in E$ gilt.

Proposition 2.2.36. *Sei E ein Vektorraum mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Dann ist $(E, \|\cdot\|_1)$ genau dann vollständig, wenn $(E, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist.*

Beweis. Sei E mit der Norm $\|\cdot\|_1$ vollständig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchyfolge in E bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$. Wegen
$$\|x_k - x_l\|_1 \leq c \cdot \|x_k - x_l\|_2$$
ist $(x_n)_n$ auch bezüglich $\|\cdot\|_1$ eine Cauchyfolge. Somit konvergiert $x_n \to x$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ für ein $x \in E$ für $n \to \infty$. Wegen
$$\|x - x_n\|_2 \leq c \cdot \|x - x_n\|_1$$
gilt auch $x_n \to x$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$. Die Behauptung folgt. □

Proposition 2.2.37. *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$. Dann sind $\|\cdot\|_{l^p}$ und $\|\cdot\|_{l^q}$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalente Normen.*

Beweis. Für alle $1 \le p < \infty$, alle $1 \le i \le n$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left|x^i\right| = \left(\left|x^i\right|^p\right)^{1/p} \le \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \left|x^k\right|^p\right)^{1/p}}_{=\|x\|_{l^p}} \le \left(\sum_{k=1}^n \|x\|_{l^\infty}^p\right)^{1/p} = \underbrace{n^{1/p}}_{\le n} \cdot \|x\|_{l^\infty}.$$

Da dies für alle $1 \le i \le n$ gilt, folgt auch

$$\|x\|_{l^\infty} \le \|x\|_{l^p} \le n\|x\|_{l^\infty}.$$

Somit sind die l^p- und die l^∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent. Die Behauptung folgt nun, da die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist. □

Korollar 2.2.38. *Für $1 \le p \le \infty$ ist $l^p(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.*

Beispiele 2.2.39.

(i) Wir definieren induktiv eine Folge in $\mathbb{R}$ durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ für $n \ge 0$. Wir behaupten, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist. Per Induktion sehen wir, dass $0 \le x_n$, $x_n \le 1$ und $\frac{1}{2} \le x_n$ gelten. Somit erhalten wir

$$|x_{n+1+k} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{1+x_{n+k}} - \frac{1}{1+x_n}\right| = \frac{|x_n - x_{n+k}|}{(1+x_n)(1+x_{n+k})} \le \frac{|x_n - x_{n+k}|}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}$$

und daraus

$$|x_{n+1+k} - x_{n+1}| \le \tfrac{4}{9}|x_{n+k} - x_n|.$$

Für festes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $\varphi(n) := |x_{n+k} - x_n|$ und erhalten $\varphi(n+1) \le \frac{4}{9}\varphi(n)$. Beachte, dass $\varphi(n) \ge 0$ ist. Per Induktion erhalten wir daraus $\varphi(n) \le \left(\frac{4}{9}\right)^n \varphi(0)$. Somit gilt $\varphi(n) \to 0$ für $n \to \infty$. Da $\varphi(0) \le 2$ unabhängig von k gilt, ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher.

Gehen wir nun in der definierenden Gleichung auf beiden Seiten zum Grenzwert über, so erhalten wir für $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$a = \frac{1}{1+a} \quad \text{oder} \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Das negative Vorzeichen ist wegen $x_n \ge 0$ ausgeschlossen. Damit haben wir den Grenzwert bestimmt.

(ii) Die induktiv definiert Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}$ für $n \ge 1$ konvergiert nach $\sqrt{2}$. (Übung)

(iii) Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 + 2x - 5$: Definiere $F(x) := x - \frac{x^2+2x-5}{2x+2}$, $x_0 := 0$ und $x_{n+1} := F(x_n)$. Zeige, dass $x_n \in [1,2]$ für $n \ge 3$ ist, dass für ein festes $\gamma \in (0,1)$ die Ungleichung $|F(a) - F(b)| \le \gamma \cdot |a-b|$ für alle $a, b \in [1,2]$ gilt und schließe, dass x_n gegen ein $a \in [1,2]$ mit $a = F(a)$ konvergiert. Details: Übung.

(iv) In einem normierten Raum folgt aus $x_n \to a$ auch

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \to a.$$

(Übung)

2.3. **Reihen.**

Definition 2.3.1. Sei E ein normierter Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge. Dann definieren wir eine weitere Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ durch

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beide Folgen zusammen heißen **Reihe.** Die Elemente a_n heißen dabei **Glieder** der Reihe und die Elemente s_n **Partialsummen.** Wir schreiben $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für die Reihe. Wir bezeichnen auch $((a_n))_{n\ge n_0}$ als Reihe oder als **Endstück** der Reihe.

Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in E$, so heißt dieser Grenzwert **Wert** oder **Summe** der Reihe. Wir schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Existiert $\sum a_n$, so heißt die Reihe **konvergent,** existiert der Grenzwert nicht, so heißt die Reihe **divergent.**

Das Cauchykriterium liefert

konv cauchy krit prop

Proposition 2.3.2. *Eine Reihe $((a_n))_n$ in einem Banachraum ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \ge n_0$ und alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung*

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\| < \varepsilon$$

gilt.

Korollar 2.3.3. *Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $((a_n))_n$ ist, dass $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.*

Beweis. Wir wählen $m = 0$ in Proposition 2.3.2. □

Definition 2.3.4 (Nullfolge)**.** Sei $(a_n)_n$ eine Folge in einem normierten Raum. Gilt $a_n \to 0$, so heißt $(a_n)_n$ eine **Nullfolge.**

Beispiele 2.3.5.

(i) Geometrische Reihe: Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $-1 < q < 1$. Dann konvergiert die Reihe $((q^n))_{n\in\mathbb{N}}$ und hat den Wert $\frac{1}{1-q}$.

Beweis. Es gelten

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n, \\ q s_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}, \\ (1-q)s_n &= 1 - q^{n+1}, \\ s_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Lassen wir $n \to \infty$, so existiert der Grenzwert auf der rechten Seite. Somit hat die Reihe den Wert $\frac{1}{1-q}$. □

(ii) Die Reihe $(((-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, da $(-1)^n \not\to 0$ gilt.

(iii) Die harmonische Reihe $\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\ge1}$ erfüllt zwar die notwendige Bedingung $\frac{1}{n} \to 0$ für Konvergenz. Sie konvergiert aber nicht, da sie das Cauchykriterium für Reihen verletzt:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge n \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 2.3.6. $\star$

(i) Definiert man die Addition und die Skalarmultiplikation von Reihen gliedweise, also $((a_n))_n + ((b_n))_n := ((a_n + b_n))_n$ und $\lambda((a_n))_n := ((\lambda a_n))_n$ für $\lambda \in \mathbb{K}$, so wird die Menge der konvergenten Reihen zu einem Vektorraum und es gelten

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

sowie

$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n.$$

(ii) Eine Reihe $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn das Endstück $((a_n))_{n\geq k}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ konvergiert. Endlich viele Glieder am Anfang spielen also keine Rolle für die Konvergenz, beeinflussen jedoch den Wert der Reihe.

beschr konv in R+ prop **Proposition 2.3.7.** *Sei $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Die Folge der Partialsummen $(s_n)_n$ ist wegen $a_n \geq 0$ monoton wachsend. Eine unbeschränkte Folge s_n kann nicht konvergieren und eine monotone beschränkte Folge konvergiert gegen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$, vergleiche Theorem 2.2.15. $\square$

Proposition 2.3.8 (Dezimaldarstellung reeller Zahlen)**.** $\star$ *Sei $x \in [0,1) \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es $d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $i \in \mathbb{N}$, mit*

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i} = x.$$

Wir schreiben $x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$. Gilt $d_i = 0$ für $j \geq i_0$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so lassen wir diese $d_i's$ in der Schreibweise auch weg.

Ist $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl mit $n \leq y$, so definieren wir $x := y - n$ und erhalten mit den zu x gehörigen $d_i's$

$$y = n + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}$$

und schreiben $y = n, d_1 d_2 d_3 \ldots$. Ist $z \in \mathbb{R}_{<0}$, so schreiben wir ein Minuszeichen vor den Ausdruck für $-z$, z. B. $x = -17{,}38$.

d_i heißt die i-te Nachkommastelle von x.

Jede solche Darstellung liefert eine reelle Zahl.

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur im Fall $x \in [0,1)$. Setze $d_0 := 0$. Wähle induktiv $d_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ maximal mit $\sum\limits_{i=0}^{n} d_i \cdot 10^{-i} \leq x$. Es folgt aufgrund der Maximalität $x - \sum\limits_{i=0}^{n} d_i \cdot 10^{-i} \in [0, 10^{-n})$. Somit folgt die behauptete Konvergenz. $\square$

Definition 2.3.9. Sei $((a_n))_n$ eine Reihe in einem Banachraum. Dann heißt die Reihe **absolut konvergent**, falls die Reihe $((\|a_n\|))_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Die Reihe heißt **bedingt konvergent**, falls sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

bs konv impl konv prop **Proposition 2.3.10.** *Sei $((a_n))_n$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum. Dann ist die Reihe konvergent und es gilt*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|.$$

Beweis.

(i) Wir zeigen, dass die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen eine Cauchyfolge ist. In einem Banachraum konvergiert dann die Reihe. Es gilt für alle $n > m \geq n_0$
$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\|.$$
Aufgrund der absoluten Konvergenz von $((a_n))_n$ können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 finden, so dass die rechte Seite der Abschätzung für alle $n > m \geq n_0$ kleiner als ε ist. Damit ist $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge.

(ii) Die Dreiecksungleichung liefert für alle $k \in \mathbb{N}$
$$\left\| \sum_{n=0}^{k} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|a_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|.$$
Dabei haben wir für die letzte Ungleichung benutzt, dass der Ausdruck in der Mitte in k monoton wächst und für $k \to \infty$ konvergiert. Bei monoton wachsenden konvergenten Folgen ist jedes Folgeglied eine untere Schranke für den Grenzwert.

Wir haben bereits gesehen, dass die Summe in der Norm auf der linken Seite für $k \to \infty$ konvergiert. Also gilt dies auch für die Norm davon. Die rechte Seite als obere Schranke für alle Folgeglieder ist damit auch eine obere Schranke für den Grenzwert. Das hatten wir behauptet. □

Proposition 2.3.11 (Majorantenkriterium)**.** *Seien $((a_n))_n$ und $((b_n))_n$ zwei Reihen in $\mathbb{R}$. Angenommen $((b_n))_n$ konvergiert und es gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch $((a_n))_n$ absolut.*

$((b_n))_n$ heißt konvergente Majorante von $((a_n))_n$.

Beweis. Wir überprüfen das Cauchykriterium. Es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=n}^{n+m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+m} b_k < \varepsilon,$$
falls $n \geq n_0$ so gewählt ist, dass wir das Cauchykriterium für $((b_n))_n$ anwenden können. □

Bemerkung 2.3.12. $\star$

(i) Nach Proposition 2.3.10 konvergiert auch $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
(ii) Es folgt $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Es genügt, die Bedingung $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ zu fordern.
(iv) Ist $((a_n))_n$ eine Reihe in einem Banachraum und $((b_n))_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $\|a_n\| \leq b_n$, so gilt das entsprechende Resultat wenn wir den Betrag im Beweis durch die Norm ersetzen.
(v) Beispiel unter Verwendung von minimalem Schulwissen über den Logarithmus: Die Reihe $\left(((\log n)^{-n})\right)_{n\geq 2}$ konvergiert, denn für $n \geq 9$ gilt $\log n \geq 2$ und somit ist die geometrische Reihe $((2^{-n}))_n$ eine konvergente Majorante.
(vi) Betrachtet man $|a_n|$ statt a_n im Quotientenkriterium, so erhält man auch dafür eine Variante mit absoluter Konvergenz.

Proposition 2.3.13 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $((a_n))_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gelte*
$$\gamma := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$
Dann konvergiert die Reihe $((a_n))_n$.

Beweis. Wähle c mit $\gamma < c < 1$. Dann gilt für $n \geq n_0$ die Ungleichung $a_{n+1} \leq c a_n$. Per Induktion folgt $a_{n_0+n} \leq c^n a_{n_0}$. Wir können daher eine geometrische Reihe als konvergente Majorante verwenden. □

Beispiele 2.3.14.

(i) Die Reihe $((a_n))_n = \left(\left(\frac{1}{n!}\right)\right)_n$ konvergiert aufgrund des Quotientenkriteriums, denn es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $n \geq 1$.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann konvergiert die Reihe $((a_n))_n = \left(\left(\frac{x^n}{n!}\right)\right)_n$, denn es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{2},$$

falls $n \in \mathbb{N}$ genügend groß ist.

Aufgrund des Majorantenkriteriums konvergiert die Reihe auch für negative $x \in \mathbb{R}$: Vergleiche den Wert für $x < 0$ mit dem an der Stelle $-x > 0$.

Wir definieren

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und nennen die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Exponentialfunktion.

(iii) Die Reihe $((a_n))_n = \left(\left(\frac{n}{q^n}\right)\right)_n$ mit $q > 1$ konvergiert, denn es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q}\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{q} < 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Insbesondere ist also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$.

Ein nützliches Konvergenzkriterium benutzt Integrale. Da wir diese noch nicht behandelt haben, erwähnen wir die Eigenschaften des Integrals, die wir verwenden wollen. Alternativ kann man diesen Abschnitt erst nach der Definition des Integrals lesen. Diese wird unabhängig von diesem Abschnitt sein, d. h. wir machen keine Zirkelschlüsse. Vielleicht sind diese Eigenschaften schon aus der Schule bekannt.

Lemma 2.3.15. ⋆ *Sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und seinen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ „stetige“ Funktionen auf I. Dann gelten*

$$\int\limits_a^b f + g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g,$$

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g,$$

$$f = const = c \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b f = c(b-a)$$

sowie

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f = \int\limits_a^b f.$$

int krit prop

Proposition 2.3.16 (Integralkriterium)**.** *Sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetige monoton fallende Funktion. Dann konvergiert die Reihe $((f(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn*

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f \equiv \int_0^\infty f < \infty$$

gilt.

Bemerkung 2.3.17. $\star$

(i) Wir werden später sehen, dass auch nur monotone Funktionen integrierbar sind. Somit können wir auf die Stetigkeit von f auch verzichten.
(ii) Konvergenz folgt damit aufgrund des Majorantenkriteriums auch für Reihen $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_n| \le f(n)$.

Beweis von Proposition 2.3.16.

(i) „$\Leftarrow$“: Da f monoton fallend ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(n) \le \int_{n-1}^{n} f.$$

Wir summieren dies auf und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \le \int_0^n f \le \int_0^\infty f.$$

Somit ist die Reihe der Partialsummen beschränkt und die Reihe konvergiert, da die Glieder alle nichtnegativ sind.

(ii) „$\Rightarrow$“: Sei nun $\int\limits_0^\infty f = \infty$. Wie oben erhalten wir

$$f(n) \ge \int_n^{n+1} f$$

und daher

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \ge \sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} f = \int_0^{n+1} f.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ unbeschränkt wir, ist auch die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann daher nicht konvergieren. □

Beispiele 2.3.18.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Dann konvergiert die Reihe $\left(\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right)_n$, insbesondere also die Reihe $\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)_n$. (Momentan kennen wir bisher nur rationale Exponenten.)

Beweis. Definiere $f(x) := x^{-1-\varepsilon}$. f ist monoton fallend. Es gilt

$$\int_1^n f = -\frac{1}{\varepsilon} x^{-\varepsilon}\Big|_1^n \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Behauptung folgt somit aus dem Integralkriterium. □

(ii) Die Reihe $\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)_n$ ist divergent.

Beweis. Definiere $f(x) := \frac{1}{x}$. f ist monoton fallend und es gilt

$$\int_1^n f = \log n - \log 1 \to \infty \quad \text{für } n \to \infty.$$

Somit divergiert die Reihe. □

(iii) Die Reihen $\left(\left(\frac{1}{n^q}\right)\right)_n$ mit $0 < q < 1$ divergieren ebenfalls. Benutze dazu das Integral- oder das Majorantenkriterium.

Proposition 2.3.19 (Wurzelkriterium)**.** *Sei $((a_n))_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Falls*

$$\gamma := \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$$

gilt, so konvergiert die Reihe $((a_n))_n$ absolut.

Beweis. Wir wählen wieder $c \in \mathbb{R}$ mit $\gamma < c < 1$. Dann gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \le c^n.$$

Somit ist eine geometrische Reihe eine konvergente Majorante. □

Bemerkung 2.3.20. $\star$ Quotienten- und Wurzelkriterium sind nur hinreichende Kriterien.

(i) Führt man jedes Folgeglied einer konvergenten Reihe doppelt auf, so erhält man für den Limes superior beim Quotientenkriterium mindestens den Wert Eins.

(ii) Sei $((a_n))_n$ eine konvergente Reihe positiver reeller Zahlen. Betrachte nun $a_0, 2a_0, a_1, 2a_1, \ldots$. So erhält man eine Reihe, die konvergiert, aber beim Quotientenkriterium hat der Limes superior mindestens den Wert 2.

(iii) Ist der Limes inferior beim Wurzel- oder Quotientenkriterium strikt größer als Eins, so erhält man, dass die Glieder der Reihe keine Nullfolge bilden können. Somit konvergiert auch die Reihe nicht.

(iv) Im Falle $a_n = \frac{1}{n}$ oder $a_n = \frac{1}{n^2}$ ist der Limes superior im Wurzel- oder Quotientenkriterium stets 1. Da aber nur die zweite Reihe konvergiert, liefern diese Kriterien hier keine Konvergenzentscheidung.

Bemerkung 2.3.21 (Wurzelkriterium für Potenzreihen)**.** Sei $x \in \mathbb{K}$ beliebig, $(a_n)_n \subset \mathbb{K}$ eine Folge. Dann konvergiert die Potenzreihe, d. h. die Reihe $((a_n x^n))_{n\in\mathbb{N}}$, für

$$|x| < \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

absolut und divergiert für

$$|x| > \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Bei Gleichheit kann die Reihe konvergieren oder divergieren.

Beweis. Benutze das Wurzelkriterium und für die Divergenz, dass die Folgeglieder dann keine Nullfolge bilden.

Gleichheit tritt für die Reihe $\left(\left(\frac{1}{n}x^n\right)\right)_n$ für $|x| = 1$ ein. Für $x = 1$ haben wir bereits gesehen, dass die Reihe divergiert, für $x = -1$ benutzen wir das Leibnizkriterium (nachfolgend) und erhalten Konvergenz. □

Wir definieren nun den Konvergenzradius r einer Potenzreihe so, dass die Potenzreihe für $|x| < r$ konvergiert.

Definition 2.3.22. Eine Reihe der Form $((a_n x^n))_n$ mit $a_n \in \mathbb{K}$ heißt **Potenzreihe** in $\mathbb{K}$. Wir erhalten für beliebige $x \in \mathbb{K}$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. Die Terme a_n heißen **Koeffizienten** der Potenzreihe und

$$r := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}}$$

heißt **Konvergenzradius.**

Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = 0$, so sagen wir, dass der Konvergenzradius $r = \infty$ sei.

Beispiele 2.3.23. Wir definieren die Funktionen exp, sin, cos: $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

In allen diesen Fällen ist der Konvergenzradius gleich ∞ (Übung).

Definition 2.3.24. Eine Reihe $((a_n))_n \subset \mathbb{R}$ heißt **alternierend,** falls

$$a_n \cdot a_{n+1} \le 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Das folgende Konvergenzkriterium liefert im Allgemeinen keine absolute Konvergenz. Es liefert jedoch die oben behauptete Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe $\left(\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)\right)_n$.

Proposition 2.3.25 (Leibnizkriterium)**.** *Sei $((a_n))_n$ eine alternierende Reihe in $\mathbb{R}$, deren Elemente $|a_n|$ eine monotone Nullfolge bilden, d. h. es gilt $|a_n| \searrow 0$. Dann konvergiert die Reihe $((a_n))_n$ und es gilt*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le |a_0|.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind entweder alle Reihenelemente von Null verschieden oder es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \ge n_0$. Daher können wir die Elemente der Reihe ohne Einschränkung, d. h. indem wir ggf $((-a_n))_n$ betrachten, in der Form $(-1)^n b_n$ mit $b_n \ge 0$ darstellen. Es gilt $0 \le b_n \searrow 0$. Seien $(s_n)_n$ die Partialsummen der Reihe. Definiere $\tau_n := s_{2n}$ und $t_n := s_{2n+1}$. Dann gelten $\tau_n \searrow$ und $t_n \nearrow$, da

$$\tau_{n+1} = s_{2(n+1)} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \le s_{2n} = \tau_n$$

und

$$t_{n+1} = s_{2n+3} = s_{2n+1} + b_{2n+2} - b_{2n+3} \ge s_{2n+1} = t_n.$$

Weiterhin ist $t_0 \le t_n = s_{2n} - b_{2n+1} \le \tau_n \le \tau_0$. Somit konvergieren die Folgen $(t_n)_n$ und $(\tau_n)_n$ und, da $b_n = |a_n| \to 0$ gilt, stimmen ihre Grenzwerte überein: $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$. Somit konvergiert auch s_n.

Die behauptete Abschätzung folgt aus

$$a_0 = b_0 = \tau_0 \ge \lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} t_n \ge t_0 = b_0 - b_1 \ge -b_1 \ge -b_0 = -a_0. \qquad \square$$

Wenden wir dieses Resultat auf Endstücke alternierender Reihen an, so erhalten wir

Korollar 2.3.26. $\star$ *Sei* $((a_n))_n$ *eine alternierende Reihe in* $\mathbb{R}$ *und gelte* $|a_n| \searrow 0$ *für* $n \to \infty$*. Dann gilt die Aussage*

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right| \le |a_k| \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Als Korollar zu Korollar 2.2.16 erhalten wir

Korollar 2.3.27. *Seien* $a_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$*,* $i \in \mathbb{N}$*. Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \le \sum_{i=0}^{\infty} a_i \in [0, \infty].$$

Mit Hilfe von konvergenten Reihen erhalten wir weitere Beispiele für Hilbert- und Banachräume.

Definition 2.3.28.

(i) Wir definieren $l^2(\mathbb{N})$ als den Raum aller reellen Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Solch eine Folge heißt quadratsummierbar. Seien $a, b \in l^2(\mathbb{N})$. Dann setzen wir

$$\langle a, b\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n.$$

(ii) Sei $1 \le p < \infty$. ($\star$ Die nachfolgende Definition gilt wie bei $l^p(\mathbb{R}^n)$ wieder allgemein, wir kennen momentan allerdings nur Potenzen $\in \mathbb{Q}$ und müssen uns daher auf $p \in \mathbb{Q}_{\ge 1}$ beschränken. Die angegebenen Beweise funktionieren jedoch für alle $p \in [1, \infty)$.) Dann definieren wir $l^p(\mathbb{N})$ als den Raum aller reellen Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty$$

und

$$\|a\|_{l^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}.$$

(iii) $\star$ Sind die Folgen komplexwertig, so schreiben wir $l^p(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ und ersetzen in der obigen Definition $a_n \cdot b_n$ durch $a_n \cdot \overline{b_n}$.

(iv) Im Fall $p = \infty$ betrachten wir die Menge der beschränkten Folgen und setzen $\|a\|_{l^\infty(\mathbb{N})} := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

Wir beschränken uns im folgenden Satz der Einfachheit halber auf die reellen Folgenräume. Die Resultate im komplexen Fall folgen analog.

Theorem 2.3.29. $l^2(\mathbb{N})$ *ist ein Hilbertraum, für* $1 \le p \le \infty$ *ist* $l^p(\mathbb{N})$ *ein Banachraum. Alle diese Räume sind unendlichdimensional.*

Als Übung lassen wir den Beweis im einfachsten Fall, dass nämlich $l^\infty(\mathbb{N})$ ebenfalls ein Banachraum ist.

Beweis.

(i) Das l^2-Skalarprodukt ist wohldefiniert, denn es gilt für alle k

$$\sum_{i=0}^{k}|a_ib_i| \le \sum_{i=0}^{k}\tfrac{1}{2}|a_i|^2 + \sum_{i=0}^{k}\tfrac{1}{2}|b_i|^2.$$

Die Folgen auf der rechten Seite konvergieren für $k \to \infty$ und bilden daher eine Majorante. Somit konvergiert auch die linke Seite für $k \to \infty$. Wir erhalten also absolute Konvergenz für die Reihe $((a_ib_i))_{n\in\mathbb{N}}$. Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit sind klar. Wir gehen dazu in den Varianten mit endlichen Summen zum Grenzwert über.

(ii) Wir definieren Addition und Skalarmultiplikation auf l^p gliedweise. Durch Skalarmultiplikation verlassen wir l^p offenbar nicht. Die Summe von zwei Elementen in l^p ist ebenfalls in l^p, denn es gilt aufgrund der Minkowskischen Ungleichung

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{k}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} &\le \left(\sum_{i=0}^{k}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^{k}|b_i|^p\right)^{1/p}\\ &\le \|a\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|b\|_{l^p(\mathbb{N})}.\end{aligned}$$

Wir betrachten die p-te Potenz dieser Ungleichung. Somit steht auf der linken Seite eine monoton wachsende beschränkte Folge. Diese konvergiert daher.

(iii) Sämtliche Eigenschaften der Norm und des Skalarproduktes außer der Definitheit, die klar ist, zeigt man analog zu oben, indem man zunächst die bekannten Versionen bis zu einem festen k benutzt, dann auf der „rechten Seite“ der Ungleichung $k \to \infty$ schickt. Die linke Seite konvergiert dann stets absolut und die Behauptung folgt.

(iv) Vollständigkeit von $l^p(\mathbb{N})$: Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \equiv ((x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $l^p(\mathbb{N})$. Dann bilden die bei n_0 abgeschnittenen Folgen $(X_k^{n_0})_{k\in\mathbb{N}} = ((x_{n,k})_{n\le n_0})_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}^{n_0}$, denn es gilt

$$\|X_k^{n_0} - X_l^{n_0}\|_{l^p(\mathbb{R}^{n_0})} \le \|X_k - X_l\|_{l^p(\mathbb{N})},$$

da links über weniger positive Glieder summiert wird. Sei X^{n_0} der Grenzwert dieser Folge von n_0-Tupeln in $\mathbb{R}^{n_0}$. Da Konvergenz in l^p auch komponentenweise Konvergenz impliziert, stimmen die ersten n_0 Komponenten von X^{n_0} und X^{m_0} für $m_0 \ge n_0$ überein. Definiere daher $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei x_n die n-te Komponente von X^m für ein beliebiges $m \ge n$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $k, l \ge n_0$ die Ungleichung $\|X_k - X_l\|_{l^p(\mathbb{N})} < \varepsilon$ gilt. Wir erhalten

$$\left(\sum_{n=0}^{m}|x_{n,k}-x_{n,l}|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_{n,k}-x_{n,l}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$

und wir erhalten daher im Grenzwert $l \to \infty$

$$\left(\sum_{n=0}^{m}|x_{n,k}-x_n|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon.$$

Auf der linken Seite steht (bis auf die p-te Wurzel) eine beschränkte Summe mit positiven Summanden. Da die obere Schranke nicht von m abhängt, können wir $m \to \infty$ lassen und erhalten $\|X_k - X\|_{l^p(\mathbb{N})}^p \le \varepsilon^p$. Da die p-te Wurzel auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ monoton wachsend ist (im Falle $p \in \mathbb{N}$ folgt dies aus

$$x^p - y^p = (x-y)\left(x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1}\right))$$

folgt auch $\|X_k - X\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \varepsilon$. Daher ist $l^p(\mathbb{N})$ vollständig. □

Absolut konvergente Reihen können wir umordnen.

Definition 2.3.30. Seien $((a_n))_n$ und $((b_n))_n$ zwei Reihen in einem normierten Raum E. Dann sagen wir, dass $((b_n))_n$ aus $((a_n))_n$ durch **Umordnung** entstanden ist, falls es eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Theorem 2.3.31 (Umordnungssatz)**.** *Sei $((a_n))_n$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum E und sei $((b_n))_n$ eine Umordnung von $((a_n))_n$. Dann konvergiert auch $((b_n))_n$ absolut und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Wir sagen auch, dass die Reihe kommutativ konvergiert.

Beweis. Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die zur Umordnung gehörige Bijektion, gelte also $b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $I_n := \{0, 1, \ldots, n\}$.

(i) Absolute Konvergenz von $((b_n))_n$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei m eine obere Schranke für $\varphi(I_n)$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \|b_k\| \le \sum_{k=0}^{m} \|a_k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|,$$

da alle Summanden der ersten Summe auch in der zweiten vorkommen. Die Reihe $((\|b_n\|))_n$ in $\mathbb{R}_+$ konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummen gleichmäßig (in n) nach oben beschränkt sind, siehe Proposition 2.3.7. Somit konvergiert die Reihe $((b_n))_n$ absolut.

(ii) Kommutative Konvergenz von $((a_n))_n$: Wir wollen nachweisen, dass die Werte der Reihen $((a_n))_n$ und $((b_n))_n$ übereinstimmen. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

(Betrachte die Cauchybedingung für Partialsummen und gehe zum Grenzwert über.) Da φ eine Bijektion ist, gibt es n_0, so dass für alle $n \ge n_0$ die Inklusion $I_m \subset \varphi(I_n)$ gilt. Sei also $n \ge n_0$. Dann gibt es $r_0 = r_0(n) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $r \ge r_0$ die Inklusionen $I_m \subset \varphi(I_n) \subset I_r$ gelten. Es folgt

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=0}^{r} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{r} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} \right\| \\ &\le \sum_{k=m+1}^{r} \|a_k\| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit $r \to \infty$ erhalten wir

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k \right\| \le \varepsilon.$$

Da dies für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt, stimmen die Werte der beiden Reihen überein und die Behauptung folgt. $\square$

Definition 2.3.32. $\star$

(i) Sei I eine abzählbare Menge. Eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ in einem Banachraum E heißt absolut summierbar, wenn es eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$ gibt, so dass die Reihe $((a_{\varphi(n)}))_n$ absolut konvergiert.

(ii) (Der Umordnungssatz liefert nun, dass $((a_{\varphi(n)}))_n$ für jede Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$ konvergiert und der Wert unabhängig von der Umordnung φ ist.) Daher nennen wir den Wert von $((a_{\varphi(n)}))_n$ auch den Wert der Reihe $((a_i))_{i\in I}$ und schreiben $\sum\limits_{i\in I} a_i$.

gen statt indices prop

Proposition 2.3.33. ⋆

(i) Eine abzählbare Familie $(a_i)_{i\in I}$ in einem Banachraum E ist genau dann absolut summierbar, wenn für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ die Summen

$$\sum_{i\in J} \|a_i\|$$

gleichmäßig in J beschränkt sind.

(ii) Ist $(a_i)_{i\in I}$ eine abzählbare absolut summierbare Familie in einem Banachraum E, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $H \subset I$, so dass für alle endlichen Teilmengen $K \subset I \setminus H$ und für alle endlichen Teilmengen $L \subset I$ mit $H \subset L$ die Abschätzungen

$$\sum_{i\in K} \|a_i\| \le \varepsilon \quad \textit{und} \quad \left\| \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in L} a_i \right\| \le 2\varepsilon$$

gelten.

Vergleiche in der bisherigen Bezeichnungsweise H mit n_0 oder $\{0, 1, \ldots, n_0\}$, K mit $n \ge n_0$. Interpretiere die zweite Abschätzung als Konvergenzaussage der endlichen Summe (mit L) gegen die unendliche (mit I).

Beweis.

(i)

„⇒“: Sind die endlichen Summen nicht gleichmäßig beschränkt, so konstruiert man durch Ausschöpfung der Gegenbeispielmengenfolge leicht eine Bijektion, die einen Widerspruch zur absoluten Summierbarkeit liefert.

„⇐“: Eine gleichmäßige obere Schranke an Summen über endliche Mengen liefert auch eine gleichmäßige obere Schranke an die Partialsummen

$$\sum_{i=0}^{k} a_{\varphi(i)}$$

für eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$. Dies ist für die Reihe $((\|a_i\|))_i$ in $\mathbb{R}_+$ auch hinreichend für die Summierbarkeit, siehe Proposition 2.3.7.

(ii) Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \to I$ eine Bijektion. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_{\varphi(k)}\| \le \varepsilon$$

gilt. Wählen wir $H = \varphi(\{0, 1, \ldots, n_0\})$, so folgt hieraus die erste Ungleichung. Für $i \in K$ gilt nämlich $\varphi(i) \notin H$ und wir erhalten daher

$$\sum_{i\in K} \|a_i\| \le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_{\varphi(k)}\| \le \varepsilon.$$

Für die Menge $H \subset I$ erhalten wir

$$\left\| \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in H} a_i \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(i)} - \sum_{k=0}^{n_0} a_{\varphi(k)} \right\| \le \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|a_{\varphi(k)}\| \le \varepsilon.$$

Seien nun $H \subset L \subset I$ wie angegeben. Definiere $K := L \setminus H$. Dann ist K eine Menge wie oben mit $K \subset I \setminus H$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in L} a_i\right\| &\le \left\|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in H} a_i\right\| + \left\|\sum_{i\in L} a_i - \sum_{i\in H} a_i\right\| \\ &\le \varepsilon + \left\|\sum_{i\in K} a_i\right\| \le 2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.34. $\star$

(i) Die angegebene Charakterisierung von absoluter Summierbarkeit über endliche Teilmengen funktioniert auch für beliebige Mengen I.

Ist $(a_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie in $\mathbb{R}_+$, so definieren wir

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ |J|<\infty}} \sum_{i\in J} a_i.$$

Dies liefert für höchstens abzählbare Indexmengen I das Bekannte.

(ii) Sind überabzählbar viele a_i's von Null verschieden, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so dass $\|a_i\| \ge \frac{1}{n}$ für unendlich viele $i \in I$ gilt und die Familie ist nicht absolut summierbar. Daher sind auch bei beliebigen summierbaren Familien stets nur höchstens abzählbar viele Elemente von Null verschieden.

Proposition 2.3.35. $\star$ *Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum E. Sei $J \subset I$ abzählbar. Dann ist auch $(a_i)_{i\in J}$ eine absolut summierbare Familie und es gilt*

$$\sum_{i\in J} \|a_i\| \le \sum_{i\in I} \|a_i\|.$$

Die Aussage gilt auch für endliche Teilmengen $J \subset I$.

Beweis. Für endliche Mengen $K \subset J$ gilt

$$\sum_{i\in K} \|a_i\| \le \sum_{i\in I} \|a_i\|.$$

Da $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar ist, sind die Summen auf der linken Seite für $K \subset I$ und daher insbesondere auch für $K \subset J$ gleichmäßig beschränkt. Wir behaupten, dass

$$\sum_{i\in J} \|a_i\| = \sup\left\{\sum_{i\in K} \|a_i\| : K \subset J,\, K \text{ endlich}\right\}$$

gilt. Damit folgt dann die Behauptung. Wir haben gerade gesehen, dass die rechte Seite kleiner oder gleich der linken Seite ist. Die umgekehrte Ungleichung folgt indem wir L aus Proposition 2.3.33 als K hier wählen. □

Theorem 2.3.36 (Assoziativitätstheorem). $\star$ *Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine absolut summierbare Familie in einem Banachraum E. Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare disjunkte Zerlegung (= Partition) von I in Teilmengen I_n. Wir definieren $b_n := \sum\limits_{i\in I_n} a_i$. Dann ist die Reihe $((b_n))_n$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

d. h. für absolut konvergente Reihen gilt ein Assoziativgesetz.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

(i) Absolute Konvergenz von $((b_n))_n$: Nach Proposition 2.3.33 gibt es zu jedem n eine endliche Teilmenge $H_n \subset I_n$, so dass für alle endlichen Mengen H'_n mit $H_n \subset H'_n \subset I_n$

$$\left\| b_n - \sum_{i \in H'_n} a_i \right\| \leq 2^{-n} \cdot \varepsilon$$

gilt. Insbesondere erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $H'_n = H_n$ die Abschätzung

$$\|b_n\| \leq \sum_{i \in H_n} \|a_i\| + 2^{-n}\varepsilon$$

und daraus

$$\sum_{n=0}^{k} \|b_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in H_n} \|a_i\| + \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{k} 2^{-n} \leq \sum_{i \in I} \|a_i\| + 2\varepsilon.$$

Somit konvergiert die Reihe auf der linken Seite absolut. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt über die Behauptung hinausgehend sogar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\| \leq \sum_{i \in I} \|a_i\|.$$

(ii) Assoziativität: Sei $\varepsilon > 0$ wie oben beliebig vorgegeben. Dann gibt es nach Proposition 2.3.33 eine endliche Menge $H \subset I$ mit

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in H} a_i \right\| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{i \in K} \|a_i\| \leq \varepsilon$$

für alle K mit $K \subset I \setminus H$. Da H endlich ist, gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$H \subset \bigcup_{n=0}^{k_0} I_n.$$

Sei H_n wie im ersten Teil des Beweises. Dann definieren wir

$$H'_n = H_n \cup (I_n \cap H),$$

d. h. wir vergrößern die Menge H_n, so dass

$$H \subset \bigcup_{n=0}^{k_0} H'_n$$

gilt. Für alle $k \geq k_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{n=0}^{k} b_n \right\| &\leq \left\| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in H} a_i \right\| + \left\| \sum_{i \in H} a_i - \sum_{n=0}^{k} \sum_{i \in H'_n} a_i \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{n=0}^{k} \sum_{i \in H'_n} a_i - \sum_{n=0}^{k} b_n \right\| \\ &\equiv S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

(a) Nach Wahl von H gilt $S_1 \leq \varepsilon$.

(b) Setzen wir $H' := \bigcup\limits_{n=0}^{k} H'_n$, so folgt $H \subset H'$. Es folgt

$$S_2 = \left\| \sum_{i \in H} a_i - \sum_{i \in H'} a_i \right\| \leq \sum_{i \in H' \setminus H} \|a_i\| \leq \varepsilon$$

nach Wahl von H mit $K = H' \setminus H$.

(c) Schließlich gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der Wahl von H_n im ersten Teil

$$S_3 \leq \sum_{n=0}^{k} \left\| b_n - \sum_{i \in H'_n} a_i \right\| \leq \sum_{n=0}^{k} 2^{-n}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Somit ist $S_1 + S_2 + S_3 \leq 4\varepsilon$ und die Behauptung folgt. $\square$

Als Anwendung erhalten wir

Theorem 2.3.37 (Cauchysche Produktformel)**.** *Seien $((a_n))_n$ und $((b_n))_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Dann ist die Familie $(a_i b_k)_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ absolut summierbar und es gilt*

$$\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_k = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

Beweis.

(i) Absolute Summierbarkeit: Sei $H \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine beliebige endliche Teilmenge. Dann gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $i, k \leq k_0$ für alle $(i,k) \in H$. Es folgt

$$\sum_{(i,k)\in H} |a_i b_k| \leq \left(\sum_{i=0}^{k_0} |a_i|\right)\left(\sum_{k=0}^{k_0} |b_k|\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right).$$

Da die rechte Seite unabhängig von H ist, folgt die absolute Summierbarkeit.

(ii) Cauchysche Produktformel: Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir Mengen $I_j := \{j\}\times\mathbb{N} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und $J_j = \{(k, j-k) \colon 0 \leq k \leq j\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Die Familien $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(J_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bilden jeweils eine Partition von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (kleine Übung). Daher gilt

$$\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{(i,k)\in I_j} a_i b_k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{(i,k)\in J_j} a_i b_k.$$

Nun gelten

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{(i,k)\in I_j} a_i b_k = \sum_{j=0}^{\infty}\left(a_j \sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

sowie

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{(i,k)\in J_j} a_i b_k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}.$$

Somit folgt die Behauptung. $\square$

Als Korollar erhalten wir daraus ein Additionstheorem für die Exponentialfunktion.

Korollar 2.3.38. *Für die Exponentialfunktion*

$$e^x \equiv \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gilt

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$$

für alle $x, y \in \mathbb{K}$.

Beweis. Wir benutzen die Binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

(Induktionsbeweis, Übung). Es gilt aufgrund der Cauchyschen Produktformel und der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe

$$\begin{aligned} \exp x \cdot \exp y &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y). \end{aligned}$$

□

2.4. **Gleichmäßige Konvergenz.**

Bemerkung 2.4.1. Sei E eine Menge. Sei F ein vollständiger metrischer Raum und $(f_n)_n$ mit $f_n\colon E \to F$ eine Folge von Funktionen. Dann konvergiert die Folge in jedem Punkt x, falls $(f_n(x))_n$ für alle $x \in E$ eine Cauchyfolge ist, d. h.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in E}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\geq n_0}{\forall}\ d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon,$$

wobei die Reihenfolge der ersten beiden Allquantoren irrelevant ist.

Wir sagen auch, dass die Folge $(f_n)_n$ **punktweise konvergiert.**

Definition 2.4.2.

(i) Sei E eine Menge und F ein vollständiger metrischer Raum. Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon E \to F$. Dann konvergiert die Folge auf E **gleichmäßig,** wenn

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ \underset{n,m\geq n_0}{\forall}\ d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

gilt.

Wir definieren den Limes, d. h. eine Limesfunktion, $f\colon E \to F$ der Funktionenfolge durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in E$.

Wir sagen, dass f_n gleichmäßig nach f konvergiert,

$$f_n \rightrightarrows f.$$

(ii) ⋆ Ist E ein metrischer Raum, so heißt die Folge $f_n\colon E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, **lokal gleichmäßig konvergent**, falls es zu jedem Punkt $x \in E$ eine Umgebung $B_\delta(x)$ gibt, so dass die Funktionenfolge $f_n|_{B_\delta(x)}\colon B_\delta(x) \to F$ gleichmäßig konvergiert.

(iii) ⋆ Sei F ein Banachraum. Eine Reihe $((f_n))_n$ von Funktionen $f_n\colon E \to F$ konvergiert gleichmäßig, lokal gleichmäßig oder absolut, wenn dies für die zugehörige Folge der Partialsummen gilt.

Bemerkung 2.4.3.

(i) Seien E, F, f_n und f wie in der Definition der gleichmäßigen Konvergenz. Dann gilt

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

(ii) ⋆ Wir hätten auch diese Aussage als Definition von gleichmäßiger Konvergenz verwenden können, hätten dafür aber f_n und f angeben müssen.

(iii) ⋆ Analoges gilt auch bei punktweiser Konvergenz.

Beweis. In der Definition von gleichmäßiger Konvergenz lassen wir $m \to \infty$ und erhalten $d(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiele 2.4.4.

(i) Sei $0 < a < 1$. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_n$ mit $f_n\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = x^n$ gleichmäßig gegen Null (die Nullfunktion), $f_n \rightrightarrows 0$, da $|x|^n \le a^n \to 0$ gilt.

(ii) Die Folge $(f_n)_n$ mit $f_n\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise gegen 0, aber nicht mehr gleichmäßig: Die Bernoullische Ungleichung liefert für $0 < \delta < 1$
$$(1-\delta)^n \ge 1 - n\delta.$$
Für $\delta < \frac{1}{2n}$ gilt dann $(1-\delta)^n \ge \frac{1}{2}$. Bei gleichmäßiger Konvergenz müsste dieser Ausdruck aber unabhängig von δ für große n beliebig klein werden.

(iii) Die Potenzreihe $\left(\left(\frac{1}{n!}x^n\right)\right)_n$ konvergiert in jedem beschränkten Intervall gleichmäßig absolut.

Dies ist ein Spezialfall des nächsten Theorems.

Theorem 2.4.5. *Sei $((a_n x^n))_n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty]$. Sei $0 < r_0 < r$. Dann konvergiert die Potenzreihe in $[-r_0, r_0]$ bzw. $\overline{B}_{r_0} \equiv \{x \in \mathbb{C}\colon |x| \le r_0\}$ gleichmäßig absolut.*

Beweis. Zunächst einmal ist aufgrund des Wurzelkriteriums für den Konvergenzradius, also $r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}}$, und $|x| \le r_0$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(|a_n||x|^n\right)^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}|x| \le \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} r_0 = \frac{r_0}{r} < 1.$$
Somit gibt es ein c mit $\frac{r_0}{r} < c < 1$ und wir erhalten $|a_n|^{1/n} \le \frac{c}{r_0}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese n gilt
$$|a_n||x|^n \le \left(\frac{|x|}{r_0}\right)^n c^n \le c^n.$$
Damit folgt die Behauptung aus dem folgenden Lemma, Lemma 2.4.6, da die geometrische Reihe konvergiert. $\square$

maj glm konv lem

Lemma 2.4.6. *Sei E eine Menge, F ein Banachraum und $f_n\colon E \to F$ eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Reihe $((f_n(x)))_n$ gleichmäßig absolut, wenn es eine von $x \in E$ unabhängige konvergente Majorante gibt, d. h. eine konvergente Reihe $((a_n))_n$ mit $a_n \ge 0$, so dass*
$$\|f_n(x)\| \le a_n$$
für alle $x \in E$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \ge n_0$ mit $n > m$
$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$$
gilt. Somit erhalten wir
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \|f_k(x)\| - \sum_{k=0}^{m} \|f_k(x)\|\right| = \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k(x)\| \le \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$$
und die Behauptung folgt. $\square$

Definition 2.4.7. Eine Doppelfolge $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum E ist eine Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{N} \to E$ mit $a_{nm} = f_n(m)$.

Gleichmäßige Konvergenz erlaubt es, Grenzwertbildungen zu vertauschen.

lim vert folge thm

Theorem 2.4.8. *Sei $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in einem vollständigen metrischen Raum E. Nehme an, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$ für alle m bzw. n existieren. Nehme weiterhin an, dass eine dieser Konvergenzen gleichmäßig ist, d. h. ohne Einschränkung, dass die Folgen $(a_{nm})_n$ für $n\to\infty$ gleichmäßig in m konvergieren. Dann existieren*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{nm} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{nm}$$

und stimmen überein.

Bemerkung 2.4.9. Ohne gleichmäßige Konvergenz ist die Aussage im Allgemeinen falsch. Definiere

$$a_{nm} := \begin{cases} 1 & \text{für } m \ge n,\\ 0 & \text{für } m < n.\end{cases}$$

Dann gelten

$$\lim_{m\to\infty} a_{nm} = 1 > 0 = \lim_{n\to\infty} a_{nm}$$

und somit auch

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{nm} = 1 \neq 0 = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{nm}.$$

Der Beweis benötigt noch etwas Vorbereitung.

d folgen stet lem

Lemma 2.4.10. *Sei E ein metrischer Raum. Gelten $x_n\to x$ und $y_n\to y$ in E für $n\to\infty$. Dann folgt*

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y).$$

Beweis. Aufgrund der Dreiecksungleichung und der umgekehrten Dreiecksungleichung $|d(a,c)-d(b,c)|\le d(a,b)$ gilt

$$\begin{aligned}|d(x,y)-d(x_n,y_n)| &\le |d(x,y)-d(x_n,y)| + |d(x_n,y)-d(x_n,y_n)|\\ &\le d(x,x_n)+d(y,y_n).\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt die Behauptung. □

zwei folgen gl lim lem

Lemma 2.4.11. *Sei E ein metrischer Raum und $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in E. Sei $(y_n)_n$ eine weitere Folge in E.*

(i) Gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0,$$

so ist auch $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge.

(ii) Gilt zusätzlich $x_n\to x$, so folgt auch $y_n\to x$, d. h. die Grenzwerte stimmen überein.

Entsprechende Aussagen gelten auch für die Norm und das Skalarprodukt.

Beweis.

(i) Es gilt

$$d(y_n,y_m)\le d(y_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m).$$

Der erste und der letzte Term werden wegen $d(x_k,y_k)\to 0$ für große k klein, der mittlere für große n,m, weil $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge ist.

(ii) Wir erhalten

$$d(y_n,x)\le d(y_n,x_n)+d(x_n,x).$$

Der erste Term wird wegen $d(x_n,y_n)\to 0$ klein, der zweite wegen $x_n\to x$. □

Beweis von Theorem 2.4.8. Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren für alle m bzw. $n \in \mathbb{N}$.

$$\alpha_m := \lim_{n\to\infty} a_{nm} \quad \text{und} \quad \beta_n := \lim_{m\to\infty} a_{nm}.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $a_{nm} \rightrightarrows \alpha_m$ gibt es n_0, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n, k \geq n_0$

d anm akm eps absch

$$d(a_{nm}, a_{km}) < \varepsilon \tag{2.1}$$

gilt. Wir lassen $m \to \infty$ und erhalten nach Lemma 2.4.10

$$d(\beta_n, \beta_k) \leq \varepsilon$$

für alle $n, k \geq n_0$. Somit ist $(\beta_n)_n$ eine Cauchyfolge und konvergiert aufgrund der Vollständigkeit von E. Setze $\beta := \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k$. In der Abschätzung lassen wir $k \to \infty$ und erhalten nach Lemma 2.4.10

$$d(\beta, \beta_n) \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$.

In Abschätzung (2.1) lassen wir $n \to \infty$ und erhalten

$$d(\alpha_m, a_{km}) \leq \varepsilon$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $k \geq n_0$. Nun benutzen wir für $n, k \geq n_0$ die Dreiecksungleichung und erhalten

$$d(\alpha_m, \beta_m) \leq \underbrace{d(\alpha_m, a_{km})}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(a_{km}, a_{nm})}_{\leq \varepsilon} + d(a_{nm}, \beta_m).$$

Nun gelten $\lim\limits_{m\to\infty} d(a_{nm}, \beta_m) = d(\beta_n, \beta)$ nach Lemma 2.4.10 sowie $d(\beta_n, \beta) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und somit insbesondere für $n = n_0$. Für dieses fixierte $n = n_0$ gibt es $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ die Abschätzung

$$|d(a_{n_0 m}, \beta_m) - d(\beta_{n_0}, \beta)| < \varepsilon$$

gilt. Wir kombinieren diese Ungleichungen und erhalten aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(\alpha_m, \beta_m) &\leq 2\varepsilon + d(a_{n_0 m}, \beta_m) \\ &= 2\varepsilon + d(\beta_{n_0}, \beta) + d(a_{n_0 m}, \beta_m) - d(\beta_{n_0}, \beta) \\ &\leq 2\varepsilon + d(\beta_{n_0}, \beta) + |d(a_{n_0 m}, \beta_m) - d(\beta_{n_0}, \beta)| \\ &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Es gilt also $d(\alpha_m, \beta_m) \to 0$ für $m \to \infty$. Da $\beta_m \to \beta$ konvergiert, folgt $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ nach Lemma 2.4.11, d. h. wir dürfen die Grenzwerte vertauschen. □

glm konv lim vert thm

Theorem 2.4.12. *Sei E ein Banachraum. Angenommen, die Reihen $((a_{nm}))_n$ konvergieren gleichmäßig in m. Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$ für alle n, so existieren auch $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{nm}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$ und es gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} a_{nm}.$$

Beweis. Wir wollen Theorem 2.4.8 anwenden. Definiere

$$s_{nm} := \sum_{k=0}^{n} a_{km}.$$

Dann folgt die Behauptung direkt aus Theorem 2.4.8. □

Korollar 2.4.13. *Sei $x \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \exp x.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \exp 1 =: e.$$

Beweis. Wir benutzen für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ die Binomische Formel und die Konvention, dass für $n > m$ für den Binomialkoeffizienten $\binom{m}{n} = 0$ gilt. Es ist daher

om konseq e fkt identi

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\frac{x^n}{m^n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{x^n}{m^n}. \tag{2.2}$$

Definiere

$$a_{nm} := \binom{m}{n}\frac{x^n}{m^n}.$$

Es gelten $a_{0m} = 1$ und $a_{1m} = x$ für $m \ge 1$. Für $2 \le n \le m$ gilt

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{x^n}{m^n} \\ &= \frac{(m-n+1)(m-n+2)\cdots(m-n+n)}{m^n}\frac{x^n}{n!} \\ &= \underbrace{\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{n-2}{m}\right)}_{<1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{1}{m}\right)}_{<1}\cdot 1\cdot\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Somit ist die Reihe $\left(\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)\right)_n$ eine konvergente Majorante, die von m unabhängig ist. Nach Lemma 2.4.6, angewandt mit festem x und m hier statt x dort, konvergiert die Reihe $((a_{nm}))_n$ daher (für festes x) gleichmäßig in m.

Betrachten wir in der obigen Produktdarstellung von a_{nm} den Grenzwert $m \to \infty$, so folgt

$$\lim_{m\to\infty} a_{nm} = \frac{x^n}{n!}.$$

Nach Theorem 2.4.12 dürfen wir den Grenzwert $m \to \infty$ auf (2.2) anwenden, mit der Summe vertauschen und erhalten die Behauptung. □

3. Metrische Räume und Stetigkeit

3.1. Topologische Grundlagen.

offen def

Definition 3.1.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Dann heißt $A \subset E$ **offen**, falls

$$\forall\, x \in A\ \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset A.$$

(ii) Eine Menge $F \subset E$ heißt **abgeschlossen**, falls $\complement F \subset E$ offen ist.

topo def

Definition 3.1.2. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Dann heißt $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ mit

$$\mathcal{O} := \{A \subset E : A \text{ ist offen}\}$$

(die von (E,d) auf E induzierte) **Topologie**. ($\star$ Merke: $\mathcal{O} \longleftrightarrow$ offen)

(ii) Definiere

$$\mathcal{F} := \{F \subset E : F \text{ ist abgeschlossen}\}.$$

($\star$ Merke: fermer = französisch abschließen)

(iii) Eine Menge $U \subset E$ heißt Umgebung von $x \in E$, falls es eine offene Menge $A \subset E$ mit
$$x \in A \subset E$$
gibt. ($\iff \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$)

(iv) Wir bezeichnen die Menge aller Umgebungen von x mit $\mathcal{U}(x)$.

Definition 3.1.3. Sei (E, d) ein metrischer Raum, $r > 0$ und $x_0 \in E$. Wir definieren

(i) die **offene Kugel** mit Radius r und Mittelpunkt x_0
$$B_r(x_0) := \{x \in E \colon d(x, x_0) < r\}.$$

(ii) Ist E ein normierter Raum, so definieren wir weiterhin die **abgeschlossene Kugel** mit Radius r und Mittelpunkt x_0
$$\overline{B_r}(x_0) := \{x \in E \colon d(x, x_0) \le r\}$$

(iii) und die **Sphäre** mit Radius r und Mittelpunkt x_0
$$\mathbb{S}_r(x_0) := \{x \in E \colon d(x, x_0) = r\}.$$

topo ball rem

Bemerkung 3.1.4. Sei E ein metrischer Raum.

topo ball rem i

(i) $\emptyset$ und E sind in E offen und abgeschlossen.

(ii) Eine offene Kugel $B_r(x)$ ist eine offene Menge. Eine abgeschlossene Kugel $\overline{B_r}(x)$ in einem normierten Raum ist eine abgeschlossene Menge.

(iii) Sei $a < b$. Dann ist $[a, b) \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

(iv) Sei $A \subset E$ eine endliche Menge. Dann ist A abgeschlossen.

(v) $\mathbb{S}_r(x) \subset E$ in einem normierten Raum ist eine abgeschlossene Menge.

(vi) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$, z. B. $a_n = \frac{1}{n+1}$. Dann bildet die Familie $\{B_{a_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x.

Beweis. Übung. □

Grundlegende Eigenschaften sind:

metr top prop

Proposition 3.1.5. *Sei E ein metrischer Raum.*

(i) Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von offenen Mengen, d. h. gelte $A_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, so folgt
$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}.$$
„Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen."

(ii) Seien $A_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, n$, so ist
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}.$$
„Endliche Schnitte offener Mengen sind wieder offen."

(iii) Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, d. h. gelte $F_i \in \mathcal{F}$ für alle $i \in I$, so folgt
$$\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}.$$
„Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen."

(iv) Seien $F_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist
$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}.$$
„Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen."

Beweis.

(i) Sei $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in A_{i_0} \in \mathcal{O}$. Somit existiert $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A_{i_0}$ und es folgt auch $B_r(x) \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Somit ist eine beliebige Vereinigung offener Mengen wieder offen.

(ii) Sei $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Also folgt $x \in A_i$ für alle $1 \le i \le n$. Da alle A_i's offene Mengen sind, gibt es $r_i > 0$ mit $B_{r_i}(x) \subset A_i$. Setze $r := \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Es folgt $B_r(x) \subset A_i$ für alle $1 \le i \le n$ und daher gilt auch $B_r(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Somit ist der endliche Schnitt offener Mengen wieder offen.

(iii) Es gilt
$$\complement \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} \complement F_i.$$
Nun sind alle F_i's abgeschlossen, also alle $\complement F_i$'s offen, ebenso deren Vereinigung. Somit ist die linke Seite offen und deren Komplement, also $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$, wie behauptet abgeschlossen.

(iv) Folgt analog wie für Schnitte abgeschlossener Mengen, da
$$\complement \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} \complement F_i$$
gilt. □

Später in der Vorlesung Topologie definiert man eine Topologie wie folgt:

def topo abstrakt

Definition 3.1.6 (Topologie)**.** ⋆ Sei E eine Menge. Dann heißt $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ **Topologie** auf E, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$.

(ii) Aus $A_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, folgt $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$.

(iii) Aus $A_i \in \mathcal{O}$, $1 \le i \le m$, folgt $\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{O}$.

$(E, \mathcal{O})$ heißt dann topologischer Raum.

Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt **offen,** falls $A \in \mathcal{O}$ gilt.

Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt **abgeschlossen,** falls $\complement F = E \setminus F$ offen ist. Die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von E bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ (fermer = französisch abschließen).

Bemerkung 3.1.7. ⋆

(i) Wir haben in Bemerkung 3.1.4 (i) und Proposition 3.1.5 gesehen, dass unsere Definition einer Topologie alle Bedingungen an eine Topologie in Definition 3.1.6 erfüllt. Es gibt auch Topologien gemäß Definition 3.1.6, die nicht wie in den Definitionen 3.1.1 und 3.1.2 von einer Metrik d auf einer Menge E induziert sind.

(ii) Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{O})$ heißt **Hausdorffraum** (oder T_2-Raum), falls zu je zwei Punkten $x, y \in E$ mit $x \ne y$ offene Mengen U, V mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ existieren. (Je zwei Punkte besitzen disjunkte Umgebungen.)

(iii) Sei (E, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die von d induzierte Topologie. Dann ist $(E, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum. Wir sagen auch, dass die Topologe $\mathcal{O}$ **hausdorffsch** ist.

Dies sehen wir wie folgt: Seien $x, y \in E$ mit $d(x, y) =: r > 0$. Dann sind $B_{r/3}(x)$ und $B_{r/3}(y)$ disjunkte Umgebungen von x bzw. y.

(iv) $(E, \{\emptyset, E\})$ ist ein topologischer Raum. Ist $|E| \geq 2$, so ist diese Topologie nicht hausdorffsch, also auch von keiner Metrik induziert.
(v) $(E, \mathcal{P}(E))$ ist ein topologischer Raum. Seine Topologie ist von der diskreten Metrik induziert.

Definition 3.1.8. Sei E ein metrischer Raum und sei $A \subset E$.

(i) Ein Punkt $x \in E$ heißt **innerer Punkt** von A, falls es $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A$ gibt. Wir setzen

$$\operatorname{int}(A) \equiv \overset{\circ}{A} := \{x \in A : x \text{ ist ein innerer Punkt von } A\}.$$

($\star$ In allgemeinen topologischen Räumen fordern wir $\exists U \in \mathcal{O} : x \in U \subset A$, wobei wir U stets offen wählen können, oder, äquivalent dazu, $A \in \mathcal{U}(x)$.)
(ii) Ein Punkt $x \in E$ heißt **Berührpunkt** von A, falls für alle $r > 0$ stets $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ gilt. Die Menge aller Berührpunkte von A heißt **Abschluss** oder **abgeschlossene Hülle** von A: $\overline{A}$ oder seltener $\operatorname{cl}(A)$. (Insbesondere gilt stets $A \subset \overline{A}$.) ($\star$ In einem normierten Raum gilt $\overline{B_r}(x) = \overline{B_r(x)}$, d. h. diese Definition liefert das Bekannte für Kugeln.) ($\star$ In einem topologischen Raum fordern wir $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset$, wobei wir nur offene Umgebungen U betrachten müssen.)
(iii) Ein Punkt $x \in E$ heißt **Randpunkt** von A, falls für alle $r > 0$ stets $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ und $B_r(x) \cap \complement A \neq \emptyset$ gelten. Die Menge aller Randpunkte von A heißt Rand von A: ∂A. ($\star$ Randpunkte sind Berührpunkte von A und $\complement A$.) ($\star$ $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap \complement A$ in topologischen Räumen, wobei wir auch hier nur offene Umgebungen U betrachten müssen.)

Proposition 3.1.9. *Sei E ein metrischer Raum und sei $A \subset E$. Dann gilt*

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{G \in \mathcal{O} : G \subset A\},$$

d. h. $\operatorname{int} A$ *ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.*

Beweis.

- „$\subset$“: Sei $x \in \operatorname{int} A$. Dann gibt es $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A$. Insbesondere dürfen wir $G = B_r(x)$ auf der rechten Seite nutzen und erhalten die behauptete Inklusion.
- „$\supset$“: Sei umgekehrt $x \in \bigcup \{G \in \mathcal{O} : G \subset A\}$. Dann gibt es eine solche offene Menge $G \subset A$ mit $x \in G$. Da G offen ist, gibt es $r > 0$ mit $B_r(x) \subset G$. Es folgen $B_r(x) \subset A$ und $x \in \operatorname{int} A$ wie behauptet. $\square$

Proposition 3.1.10. *Sei E ein metrischer Raum und seien $A, B \subset E$. Dann gelten*

$$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(B) \quad \text{und} \quad \operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B).$$

Beweis.

(i) Sei $x \in \operatorname{int}(A)$. Dann gibt es also ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A$. Also ist auch $B_r(x) \subset B$ und daher $x \in \operatorname{int}(B)$.
(ii) „$\subset$“: Sei $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Somit gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A \cap B$. Also ist auch $B_r(x) \subset A$ und daher $x \in \operatorname{int} A$. Ebenso ist $x \in \operatorname{int} B$ und daher $x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.
(iii) „$\supset$“: Sei nun $x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. Somit existieren $r_A, r_B > 0$, so dass $B_{r_A}(x) \subset A$ und $B_{r_B}(x) \subset B$ gelten. Setze $r := \min\{r_A, r_B\}$. Es folgt $B_r(x) \subset A \cap B$ und daher gilt $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$. $\square$

Lemma 3.1.11. *Sei E ein metrischer Raum. Sei $A \subset E$. Dann ist $\overline{A} \subset E$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in \overline{A}$. Dann gibt es $r > 0$, so dass $B_r(x) \cap A = \emptyset$ gilt. Wir behaupten, dass $B_{r/2}(x) \subset \complement\overline{A}$ gilt. Dies ist richtig, da für jedes $y \in B_{r/2}(x)$ nach Dreiecksungleichung $B_{r/2}(y) \subset B_r(x) \subset \complement\overline{A} \subset \complement A$ gilt. Jedes solche $y \in B_{r/2}(x)$ besitzt also eine Umgebung $B_{r/2}(y)$ mit $B_{r/2}(y) \cap A = \emptyset$. Also gilt $y \notin \overline{A}$ und somit folgt $B_{r/2}(x) \subset \complement\overline{A}$ wie behauptet. Da $x \in \complement\overline{A}$ beliebig war, ist $\complement\overline{A}$ offen. Nach Definition ist $\overline{A}$ daher abgeschlossen. □

Proposition 3.1.12. *Sei E ein metrischer Raum und seien $A, B \subset E$. Dann gelten*

$$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \quad \textit{und} \quad \overline{A} = \bigcap\{F \in \mathcal{F} \colon A \subset F\}.$$

Damit ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Beweis.

(i) $\overline{A} \subset \overline{B}$ ist nach Definition des Abschlusses klar.
(ii) Sei zunächst $x \notin \overline{A}$, also $x \in \complement\overline{A}$. Da diese Menge offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \complement\overline{A}$ oder $B_r(x) \cap \overline{A} = \emptyset$. Direkt aus der Definition des Abschlusses folgt $A \subset \overline{A}$. Also gilt auch $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Definiere die abgeschlossene Menge $F := E \setminus B_r(x) = \complement B_r(x)$. Es gelten $x \notin F$ und aufgrund der obigen Überlegungen $A \subset F$. Daher taucht diese Menge F im Schnitt auf der rechten Seite auf und liefert $x \notin \bigcap\{F \in \mathcal{F} \colon A \subset F\}$.
(iii) Sei umgekehrt $x \notin \bigcap\{F \in \mathcal{F} \colon A \subset F\}$. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge F mit $A \subset F$ und $x \notin F$. Da das Komplement dieser Menge offen ist, existiert (wie oben) ein $r > 0$ mit $B_r(x) \cap F = \emptyset$. Wegen $A \subset F$ folgt daraus auch $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Daher gilt insbesondere $x \notin \overline{A}$. □

Proposition 3.1.13. *Sei E ein metrischer Raum und seien $A, B \subset E$. Dann gelten*

$$\complement\overline{A} = \operatorname{int}(\complement A) \quad \textit{und} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Beweis.

(i) $\complement\overline{A} \subset \operatorname{int}(\complement A)$: Sei $x \in \complement\overline{A}$. Da das Komplement einer abgeschlossenen Menge offen ist, gibt es $r > 0$ mit $B_r(x) \cap \overline{A} = \emptyset$. Somit folgen $B_r(x) \cap A = \emptyset$ und daher $B_r(x) \subset \complement A$. Dies liefert gerade $x \in \operatorname{int}(\complement A)$.
(ii) $\operatorname{int}(\complement A) \subset \complement\overline{A}$: Sei $x \in \operatorname{int}(\complement A)$. Dann gibt es $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \complement A$. Somit ist $x \notin \overline{A}$ nach Definition des Abschlusses. Dies war die Behauptung.
(iii) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$: Wir zeigen, dass $\complement(\overline{A} \cup \overline{B}) \subset \complement\overline{A \cup B}$ gilt. Sei $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Dann gibt es ein $r_A > 0$ mit $B_{r_A}(x) \cap A = \emptyset$ und ein $r_B > 0$ mit $B_{r_B}(x) \cap B = \emptyset$. Setze $r := \min\{r_A, r_B\}$. Dann ist $B_r(x) \cap (A \cup B) = \emptyset$, also $x \notin \overline{A \cup B}$.
(iv) Sei $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Sei ohne Einschränkung $x \in \overline{A}$. Für jedes $r > 0$ gilt also $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Somit ist auch $B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ für beliebige $r > 0$. Dies liefert aber gerade die Behauptung. □

Beispiele 3.1.14.

(i) Sei $A = [a, b) \subset \mathbb{R}$ für $a < b$. Dann gelten
$$\operatorname{int}(A) = (a, b), \quad \overline{A} = [a, b] \quad \text{und} \quad \partial A = \{a, b\}.$$
(ii) Sei $A = B_r(x_0) \dot\cup \{a\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $|a - x_0| > r$, so gelten
$$\operatorname{int} A = B_r(x_0), \quad \overline{A} = \overline{B_r}(x_0) \dot\cup \{a\} \quad \text{und} \quad \partial A = \mathbb{S}_r(x_0) \dot\cup \{a\}.$$
(iii) Sei E ein beliebiger metrischer Raum. Dann gelten für eine beliebige Menge $A \subset E$
$$\partial A = \partial\complement A, \quad \overline{A} = \operatorname{int}(A) \dot\cup \partial A \quad \text{und} \quad E = \operatorname{int}(A) \dot\cup \operatorname{int}(\complement A) \dot\cup \partial A.$$

(iv) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, so gelten

$$A = \overline{A} = \partial A \quad \text{und} \quad \operatorname{int}(A) = \emptyset.$$

$A = \overline{A}$ gilt auch in einem beliebigen metrischen Raum, dort kann aber $\partial A \subsetneq A$ gelten. $\operatorname{int}(A)$ braucht in einem allgemeinen metrischen Raum nicht leer zu sein.

(v) Sei E ein Raum mit diskreter Metrik und $A \subset E$. Dann gelten

$$A = \operatorname{int}(A) = \overline{A} \quad \text{und} \quad \partial A = \emptyset.$$

Beweis. Übung. □

Definition 3.1.15. Sei E ein metrischer Raum. Dann heißt $x \in E$ **Häufungspunkt** von A, falls für alle $r > 0$

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

gilt. ($\star\ \forall U \in \mathcal{U}(x) : (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ in topologischen Räumen; auch hier genügt es, offene Umgebungen U zu betrachten.)

Bemerkung 3.1.16.

(i) Jeder Häufungspunkt einer Menge ist (direkt nach Definition) auch ein Berührpunkt dieser Menge, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt (z. B. einpunktige Mengen).

(ii) Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Setze $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist jeder Häufungspunkt von A auch ein Häufungspunkt der Folge, die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht, z. B. im Falle einer stationären Folge, d. h. falls $x_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiele 3.1.17.

(i) Ist $A = B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\overline{B_r}(x_0)$ die Menge der Häufungspunkte und gleichzeitig die Menge der Berührpunkte von A.

(ii) Sei E ein metrischer Raum und sei $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$. Gelte $x_n \to a \notin A$, dann ist a ein Häufungspunkt von A. Unabhängig von der Annahme $a \notin A$ gilt $\overline{A} = A \cup \{a\}$.

(iii) Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

dicht def

Definition 3.1.18. Sei E ein metrischer Raum. Dann ist $A \subset E$ **dicht** in E, falls $E = \overline{A}$ gilt.

Beispiel 3.1.19. Es gelten $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$. Somit liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^n$ liegt dicht in $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1.20. *Sei E ein metrischer Raum und $A \subset E$. Sei d_A die auf A induzierte Metrik aus Beispiel 2.1.13. Dann sind die offenen Mengen O_A in (A, d_A) genau Mengen der Form $O \cap A$, wobei O in (E, d) offen ist.*

Beweis. Seien $B_r^E(x)$ offene Kugeln in E und $B_r^A(x)$ offene Kugeln in A. Da d_A die Einschränkung von d auf $A \times A$ ist, gilt $B_r^A(x) = B_r^E(x) \cap A$ für alle $x \in A$ und alle $r > 0$.

(i) Sei zunächst O in E offen. Definiere $O_A := O \cap A$. Wir wollen nachweisen, dass O_A auch eine offene Menge ist. Sei $x \in O_A$. Somit ist $x \in O$. Da O offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r^E(x) \subset O$. Es folgt

$$B_r^A(x) = B_r^E(x) \cap A \subset O \cap A = O_A.$$

Somit ist O_A in A offen.

(ii) Sei nun O_A in A offen. Sei $r(x) > 0$ für jedes $x \in O_A$ so gewählt, dass $B^A_{r(x)}(x) \subset O_A$ gilt. Wie für jede offene Menge gilt
$$O_A = \bigcup_{x \in O_A} B^A_{r(x)}(x).$$
Wir definieren
$$O := \bigcup_{x \in O_A} B^E_{r(x)}(x).$$
Dann ist O nach Definition offen und es gilt $O_A = O \cap A$. Somit ist O_A von der Form wie behauptet. □

Korollar 3.1.21. *Sei E ein metrischer Raum und sei $A \subset E$. Dann ist $U \subset A$ genau dann eine Umgebung eines Punktes $x \in A$ bezüglich der auf A induzierten Metrik, wenn ein $V \in \mathcal{U}(x)$, eine Umgebungs im Raum E, mit $V \cap A = U$ existiert.*

Definition 3.1.22 (Relativtopologie)**.** Sei $(E, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $B \subset E$. Dann induziert $\mathcal{O}$ eine Topologie $\mathcal{O}_B$ auf B, die **induzierte Topologie** oder **Relativtopologie**, definiert durch
$$\mathcal{O}_B = \{A \cap B \colon A \in \mathcal{O}\}.$$
Die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen der Relativtopologie heißen **relativ offen** bzw. **relativ abgeschlossen.**

Lemma 3.1.23. *Sei E ein metrischer Raum und sei $B \subset E$. Dann induziert d eine Metrik auf B und diese eine Topologie $\mathcal{O}_1$ auf B. Andererseits induziert d eine Topologie $\mathcal{O}_E$ auf E und diese eine Relativtopologie $\mathcal{O}_2$ auf B. Es gilt $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.1.24. Sei $E = (0, 1]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Relativtopologie versehen. Dann ist $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ (relativ) offen in E und $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ ist (relativ) abgeschlossen in E.

raum top offen abg lem

Lemma 3.1.25. *Sei E ein metrischer Raum und seien $B \subset A \subset E$.*
(i) Sei A offen und B in A relativ offen. Dann ist B in E offen.
(ii) Sei A abgeschlossen und B in A relativ abgeschlossen. Dann ist B in E abgeschlossen.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass $A \subset E$ und $B \subset A$ offen sind. Der Fall abgeschlossener Mengen funktioniert analog.

Da $B \subset A$ relativ offen ist, gibt es nach Definition der Relativtopologie eine offenen Menge $\hat{B} \subset E$ mit $\hat{B} \cap A = B$. Da $A \subset E$ offen ist, ist auch $\hat{B} \cap A = B$ in E offen. □

Definition 3.1.26. Seien E, F metrische Räume und sei $f \colon E \to F$ eine Abbildung.
(i) Seien $x_0 \in E$ und $a \in F$. Gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in E$
$$d(x, x_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), a) < \varepsilon$$
gilt, so sagen wir, dass $f(x)$ gegen a konvergiert, falls x gegen x_0 konvergiert.
(ii) Seien $E = \mathbb{R}$ und $a \in F$. Dann konvergiert $f(x)$ für $x \to \infty$ gegen a, $f(x) \to a$ für $x \to \infty$, falls
$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x_0 \in \mathbb{R}}{\exists} \; \underset{x > x_0}{\forall} \; |f(x) - a| < \varepsilon$$
gilt.
(iii) Im Fall $x \to -\infty$ oder falls $F = \mathbb{R}$ und $f(x) \to \pm\infty$ gelten, verwenden wir analoge Definitionen.

3.2. **Stetigkeit.**

Definition 3.2.1 (Stetigkeit)**.** Seien E, F metrische Räume und $f\colon E \to F$ eine Abbildung.

(i) Die Abbildung f heißt ε-δ-**stetig** im Punkte $x_0 \in E$, falls
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$
oder, äquivalent dazu,
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$
gilt.

(ii) Die Abbildung f heißt **als topologische Abbildung stetig** in $x_0 \in E$, falls
$$\underset{V\in\mathcal{U}(f(x_0))}{\forall}\ \underset{U\in\mathcal{U}(x_0)}{\exists}\ f(U) \subset V$$
oder, äquivalent dazu,
$$\underset{V\in\mathcal{U}(f(x_0))}{\forall}\ f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$$
gilt.

(iii) Die Abbildung f heißt im Punkte x_0 **folgenstetig,** falls für alle Folgen $(x_n)_n \subset E$ mit $x_n \to x_0$ auch
$$f(x_n) \to f(x_0)$$
für $n \to \infty$ folgt.

(iv) Die Abbildung f heißt in x_0 **stetig,** falls sie in x_0 eine ε-δ-stetige Abbildung oder als topologische Abbildung stetig oder folgenstetig ist.

(v) f heißt ☺-stetig, falls f in allen Punkten $x_0 \in E$ ☺-stetig ist, für ☺ $\in \{\varepsilon - \delta, \text{als topologische Abbildung}, \text{folgen}, \emptyset\}$.

Bemerkung 3.2.2.

(i) Diese Definition ist die wahrscheinlich wichtigste Definition der Analysis I. Stetigkeit tritt in allen Bereichen der Mathematik auf.

(ii) Als Übung empfehlen wir zunächst die in der ε-δ-Stetigkeit und der Stetigkeit als topologische Abbildung behaupteten Äquivalenzen zu zeigen.

(iii) In der topologischen Definition der Stetigkeit kann man sich bei V (und U) auch stets auf offene Mengen beschränken.

Der folgende Satz rechtfertigt die letzte Definition von Stetigkeit ohne weitere Zusätze.

Theorem 3.2.3. *Seien E, F metrische Räume und $f\colon E \to F$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

stet aequiv i *(i) f ist in x_0 eine ε-δ-stetige Abbildung.*

stet aequiv ii *(ii) f ist in x_0 als topologische Abbildung stetig.*

stet aequiv iii *(iii) f ist in x_0 folgenstetig.*

Beweis.

- „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Sei V eine beliebige offene Umgebung von $f(x_0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. Wegen (i) existiert auch ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Wir erhalten also die Behauptung wenn wir $U = B_\delta(x_0)$ wählen.

- „(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Sei $x_n \to x_0$ eine Folge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wollen nachweisen, dass $f(x_n) \to f(x_0)$ konvergiert, dass es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ gilt. Wir benutzen (ii) mit $V = B_\varepsilon(f(x_0))$ und erhalten, dass es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$ gibt. Da U eine Umgebung ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset U$ und es gilt insbesondere $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Wegen $x_n \to x_0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ bereits $x_n \in B_\delta(x_0)$ gilt. Es folgt also $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ wie behauptet.
- „(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Falls die Folgerung nicht gilt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ Punkte mit $d(x, x_0) < \delta$ aber auch $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$ existieren. Insbesondere für $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, gibt es also $x_n \in E$ mit $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Dies widerspricht aber der Folgenstetigkeit. □

Die folgende äquivalente Aussage zur Stetigkeit wird in der Topologie-Vorlesung gerne als Definition genutzt.

Theorem 3.2.4. *Seien E, F metrische Räume und $f\colon E \to F$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig, wenn für alle offenen Mengen $V \subset F$ auch $f^{-1}(V) \subset E$ offen ist.*

Beweis. Übung. □

Proposition 3.2.5 (Komposition von stetigen Abbildungen)**.** *Sei $f\colon E \to F$ in x_0 stetig und $g\colon F \to G$ in $f(x_0)$ stetig, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.*

Um Übung im Umgang mit dem wichtigen Begriff der Stetigkeit zu bekommen empfehlen wir dies auch mit ε-δ-Stetigkeit und Folgenstetigkeit zu beweisen.

Beweis. Wir zeigen, dass $g \circ f$ als topologische Abbildung in x_0 stetig ist. Sei V eine Umgebung von $g \circ f(x_0)$. Es gilt $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1} \circ g^{-1}(V)$. g^{-1} macht aus V eine Umgebung von $f(x_0)$ und f^{-1} daraus eine Umgebung von x_0, da f und g stetig sind. Somit folgt die Behauptung. □

einbettung stetig prop

Proposition 3.2.6. *Sei E ein metrischer Raum und $F \subset E$ sei mit der induzierten Metrik versehen. Dann gelten*

(i) Die Einbettung $j\colon F \to E$ mit $j(x) = x$ ist stetig.
(ii) Ist G ein weiterer metrischer Raum und $f\colon E \to G$ stetig in $x_0 \in F \subset E$, so ist auch die Einschränkung $f|_F$ in x_0 stetig.

Beweis.

(i) Sei $A \subset E$ offen. Dann ist $j^{-1}(A) = A \cap F$, also nach Definition der Relativtopologie offen. Somit ist j stetig.
(ii) Benutze $f|_F = f \circ j$ und dass die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist. □

Proposition 3.2.7. *Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(F)$ für alle abgeschlossenen Mengen $F \subset Y$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir betrachten die Komplemente. Ist $Y = F \dot\cup G$, so gilt auch

$$X = f^{-1}(F) \dot\cup f^{-1}(G).$$

Somit folgt die Behauptung. □

Das folgende Resultat liefert die Stetigkeit stückweise definierter Abbildungen.

Proposition 3.2.8. *Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Seien $A_i \subset X$, $1 \le i \le n$, abgeschlossene Mengen mit $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Dann ist f genau dann stetig, falls alle Abbildungen $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ stetig sind.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Dies haben wir bereits in Proposition 3.2.6 gezeigt.

„$\Leftarrow$“: Sei $F \subset Y$ abgeschlossen. Dann sind die Mengen $\left(f|_{A_i}\right)^{-1}(F)$ nach Voraussetzung in A_i, $1 \le i \le n$, ebenfalls (relativ) abgeschlossen. Da die Mengen A_i abgeschlossen sind, sind die Mengen $\left(f|_{A_i}\right)^{-1}(F)$ nach Lemma 3.1.25 auch als Teilmengen von X abgeschlossen. Nun gilt

$$f^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f|_{A_i}\right)^{-1}(F).$$

Also ist $f^{-1}(F)$ abgeschlossen und f eine stetige Abbildung. $\square$

Definition 3.2.9 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Seien E, F metrische Räume und sei $f\colon E \to F$ eine Abbildung. Dann heißt f **gleichmäßig stetig,** falls

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in E}{\forall}\ d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

gilt.

Bemerkung 3.2.10. $\star$

(i) Im Unterschied zur Stetigkeit darf nun δ nicht mehr von x_0 abhängen.

(ii) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig, die Umkehrung gilt aber nicht, wie wir am Beispiel $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ noch sehen werden.

(iii) Auf einem kompakten metrischen Raum, dessen Definition noch folgt, ist aber jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig.

Proposition 3.2.11. *Seien X, Y, Z metrische Räume und $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ gleichmäßig stetige Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es $\zeta > 0$, so dass für alle $a, b \in Y$

$$d(a,b) < \zeta \quad \Longrightarrow \quad d(g(a), g(b)) < \varepsilon$$

gilt. Weiterhin gibt es aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in X$

$$d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \zeta$$

gilt. Setze nun insbesondere $a = f(x)$ und $b = f(y)$. Damit folgt für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ die Abschätzung $d(g \circ f(x), g \circ f(y)) < \varepsilon$. $\square$

Beispiel 3.2.12. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Es gilt

$$|f(x_0) - f(x)| = |x_0^2 - x^2| = |x_0 - x| \cdot |x_0 + x|.$$

(i) Stetigkeit: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für $|x - x_0| < \delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1\right\}$ zuerst $|x_0 + x| = |2x_0 + (x - x_0)| \le 2|x_0| + |x - x_0| < 2|x_0| + 1$ und daher

$$|f(x_0) - f(x)| \le |x_0 - x| \cdot (2|x_0| + 1) < \varepsilon.$$

Daher genügt es für den Nachweis der Stetigkeit, das angegebene $\delta > 0$ zu verwenden.

(ii) Gleichmäßige Stetigkeit: Setze $\varepsilon := 1$. Betrachte $x_n = n$ und $y_n = n + \frac{1}{n}$. Dann wird zwar $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$ beliebig klein, es gilt aber
$$|f(y_n) - f(x_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 > \varepsilon.$$
Somit kann f nicht gleichmäßig stetig sein.

Definition 3.2.13. Seien $(E, \mathcal{O})$ und $(E', \mathcal{O}')$ topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f\colon E \to E'$, so dass f und f^{-1} stetig sind, heißt **Homöomorphismus.** Existiert solch eine Abbildung f, so heißen E und E' **homöomorph**.

Bemerkung 3.2.14.

(i) Die Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, wenn wir $\mathbb{R}$ mit der kanonischen Metrik versehen.
(ii) Sei f ein Homöomorphismus. Dann ist $A \subset E$ genau dann offen, wenn $f(A) \subset E'$ offen ist. Daher ist es für topologische Untersuchungen irrelevant, ob wir E oder E' betrachten.

Proposition 3.2.15. *Die Verkettung $g \circ f$ von zwei Homöomorphismen ist wieder ein Homöomorphismus.*

Beweis. Stetigkeit und Bijektivität bleiben unter Verkettungen erhalten. □

Definition 3.2.16 (Isometrie)**.** Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt f **Isometrie,** falls
$$d(f(a), f(b)) = d(a, b)$$
für alle $a, b \in X$ gilt.

Bemerkung 3.2.17.

(i) Jede Isometrie ist stetig.
(ii) Sei X ein metrischer Raum und sei Y eine Menge. Ist $f\colon X \to Y$ eine Bijektion, so wird durch
$$d(a, b) := d\left(f^{-1}(a), f^{-1}(b)\right)$$
für alle $a, b \in Y$ eine Metrik auf Y definiert, so dass f zu einer Isometrie wird.

Definition 3.2.18. $\star$ Definiere $\overline{R} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ und Abbildungen $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ sowie $g\colon [-1, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ durch
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x = -\infty, \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{für } x = +\infty \end{cases}$$
und
$$g(x) := \begin{cases} -\infty & \text{für } x = -1, \\ \frac{x}{1-|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ +\infty & \text{für } x = 1. \end{cases}$$
Dann gelten $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$.

Wir definieren auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Metrik d_0 durch
$$d_0(x, y) := |f(x) - f(y)| = \left|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\right|.$$
Auf $\overline{\mathbb{R}}$ wollen wir stets diese Metrik betrachten.

Bemerkung 3.2.19. $\star$

(i) Die Metrik d_0 stimmt auf $\mathbb{R}$ nicht mit der kanonischen Metrik oder Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ überein, beide erzeugen jedoch auf $\mathbb{R}$ dieselbe Topologie.

(ii) Die Räume $(\mathbb{R}, d_0)$ und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, also $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik, sind homöomorph: $f|_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ ist ein Homöomorphismus wenn wir beide Räume mit der Standardmetrik versehen und $g\colon ((-1,1), |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_0)$ ist eine Isometrie. Wegen $\mathrm{id} = g \circ f\colon (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_0)$ folgt daher, dass die Identität als Verknüpfung dieser beiden Homöomorphismen selbst ein Homöomorphismus ist.

(iii) $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist offen: $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ ist ein Homöomorphismus und somit ist $f^{-1}((-1,1))$ offen.

(iv) Da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ vermöge der Identität homöomorph sind, sind die offenen Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$, die in $\mathbb{R}$ enthalten sind, gerade die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(v) Sei $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen mit $\infty \in A$. Dann gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, \infty] \subset A$: Dies folgt, da jede Umgebung von $1 \in [-1,1]$ ein Intervall der Form $(1-\varepsilon, 1]$ enthält und da dies durch die Isometrie $g\colon ([-1,1], |\cdot|) \to (\overline{\mathbb{R}}, d_0)$ auf ein Intervall dieser Form abgebildet wird.

Genau wie Intervalle der Form $(1-\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, eine Umgebungsbasis von $1 \in [-1,1]$ bilden, bilden also Intervalle der Form $(x, \infty]$, $x \in \mathbb{R}$, eine Umgebungsbasis von $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$.

(vi) Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_n$ gegen $+\infty$ konvergiert, falls es für alle $x \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $x_n > x$ gilt.

Bemerkung 3.2.20. $\star$ Definiere $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und versehe $\overline{\mathbb{N}}$ mit der von $\overline{\mathbb{R}}$ induzierten Topologie. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in einem metrischen Raum E, d. h. eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to E$. Konvergiert die Folge in E und setzen wir $\varphi(\infty) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, so ist $\varphi\colon \overline{\mathbb{N}} \to E$ stetig. In $n < \infty$ ist solch eine Abbildung stets stetig, in ∞ aber nicht notwendigerweise.

Es gilt: Eine Abbildung $\varphi\colon \overline{\mathbb{N}} \to E$ ist genau dann stetig, wenn die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = \varphi(n)$ gegen $\varphi(\infty)$ konvergiert.

Nach etwas Vorbereitung werden wir gleichmäßig stetige Funktionen fortsetzen.

gleich folgen abg lem

Lemma 3.2.21. *Sei E ein metrischer Raum. Dann ist $A \subset E$ genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Teilfolge $(x_n)_n \subset E$ mit $x_n \in A$ für alle n auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$ gilt.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Sei A abgeschlossen und sei $(x_n)_n$ eine Folge mit Folgegliedern in A, die in E konvergiert. Angenommen, es gälte $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin A$. Dann gibt es aufgrund der Abgeschlossenheit von A ein $r > 0$ mit $B_r(a) \cap A = \emptyset$. Aufgrund der Konvergenz gilt für alle großen $n \in \mathbb{N}$ aber $d(x_n, a) < \frac{r}{2}$ und somit $x_n \notin A$. Widerspruch.

„$\Leftarrow$“: Sei $x \in \overline{A}$. Wir behaupten, dass auch $x \in A$ gilt. Dazu definieren wir eine Folge $(x_n)_n$: Da $x \in \overline{A}$ ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein $x_n \in A$ mit $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Es folgt $x_n \to x$ für $n \to \infty$, also auch $x \in A$. $\square$

Lemma 3.2.22. *Seien E, F metrische Räume und seien $f, g\colon E \to F$ stetige Abbildungen. Dann ist die Menge*

$$A = \{x \in E\colon f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen.

Beweis. Wir zeigen, dass der Limes jeder in E konvergente Folge mit Folgegliedern in A ebenfalls in A liegt. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.2.21.

Sei $(x_n)_n$ eine solche Folge mit $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Da f und g folgenstetig sind, folgt

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

Somit ist auch $a \in A$ und die Behauptung folgt. □

Wir geben noch einen alternativen Beweis in normierten Räumen an, da ähnliche Schlussfolgerungen häufiger vorkommen.

Beweis. ⋆

(i) Die Summe und die Differenz von zwei stetigen Funktionen sind ebenfalls stetig, also die Funktionen $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$: Aus $x_n \to x$ folgen $f(x_n) \to f(x)$ und $g(x_n) \to g(x)$ bzw. $-g(x_n) \to -g(x)$. Nach Proposition 2.2.9 folgt daher

$$(f \pm g)(x_n) \to f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x).$$

Somit sind $f+g$ und $f-g$ stetig.

(ii) Nun gilt $A = (f-g)^{-1}(\{0\})$. Da $\{0\}$ als einpunktige Menge abgeschlossen ist, ist auch A abgeschlossen. □

eich impliz gleich cor

Korollar 3.2.23. *Seien E, F metrische Räume und $f, g\colon E \to F$ stetige Abbildungen. Stimmen f und g auf einer dichten Teilmenge von E überein, so gilt $f = g$.*

Beweis. Die Menge $A = \{x \in E\colon f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen und dicht in E. Also gilt $A = E$. □

bild cauchy cauchy lem

Lemma 3.2.24. *Seien E, F metrische Räume und sei $f\colon E \to F$ auf beschränkten Mengen gleichmäßig stetig. Dann ist das Bild einer Cauchyfolge wieder eine Cauchyfolge.*

Beweis. Da jede Cauchyfolge beschränkt ist, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass f gleichmäßig stetig ist.

Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge und sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es $\delta > 0$ mit

$$d(x,y) < \delta \quad\Longrightarrow\quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

für alle $x, y \in E$. Sei also $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, das $n, m \geq n_0$ die Abschätzung $d(x_n, x_m) < \delta$ impliziert. Dann folgt $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Somit ist die Bildfolge $(f(x_n))_n$ eine Cauchyfolge. □

glm stet dichte tm lem

Theorem 3.2.25. *Sei E ein metrischer Raum, sei $A \subset E$ eine dichte Teilmenge von E und sei F ein vollständiger metrischer Raum. Sei $f\colon A \to F$ eine auf beschränkten Teilmengen von A gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde f\colon E \to F$, d. h. genau eine stetige Abbildung $\tilde f\colon E \to F$ mit $\tilde f|_A = f$. $\tilde f$ ist auf beschränkten Teilmengen von E ebenfalls gleichmäßig stetig.*

Beweis.

(i) Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 3.2.23.

(ii) Falls solch eine Abbildung $\tilde f$ existiert, so lassen sich ihre Werte auf $E \setminus A$ aufgrund der Stetigkeit wie folgt ausdrücken: Sei $a \in E \setminus A$. Da A in E dicht ist, gibt es eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in A$ und $x_n \to a$. Existiert eine stetige Funktion $\tilde f$, so gilt

$$\tilde f(a) = \lim_{n\to\infty} \tilde f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Wir wollen dies verwenden um $\tilde f$ zu definieren.

(iii) Nach Lemma 3.2.24 ist $f(x_n)$ eine Cauchyfolge. Diese konvergiert aufgrund der Vollständigkeit von F.

(iv) Der Grenzwert im obigen Definitionsversuch ist von der Auswahl der Folge $x_n \to a$ unabhängig: Sei nämlich y_n eine weitere Folge mit $y_n \in A$ und $y_n \to a$. Dann ist die abwechselnde Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ ebenfalls eine solche Folge. Wie oben sehen wir, dass auch die Bildfolge dieser Folge konvergiert. Dies ist aber nur möglich, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ gilt. Daher hängt der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge $x_n \to a$ ab.

(v) Daher ist die Funktion $\tilde{f}\colon E \to F$ wohldefiniert:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) & \text{für } x \in E \setminus A,\ A \ni x_n \to x. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ ist eine Fortsetzung von f auf $\tilde{f}$. Indem wir konstante Folgen wählen, können wir $f(a)$ auch für $a \in A$ als einen solchen Grenzwert erhalten.

(vi) Gleichmäßige Stetigkeit: Sei $\tilde{B} \subset E$ beschränkt.

Definiere $B := \bigcup\limits_{x\in\tilde{B}} B_1(x)$. Dann ist B ebenfalls beschränkt. In der beschränkten Menge B ist f gleichmäßig stetig. Seien $\varepsilon, \delta > 0$ so gewählt, dass für alle $a, b \in B$ aus $d(a,b) < 2\delta$ die Abschätzung $d(f(a), f(b)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ folgt. Seien x, $y \in \tilde{B}$ beliebig mit $d(x,y) < \delta$. Wähle Folgen $(x_n)_n$, $(y_n)_n \subset E$ mit $A \ni x_n \to x$, $A \ni y_n \to y$. Ohne Einschränkung (sonst betrachten wir nur geeignete Endstücke dieser Folgen) gilt $x_n, y_n \in B$ für alle $n \in N$. Wegen $d(x,y) < \delta$ folgt $d(x_n, y_n) < 2\delta$ für genügend große Werte von n. Also ist $d(f(x_n), f(y_n)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für solche n. Im Grenzwert gilt also $d\big(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)\big) \le \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$. Somit ist $\tilde{f}$ auf beschränkten Teilmengen von E gleichmäßig stetig. □

3.3. **Kompaktheit.**

Definition 3.3.1 (Kompaktheit)**.** Sei E ein metrischer Raum.

(i) Besitzt jede Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ von E durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung, so heißt E **überdeckungskompakt**, **quasikompakt** oder **kompakt.**

(ii) Eine Überdeckung durch offene Mengen heißt **offene Überdeckung.**

(iii) Besitzt jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in E$ eine konvergente Teilfolge, so heißt E **folgenkompakt**.

(iv) Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und x_i, $1 \le i \le N$, so dass $E = \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$ gilt, so heißt E **präkompakt** oder **totalbeschränkt.**

(v) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt überdeckungskompakt, folgenkompakt, oder präkompakt, wenn A mit der von (E, d) induzierten Metrik überdeckungskompakt, folgenkompakt, oder präkompakt ist.

(vi) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt **relativ kompakt,** falls $\overline{A}$ kompakt ist.

Bemerkung 3.3.2. $\star$

(i) Kompaktheit ist einer der ganz zentralen Begriffe der Analysis. Für kompakte metrische Räume erhält man viele Aussagen, die in allgemeinen metrischen Räumen nicht gelten. Insbesondere findet man stets konvergente Teilfolgen oder Maxima stetiger Funktionen.

(ii) Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn er überdeckungskompakt und hausdorffsch ist. Da jeder metrische Raum hausdorffsch ist, stimmen in unserem Fall eines metrischen Raumes die Definitionen für Überdeckungskompaktheit oder Quasikompaktheit und Kompaktheit überein.

Theorem 3.3.3. *Seien X, Y metrische (oder topologische) Räume. Sei X überdeckungskompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ überdeckungskompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist auch $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Sei ohne Einschränkung $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{1\le i\le N}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist $(U_i)_{1\le i\le N}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$. □

komp aequiv thm

Theorem 3.3.4. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

komp aequiv i
komp aequiv ii
komp aequiv iii

(i) X ist überdeckungskompakt.
(ii) X ist folgenkompakt.
(iii) X ist präkompakt und vollständig.

Beweis.

- „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Definiere
$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}.$$
Die Mengen F_n sind abgeschlossen, $U_n := X \setminus F_n$ ist also offen. Wir behaupten, dass es ein $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gibt. Dies ist dann der gesuchte Häufungspunkt der Folge. Falls es kein solches a gibt, ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, was äquivalent zu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ ist. Somit ist $(U_n)_n$ eine offene Überdeckung von X und endlich viele der Mengen U_n überdecken bereits X, ohne Einschränkung gelte $\bigcup\limits_{n=1}^{N} U_n = X$. Dies ist äquivalent zu $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = \emptyset$. Es gilt aber $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = F_N \neq \emptyset$. Widerspruch.
- „(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Da X folgenkompakt ist, ist X auch vollständig.

  Falls X nicht präkompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(y_i) \subsetneq X$ für alle $y_i \in X$ und alle N gilt. Wir definieren nun induktiv $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$. Fixiere dazu $x_0 \in X$ beliebig und wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$ beliebig. Es gilt stets $d(x_i, x_j) \ge \varepsilon$ für $i \neq j$. Somit besitzt $(x_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.
- „(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Nehme an, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ ohne endliche offene Teilüberdeckung gibt.

  $n = 0$: Da X präkompakt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln vom Radius $1 = 2^{-0}$, die X überdecken. Mindestens eine davon wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt. Sei dies $B_{2^{-0}}(x_0)$.

  Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bereits definiert. Dann wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdeckt. Mindestens eine davon wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt. Sei dies $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$. Wir können dabei
$$B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1}) \cap B_{2^{-n}}(x_n) \neq \emptyset$$
annehmen. (Sonst würden nämlich alle Bälle vom Radius $2^{-(n+1)}$ mit nichtleerem Schnitt mit $B_{2^{-n}}(x_n)$ endlich durch Mengen in $\mathcal{U}$ überdeckt und das würde somit auch für $B_{2^{-n}}(x_n)$ gelten. Widerspruch.) Also gilt
$$d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-(n+1)} + 2^{-n} < 2^{-(n-1)}$$
und somit für $p \in \mathbb{N}$
$$d(x_n, x_{n+p}) < 2^{-(n-1)} + 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+p-2)} < 2^{-(n-2)}.$$

Daher ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X, konvergiert also gegen ein $x \in X$ und wir erhalten $d(x_n, x) \le 2^{-(n-2)}$ durch Grenzübergang $p \to \infty$. x liegt aber in einer offenen Menge aus $\mathcal{U}$. Dies gilt auch für $B_\varepsilon(x)$. Nach Dreiecksungleichung gilt aber $B_{2^{-n}}(x_n) \subset B_{2^{-(n-2)}+2^{-n}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ für große Werte von n. Widerspruch zur Wahl von x_n. □

Theorem 3.3.5. *Seien X, Y metrische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Falls nicht, gibt es $\varepsilon > 0$ und Punkte $a_n, b_n \in X$ mit $d(a_n, b_n) < 1/n$ aber $d(f(a_n), f(b_n)) \ge \varepsilon$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der a_n, ohne Einschränkung gelte also $a_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Nach Dreiecksungleichung gilt $d(a, b_n) \le d(a, a_n) + d(a_n, b_n)$, also gilt auch $b_n \to a$ für $n \to \infty$. Da aber f in a stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $d(a, x) < \delta \implies d(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ gilt. Sei n so groß, dass $a_n, b_n \in B_\delta(a)$ gilt. Wir erhalten dann $d(f(a_n), f(b_n)) \le d(f(a_n), f(a)) + d(f(a), f(b_n)) < \varepsilon$. Widerspruch. □

Definition 3.3.6. Ein metrischer Raum E heißt **separabel,** falls er eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge $A \subset E$ besitzt.

Beispiel 3.3.7. Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist separabel; $\mathbb{Q}^n$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge.

`mpl beschr sep abg thm`

Theorem 3.3.8. *Sei Y ein metrischer Raum.*

(i) Ist Y kompakt, so ist Y beschränkt.
(ii) Ist Y (prä-)kompakt, so ist Y separabel.
(iii) Sei $X \subset Y$. Ist X kompakt, so ist X abgeschlossen.
(iv) Ist Y kompakt und $X \subset Y$ abgeschlossen, so ist X kompakt.

Beweis.

(i) Folgt aus der Präkompaktheit.
(ii) Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es endlich viele Kugeln mit Radius $1/n$, die X überdecken. Sei X_n die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte. Dann ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge.
(iii) Folgt mit Lemma 3.2.21 aus der Folgenkompaktheit.
(iv) Benutze nochmals Folgenkompaktheit und Lemma 3.2.21. □

Der Folgende Satz ist ein wichtiges Kriterium für Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3.3.9 (Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Folgt direkt aus Theorem 3.3.8.
„$\Leftarrow$“: Sei $(x_n)_n \subset A$ eine Folge. Da die Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine in $\mathbb{R}^n$ konvergente Teilfolge. Da A abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert nach Lemma 3.2.21 wieder in A. Somit ist A folgenkompakt. □

Bemerkung 3.3.10. $\star$ In unendlich dimensionalen Räumen ist der Satz von Heine-Borel im Allgemeinen falsch: In $l^2(\mathbb{N})$ ist $\overline{B_1(0)}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, da die Vektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ für $i \ne j$ die Gleichheit $d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ erfüllen.

Auch die Präkompaktheit überträgt sich auf Unterräume.

praekomp praekomp lem

Lemma 3.3.11. *Sei E ein präkompakter metrischer Raum und sei $A \subset E$. Dann ist auch A präkompakt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es aufgrund der Präkompaktheit von E endlich viele Punkte $x_i \in E$, $1 \le i \le n$, mit $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. Wir dürfen nach Umnummerierung ohne Einschränkung annehmen, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $B_\varepsilon(x_i) \cap A \neq \emptyset$ für $1 \le i \le m$ und $B_\varepsilon(x_i) \cap A = \emptyset$ für $m < i \le n$ gibt. Wähle $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap A$ für $1 \le i \le m$. Wegen $B_\varepsilon(x_i) \subset B_{2\varepsilon}(y_i)$ für $1 \le i \le m$ folgt

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{2\varepsilon}(y_i).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist A präkompakt. $\square$

Lemma 3.3.12 (Lebesguesche Zahl)**.** *Sei E ein kompakter metrischer Raum. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von E. Dann gibt es ein $r > 0$, so dass für jedes $x \in E$ ein $i \in I$ mit $B_r(x) \subset U_i$ existiert.*

Eine solche Zahl r heißt Lebesguesche Zahl.

Beweis. Falls nicht, so finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $x_n \in E$, so dass $B_{1/n}(x_n) \subset U_i$ für kein $i \in I$ gilt, d. h. für jeden noch so kleinen Radius gibt es einen Gegenbeispielpunkt. Da E kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Gelte also ohne Einschränkung $x_n \to a \in E$. Sei $j \in I$ mit $a \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(a) \subset U_j$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \ge n_0$ bereits $x_n \in B_{\rho/2}(a)$ gilt. Sei n so groß, dass $\frac{1}{n} < \frac{\rho}{2}$ gilt. Dann erhalten wir für alle $z \in B_{1/n}(x_n)$

$$d(z,a) \le d(z,x_n) + d(x_n,a) < \tfrac{\rho}{2} + \tfrac{\rho}{2} = \rho.$$

Somit gilt $B_{1/n}(x_n) \subset U_j$. Dies widerspricht der Wahl von x_n. $\square$

Auf kompakten Mengen werden Infima und Suprema stetiger Funktionen stets angenommen.

Theorem 3.3.13. *Sei $E \neq \emptyset$ ein kompakter metrischer Raum und sei $f\colon E \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_0, y_0 \in E$ mit*

$$f(x_0) = \inf_{x \in E} f(x) \quad \text{und} \quad f(y_0) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Beweis. Betrachte eine Minimalfolge, d. h. eine Folge $(x_n)_n \subset E$ mit $f(x_n) \to \inf\limits_{x \in E} f(x)$. Eine Teilfolge davon konvergiert gegen ein $a \in E$, $x_{n_k} \to a$. Da f stetig ist, folgt $f(a) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$. $\square$

Der folgende Satz ist auch in der Topologie wichtig.

bij komp hom thm

Theorem 3.3.14. *Seien E, F metrische Räume. Sei E kompakt. Sei $f\colon E \to F$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus, d. h. insbesondere ist f^{-1} stetig.*

Beweis. Die Stetigkeit von f^{-1} bedeutet, dass Bilder offener Mengen unter f wieder offen sind oder, dass Bilder abgeschlossener Mengen unter f wieder abgeschlossen sind. Dies wollen wir zeigen.

Sei also $B \subset E$ abgeschlossen. Dann ist B kompakt. Somit ist $f(B)$ kompakt und daher abgeschlossen. $\square$

Da solche Abbildungen häufiger vorkommen definieren wir:

Definition 3.3.15. Seien E, F metrische Räume. Sei $f\colon E \to F$ eine Abbildung. Dann heißt

(i) f offen, falls $f(A)$ für alle offenen Mengen $A \in \mathcal{O}_E$ in F offen ist.
(ii) f abgeschlossen, falls $f(C)$ für alle abgeschlossenen Mengen $C \subset E$ in F abgeschlossen ist.

Auch der $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Kompaktheitseigenschaft:

Definition 3.3.16 (lokal kompakt)**.** Ein metrischer Raum E heißt **lokal kompakt,** wenn jeder Punkt $x \in E$ eine kompakte Umgebung besitzt.

3.4. Zusammenhang.

Definition 3.4.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) E heißt **zusammenhängend,** falls E sich nicht als disjunkte Vereinigung von nichtleeren offenen Mengen schreiben lässt, d. h. aus
$$E = A \dot\cup B \quad \text{mit} \quad A, B \in \mathcal{O} \quad \text{folgt} \quad A = \emptyset \quad \text{oder} \quad B = \emptyset.$$
(ii) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt zusammenhängend, wenn sie als Teilraum zusammenhängend ist.
(iii) E heißt **lokal zusammenhängend,** wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis besitzt, die aus zusammenhängenden Mengen besteht.

Bemerkung 3.4.2.

(i) Jeder einpunktige Teilraum ist zusammenhängend. Die leere Menge ist zusammenhängend.
(ii) Seien $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ offene disjunkte Kugeln. Dann ist $E = B_1 \dot\cup B_2$ unzusammenhängend, da B_1 und B_2 in E offen sind.
(iii) Die Mengen A und B in der Definition von zusammenhängend sind als Komplemente von offenen Mengen abgeschlossen.
(iv) E ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und E die einzigen Teilmengen von E sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. (Übung)

`zshg stet zshg thm`

Theorem 3.4.3. *Seien E, F metrische Räume und $f\colon E \to F$ stetig. Ist E zusammenhängend, dann ist auch $f(E)$ zusammenhängend.*

Beweis. Falls der Teilraum $f(E) \subset F$ nicht zusammenhängend wäre, so gäbe es zwei disjunkte nichtleere relativ offene Mengen $A, B \subset f(E)$ mit $A \cup B = f(E)$. Somit sind auch die Mengen $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ disjunkt, nichtleer und offen in E und es gilt $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = E$. Widerspruch. $\square$

`zshg in R prop`

Proposition 3.4.4.

`zshg r thm`

(i) Eine nichtleere Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn E ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall ist.
(ii) $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend und lokal zusammenhängend.

Beweis.

(i)

„$\Rightarrow$“: Sei E zusammenhängend. Enthalte E ohne Einschränkung mindestens zwei verschiedene Punkte a und b mit $a < b$. Wir behaupten dass dann auch $[a, b] \subset E$ gilt. Daher ist E ein Intervall (Übung). Angenommen, es gibt $c \in (a, b)$ mit $c \notin E$. Dann ist
$$E = (E \cap (-\infty, c)) \dot\cup (E \cap (c, \infty))$$
eine Zerlegung von E in disjunkte nichtleere offene Mengen die zeigt, dass E nicht zusammenhängend ist. Somit folgt die Behauptung.

„$\Leftarrow$": Angenommen, ein Intervall I wäre unzusammenhängend. Dann gibt es offene disjunkte nichtleere Mengen A, B mit $I = A \dot\cup B$. Wir finden also Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ohne Einschränkung $a \in A$ sowie $b \in B$. Beachte, dass $[a, b] \subset I$ gilt. Definiere $c := \sup\{x \in [a, b] : x \in A\} \equiv \sup M$. M ist nichtleer und beschränkt, $[a, b]$ ist kompakt. Daher gilt $c \in [a, b]$. Ab jetzt betrachten wir alles relativ zu $[a, b]$. Nach Definition des Supremums ist c Grenzwert einer Folge von Punkten in A. Da A als Komplement von B abgeschlossen ist, folgt $c \in A$. Somit ist $c < b$. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(c) \cap [a, b] \subset A$. Somit ist c nicht das Supremum. Widerspruch.

(ii) Folgt aus (i). □

Erlauben wir in der Definition eines Intervalles auch Ausdrücke wie $(1, 0) = \emptyset$, so sind die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle.

Korollar 3.4.5 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei E ein zusammenhängender metrischer Raum und seien $a, b \in E$. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ stetig. Gelte $f(a) < f(b)$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d. h. es gilt*

$$[f(a), f(b)] \subset f(E).$$

Beweis. Als stetiges Bild eines zusammenhängenden Raumes ist $f(E)$ nach Theorem 3.4.3 selber wieder zusammenhängend und daher nach Proposition 3.4.4 ein Intervall. □

zshg abg tm prop

Proposition 3.4.6. *Sei E ein metrischer Raum und $A \subset E$ eine zusammenhängende Menge. Sei B eine Menge mit $A \subset B \subset \overline{A}$. Dann ist auch B zusammenhängend.*

Insbesondere ist der Abschluss einer zusammenhängenden Menge selbst wieder zusammenhängend.

Beweis. Angenommen, es existiert eine Zerlegung $B = X \dot\cup Y$ mit offenen nichtleeren Mengen $X, Y \subset B$. Da A nach Definition des Abschlusses dicht in B liegt, folgen $A \cap X \neq \emptyset$ und $A \cap Y \neq \emptyset$. Somit ist $A = (A \cap X) \dot\cup (A \cap Y)$ eine Zerlegung von A in offene nichtleere Mengen. Widerspruch. □

bel ver zus prop

Proposition 3.4.7. *Sei E ein metrischer Raum und sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie zusammenhängender Mengen mit $A_i \subset E$ für alle $i \in I$. Gilt $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist auch $A := \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ eine zusammenhängende Menge.*

Beweis. Angenommen, A wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene nichtleere Mengen $X, Y \subset E$ mit $A = X \dot\cup Y$. Sei $a \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. Es folgt $a \in X$ oder $a \in Y$. Gelte ohne Einschränkung $a \in X$. Da a aus der Schnittmenge ist, erhalten wir $a \in A_i$ für alle $i \in I$. Da $Y \neq \emptyset$ gilt, gibt es ein $j \in I$ mit $A_j \cap Y \neq \emptyset$. Es folgt, dass

$$A_j = (X \cap A_j) \dot\cup (Y \cap A_j)$$

eine disjunkte Zerlegung von A_j in offene nichtleere Mengen ist. Dies widerspricht der Tatsache, dass A_j zusammenhängend ist. □

Per Induktion erhalten wir daraus direkt

endl ver zus cor

Korollar 3.4.8. *Sei E ein metrischer Raum. Seien A_i, $i = 1, \ldots, n$ endlich viele zusammenhängende Mengen in E, so dass $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $1 \le i \le n-1$ gilt. Dann ist $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ zusammenhängend.*

Dies können wir auch auf abzählbare Vereinigungen verallgemeinern.

Korollar 3.4.9. *Sei E ein metrischer Raum und sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge zusammenhängender Mengen in E mit $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir definieren $B_n := \bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i$. Diese Mengen sind nach Korollar 3.4.8 jeweils zusammenhängend. Weiterhin gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_0 = A_0 \neq \emptyset.$$

Somit folgt die Behauptung aus Proposition 3.4.7. □

Definition 3.4.10 (Zusammenhangskomponente)**.** ⋆ Sei E ein metrischer Raum.

(i) Sei $x \in E$. Dann definieren wir die **Zusammenhangskomponente** von x in E, $\mathcal{C}(x)$, als die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen $A \subset E$ mit $x \in A$.
(ii) E heißt **total unzusammenhängend,** falls $\mathcal{C}(x) = \{x\}$ für alle $x \in E$ gilt.

zshg rem

Bemerkung 3.4.11. ⋆

(i) Die Zusammenhangskomponente eines Punktes x ist als Vereinigung von zusammenhängenden Mengen, die x enthalten, selbst wieder zusammenhängend.
(ii) $\mathcal{C}(x)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von E, die x enthält.
(iii) Nach Proposition 3.4.6 ist $\mathcal{C}(x)$ abgeschlossen.
(iv) Es gilt $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y) \Longleftrightarrow \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset$.
(v) Somit bilden die Zusammenhangskomponenten eines metrischen Raumes eine Partition dieses Raumes.
(vi) E ist genau dann zusammenhängend, wenn $\mathcal{C}(x) = E$ für alle (oder, im Falle $E \neq \emptyset$, für ein) $x \in E$ gilt.

lok zshg offen prop

Proposition 3.4.12. ⋆ *Die Zusammenhangskomponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes E sind offen.*

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset E$ eine Zusammenhangskomponente von E. Sei $x \in \mathcal{C}$. Dann besitzt x eine zusammenhängende Umgebung U. Somit gilt $U \subset \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ ist offen. □

Proposition 3.4.13. *Jede offene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ lässt sich als höchstens abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen schreiben.*

Beweis. ⋆ Da offene Intervalle zusammenhängend sind, ist A lokal zusammenhängend. Somit sind nach Proposition 3.4.12 alle Zusammenhangskomponenten von A offen und nach Proposition 3.4.4 offene Intervalle. Weiterhin haben wir bereits bemerkt, dass unterschiedliche Zusammenhangskomponenten disjunkt sind. Schließlich ist die Vereinigung höchstens abzählbar, da jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält. □

Definition 3.4.14.

(i) Sei E ein metrischer Raum. Eine **Kurve** $\Gamma \subset E$ ist das Bild einer stetigen Abbildung $\varphi\colon I = [a, b] \to E$,
$$\Gamma = \{\varphi(t) \colon a \le t \le b\}.$$
$\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ heißen **Endpunkte** der Kurve. t heißt Parameter und φ Parametrisierung der Kurve. Da alle abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}$ homöomorph zu $[0, 1]$ sind, gibt es stets eine auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ definierte Parametrisierung. Wenn nicht anders angegeben verwenden wir solch eine Parametrisierung.
(ii) Eine Kurve Γ heißt geschlossen, falls $\varphi(a) = \varphi(b)$ gilt.

(iii) Statt von Kurven spricht man auch von **stetigen Kurven, Wegen** oder **Bögen.**

(iv) Sei E ein normierter Raum. Dann heißt $\varphi\colon [a,b] \to E$ **stückweise affin** (oder stückweise affin linear), falls es $x_i \in \mathbb{R}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $p_i, q_i \in E$ gibt, so dass $\varphi|_{[x_i,x_{i+1}]}(t) = p_i + tq_i$ für alle $0 \le i \le n-1$ gilt.

(v) Eine Kurve $\Gamma \subset E$ heißt **Polygonzug,** falls es eine stückweise affine Abbildung $\varphi\colon [0,1] \to E$ mit $\varphi([0,1]) = \Gamma$ gibt.

Definition 3.4.15. Sei E ein metrischer Raum.

(i) E heißt **wegzusammenhängend** (oder **bogenzusammenhängend**), falls es zu je zwei Punkten $x, y \in E$ stets eine Kurve mit Endpunkten x und y gibt, also eine stetige Abbildung $\varphi\colon [0,1] \to E$ mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$.

(ii) Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt wegzusammenhängend, wenn sie als Teilraum wegzusammenhängend ist.

Definition 3.4.16. Sei E ein normierter Raum über dem Körper $\mathbb{R}$. Sei $A \subset E$ eine Teilmenge.

(i) A heißt **konvex,** falls für beliebige $x, y \in A$ auch die Verbindungsstrecke

$$[x,y] := \{tx + (1-t)y\colon t \in [0,1]\}$$

in A enthalten ist.

(ii) A heißt **sternförmig,** falls es ein $x_0 \in A$ gibt, so dass für beliebige $x \in A$ auch stets $[x_0, x] \subset A$ gilt.

Lemma 3.4.17. *Sei E ein normierter Raum. Sei $A \subset E$.*

(i) Ist A konvex, so ist A sternförmig.

(ii) Ist A sternförmig, so ist A wegzusammenhängend.

Beweis. Übung. □

g zshg bogen zshg prop

Proposition 3.4.18. *Sei E ein wegzusammenhängender metrischer Raum. Dann ist E zusammenhängend.*

Beweis. Seien $A, B \subset E$ offen mit $A \dot\cup B = E$. Angenommen, es gilt $A \neq \emptyset \neq B$. Dann existieren $x \in A$, $y \in B$ sowie eine Kurve $\Gamma \subset E$ mit Endpunkten x und y. Als stetiges Bild der zusammenhängenden Menge $[0,1]$, siehe Proposition 3.4.4, ist Γ nach Theorem 3.4.3 selbst wieder zusammenhängend. Andererseits ist $(\Gamma \cap A) \cup (\Gamma \cap B) = \Gamma$ eine Zerlegung, die der Tatsache widerspricht, dass Γ zusammenhängend ist. □

Alternativbeweis. ⋆ Wir wollen zeigen, dass E nur eine Zusammenhangskomponente besitzt. Dann sind wir nach Bemerkung 3.4.11 fertig. Seien $x, y \in E$ und $\mathcal{C}(x)$ und $\mathcal{C}(y)$ die zugehörigen Zusammenhangskomponenten. Sei $\Gamma \subset E$ eine Kurve mit Endpunkten x und y. Dann ist Γ als stetiges Bild der zusammenhängenden Menge $[0,1]$, siehe Proposition 3.4.4, nach Theorem 3.4.3 selbst wieder zusammenhängend. Da $\mathcal{C}(x)$ die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, die x enthalten, ist, folgt $y \in \mathcal{C}(x)$. Nach Bemerkung 3.4.11 gilt also $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$. Die Behauptung folgt. □

Proposition 3.4.19. *Sei E ein normierter Raum und $\Omega \subset E$ offen. Dann ist Ω genau dann zusammenhängend, wenn Ω wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Nach Proposition 3.4.18 genügt der Nachweis, dass jede offene zusammenhängende Menge $\Omega \subset E$ auch wegzusammenhängend ist.

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Sei $x_0 \in \Omega$ beliebig. Definiere

$$K := \{y \in \Omega\colon \exists\, \varphi\colon [0,1] \to \Omega,\ \varphi(0) = x_0,\ \varphi(1) = y \text{ und } \varphi \text{ ist stückweise affin}\}.$$

Wir wollen nun $K = \Omega$ zeigen. Da Ω zusammenhängend ist, genügt es dafür zu zeigen, dass K nichtleer, offen und abgeschlossen ist. (Diese Technik benutzt man häufiger um zu zeigen, dass eine Eigenschaft überall in einem zusammenhängenden Raum gilt.)

(i) Es gilt $x_0 \in K$. Somit ist $K \neq \emptyset$.

(ii) K ist offen: Sei $x \in K$. Dann gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Alle Punkte dieser Kugel lassen sich durch ein Geradenstück mit x in $B_\varepsilon(x)$ verbinden. Wir können also die stückweise affine Kurve von x_0 nach x um ein Geradenstück zu einer Kurve zu einem beliebigen Punkt in $B_\varepsilon(x)$ verlängern. Somit ist K offen.

(iii) K ist abgeschlossen: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $x_n \to y \in \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$. Somit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ auch $x_n \in B_\varepsilon(y)$ gilt. Wir können also eine stückweise affine Kurve von x_0 nach x_n in $B_\varepsilon(y)$ und damit insbesondere in Ω durch ein Geradenstück nach y verlängern. Dies zeigt $y \in K$. Somit ist K abgeschlossen.

Wir erhalten also $K = \Omega$ und damit die Behauptung. □

Definition 3.4.20. Sei E ein normierter Raum. Dann heißt $\Omega \subset E$ ein **Gebiet,** falls Ω offen und zusammenhängend ist.

3.5. **Produkträume.**

Definition 3.5.1 (Produktmetrik)**.** Seien (E_1, d_1) und (E_2, d_2) metrische Räume. Dann definieren wir auf $E_1 \times E_2$ die **Produktmetrik** $d\colon E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d(x, y) := \max_{1\leq i\leq 2} d_i\left(x^i, y^i\right) = \max\left\{d_1\left(x^1, y^1\right), d_2\left(x^2, y^2\right)\right\}$$

für $x = \left(x^1, x^2\right)$ und $y = \left(y^1, y^2\right)$.

metr prod rem

Bemerkung 3.5.2. ⋆

(i) Man rechnet direkt nach, dass die Produktmetrik eine Metrik auf dem kartesischen Produkt ist.

(ii) Wir hätten auch $d'(x, y) := d_1\left(x^1, y^1\right) + d_2\left(x^2, y^2\right)$ oder alternativ auch $d''(x, y) := \sqrt{\left(d_1\left(x^1, y^1\right)\right)^2 + \left(d_2\left(x^2, y^2\right)\right)^2}$ definieren können. Dies liefert zwei **äquivalente Metriken** in dem Sinne, dass es eine Konstante $c > 0$ mit $\frac{1}{c}d \leq d' \leq cd$ – und analog für andere Paare der oben erwähnten Metriken – gibt. Die Äquivalenz dieser Metriken zeigt man wie bei der Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^n$.

Die Eigenschaften Cauchyfolge, stetig, gleichmäßig stetig, (prä-)kompakt, oder beschränkt zu sein sind daher unabhängig von der Wahl der Metrik, solange diese zur Produktmetrik äquivalent ist.

(iii) Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist gerade die Metrik d'' auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(iv) Es gilt $B_r(x) = B_r\left(x^1\right) \times B_r\left(x^2\right)$ für die oben definierte Metrik d.

Definition 3.5.3.

(i) Seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$ und $(E_2, \|\cdot\|_2)$ zwei normierte Räume. Dann definiert

$$\left\|\left(x^i\right)_{i\in\{1,2\}}\right\| := \max_{i\in\{1,2\}} \left\|x^i\right\|_i$$

eine Norm auf $E_1 \times E_2$.

(ii) Seien $(E_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ zwei Skalarprodukträume. Dann definiert

$$\left\langle \left(x^i\right)_{1\leq i\leq 2}, \left(y^i\right)_{1\leq i\leq 2}\right\rangle := \sum_{i=1}^{2} \left\langle x^i, y^i\right\rangle_i$$

ein Skalarprodukt auf $E_1 \times E_2$.

Bemerkung 3.5.4. ⋆

(i) Wie bei metrischen Räumen kann man auch bei normierten Räumen äquivalente Normen auf dem kartesischen Produkt definieren.
(ii) Beim kartesischen Produkt von Skalarprodukträumen können wir die Summanden unterschiedlich gewichten.

Aus der Darstellung der Kugeln in Bemerkung 3.5.2 erhalten wir direkt

Proposition 3.5.5. *Seien E, F metrische Räume.*

(i) Gelten $A \in \mathcal{O}_E$ und $B \in \mathcal{O}_F$, so folgt $A \times B \in \mathcal{O}_{E\times F}$.
(ii) Gelten $U \in \mathcal{U}_E(x)$ und $V \in \mathcal{U}_F(y)$, so folgt $U \times V \in \mathcal{U}_{E\times F}((x, y))$.

Direkt nach Definition der Produktmetrik folgt

cf aequiv komp cf prop

Proposition 3.5.6. *Seien E_1, E_2 metrische Räume. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(x_n^i\right)_{i\in\{1,2\}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_1 \times E_2$ genau dann eine Cauchyfolge in $E_1 \times E_2$, wenn für $i = 1$ und $i = 2$ die Komponentenfolgen $\left(x^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in E_i sind.*

Ebenso gilt

aequiv komp konv prop

Proposition 3.5.7. *Seien E_1, E_2 metrische Räume. Dann konvergiert die Folge $x_n = \left(x_n^i\right)$ genau dann in $E_1 \times E_2$ gegen $x = \left(x^i\right)$, wenn die Komponentenfolgen x_n^i für $i = 1$ und $i = 2$ gegen x^i konvergieren.*

abschl prod cor

Korollar 3.5.8. *Seien E_1, E_2 metrische Räume. Gelte $A_i \subset E_i$ für $i = 1, 2$. Dann gilt*

$$\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}.$$

Beweis. Nach Definition des Abschlusses in einem metrischen Raum liegt ein Punkt x genau dann im Abschluss einer Menge A, wenn es eine Folge $A \ni x_n \to x$ gibt. Daher folgt die Behauptung aus Proposition 3.5.7. □

Proposition 3.5.9. *Seien E, F_1, F_2 metrische Räume und sei $f: E \to F_1 \times F_2$ eine Abbildung mit Komponentenabbildungen $f = \left(f^i\right)$, $f^i: E \to F_i$. Dann ist f genau dann in $z \in E$ stetig, wenn dies für die Funktionen $f^i: E \to F_i$, $i = 1, 2$, gilt.*

Beweis. Benutze Folgenstetigkeit und Proposition 3.5.7. □

glm stet ins prod prop

Proposition 3.5.10. *Seien E, F_1, F_2 metrische Räume und sei $f: E \to F_1 \times F_2$ eine Abbildung mit Komponentenabbildungen $f = \left(f^i\right)$, $f^i: E \to F_i$. Dann ist f genau dann gleichmäßig stetig, wenn dies für die Funktionen $f^i: E \to F_i$, $i = 1, 2$, gilt.*

Beweis.

„⇒“: Klar, da $d \geq d_i$.
„⇐“: Für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_i > 0$, so dass für alle $x, y \in E$

$$d_E(x, y) < \delta_i \quad\Longrightarrow\quad d_{F_i}\left(f^i(x), f^i(y)\right) < \varepsilon$$

für $i = 1, 2$ gilt. Verwende nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann folgt aus $d_E(x, y) < \delta$

$$d_{F_1\times F_2}(f(x), f(y)) = \max_{i\in\{1,2\}} d_{F_i}\left(f^i(x), f^i(y)\right) < \varepsilon$$

für alle $x, y \in E$ und daher die Behauptung. □

Korollar 3.5.11. *Seien E_1, E_2 metrische Räume. Dann sind die Projektionsabbildungen $\pi_i: E_1 \times E_2 \to E_i$, $i = 1, 2$, gleichmäßig stetig.*

Beweis. Die Projektionsabbildung π_i ist die i-te Komponente der Identität $\mathrm{id}\colon E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2$ und daher nach Proposition 3.5.10 gleichmäßig stetig. □

Proposition 3.5.12. *Seien E_1, E_2 metrische Räume. Dann sind die Projektionsabbildungen $\pi_i\colon E_1 \times E_2 \to E_1$, $i = 1, 2$, offene Abbildungen.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $i = 1$. Sei $A \subset E_1 \times E_2$ offen und $x \in \pi_1(A)$. Dann gibt es ein $y \in E_2$ mit $(x, y) \in A$. Da A offen ist, gibt es weiterhin nach Bemerkung 3.5.2 ein $r > 0$ mit $B_r((x, y)) = B_r(x) \times B_r(y) \subset A$. Daher folgt $B_r(x) = \pi_1(B_r((x, y))) \subset \pi_1(A)$. Somit ist π_1 offen. □

Bemerkung 3.5.13. $\pi_1\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist keine abgeschlossene Abbildung, denn $\pi_1\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \ge 0,\ y \ge 0 \text{ und } xy \ge 1\}\right) = (0, \infty)$ ist nicht abgeschlossen.

Proposition 3.5.14. *Seien E_1, E_2 metrische Räume. Sei $a = \left(a^1, a^2\right)$ fest.*

(i) Dann sind $E_1 \times \left\{a^2\right\}$ und $\left\{a^1\right\} \times E_2$ in $E_1 \times E_2$ abgeschlossen.
(ii) Die Abbildungen $E_1 \to E_1 \times \left\{a^2\right\}$, $x \mapsto \left(x, a^2\right)$ und $E_2 \to \left\{a^1\right\} \times E_2$, $y \mapsto \left(a^1, y\right)$ sind Isometrien.

Beweis.

(i) Dies folgt direkt aus Korollar 3.5.8 oder alternativ aus der Stetigkeit der Projektionsabbildungen.
(ii) Dies gilt direkt nach Definition der Produktmetrik. □

Theorem 3.5.15. *Seien E_1, E_2 nichtleere metrische Räume. Dann besitzt $E_1 \times E_2$ genau dann eine der unten aufgeführten Eigenschaften, wenn auch E_1 und E_2 diese besitzen.*

(i) vollständig
(ii) separabel
(iii) kompakt
(iv) präkompakt
(v) lokal kompakt
(vi) zusammenhängend
(vii) lokal zusammenhängend

Beweis. Ohne Einschränkung genügt es bei „$\Longrightarrow$“ stets, zu zeigen, dass E_1 diese Eigenschaft besitzt.

(i) Dies folgt unmittelbar aus den Propositionen 3.5.6 und 3.5.7.
(ii) separabel:
„$\Rightarrow$“: Sei $D \subset E_1 \times E_2$ eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge. Sei $x \in E_1$ beliebig. Definiere $D_1 := \pi_1(D)$. Fixiere ein beliebiges $y \in E_2$. Dann gibt es eine Folge $D \ni (x_n, y_n) \to (x, y)$. Somit erhalten wir $D_1 \ni x_n \to x$ und D_1 ist die gewünschte Menge.
„$\Leftarrow$“: Seien $D_1 \subset E_1$ und $D_2 \subset E_2$ dichte höchstens abzählbare Teilmengen. Dann sieht man leicht, dass auch $D_1 \times D_2 \subset E_1 \times E_2$ eine dichte höchstens abzählbare Teilmenge ist.
(iii) kompakt:
„$\Rightarrow$“: Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen – benutze π_1 – sind selbst wieder kompakt. (Man kann auch so wie bei „$\Longleftarrow$“ vorgehen.)
„$\Leftarrow$“: Wir benutzen die Folgenkompaktheit von E_i, $i = 1, 2$. Sei dazu $x_n = \left(x_n^1, x_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_1 \times E_2$ eine Folge. Aufgrund der Kompaktheit von E_1 konvergiert dann eine Teilfolge $\left(x_{n_k}^1\right)_k$ der Folge $\left(x_n^1\right)_n$, ebenso eine Teilfolge $\left(x_{n_{k_l}}^2\right)_l$ der Folge $\left(x_{n_k}^2\right)_k$. Da beide Komponenten der Folge $x_{n_{k_l}}$

konvergieren, erhalten wir nach Proposition 3.5.7 auch die Konvergenz dieser Folge.

(iv) präkompakt:

„$\Rightarrow$“: Sei $y \in E_2$ beliebig. Nach Lemma 3.3.11 ist $E_1 \times \{y\}$ als Unterraum eines präkompakten Raumes selbst wieder präkompakt. Die Behauptung folgt nun, da $\pi_1 \colon E_1 \times \{y\} \to E_1$ eine Isometrie ist.

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Gelten $E_1 = \bigcup\limits_{n \in I} B_\varepsilon(x_n)$ und $E_2 = \bigcup\limits_{m \in J} B_\varepsilon(y_m)$ für endliche Indexmengen I, J, so sieht man leicht, dass auch

$$(B_\varepsilon((x_n, y_m)))_{(n,m) \in I \times J} = (B_\varepsilon(x_n) \times B_\varepsilon(y_m))_{(n,m) \in I \times J}$$

eine Überdeckung von $E_1 \times E_2$ bildet.

(v) lokal kompakt:

„$\Rightarrow$“: Sei U eine kompakte Umgebung von $(x, y) \in E_1 \times E_2$. Dann gibt es eine offene Menge $V \subset U$ mit $(x, y) \in V$. Die Menge $\pi_1(V)$ ist offen, da π_1 eine offene Abbildung ist. Wegen $x \in \pi_1(V) \subset \pi_1(U)$ ist $\pi_1(U)$ eine Umgebung von x. Schließlich ist $\pi_1(U)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst wieder kompakt.

„$\Leftarrow$“: Dies folgt leicht, wenn man das Produkt $U_1 \times U_2$ zweier kompakter Umgebungen $U_i \subset E_i$ betrachtet.

(vi) zusammenhängend:

„$\Rightarrow$“: Als stetiges Bild eines zusammenhängenden Raumes ist $E_1 = \pi_1(E_1 \times E_2)$ zusammenhängend.

„$\Leftarrow$“: Sei $E_1 \times E_2 = A \dot\cup B$. Sei $(x, y) \in E_1 \times E_2$ beliebig und gelte ohne Einschränkung $(x, y) \in A$. Die Menge $\{x\} \times E_2$ ist zusammenhängend. Somit ist

$$((\{x\} \times E_2) \cap A) \dot\cup ((\{x\} \times E_2) \cap B) = \{x\} \times E_2$$

eine triviale Überdeckung, d. h. es gilt $\{x\} \times E_2 \subset A$. Wir vertauschen nun die Rollen von E_1 und E_2 und können mit einem beliebigen $y \in E_2$ argumentieren. Somit folgt $E_1 \times E_2 \subset A$ und $E_1 \times E_2$ ist zusammenhängend.

(vii) lokal zusammenhängend: $\star$

„$\Rightarrow$“: Sei $x = \left(x^1, x^2\right) \in E_1 \times E_2$ beliebig und sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Umgebungsbasis von x aus zusammenhängenden Mengen. Dann sind die Mengen $V_i := \pi_1(U_i)$ offene zusammenhängende Umgebungen von x^1, da π_1 offen und stetig ist.
Die Mengen $(V_i)_{i \in I}$ bilden eine Umgebungsbasis von x^1: Sei V eine beliebige Umgebung von x^1. Dann ist $V \times E_2$ eine Umgebung von x. Somit gibt es ein $i \in I$ mit $U_i \subset V \times E_2$. Da $V_i = \pi_1(U_i) \subset \pi_1(V \times E_2) = V$ gilt, ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Umgebungsbasis von x.

„$\Leftarrow$“: Sei wieder $x = \left(x^1, x^2\right) \in E_1 \times E_2$ beliebig. Seien $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_j)_{j \in J}$ Umgebungsbasen der Punkte $x^1 \in E_1$ bzw. $x^2 \in E_2$ aus zusammenhängenden Mengen. Dann besteht die Familie $(U_i \times V_j)_{(i,j) \in I \times J}$ aus zusammenhängenden Umgebungen von x. Die Kugeln $B_r(x)$ bilden eine Umgebungsbasis von x. Seien $i_0 \in I$ und $j_0 \in J$ so gewählt, dass $U_{i_0} \subset B_r\left(x^1\right)$ und $V_{j_0} \subset B_r\left(x^2\right)$ gelten. Dann folgt $U_{i_0} \times V_{j_0} \subset B_r\left(x^1\right) \times B_r\left(x^2\right) = B_r(x)$. Somit bildet diese Familie auch eine Umgebungsbasis. $\square$

Bemerkung 3.5.16. $\star$

(i) Wie für das Produkt von zwei metrischen Räumen kann man analog (oder induktiv) auch das Produkt von endlich vielen metrischen Räumen $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$

definieren. Die hier bewiesenen Sätze gelten auch für den Fall von endlich vielen metrischen Räumen.

(ii) Auch das Produkt von endlich vielen normierten Räumen oder von endlich vielen Skalarprodukträumen kann man wieder leicht zu einem normierten Raum bzw. einem Skalarproduktraum machen.

(iii) Die Produkttopologie zweier topologischer Räume besitzt die Mengen $O_1 \times O_2$ mit $O_1 \in \mathcal{O}_1$ und $O_2 \in \mathcal{O}_2$ als Basis.

3.6. **Stetige lineare Abbildungen.** Wir werden später lineare Abbildungen benutzen um die lineare Approximation in der Definition der Ableitung zu beschreiben.

Der Begriff einer linearen Abbildung ist aus der Linearen Algebra bekannt.

Proposition 3.6.1. *Seien E, F normierte Räume über $\mathbb{K}$. Sei $A\colon E \to F$ eine lineare Abbildung (= ein linearer Operator). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

lin stet i *(i) A ist in $O \in E$ stetig.*

lin stet ii *(ii) A ist stetig.*

lin stet iii *(iii) Es gibt ein $c \geq 0$, so dass*

$$\|Ax\| \leq c \cdot \|x\|$$

für alle $x \in E$ gilt.

Beweis.

- „(i) $\Longrightarrow$(ii)“: Dies folgt da A linear ist aus der Identität $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\|$.
- „(ii) $\Longrightarrow$(iii)“: Falls nicht, so finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein $x_n \in E$ mit $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$. Es folgt $y_n := \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0$ für $n \to \infty$. Es gilt aber $\|Ay_n\| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wegen $y_n \to 0$ widerspricht dies der Stetigkeit von A im Punkt 0.
- „(iii) $\Longrightarrow$(i)“: Klar. □

Definition 3.6.2.

(i) Sei $A\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen. Dann definieren wir die **Operatornorm** von A durch

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ 0 < \|x\| \leq 1}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|.$$

(ii) Seien E, F normierte Räume. Wir bezeichnen die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $E \to F$ mit $L(E,F)$. Ist $E = F$, so setzen wir $L(E) := L(E,E)$.

Proposition 3.6.3. *Seien E, F, G normierte Räume. Dann gelten:*

(i) $L(E,F)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Mit der Operatornorm ist $L(E,F)$ ein normierter Raum.

(ii) Ist F ein Banachraum, so ist $L(E,F)$ vollständig.

(iii) Seien $A \in L(E,F)$ und $B \in L(F,G)$, so gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

(iv) Ist $A \in L(E)$, so definieren wir induktiv $A^0 := \mathrm{id}_E$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $A^{n+1} := A \circ A^n$. Es gilt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Beweis. Übung. □

normen aequiv thm **Theorem 3.6.4.** *Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.6.5.

(i) Ist $\dim E = n < \infty$, so ist jede Abbildung $A \in L(E,F)$ stetig: Sei e_i eine Basis von E, so gilt $x_k \to 0$ mit $x_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_k^i e_i$ genau dann, wenn $a_k^i \to 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt; wir nutzen die Norm $\|x_k\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left|a_k^i\right|^2}$ und Theorem 3.6.4. Daher folgt in diesem Falle $Ax_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_k^i \cdot Ae_i \to 0$.

(ii) Der Raum $L(E,\mathbb{K}) \equiv E^*$ heißt **Dualraum** von E. Die Elemente $\varphi \in E^*$ heißen stetige **Linearformen.** Wir schreiben $\varphi(x) \equiv \langle x, \varphi\rangle$. Damit wird $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E \times E^* \to \mathbb{K}$ zu einer Bilinearform.

(iii) Ist $A \in L(E,F)$, so heißt $N(A) := A^{-1}(\{0\})$ **Kern** von A, $\ker A$. $\ker A$ ist abgeschlossen. Das Bild $\operatorname{im} A = R(A)$ ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

(iv) Ist $A \in L(E)$, so sind im Falle $\dim E = \infty$ die Aussagen „A ist injektiv“ und „A ist surjektiv“ im Allgemeinen nicht mehr äquivalent. Man betrachte dazu auf dem Folgenraum $l^2(\mathbb{N})$ die surjektive aber nicht injektive Linksverschiebung $\left(x^0, x^1, x^2, \ldots\right) \mapsto \left(x^1, x^2, \ldots\right)$ und die injektive aber nicht surjektive Rechtsverschiebung $\left(x^0, x^1, x^2, \ldots\right) \mapsto \left(0, x^0, x^1, x^2, \ldots\right)$.

4. Differentiation in einer Variablen

Wir beschränken uns hier auf den Fall von auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definierten Funktionen. Vieles lässt sich direkt auf den komplexen Fall übertragen, dies wird aber auch noch in der Vorlesung Funktionentheorie behandelt. Somit betrachten wir hier in der Regel auch Banachräume über dem Körper $\mathbb{R}$.

4.1. Differenzierbare Funktionen.

Definition 4.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, F eine Banachraum und $f\colon \Omega \to F$ eine Abbildung.

(i) Dann heißt f in $x_0 \in \Omega$ **differenzierbar,** falls
$$\lim_{\substack{\Omega \ni x \to x_0\\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existiert. Der Quotient heißt **Differenzenquotient.** Sein Grenzwert heißt **Ableitung.** Wir bezeichnen ihn mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$. Es gilt $f'(x_0) \in F$.

(ii) Ist f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so heißt f **in Ω differenzierbar.**

(iii) Ist f in Ω differenzierbar und ist die Abbildung $f'\colon \Omega \to F$ mit $x \mapsto f'(x)$ stetig, so heißt f in Ω **stetig differenzierbar.**

Bemerkung 4.1.2.

(i) Die Aussagen
$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0\\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
und
$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\| \to 0$$
für $x \to x_0$ sind äquivalent.

(ii) Direkt aus der Definition folgt: Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig.

(iii) Die in $x_0 \in \Omega$, die in Ω und die in Ω stetig differenzierbaren Funktionen bilden jeweils einen Unterraum des Vektorraumes aller Abbildungen $\Omega \to F$.

Definition 4.1.3 (Landausymbole)**.** Seien E, F Banachräume, sei $\Omega \subset E$ offen, seien $f\colon \Omega \to F$ und $g\colon \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ Abbildungen und sei $x_0 \in \Omega$. Bei den nachfolgenden Definitionen ist stets kenntlich zu machen, dass x_0 der Bezugspunkt ist.

(i) Gilt
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \Omega\ni x\neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$
so schreiben wir $f(x) \in o(g(x))$. Wir sagen dann, f sei ein klein-o von $g(x)$.

(ii) Gilt
$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ \Omega\ni x\neq x_0}} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} < \infty,$$
so schreiben wir $f(x) \in O(g(x))$. Wir sagen dann, f sei ein groß-O von $g(x)$.

Bemerkung 4.1.4.

(i) Sei $\alpha > 0$. Wir benutzen häufig $f(x) \in o(\|x - x_0\|^\alpha)$ und sagen, dass f **in** x_0 **von höherer Ordnung als** α **verschwindet.**
(ii) Sei $\alpha > 0$. Wir benutzen häufig $f(x) \in O(\|x - x_0\|^\alpha)$.
(iii) Wir verwenden diese Definitionen auch, wenn f nur in $\Omega \setminus \{x_0\}$ definiert ist.
(iv) Mit $o\left(\|x - x_0\|^\alpha\right), \ldots$ sind impliziert Mengen von Funktionen definiert. Statt $f(x) \in o\left(\|x\|^\alpha\right)$ oder $f(x) \in O\left(\|x\|^\alpha\right)$ schreibt man auch $f(x) = o\left(\|x\|^\alpha\right)$ bzw. $f(x) = O\left(\|x\|^\alpha\right)$.
(v) Im Falle $\Omega \subset \mathbb{R}$ benutzen wir diese Notation auch für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.

Beispiele 4.1.5.

(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gelten für $x_0 = 0$
$$f(x) = o\left(|x|^\alpha\right) \quad \text{für alle} \quad 0 < \alpha < n \quad \text{und} \quad f(x) = O\left(|x|^n\right).$$
(ii) Für $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $x \mapsto \sqrt{x}$ gelten für $x_0 = 0$ und alle $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
$$f(x) = o\left(x^\alpha\right) \quad \text{und} \quad f(x) = O\left(\sqrt{x}\right).$$
(iii) Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^1 \cdot x^2$ gilt $f(x) = O\left(|x|^2\right)$ und daher folgt für $x_0 = 0$ und alle $0 < \alpha < 2$
$$f(x) = o\left(|x|^\alpha\right).$$
(iv) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases}$$
ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist im Punkt 0 nicht stetig.

Beweis. Übung für später oder unter Verwendung von Schulkenntnissen. □

Proposition 4.1.6. *Sei F ein Banachraum und sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f\colon \Omega \to F$ genau dann in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn es ein $a \in F$ mit*

`lin approx eq`
$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \tag{4.1}$$
für alle $x \in \Omega$ gibt. In diesem Falle gilt $f'(x_0) = a$.

Beweis.

„⇒“: Ist f im Punkt x_0 differenzierbar, so wählen wir $a = f'(x_0)$ und erhalten
$$f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0) = o(\|x - x_0\|)$$
nach Definition der Ableitung.

„$\Leftarrow$": Nach (4.1) gilt für $x \neq x_0$ mit $x \in \Omega$

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right\| = \frac{\|o(|x - x_0|)\|}{|x - x_0|} \to 0$$

für $x \to x_0$. Somit ist f im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = a$. □

Da die linearen stetigen Abbildungen $A\colon \mathbb{R} \to F$ genau von der Form $x \mapsto a \cdot x$ für einen Vektor $a = A(1) \in F$ sind, erhalten wir unter Verwendung der Konvention, dass wir Argumente von linearen Abbildungen in spitzen Klammern schreiben

`abl lin approx` **Proposition 4.1.7.** *Sei F ein Banachraum und $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f\colon \Omega \to F$ genau dann in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn es eine stetige lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R} \to F$ mit*

$$f(x) = f(x_0) + A\langle x - x_0 \rangle + o(\|x - x_0\|)$$

für alle $x \in \Omega$ gibt.

Bemerkung 4.1.8.

(i) Die stetige lineare Abbildung A aus Proposition 4.1.7 bezeichnen wir mit

$$Df(x_0) \in L(\mathbb{R}, F).$$

(ii) Ist f in Ω differenzierbar, so bezeichnet Df die Ableitung von f. Df ist durch

$$\begin{aligned} Df\colon \Omega &\to L(\mathbb{R}, F), \\ x &\mapsto Df(x) \end{aligned}$$

gegeben.

(iii) Im reellwertigen Fall ist $A\langle x - x_0 \rangle$ durch die Multiplikation der beiden reellen Zahlen $f'(x_0)$ und $x - x_0$ gegeben. Identifizieren wir $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ mit der linearen stetigen Abbildung $\mathbb{R} \ni y \mapsto f'(x_0) \cdot y \in \mathbb{R}$, so schreiben wir auch $f'(x_0)\langle y \rangle$. Entsprechendes gilt auch für vektorwertige Funktionen.

(iv) $\star$ Proposition 4.1.7 lässt sich später gut auf Funktionen verallgemeinern, die auf offenen Teilmengen eines Banachraumes definiert sind.

Proposition 4.1.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.*

(i) Es gelten $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ sowie $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Aussagen gelten auch für vektorwertige Funktionen.

(ii) Es gilt die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(iii) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis.

(i) Klar nach Definition und Grenzwertsätzen.

(ii) Es gilt

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))f(x_0).$$

Wir dividieren nun durch $x - x_0$ und gehen zum Grenzwert $x \to x_0$ über. Die Behauptung folgt.

(iii) Wir haben hier $g^2(x_0) \equiv (g(x_0))^2$ verwendet. Die Behauptung folgt direkt aus der Produktregel und der noch zu zeigenden Identität
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
Da $g(x_0) \neq 0$ ist, gilt auch $g(x) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung von x_0, da g in x_0 stetig ist. Wir erhalten also
$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)}.$$
Wir dividieren wiederum durch $x - x_0$ und gehen zum Grenzwert $x \to x_0$ über. Die Behauptung folgt. □

Korollar 4.1.10. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^n$ in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*
$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Beweis. Die Behauptung für $n = 1$ ist leicht einzusehen. Gelte daher die Aussage bereits für alle Funktionen f_m mit $m < n$. Mit Produktregel erhalten wir daraus
$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (f_{n-1}f_1)'(x) = f_{n-1}'(x)f_1(x) + f_{n-1}(x)f_1'(x) \\ &= (n-1)x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}. \end{aligned}$$
□

Theorem 4.1.11 (Kettenregel)**.** *Sei $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}$ offen. Seien $g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ in x_0 und $f \colon \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ in $g(x_0) \in \tilde{\Omega}$ differenzierbar, so ist $f \circ g$ in einer Umgebung von x_0 definiert, in x_0 differenzierbar und es gilt*
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\langle g'(x_0)\langle \cdot \rangle\rangle.$$

Beweis.

(i) g ist in x_0 differenzierbar, somit auch stetig und daher ist $f \circ g$ in einer Umgebung von x_0 definiert. Betrachte daher ab jetzt nur noch Werte in einer solchen Umgebung.

(ii) Aufgrund der Differenzierbarkeit von f im Punkt $g(x_0)$ gilt nach Proposition 4.1.7 mit $g(x)$ und $g(x_0)$ statt x und x_0
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) \\ &= f'(g(x_0))\langle g(x) - g(x_0)\rangle + o(|g(x) - g(x_0)|). \end{aligned}$$
Weiterhin gilt aufgrund der Differenzierbarkeit von g in x_0
$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)\langle x - x_0\rangle + o(|x - x_0|).$$
Zusammengenommen erhalten wir
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f'(g(x_0))\langle g'(x_0)\langle x - x_0\rangle\rangle \\ &\quad + f'(g(x_0))\langle o(|x - x_0|)\rangle + o(|g(x) - g(x_0)|). \end{aligned}$$

(iii) Es fehlt noch der Nachweis, dass die beiden Terme in der letzten Zeile in $o(|x - x_0|)$ liegen. Für den ersten Term ist dies klar. Da wir eine Funktion in $o(|x - x_0|)$ stets in der Form $\varepsilon(|x - x_0|) \cdot |x - x_0|$ mit $\varepsilon(|x - x_0|) \to 0$ für $x \to x_0$ schreiben können, genügt der Nachweis, dass
$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(|g(x) - g(x_0)|) \cdot \frac{|g(x) - g(x_0)|}{x - x_0} = 0$$
gilt. Dies folgt nun aus der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von g in x_0 und Grenzwertsätzen. □

Bemerkung 4.1.12. Die Ableitung bezeichnet man nach Leibniz auch mit $\frac{df}{dx}$. Schreibt man $f(g(x))$ und bezeichnet die Variable von f mit y für $g(x)$, so ergibt sich ohne Argumente die an das Kürzen von Brüchen erinnernde Merkregel

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kann man die Ableitung der Inversen bestimmen. Es gilt

Korollar 4.1.13. *Seien* Ω, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}$ *offen. Sei* $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ *invertierbar und sei* $g\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ *die Inverse. Sei* f *in* x_0 *und* g *in* $f(x_0)$ *differenzierbar, so gilt*

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Es gilt $\mathrm{id} = g \circ f$. Wir leiten dies ab und erhalten mit Hilfe der Kettenregel

$$1 = \mathrm{id}' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Somit ist insbesondere $f'(x_0) \neq 0$ und wir erhalten die behauptete Identität. $\square$

Wir definieren iterativ höhere Ableitungen und zugehörige Funktionenräume.

Definition 4.1.14. Sei F ein Banachraum und sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen.

(i) Fassen wir die Ableitung einer Funktion $f\colon \Omega \to F$ als Funktion $Df\colon \Omega \to F$ auf, so können wir induktiv die Abbildungen $D^0 f = f\colon \Omega \to F$, $D^1 f = Df\colon \Omega \to F$, $D^2 f = D(Df)\colon \Omega \to F$ sowie $D^{n+1} f = D\left(D^n f\right) : \Omega \to F$ definieren, soweit dies für die gegebene Funktion f möglich ist. Wir schreiben auch $D^n f \equiv f^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n}$. Existiert $f^{(n)}$ (in einem Punkt $x_0 \in \Omega$), so heißt f (in x_0) **n-mal differenzierbar** und $f^{(n)}$ die **n-te Ableitung** von f.

(ii) Ist $f^{(n)}\colon \Omega \to F$ stetig, so heißt f eine **n-mal stetig differenzierbare Funktion.** Existiert $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f unendlich oft differenzierbar.

(iii) Wir definieren die folgenden Funktionenräume:

$$\begin{aligned} C^0(\Omega, F) &:= \{f\colon (f\colon \Omega \to F) \text{ ist stetig}\}, \\ C^0\left(\overline{\Omega}, F\right) &:= \left\{f\colon f \text{ ist stetig und beschränkt auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzbar}\right\}, \\ C^k(\Omega, F) &:= \{f\colon \Omega \to F\colon\ f \text{ ist in } \Omega\ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, \\ C^k\left(\overline{\Omega}, F\right) &:= \Big\{f \in C^k(\Omega, F)\colon \text{ für alle } 0 \le n \le k \text{ ist } f^{(n)} \\ &\qquad\qquad \text{stetig und beschränkt auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzbar}\Big\} \end{aligned}$$

sowie den Raum der glatten Funktionen

$$C^\infty(\Omega, F) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega, F).$$

Ist $F = \mathbb{R}$, so schreiben wir $C^0(\Omega) \equiv C^0(\Omega, \mathbb{R})$, $C^k(\Omega) \equiv C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $\ldots$.

Bemerkung 4.1.15. $\star$ Ist $\overline{\Omega}$ kompakt, also z. B. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist jede stetige Fortsetzung einer Funktion nach $\overline{\Omega}$ automatisch auch beschränkt.

Definition 4.1.16.

(i) Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0\left(\overline{\Omega}, F\right)$ definieren wir eine Norm für eine Funktion $f\colon \Omega \to F$ durch

$$\|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_{L^\infty} := \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_F.$$

$\star$ Als Indices der Norm verwenden wir auch C^0, $C^0(\Omega, F)$, $C^0\left(\overline{\Omega}, F\right)$, L^∞, $L^\infty(\Omega, F)$, gebräuchlich sind aber auch 0 und ∞. Ist $F = \mathbb{R}$, so lassen wir dieses Argument F auch weg.

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^k\left(\overline{\Omega}, F\right)$ definieren wir eine Norm durch

$$\|f\|_{C^k(\Omega,F)} := \sum_{i=0}^{k} \left\| f^{(i)} \right\|_{C^0(\Omega,F)}.$$

$\star$ Gebräuchlich sind auch hier wieder alle Varianten wie bei der C^0-Norm oder $\|\cdot\|_k$.

Als Vorbereitung auf Theorem 4.1.18, dass $C^k\left(\overline{\Omega}, R\right)$ ein Banachraum ist, benötigen wir, dass Stetigkeit unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten ist.

`glm konv stet thm`

Theorem 4.1.17. *Seien E, F metrische Räume. Sei $f_n \colon E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig (also bezüglich der Supremumsnorm) gegen eine Funktion $f \colon E \to F$ konvergiert. Dann ist f stetig.*

Beweis. Seien $x_0 \in E$ und $\varepsilon > 0$ fest. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz können wir $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in E$ gilt. Da f_n stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B_\delta(x_0)$ die Ungleichung $d(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$ folgt. Mittels Dreiecksungleichung erhalten wir somit für alle $y \in B_\delta(x_0)$

$$d(f(x_0), f(y)) \le d(f(x_0), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) < 3\varepsilon$$

wie behauptet. $\square$

`Ck BR thm`

Theorem 4.1.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und sei F ein Banachraum. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^k\left(\overline{\Omega}, F\right)$ mit der C^k-Norm ein Banachraum.*

Beweis. Übung. Benutze Theorem 4.1.17, dass Stetigkeit unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten ist, und dass $C^0\left(\overline{\Omega}, F\right)$ ein Banachraum ist. $\square$

Proposition 4.1.19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $f = \left(f^i\right)_{1 \le i \le n}$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn die Komponenten f^i, $1 \le i \le n$, in x_0 differenzierbar sind und es gilt dann*

$$f'(x_0) = \left(\left(f^i\right)'(x_0)\right).$$

Beweis. Übung. $\square$

Definition 4.1.20. Seien E ein metrischer Raum und $f \colon E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei $x_0 \in E$.

(i) Dann besitzt f in x_0 ein **lokales Minimum,** falls ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(x_0) \le f(x)$ für alle $x \in U$ existiert.
(ii) Dann besitzt f in x_0 ein **(globales) Minimum,** falls $f(x_0) \le f(x)$ für alle $x \in E$ gilt.
(iii) Gilt sogar $f(x_0) < f(x)$ für alle entsprechenden $x \ne x_0$, so heißt x_0 ein **striktes lokales/globales Minimum.**
(iv) **Lokale, globale** und **strikte Maxima** sind analog oder als entsprechende Minima von $-f$ definiert.
(v) f besitzt in x_0 ein **(lokales) Extremum,** falls f in x_0 ein (lokales) Minimum oder Maximum besitzt.
(vi) Besitzt f in x_0 ein Extremum, so heißt x_0 eine **Extremalstelle.**

`abl extr null prop`

Proposition 4.1.21. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$, also $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, sei $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem lokalen Extremum in $x_0 \in (a, b)$. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten ohne Einschränkung nur den Fall, dass f in x_0 ein lokales Minimum annimmt.

Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$ die Ungleichung $f(x_0) \le f(x)$ gilt. Wir erhalten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$ mit $x > x_0$. Somit folgt $f'(x_0) \ge 0$.

Durch analoge Betrachtungen für $x < x_0$ erhalten wir $f'(x_0) \le 0$. Somit ist $f'(x_0) = 0$. □

Definition 4.1.22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in \Omega$ differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) = 0$. Dann heißt x_0 **kritischer Punkt** von f.

Bemerkung 4.1.23.

(i) Proposition 4.1.21 zeigt, dass jedes lokale Extremum einer auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ definierten Funktion ein kritischer Punkt ist.
(ii) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 - x^2 \in \mathbb{R}$ besitzt drei lokale Extrema und dies sind auch genau die kritischen Punkte dieser Funktion.
(iii) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3$ besitzt in $x = 0$ einen kritischen Punkt, aber keine lokalen Extrema.

Proposition 4.1.24 (Satz von Rolle)**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Sei $f \in C^0([a, b])$ in (a, b) differenzierbar und gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Definiere

$$m := \inf_{[a,b]} f \qquad \text{und} \qquad M := \sup_{[a,b]} f.$$

Da $[a, b]$ kompakt ist, werden Minimum und Maximum auch angenommen. Es gilt $M \ge f(a) = f(b) \ge m$.

(i) Gilt in beiden Fällen Gleichheit, so ist f konstant und somit auch $f' \equiv 0$.
(ii) Sonst gelte ohne Einschränkung $M > f(a)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = M$. Nach Proposition 4.1.21 folgt also $f'(\xi) = 0$. □

mws **Theorem 4.1.25** (Mittelwertsatz (MWS))**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Sei $f \in C^0([a, b])$ und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

Beweis. Definiere die Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann erfüllt g die Voraussetzungen des Satzes von Rolle und $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$ erfüllt gerade die Behauptung. □

Für einen Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen benötigen wir noch zwei Resultate:

Proposition 4.1.26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, F ein Banachraum und sei $f\colon \Omega \to F$ in x_0 differenzierbar. Sei $\varphi\colon F \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann ist $g := \varphi \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt $g'(x_0) = \varphi(f'(x_0)) \equiv \langle f'(x_0), \varphi\rangle$.*

Beweis. Wende φ auf die Gleichung (4.1) an und beachte, dass $\varphi(o(|x - x_0|)) \subset o(|x - x_0|)$ gilt. Details: Übung. □

dual norm lem **Lemma 4.1.27.** *Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $u \in E$. Dann gilt*

$$\|u\| = \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\| = 1}} |\langle u, \varphi\rangle|.$$

Beweis. Wir können aktuell nur eine Ungleichung zeigen. Die andere folgt aus dem Satz von Hahn-Banach, den wir hier verwenden und später unabhängig davon in der Funktionalanalysis beweisen werden.

„$\geq$": Nach Definition der Operatornorm gilt für alle $\varphi \in E^*$ gerade

$$\|\varphi\| = \sup_{\|u\|=1} |\varphi(u)| = \sup_{\|u\|=1} |\langle u, \varphi\rangle|.$$

Somit folgt insbesondere $|\langle u, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|u\|$.

„$\leq$": Der Satz von Hahn-Banach liefert, dass es ein stetiges lineares Funktional $\varphi_0 \in E^*$ mit $\|\varphi_0\| = 1$ und $\varphi_0(u) = \|u\|$ gibt. Somit folgt

$$\|u\| = |\langle u, \varphi_0\rangle| \leq \sup_{\substack{\varphi \in E^* \\ \|\varphi\|=1}} |\langle u, \varphi\rangle|.$$

Im Spezialfall eines Hilbertraumes nehmen wir ohne Einschränkung $\|u\| = 1$ an. Dann ist dieses Funktional direkt durch $\varphi_0 := \langle \cdot, u\rangle$, also $\varphi_0(x) := \langle x, u\rangle$ gegeben. In diesem Fall gilt $\|\varphi_0\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle x, u\rangle| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|u\| = 1$ aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Schließlich gelten noch $\|\varphi_0\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle x, u\rangle| \geq |\langle u, u\rangle| = \|u\|^2 = 1$ und $\varphi_0(u) = \|u\|^2 = 1$. ☐

Beispiel 4.1.28. Man überlegt sich am Beispiel einer Spirale

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto (\sin t, \cos t, t),$$

dass der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen nicht genau in der Form des obigen Mittelwertsatzes gelten kann.

Theorem 4.1.29 (Vektorwertiger Mittelwertsatz)**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Sei F ein Banachraum, sei $f\colon [a, b] \to F$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in (a,b)} \|f'(x)\| \cdot (b - a) = \sup_{x \in (a,b)} \|f'(x)\| \cdot |b - a|.$$

Beweis. Sei $\varphi \in F^*$ mit $\|\varphi\| = 1$ beliebig. Wir definieren eine Funktion $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := \langle f(x), \varphi\rangle$. Dann ist $g \in C^0([a, b])$ und in (a, b) differenzierbar mit $g'(x) = \langle f'(x), \varphi\rangle$. Wir wenden nun den Mittelwertsatz auf g an und erhalten für ein $\xi \in (a, b)$ mit der Abschätzung vom Anfang des Beweises von Lemma 4.1.27

$$\begin{aligned}\langle f(b) - f(a), \varphi\rangle &= g(b) - g(a) = g'(\xi) \cdot (b - a)\\ &= \langle f'(\xi), \varphi\rangle \cdot (b - a) \leq \|f'(\xi)\| \cdot \underbrace{\|\varphi\|}_{=1} \cdot (b - a).\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $\varphi \in F^*$ mit $\|\varphi\| = 1$ gilt, folgt die Behauptung nun aus Lemma 4.1.27. ☐

Im folgenden Korollar ist $[x_0, x]$ kein Intervall, sondern eine Verbindungsstrecke wie in der Definition von Konvexität. Somit müssen wir nicht $x_0 < x$ annehmen.

l approx diff quot cor

Korollar 4.1.30. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei F ein Banachraum und sei $f\colon \Omega \to F$ differenzierbar. Seien x, $z_0 \in \Omega$. Dann gilt*

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(z_0)\langle x - x_0\rangle\| \leq \sup_{y \in [x_0, x]} \|f'(y) - f'(z_0)\| \cdot |x - x_0|.$$

Beweis. Für festes $z_0 \in \Omega$ definieren wir $g(x) := f(x) - f'(z_0)\langle x\rangle = f(x) - f'(z_0) \cdot x$. Wegen $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ folgt die Behauptung nun direkt aus dem (vektorwertigen) Mittelwertsatz. ☐

abl null fkt konst cor

Korollar 4.1.31. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, F ein Banachraum und $f\colon \Omega \to F$ differenzierbar. Gilt $f' \equiv 0$, so ist f eine konstante Abbildung.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem vektorwertigen Mittelwertsatz. □

Definition 4.1.32. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt

(i) **monoton wachsend,** falls für alle $x_1, x_2 \in I$ aus $x_1 \leq x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt.
(ii) **strikt monoton wachsend,** falls für alle $x_1, x_2 \in I$ aus $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ folgt.
(iii) **(strikt) monoton fallend,** falls für alle $x_1, x_2 \in I$ aus $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ im strikten Fall folgt.

Proposition 4.1.33. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(i) Dann ist f genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.
(ii) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f strikt monoton wachsend.
(iii) Für (strikt) monoton fallende Funktionen gelten analoge Aussagen.

Beweis.

(a) Ist f monoton wachsend, so ist der Differenzenquotient nichtnegativ und folglich auch $f'(x) \geq 0$ für alle x.
(b) Ist $f'(x) \geq 0$ oder $f'(x) > 0$ für alle x, so folgt die (strikte) Monotonie aus dem eindimensionalen Mittelwertsatz. □

Bemerkung 4.1.34. Das Beispiel $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3$ zeigt, dass strikte Monotonie im Allgemeinen nicht $f'(x) > 0$ impliziert.

`inv abl thm`

Theorem 4.1.35. *Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gelte $f' \neq 0$ in I. Dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ offen und f besitzt eine differenzierbare Inverse $f^{-1}\colon J \to I$ mit*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis.

(i) f ist injektiv, denn sonst gäbe es nach dem Satz von Rolle ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.
(ii) J ist als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend und somit ein Intervall.
(iii) J ist offen, denn wenn einer der Endpunkte zu J gehört, so nimmt f in I ein Maximum oder Minimum an, was aber wegen $f'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$ ausgeschlossen ist.
(iv) Dieselbe Argumentation liefert, dass f eine offene Abbildung ist. Somit ist $f^{-1}\colon J \to I$ stetig, $f\colon I \to J$ also ein Homöomorphismus.
(v) Da f ein Homöomorphismus ist, folgt
$$x \to x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \to f(x_0).$$
Wir setzen nun $\xi = f(x)$ und $\xi_0 = f(x_0)$. Dann gilt
$$\frac{f^{-1}(\xi) - f^{-1}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1}.$$
Wir betrachten nun den Grenzwert $x \to x_0$ mit $x \neq x_0$ oder, aufgrund der obigen Äquivalenz und der Injektivität äquivalent dazu, $\xi \to \xi_0$ mit $\xi \neq \xi_0$ und erhalten die Behauptung. □

Beispiel 4.1.36. Für $f_n\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $x \mapsto x^n$ ist $g(x) = x^{1/n}$ die Umkehrfunktion und es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{n x^{\frac{1}{n}(n-1)}}.$$

Dies wird in Analysis II fortgeführt.

Literatur

AmannEscherAnalysisI 1. Herbert Amann and Joachim Escher, *Analysis. I*, Grundstudium Mathematik, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

DenkRackeKompendiumI 2. Robert Denk and Reinhard Racke, *Kompendium der Analysis. Ein kompletter Bachelor-Kurs von reellen Zahlen zu partiellen Differentialgleichungen. Band 1: Differential- und Integralrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen.*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011.

Dieudonne 3. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.

CGAnalysisI 4. Claus Gerhardt, *Analysis. I*, German ed., International Series in Analysis, International Press, Somerville, MA, 2004.

HalmosMengenlehre 5. Paul R. Halmos, *Naive Mengenlehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1976.

HildebrandtAnalysisI 6. Stefan Hildebrandt, *Analysis 1*, corrected ed., Springer-Lehrbuch, Springer, Berlin, 2006.

JunkTreudeEmABuch 7. Michael Junk and Jan-Hendrik Treude, *Argumentieren und Beweisen. Hochschulmathematik im Selbststudium*, in preparation, 2019.

KuwertAnaI 8. Ernst Kuwert, *Analysis I*, 2006, Skript zur Vorlesung.

Rudin 9. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

TaoAnalysisI 10. Terence Tao, *Analysis. I*, second ed., Texts and Readings in Mathematics, vol. 37, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009.

wiki 11. Wikipedia, `https://www.wikipedia.org`.

Oliver C. Schnürer, Universität Konstanz, Germany
Email address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`