ANALYSIS III

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Analysis III an der Universität Konstanz im Wintersemester 2015/2016 und 2020/2021. Themen sind gewöhnliche Differentialgleichungen sowie Maß- und Integrationstheorie.

Inhaltsverzeichnis

Date: 8. März 2021.

Vielen Dank an Eva Dutt für das Tippen und Korrekturlesen einiger Abschnitte und an Tom Kliche, Sebastian Kümpel, Mark Urupin und Andrey Zakharov und den Hörern der Vorlesung für Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

Dies ist eine Fortsetzung des Skriptes zur Vorlesung Analysis, siehe [6, 7].

Wir orientieren uns für die gewöhnlichen Differentialgleichungen an [2, 3, 5, 12] und für die Maßtheorie an [1] und benutzen manchmal [13].

Wir empfehlen wiederum wie in den ersten Semestern, Resultate mit Banachräumen zunächst im Fall $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ zu verstehen. Wünschenswert wäre nun ein Verständnis zumindest im Falle von $\mathbb{R}^n$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Di 03.11.2020

8. Existenz und Eindeutigkeit

8.1. Der Existenzsatz von Picard-Lindelöf.

Definition 8.1.1. Eine **implizite gewöhnliche Differentialgleichung** k-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F\left(t, x(t), \dot{x}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)\right) = 0.$$

Eine (explizite) **gewöhnliche Differentialgleichung** k-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$x^{(k)}(t) = F\left(t, x(t), \dot{x}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right).$$

Gesucht ist jeweils eine k-mal differenzierbare Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ bzw. $x\colon I \to E$, E ein Banachraum, für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass $F\colon I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzw. $F\colon I \times E \times E \times \cdots \times E \to E$ mindestens stetig ist.

Bemerkung 8.1.2.

(i) Wir untersuchen gewöhnliche Differentialgleichungen auf
- (globale) Lösbarkeit,
- Eindeutigkeit (der Lösung),
- Abhängigkeit der Lösung von (Anfangs-)daten.

(ii) Ist x eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^n$, so sprechen wir von einem **System** von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(iii) Eine Differentialgleichung k-ter Ordnung lässt sich als System von Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen:

$$\frac{d}{dt}X(t) \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-2)}(t) \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \\ F\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{k-1}(t)\right) \end{pmatrix} \equiv \tilde{F}\left(t, X(t)\right).$$

Daher genügt es häufig, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu untersuchen.

(iv) Ist x eine k-mal stetig differenzierbare und ist F eine einmal stetig differenzierbare Funktion und löst x die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$, so ist x auch $k+1$-mal stetig differenzierbar.

(v) Wir klassifizieren gewöhnliche Differentialgleichungen ein wenig.

(a) Ein System heißt **linear,** wenn es sich in der Form $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit einer Matrix $A(t)$ darstellen lässt.
Eine **inhomogene lineare Differentialgleichung** hat die Form
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t).$$
(b) Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt **autonom,** falls sie die Form
$$F\left(x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(k)}(t)\right) = 0$$
hat, wenn F also nicht explizit von t abhängt.
(c) Explizite und implizite gewöhnliche Differentialgleichungen haben wir bereits unterschieden.
(d) Man klassifiziert gewöhnliche Differentialgleichungen nach ihrer Ordnung.

(vi) Die nicht autonome gewöhnliche Differentialgleichung
$$\dot{\alpha}(t) = F(t, \alpha(t))$$
lässt sich äquivalent als autonome Differentialgleichung vermöge
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\beta^1(t)\\ \beta^2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ F\left(\beta^1(t), \beta^2(t)\right)\end{pmatrix}$$
umschreiben. Dabei ist $\beta^1(t) = t$ und β^2 löst die Differentialgleichung für α.

Ein einfaches aber wichtiges Resultat ist:

Lemma 8.1.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $\Omega \subset E$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Sei $F\colon I \times \Omega \to E$ stetig. Seien $t_0 \in I$ und $x_0 \in \Omega$. Dann löst $x \in C^1(I, E)$ mit $x(t) \in \Omega$ für alle $t \in I$ genau dann die Gleichung*
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = F(t, x(t)), & t \in I,\\ x(t_0) = x_0,\end{cases}$$
wenn es die Integralgleichung
$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, x(\tau))\,d\tau$$
für alle $t \in I$ löst.

Beweis. Integriere bzw. Differenziere. $\square$

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit gleichen Funktionswerten an einer Stelle können wir Lösungen zusammensetzen. Entsprechend können wir Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung k-ter Ordnung, $k \geq 1$, zusammensetzen, wenn in einem Punkt die Funktionswerte und alle Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ in einem Punkt übereinstimmen (Details: Übung).

Korollar 8.1.4 (Zusammensetzen von Lösungen)**.** *Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Sei $\Omega \subset E$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes D. Sei $F\colon I \times \Omega \to E$ stetig. Sei $t_0 \in I$. Seien $x_1 \in C^1((a, t_0), E) \cap C^0((a, t_0], E)$ und $x_2 \in C^1((t_0, b), E) \cap C^0([t_0, b), E)$ Lösungen von*
$$\dot{x}_1(t) = F(t, x_1(t)), \quad t \in (a, t_0)$$
bzw.
$$\dot{x}_2(t) = F(t, x_2(t)), \quad t \in (t_0, b)$$

mit $x_1(t_0) = x_2(t_0) \in \Omega$. *Dann ist*

$$x(t) := \begin{cases} x_1(t), & a < t \le t_0, \\ x_2(t), & t_0 < t < b \end{cases}$$

eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \textit{für } t \in (a,b).$$

Beweis. Wir benutzen die äquivalente Integralgleichung

$$x_1(t) = x_1(s) + \int\limits_s^t F(\tau, x_1(\tau))\,d\tau$$

für alle $a < s, t < t_0$. Wir gehen zum Grenzwert $s \nearrow t_0$ über und sehen, dass diese Integralgleichung auch für $s = t_0$ gilt. Entsprechend argumentieren wir mit x_2 und erhalten, dass die Integralgleichung für die Funktion x für alle $s, t \in (a,b)$ gilt. $\square$

Beispiele 8.1.5. Zur besseren Vorstellung starten wir mit einigen Beispielen. Diese vermitteln auch ein paar nützliche Rechentechniken:

(i) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \lambda \cdot x(t),$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, hat die Lösungen $x(t) = A \cdot \exp(\lambda t)$ für $A \in \mathbb{R}$. Legen wir einen Anfangswert $x(t_0)$ fest, so bestimmt dies A und die Lösung eindeutig (Beweis später).

(ii) Die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\lambda \cdot x(t),$$

$\lambda > 0$, hat die Lösungen

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right)$$

für $A, B \in \mathbb{R}$. Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir werden noch sehen, dass sie zusammen mit zwei Anfangsbedingungen, z. B. mit vorgegebenem $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$, eindeutig lösbar ist.

Alternativ kann man komplex über

$$\begin{aligned} z(t) &= A \cdot \exp\left(\sqrt{-\lambda} \cdot t\right) \\ &= A \cdot \exp\left(i\sqrt{\lambda} \cdot t\right) \\ &= A \cdot \left(\cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right) + i \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right)\right) \\ &= \operatorname{Re} A \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right) - \operatorname{Im} A \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right) \\ &\quad + i \cdot \left(\operatorname{Im} A \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right) + \operatorname{Re} A \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot t\right)\right), \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{C}$, eine Lösung bekommen. Man betrachtet nun lediglich den Realteil von $z(t)$. Berücksichtige dabei, dass

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Re} z(t) + i \cdot \operatorname{Im} z(t)\right) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} z(t) + i \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Im} z(t)$$

gilt. Somit lösen auch der Realteil und der Imaginärteil von $z(t)$ dieselbe **lineare** Differentialgleichung wie $z(t)$.

(iii) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) - b,$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ lösen wir mit einer Hilfsfunktion. Definiere $y(t) := x(t) - c$ für ein noch zu wählendes $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = a \cdot x(t) - b = a(y(t) + c) - b = a \cdot y(t),$$

wenn wir $c = b/a$ setzen. Nun erhalten wir $y(t) = A \cdot \exp(a \cdot t)$ für ein $A \in \mathbb{R}$ und somit $x(t) = y(t) + b/a = A \cdot \exp(a \cdot t) + b/a$.

(iv) Bei der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x(t) + t$$

führt der Ansatz $x(t) = A \cdot e^t + at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, zur Lösung $x(t) = A \cdot e^t - t - 1$. Entsprechendes funktioniert auch, wenn wir zur linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = x(t)$ andere Polynome in t addieren.

(v) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t)^k,$$

$a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, lösen wir mit

$$a = (x(t))^{-k} \cdot \dot{x}(t) = \frac{1}{-k+1} \frac{d}{dt} \left(x^{-k+1}(t) \right).$$

Somit gilt $x^{-k+1}(t) = A + a \cdot (-k+1) \cdot t$ für ein $A \in \mathbb{R}$ und wir erhalten

$$x(t) = (A + a(-k+1)t)^{\frac{1}{-k+1}}.$$

So erhalten wir beispielsweise für

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

die Lösung $x(t) = \frac{1}{1-t}$, die für $t \in (-\infty, 1)$ existiert. Fr 06.11.2020

(vi) **Kugelbahn:** Sei $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve mit $\alpha' \neq 0$. Sei $\varphi \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion, so dass $\alpha(\varphi(t))$ den Ort der Kugel (ohne Drehimpuls; es handelt sich um eine Kugel im Sinne einer Murmel und nicht im Sinne eines Balls; genauer sollte man von einer Perle, die ohne Reibung auf einem Draht gleitet, sprechen) zur Zeit t angibt. Nach Newton ergibt sich die Beschleunigung der Kugel aus $F = m\frac{d^2}{dt^2}\alpha(\varphi(t))$ in üblicher Schulphysiknotation. Auf die Kugel wirkt die Gravitationskraft $-mge_2$ und eine Zwangskraft in Normalenrichtung in unbekannter Stärke proportional zu $\lambda(t)$. Wir setzen $g = 1$ und kommen zum Gleichungssystem

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha(\varphi(t)) = -e_2 + \lambda(t) J\alpha'(\varphi(t)),$$

da wir mit $J\alpha'(\varphi(t))$ mit $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bis auf Normierung einen Vektor normal zur Kurve darstellen können. Wir schreiben ausnahmsweise der besseren Lesbarkeit halber α_i' statt $\alpha^{i'}$. Dies führt uns mit Kettenregel auf das System

$$\begin{aligned} \alpha_1'(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) + \alpha_1''\dot{\varphi}(t)^2 &= + \lambda(t)\alpha_2'(\varphi(t)), \\ \alpha_2'(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) + \alpha_2''\dot{\varphi}(t)^2 &= -1 - \lambda(t)\alpha_1'(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Um die unbekannte Funktion $\lambda(t)$ zu eliminieren, multiplizieren wir die erste Gleichung mit α_1' sowie die zweite mit α_2' und erhalten ohne Argumente $\varphi(t)$ bzw. t

$$\left({\alpha_1'}^2 + {\alpha_2'}^2 \right) \ddot{\varphi} + (\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'')\,\dot{\varphi}^2 = -\alpha_2'$$

oder, in expliziter Form,

$$\ddot{\varphi} = \frac{-1}{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2} \left[(\alpha_1' \alpha_1'' + \alpha_2' \alpha_2'') \dot{\varphi}^2 + \alpha_2' \right]. \tag{8.1.1}$$

(vii) $\star$ Betrachte u. a. `https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve`.

Fortsetzung des Kugelbahnbeispiels: Dort findet sich die Zykloide

$$\alpha(\varphi) := r \cdot \begin{pmatrix} \varphi + \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$$

als tautochrone Kurve, d. h. als Kurve, auf der eine Kugel, unabhängig von Startposition und Masse, aus der Ruhe die gleiche Zeit bis zum tiefsten Punkt benötigt. Wir setzen $r = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= 1 + \cos \varphi, \\ \alpha_1'' &= -\sin \varphi, \\ \alpha_2' &= \sin \varphi, \\ \alpha_2'' &= \cos \varphi, \\ {\alpha_1'}^2 + {\alpha_2'}^2 &= \ldots = 2(1 + \cos \varphi), \\ \alpha_1' \alpha_1'' + \alpha_2' \alpha_2'' &= \ldots = -\sin \varphi \end{aligned}$$

und somit

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\sin \varphi}{2(1 + \cos \varphi)} \left(1 - \dot{\varphi}^2\right).$$

Numerischer Test der Tautochronie: Indem man diese Differentialgleichung zweiter Ordnung als System umschreibt, kann man sie mit dem offenen und kostenfreien Computeralgebrasystem `sagemath.org` wie folgt lösen lassen:

```
t, phi, phit = var ('t phi phit')
Q = plot ([])
for i in range (16):
  curve=desolve_system_rk4([phit,\
    -sin(phi)/2/(1+cos(phi))*(1-phit^2)],\
    [phi,phit],ics=[0,i*0.2+0.1,0],ivar=t,\
    end_points=4*3.14159,step=0.01)
  P = [[i,j] for i,j,k in curve]
  Q = Q + line2d (P,figsize=[20,8])
show (Q)
```

Die graphische Ausgabe bestätigt die behauptete Tautochronie zumindest numerisch.

Energieerhaltung: Eine direkte Rechnung liefert, dass $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$, also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, erhalten ist. Es gilt nämlich in unserer Notation mit $m = g = 1$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \alpha(\varphi(t)) \right|^2 + \alpha_2(\varphi(t)) \\ &= \frac{1}{2} \left((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \alpha_2(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Bestimmt man nun $\dot{E}$ und ersetzt darin $\ddot{\varphi}$ mit Hilfe von (8.1.1), so erhält man $\dot{E} = 0$ und somit die Energieerhaltung (kleine Übung).

Graphische Kugelbahnen: Im graphischen Fall gilt $\alpha(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$ und wir erhalten $\alpha_1' = 1$, $\alpha_1'' = 0$, $\alpha_2' = u'$ und $\alpha_2'' = u''$. Aus (8.1.1) folgt daher die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \frac{-u'}{1+u'^2}\left(1 + u''\dot{x}^2\right),$$

wobei u und die Ableitungen dieser Funktion an der Stelle $x(t)$ ausgewertet werden. Auch hier zeigt eine kurze Rechnung unter Verwendung der Kettenregel, dass die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(1+u'^2\right)\dot{x}^2(t) + u$$

erhalten ist.

(viii) **Kettenlinie:** $\star$ Erste Herleitung: Eine graphische Kette hat die Länge $L = \int \sqrt{1+u'^2}$ (Pythagoras) und im Schwerefeld die Energie $E = \int u\sqrt{1+u'^2}$. Ohne formale Rechtfertigung wollen wir einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ verwenden. Dann ist eine Kette im Schwerefeld ein kritischer Punkt von $u \mapsto E + \lambda L$. Die Endpunkte halten wir fest. Somit erfüllt ein kritischer Punkt $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für alle $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$

$$\begin{aligned}
0 &= \delta(E+\lambda L)(u)\langle\varphi\rangle \\
&\equiv \frac{d}{dt}(E+\lambda L)(u+t\varphi)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\int_a^b (u+t\varphi+\lambda)\sqrt{1+(u+t\varphi)'^2}\,dx\,\Bigg|_{t=0} \\
&= \int \varphi\sqrt{1+u'^2} + (u+\lambda)\frac{u'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\,dx
\end{aligned}$$

und mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
&= \int \varphi\left(\sqrt{1+u'^2} - \frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} - (u+\lambda)\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)'\right)dx \\
&= \int \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} - (u+\lambda)\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)'\right)dx.
\end{aligned}$$

Da dies für alle $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ gelten soll, erfüllt u die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} = (u+\lambda)\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)'$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gibt nun Techniken, dies von Hand zu lösen. Diese stehen jedoch nicht im Fokus der Vorlesung. Daher beschränken wir uns darauf, nachzurechnen, dass für alle $\mu > 0$ und $x_0, h \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(x) = \mu\cosh\left(\frac{x-x_0}{\mu}\right) + h = \frac{\mu}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{\mu}} + e^{-\frac{x-x_0}{\mu}}\right) + h$$

eine Lösung ist. Die Konstanten bestimmen sich dann aus vorgegebenen Randwerten. Wir beschränken uns hier auf den Fall $x_0 = 0$ und $h = 0$; letzteres dürfen wir ohne Einschränkung wegen der Freiheit, λ zu wählen, annehmen. Es gilt somit

$$u'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\mu}} - e^{-\frac{x}{\mu}}\right) = \sinh\left(\tfrac{x}{\mu}\right),$$

$$\sqrt{1+u'^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(4+e^{2\frac{x}{\mu}}-2+e^{-2\frac{x}{\mu}}\right)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\mu}}+e^{-\frac{x}{\mu}}\right) = \cosh\left(\tfrac{x}{\mu}\right),$$
$$\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'^2(x)}}\right)' = \left(\frac{\sinh\left(\frac{x}{\mu}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{\mu}\right)}\right)'$$
$$= \frac{\cosh^2\left(\frac{x}{\mu}\right)-\sinh^2\left(\frac{x}{\mu}\right)}{\mu\cdot\cosh^2\left(\frac{x}{\mu}\right)} = \frac{1}{\mu\cdot\cosh^2\left(\frac{x}{\mu}\right)}.$$

Wir wählen nun $\lambda = 0$ und sehen, dass u die Differentialgleichung erfüllt.

Mehr dazu, wie man aus solchen Funktionalen eine Differentialgleichung erhält, lernt man in der Vorlesung Variationsrechnung.

(ix) $\star$ Zweite Herleitung: Wir folgen [9]. Eine Kette kann nur Kraft in Tangentialrichtung ausüben. Sei eine Kette als graph u gegeben mit $a < b \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich von u. Dann wirkt auf das Kettenstück graph $u|_{[a,b]}$ die Gewichtskraft $-g\rho\int\limits_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx\cdot e_2$, wobei ρ die Massendichte bezeichnet. Ein Tangentialvektor an graph u im Punkt $\binom{x}{u(x)}$ ist durch $T(x) = \binom{1}{u'(x)}$ gegeben. Da die Kette in Ruhe sein soll, müssen sich die Kräfte, die insgesamt auf dieses Kettenstück wirken, gegenseitig aufheben. Es gilt also mit noch zu bestimmenden Konstanten $c_a, c_b \in \mathbb{R}$

$$0 = c_aT(a)+c_bT(b)-g\rho\int\limits_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx\cdot e_2.$$

Aus der Gleichheit für die erste Komponente lesen wir ab, dass $c_b = -c_a =: c$ gilt. Beachte, dass sich auch für andere Werte von b dieselbe Konstante ergibt, da sich c_a aus der Kraft in der Kette ergibt, die nicht von b abhängt. Aus der Gleichheit für die zweite Komponente folgt

$$0 = c\cdot(u'(b)-u'(a))-g\rho\int\limits_a^b \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx.$$

Wir setzen $k := \frac{g\rho}{c}$, dividieren durch $b-a$ und erhalten im Grenzwert $b\downarrow a =: x$

$$0 = u''(x)-k\sqrt{1+u'(x)^2}$$

für beliebige x im Definitionsbereich von u.

Wir begründen nicht, dass in diesem Modell $k > 0$ gilt. Es ist aber anschaulich klar, dass $k \le 0$ keine Kette modelliert.

Auch hier kann man die Lösungsgestalt explizit herleiten oder nachrechnen, dass

$$u(x) = k\cosh\left(\frac{x-x_0}{k}\right)+h$$

für beliebige $x_0, h \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Details: Übung.

(x) $\star$ **Kermack-McKendrick** Gleichungen zur Beschreibung der Entwicklung von Krankheiten: Seien S, I und R die Anzahl der Personen, die
- S: eine Krankheit bekommen können (susceptible),
- I: infiziert sind (infected),
- R: wieder genesen sind (recovered).

Seien $\lambda > 0$ und $\gamma > 0$ die Infektions- und Genesungsraten. Nimmt man nun an, dass die Anzahl der Neuinfizierten proportional zur Anzahl der Infizierten und zur Anzahl derjenigen ist, die die Krankheit noch bekommen können, und dass weiterhin die Anzahl der neu genesenen proportional zur Anzahl der Infizierten ist, so erhält man

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\lambda \cdot I(t) \cdot S(t), \\ I'(t) &= \lambda \cdot I(t) \cdot S(t) - \gamma \cdot I(t), \\ R'(t) &= \gamma \cdot I(t). \end{aligned}$$

Als Übung überlege man sich (später), dass $S(t)$, $I(t)$ und $R(t)$ stets nichtnegativ und $S(t) + I(t) + R(t)$ konstant bleiben.

Weiterhin berücksichtigen könnte man eine Geburtenrate und eine Sterberate proportional zu $S(t) + I(t) + R(t)$ und eine infektbedingte Sterberate.

Kompliziertere Modelle, die partielle Differentialgleichungen nutzen, beschreiben auch die Verteilung in unterschiedlichen Altersgruppen und die räumliche Verteilung.

(xi) Dieses Beispiel dient mehr der Motivation als dem Vorstellen von genauen Begründungen. Diese ergeben sich jedoch im Verlauf der Vorlesung. Wir wollen zeigen, wie sich Lösungen asymptotisch verhalten.

(a) Angenommen, wir wissen bereits, dass eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = \left(1 + \alpha^2(t)\right) \cdot (1 - t \cdot \alpha(t))$$

für $t \geq 0$ in einem beschränkten Zeitintervall nicht gegen $+\infty$ konvergiert. Eine Lösung kann auch nicht nach $-\infty$ unbeschränkt werden, denn dann wäre die rechte Seite positiv und α wäre wieder wachsend. Damit erhält man Langzeitexistenz.

(b) Wir behaupten nun, dass $1 - t \cdot \alpha(t) \to 0$ für $t \to \infty$ gilt. Zumindest kann man ausschließen, dass die Fälle $1-t\cdot\alpha(t) \geq \varepsilon > 0$ und $1-t\cdot\alpha(t) \leq -\varepsilon < 0$ für alle $t \geq t_0$ für ein $t_0 \geq 0$ auftreten. Dies ist natürlich nicht die Verneinung der obigen Behauptung, liefert aber doch einige Einblicke.

(c) Wäre $1 - t \cdot \alpha(t) \geq \varepsilon > 0$ für große Werte von t, so erhielten wir die Differentialungleichung $\dot{\alpha}(t) \geq \varepsilon + \varepsilon \cdot \alpha^2(t)$. Die Abschätzung $\dot{\alpha}(t) \geq \varepsilon$ liefert uns, dass für hinreichend große t die Ungleichung $\alpha(t) \geq 1$ gilt. Andererseits erhalten wir die Abschätzung $\dot{\alpha}(t) \geq \varepsilon \cdot \alpha^2(t)$. Wir haben oben bereits gesehen, dass positive Lösungen dieser Differentialgleichung im Falle der Gleichheit nur auf endlichen Zeitintervallen (in positive Zeitrichtung) existieren können. Dies gilt umso mehr für Lösungen der Differentialungleichung.

(d) Wäre $1 - t \cdot \alpha(t) \leq -\varepsilon < 0$ für große Werte von t, so folgt $\dot{\alpha}(t) \leq -\varepsilon$ und daher $\alpha(t) \leq -1$ für große t. Dies liefert $0 \geq 1 + t \cdot (-\alpha(t)) \geq 1 + t \cdot 1$ und somit einen Widerspruch für große Werte von t.

(e) Wir erhalten also mit dieser unpräzisen Argumentation $1 - t \cdot \alpha(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und somit $\alpha(t) \approx \frac{1}{t}$ für $t \to \infty$.

Nachfolgend erinnern wir an einige Definitionen und Resultate.

Definition 8.1.6. $\star$ Sei E ein normierter Raum und sei $M \subset E$. Dann heißt eine Abbildung $\Phi\colon M \to M$ **kontrahierend,** falls es ein c mit $0 \leq c < 1$ und

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$$

für alle $x, y \in M$ gibt.

Theorem 8.1.7 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** $\star$ *Sei E ein Banachraum und $M \subset E$ abgeschlossen. Sei*

$$\Phi\colon M \to M$$

eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt, d. h. es gibt genau ein $x \in M$ mit $\Phi(x) = x$.

Definition 8.1.8. Seien E, F normierte Räume.

(i) $\star$ Dann heißt $f\colon E \to F$ (global) **lipschitzstetig** (auch: Lipschitz stetig), falls es ein $L > 0$ mit
$$\|f(x) - f(y)\|_F \le L \cdot \|x - y\|_E$$
für alle $x, y \in E$ gibt. Die kleinste solche Zahl L heißt **Lipschitzkonstante** der Abbildung f.

(ii) Sei $f_j\colon E \to F$, $j \in J$, eine Familie von lipschitzstetigen Funktionen mit Lipschitzkonstanten L_j. Dann heißt $\{f_j\}_{j \in J}$ **gleichmäßig lipschitzstetig,** falls die Lipschitzkonstanten L_j, $j \in J$, gleichmäßig beschränkt sind.

(iii) Eine Funktion $f\colon E \to F$ heißt **lokal lipschitzstetig,** falls es zu jedem Punkt $x_0 \in E$ eine Umgebung U mit $x_0 \in U$ und ein $L = L(U)$ mit
$$\|f(x) - f(y)\|_F \le L(U) \cdot \|x - y\|_E$$
für alle $x, y \in U$ gibt.

(iv) Eine Familie von Funktionen $f_j\colon E \to F$, $j \in J$, heißt **gleichmäßig lokal lipschitzstetig,** falls es zu jedem Punkt $x_0 \in E$ eine Umgebung U mit $x_0 \in U$ und ein $L = L(U)$ mit
$$\|f_j(x) - f_j(y)\|_F \le L(U) \cdot \|x - y\|_E$$
für alle $x, y \in U$ und alle $j \in J$ gibt.

Entsprechende Definitionen verwenden wir für Funktionen $f\colon \Omega \to F$, die auf Teilmengen $\Omega \subset E$ von E definiert sind.

Bemerkung 8.1.9. $\star$ C^1-Funktionen sind Lipschitzstetig:

Seien E, F ein Banachräume. Ist $f \in C^1(E, F)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|_F &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx + (1-t)y)\,dt \right\| \le \int_0^1 \|Df(tx + (1-t)y)\langle x - y\rangle\|\,dt \\ &\le \sup_{t \in [0,1]} \|Df(tx + (1-t)y)\| \cdot \|x - y\|.\end{aligned}$$

Da Df stetig ist, ist f lokal lipschitzstetig. Ist $\|Df\|$ überall beschränkt, so ist f global lipschitzstetig.

Wir beweisen den ersten Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen $x\colon I \to E$ mit einem beliebigen Banachraum E statt $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, da dies keinen Zusatzaufwand bedeutet.

Theorem 8.1.10 (Picard-Lindelöf)**.** *Sei E ein Banachraum und $x_0 \in E$. Sei $\Omega \subset E$ offen mit $x_0 \in \Omega$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen mit $t_0 \in I$. Sei $f\colon I \times \Omega \to E$ stetig und sei die Familie $(f(t, \cdot))_{t \in I}$ lokal gleichmäßig lipschitzstetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem (AWP)*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $x \in C^1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), E)$ besitzt.

Diese Lösung ist sogar die eindeutig bestimmte Lösung der äquivalenten Integralgleichung in $C^0((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), E)$.

Beweis. Wir wollen die äquivalente Integralgleichung lösen. Setze

$$M := 2\|f(t_0, x_0)\| + 1.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f und der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es ein $r > 0$ und ein $L > 0$ mit $(t_0 - r, t_0 + r) \times B_r(x_0) \subset I \times \Omega$,

$$\sup_{(t_0-r,t_0+r)\times B_r(x_0)} \|f\| \le M$$

und

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L \cdot \|x - y\|$$

für alle $x, y \in B_r(x_0)$ und alle $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$. Wähle ε mit $0 < \varepsilon < r$, $\varepsilon \cdot M \le r$ und $\varepsilon \cdot L \le \frac{1}{2}$. Definiere

$$\mathcal{M} := \left\{ x \in C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E) \colon x(t) \in \overline{B}_r(x_0) \,\forall\, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \right\}.$$

$\mathcal{M}$ ist eine bezüglich der C^0-Norm abgeschlossene Teilmenge von $C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E)$ und daher vollständig. Definiere $T \colon \mathcal{M} \to C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E)$ durch

$$(T(x))(t) := x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Wir behaupten, dass $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ gilt. Wir erhalten nämlich für $|t_0 - t| \le \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|(T(x))(t) - x_0\| &= \left\| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right\| \\
&\le |t - t_0| \cdot \sup_{(\tau,y)\in(t_0-r,t_0+r)\times B_r(x_0)} \|f(\tau, y)\| \\
&\le \varepsilon \cdot M \le r.
\end{aligned}$$

Wir behaupten weiterhin, dass T sogar eine Kontraktion ist. Es gilt nämlich für $x, y \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &= \left\| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\, d\tau \right\| \\
&\le |t - t_0| \cdot \sup_{\tau\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \\
&\le \underbrace{\varepsilon \cdot L}_{\le \frac{1}{2}} \cdot \sup_{\tau\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \|x(\tau) - y(\tau)\| \le \frac{1}{2} \|x - y\|_{C^0}.
\end{aligned}$$

Somit ist T eine Kontraktion. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert, dass T einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, die gesuchte Lösung. Beachte dazu auch Lemma 8.1.3. □

Di 10.11.2020

Auf kompakten Teilmengen haben wir eine gleichmäßige untere Schranke an die Existenzzeit.

Lemma 8.1.11. *Es gelten die Voraussetzungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Ist $K \subset I \times \Omega$ kompakt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $(t_0, x_0) \in K$ das dortige Anfangswertproblem auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ eine (eindeutige) Lösung besitzt.*

Die Produktgestalt von $I \times \Omega$ ist hier nicht wesentlich. Das Resultat funktioniert auch, wenn die Definitionsmenge eine offene Teilmenge von $E \times \mathbb{R}$ ist.

Beweis. Zu jedem (t_0, x_0) gibt es ein M, das wir wie im Beweis definieren, dann nacheinander zugehörige r, L und ε. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Tupel $(t_0, x_0, M, r, L, \varepsilon)$, so dass die Mengen $(t_0 - r/2, t_0 + r/2) \times B_{r/2}(x_0)$ die Menge K überdecken. Wir bezeichnen diese Tupel mit $(t_i, x_i, M_i, r_i, L_i, \varepsilon_i)_{1 \le i \le N}$. Wir setzen nun

$$M := \max_{1 \le i \le N} M_i, \quad r := \frac{1}{2} \cdot \min_{1 \le i \le N} r_i \quad \text{und} \quad L := \max_{1 \le i \le N} L_i.$$

Da wir hier nur endlich viele Tupel betrachten, gelten $M < \infty$, $r > 0$ und $L < \infty$. Nun fixieren wir $\varepsilon > 0$ mit $0 < \varepsilon < r$, $\varepsilon \cdot M < r$ und $\varepsilon \cdot L \le \frac{1}{2}$.

Sei nun $\left(\overline{x}, \overline{t}\right) \in K$ beliebig. Dann gibt es $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ mit

$$\left(\overline{x}, \overline{t}\right) \in (t_{i_0} - r_{i_0}/2, t_{i_0} + r_{i_0}/2) \times B_{r_{i_0}/2}(x_{i_0}).$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\left(\overline{t} - r, \overline{t} + r\right) \times B_r(\overline{x}) \subset (t_{i_0} - r_{i_0}, t_{i_0} + r_{i_0}) \times B_{r_{i_0}}(x_{i_0}).$$

Somit gelten nach Konstruktion

$$\sup_{\left(\overline{t} - r, \overline{t} + r\right) \times B_r(\overline{x})} \|f\| \le M, \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \le L \cdot \|x - y\|$$

für alle $x, y \in B_r(\overline{x})$ und alle $t \in \left(\overline{t} - r, \overline{t} + r\right)$. Daher funktioniert der Beweis das Satzes von Picard-Lindelöf ab der Definition von $\mathcal{M}$ mit $\left(\overline{x}, \overline{t}\right)$ statt (x_0, t_0) mit dem gewählten von $\left(\overline{x}, \overline{t}\right) \in K$ unabhängigen $\varepsilon > 0$, d. h. mit einer gleichmäßigen unteren Schranke an die Existenzzeit. □

Bemerkung 8.1.12. Unter den Voraussetzungen des Theorems von Picard-Lindelöf wollen wir das maximale Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$ finden, in dem das Anfangswertproblem eine Lösung besitzt.

(i) Es folgt direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf und dem Zusammensetzen von Lösungen, dass wir Lösungen, die auf einseitig abgeschlossenen Intervallen definiert sind, fortsetzen können. Daher brauchen wir nur offene Existenzintervalle zu betrachten.

(ii) Sei x_1 in J_1 eine Lösung des Anfangswertproblems und sei x_2 in J_2 ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems, wobei J_i, $i = 1, 2$, jeweils ein offenes Intervall ist. Betrachte

$$G := \{t \in J_1 \cap J_2 \colon x_1(t) = x_2(t)\}.$$

Diese Menge ist
(a) nichtleer, da $t_0 \in J_1 \cap J_2$ gilt,
(b) abgeschlossen in $J_1 \cap J_2$, da x_i stetige Abbildungen sind,
(c) offen. Dies folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, angewandt mit $t_1 \in G$ und Anfangswert $x(t_1) = x_1(t_1) = x_2(t_1)$.

Somit gilt $x_1 = x_2$ auf $J_1 \cap J_2$.

(iii) Betrachte alle Lösungen (x_i, J_i) des Anfangswertproblems, wobei J_i mit $t_0 \in J_i$ offene Intervalle und die Definitionsbereiche der Lösungen sind. Setze $J := \bigcup_i J_i$ und $x(t) := x_i(t)$ für $t \in J_i$. Dann ist x auf dem offenen Intervall J definiert. x ist wohldefiniert, da wir gesehen haben, dass $x_i = x_j$ auf $J_i \cap J_j$ gilt. Offenbar löst x das Anfangswertproblem. Wir nennen x die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

Bemerkung 8.1.13. Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in I$. Wenn wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

untersuchen, werden wir uns häufig auf $t \in [t_0, b)$ beschränken. Dies dürfen wir ohne Einschränkung tun, denn x ist genau dann eine Lösung des obigen Anfangswertproblems, wenn y mit $y(t) = x(t_0 + t_1 - t)$ für ein $t_1 \in \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)), & t \in (t_0 + t_1 - b, t_0 + t_1 - a), \\ y(t_1) = x_0 \end{cases}$$

mit $F(t, z) = -f(t_0 + t_1 - t, z)$ ist.

Beweis. Eine direkte Rechnung liefert $y(t_1) = x(t_0 + t_1 - t_1) = x(t_0) = x_0$ und

$$\dot{y}(t) = -\dot{x}(t_0 + t_1 - t) = -f(t_0 + t_1 - t, x(t_0 + t_1 - t)) = F(t, y(t)).$$

Schließlich überlege man sich, dass das Zeitintervall in der Differentialgleichung für y wie angegeben ist. Somit folgt die Behauptung. □

Wir beschreiben nun, was am Rand des maximalen Existenzintervalles passiert. Wir werden in Bemerkung 8.1.19 sehen, dass eine Lösung nicht für alle $t \in I$ definiert zu sein braucht.

Bemerkung 8.1.14. Sei $x \in C^1(J, E)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Dann verlässt x jede kompakte Teilmenge $K \subset I \times \Omega$: $\operatorname{graph} x \not\subset K$.

Anschaulich bedeutet dies im Falle $\dim E < \infty$, dass

(i) x auf ganz I definiert ist oder
(ii) x gegen den Rand von Ω konvergiert, d. h. es gibt eine Folge $(t_n) \subset J$ mit $\operatorname{dist}(\partial\Omega, x(t_n)) \to 0$ für $n \to \infty$, oder
(iii) x am Ende (oder Anfang) von J unbeschränkt wird.

Insbesondere können wir also eine Lösung, deren Graph in einer kompakten Teilmenge $K \subset I \times \Omega$ enthalten ist bzw. keine der obigen drei Bedingungen erfüllt, fortsetzen.

Beweis.
(i) Sei $K \subset I \times \Omega$ kompakt und $J \subsetneq I$, da für $J = I$ die Behauptung klar ist. Wir betrachten nur den Fall, dass J die Form $[t_0, T)$ mit $T < \infty$ hat, T ein innerer Punkt von I ist und $\operatorname{graph} x \subset K$ gilt.
(ii) Nach Picard-Lindelöf und Lemma 8.1.11 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Differentialgleichung für jeden Startwert in K mindestens auf einem Zeitintervall der Länge ε in beide Zeitrichtungen existiert. Dies wenden wir auf den Anfangswert $x(T - \varepsilon/2)$ und die Startzeit $T - \varepsilon/2$ an. Durch Zusammensetzen der Lösung sehen wir, dass das Anfangswertproblem eine Lösung besitzt, die über T hinaus existiert. Widerspruch. □

Bei beschränkten Daten erhalten wir globale Existenz.

Korollar 8.1.15. *Sei E ein Banachraum mit $x_0 \in E$. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in J$. Sei $f : J \times E \to E$ stetig und beschränkt und sei die Familie $(f(t, \cdot))_{t \in J}$ lokal (in beiden Variablen) gleichmäßig lipschitzstetig, d. h. um jeden Punkt $(t_0, x_0) \in J \times E$ gibt es eine Umgebung, in der die Familie gleichmäßig lipschitzstetig ist. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in J, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $x \in C^1(J, E)$.

Beweis. Der Satz von Picard-Lindelöf sichert die lokale Existenz einer Lösung. Bemerkung 8.1.12 impliziert die Eindeutigkeit. Angenommen, I sei das maximale offene Existenzintervall und sei $a := \sup I < \sup J$. Für alle $r, s \in I$ erhalten wir mit der Dreiecksungleichung für Integrale aus der zur Differentialgleichung äquivalenten Integralgleichung

$$\|x(r) - x(s)\| = \left\| \int\limits_r^s f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right\| \le \|f\|_{L^\infty} \cdot |r - s|.$$

Für jede Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $t_i \to a$ ist $x(t_i)$ also eine Cauchyfolge. Wir setzen x mittels $x(a) := \lim\limits_{i\to\infty} x(t_i)$ auf $I \cup \{a\}$ fort und bezeichnen die Fortsetzung $x\colon I \cup \{a\} \to E$ laxerweise wieder mit x. Im Grenzwert $s \to a$ sehen wir, dass auch die Fortsetzung x Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\|f\|_{L^\infty}$ ist. Weiterhin sehen wir aufgrund der Stetigkeit von x und wegen der Beschränktheit des Integranden, dass auch die Fortsetzung x die äquivalente Integralgleichung löst. Mit Picard-Lindelöf und Anfangswert $x(a)$ können wir die Lösung noch über a hinaus fortsetzen. Dies widerspricht der angenommenen Maximalität von I. □

Bemerkung 8.1.16. ⋆ Es gelten die Voraussetzungen von Korollar 8.1.15, aber f sei nicht beschränkt, sondern erfülle nur

$$\|f(t, x)\| \le g(t) \cdot (1 + \|x\|)$$

für eine stetige Funktion g. Auch dann gilt die Behauptung des Korollars. Insbesondere existiert eine Lösung auf ganz J.

Eine Variante mit „$\le g(t) \cdot \left(1 + \|x\|^{1+\varepsilon}\right)$“ ist i. A. falsch, wie das Beispiel $\dot{x}(t) = x^2(t) \in \mathbb{R}$ für $\varepsilon = 1$ zeigt.

Beweis. Übung. □

Fr 13.11.2020

Unter den Voraussetzungen wie im Satz von Picard-Lindelöf ist der maximale Fluss im Endlichdimensionalen auf einer offenen Teilmenge definiert. Die Bedingung $\dim E < \infty$ ist hier wichtig, damit $\overline{B_r(0)}$ kompakt ist. Auch dieses Resultat benötigt nicht die Produktgestalt $I \times \Omega$.

Theorem 8.1.17 (Maximaler Fluss)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $f\colon I\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und sei die Familie $(f(t,\cdot))_{t\in I}$ lokal gleichmäßig lipschitzstetig. Sei $J_x \subset I$ das maximale Existenzintervall, in dem die Differentialgleichung*

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t,x) = f(t, \alpha(t,x)), & t \in J_x, \\ \alpha(0,x) = x \end{cases}$$

für $x \in \Omega$ (mit zunächst noch nicht vorgeschriebenem J_x) lösbar ist.

Dann ist

$$\mathcal{D}(f) := \bigcup_{x\in\Omega} (J_x \times \{x\}) \subset I \times \Omega$$

*offen. Die Abbildung $\alpha\colon \mathcal{D} \to \Omega$ heißt **maximaler Fluss**.*

Bemerkung 8.1.18. Ist darüber hinaus f im Definitionsgebiet von der Klasse C^m, so gilt auch $\alpha, \dot{\alpha} \in C^m(\mathcal{D}(f), E)$. Dies werden wir später in Theorem 8.3.2 zeigen. Die Offenheit von $\mathcal{D}(f)$ ist dabei nötig, damit wir überhaupt ableiten können.

Beweis von Theorem 8.1.17. Wir zeigen die Offenheit.

(i) Falls $\mathcal{D}(f)$ nicht offen wäre, gäbe es $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}(f)$ mit $B_\delta(t_0, x_0) \not\subset \mathcal{D}(f)$ für alle $\delta > 0$. Ohne Einschränkung dürfen wir $t_0 \ge 0$ annehmen. Ohne Einschränkung dürfen wir weiterhin annehmen, dass t_0 für dieses feste x_0 minimal mit dieser Eigenschaft ist, sonst betrachten wir das Infimum aller solcher t_0. Ein kurzes Argument mit Dreiecksungleichung zeigt, dass auch das Infimum aller solche t_0'er die Eigenschaft $B_\delta(t_0, x_0) \not\subset \mathcal{D}(f)$ für alle $\delta > 0$ hat. Aufgrund des lokalen Existenzsatzes für den Fluss gilt $t_0 > 0$.

(ii) Fixiere $r > 0$ mit $r < t_0$ und $[t_0 - r, t_0] \times \overline{B_r(\alpha(t_0, x_0))} \subset I \times \Omega$. Nach Lemma 8.1.11 gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < r$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot\beta(t,x) = f(t, \beta(t,x)), & t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon), \\ \beta(t_1, x) = x \end{cases}$$

für alle $(t_1, x) \in [t_0 - r, t_0] \times \overline{B_r(\alpha(t_0, x_0))}$ (mindestens) auf dem angegebenen Zeitintervall $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ lösbar ist.

(iii) Wir betrachten nun die Menge $\alpha(t_0 - \varepsilon/2, B_\rho(x_0))$ für $\rho > 0$. Zunächst ist sie für kleine $\rho > 0$ wohldefiniert, da $t_0 > 0$ minimal mit der Eigenschaft war, dass (t_0, x_0) keine offene Umgebung im Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ von α besitzt. Weiterhin gilt $\alpha(t_0 - \varepsilon/2, B_\rho(x_0)) \subset B_r(\alpha(t_0, x_0))$, falls wir $\rho > 0$ und $\varepsilon > 0$ ggf. nochmals verkleinern. Wir zeigen dies in den nächsten beiden Abschnitten.

(iv) Zum Beweis dieser Inklusion: Aufgrund der Stetigkeit von α dürfen wir, gegebenenfalls nach Verkleinern von $\varepsilon > 0$, annehmen, dass $\alpha(t_0 - \varepsilon/2, x_0) \in \alpha([t_0 - \varepsilon/2, t_0], x_0) \subset B_{r/2}(\alpha(t_0, x_0))$ gilt.

(v) Wir erinnern daran, dass es um $(t_0 - \varepsilon/2, x_0)$ einen Ball / eine Umgebung in $\mathcal{D}(f)$ gibt. Nun gibt es nach Gronwall (stetige Abhängigkeit vom Anfangswert; wir werden dies in Theorem 8.2.2 unabhängig von diesem Resultat zeigen; in einer kompakten Umgebung von $\{(t, \alpha(t, x_0)) \colon t \in [0, t_0]\}$ ist die Lipschitzstetigkeit gleichmäßig) ein $\rho > 0$, so dass $\alpha(t_0 - \varepsilon/2, B_\rho(x_0)) \subset B_{r/2}(\alpha(t_0 - \varepsilon/2, x_0))$ gilt. Nach Dreiecksungleichung folgt also

$$\alpha(t_0 - \varepsilon/2, B_\rho(x_0)) \subset B_{r/2}(\alpha(t_0 - \varepsilon/2, x_0)) \subset B_r(\alpha(t_0, x_0)).$$

(vi) Aufgrund dieser Inklusion können wir jede der Kurven $t \mapsto \alpha(t, x)$ mit $x \in B_\rho(x_0)$ in der Zeit durch Zusammensetzen mit Hilfe von β noch um mindestens ε als Lösung der Differentialgleichung fortsetzen. Lösungen mit Startwert in $B_\rho(x_0)$ zur Zeit $t = 0$ existieren daher mindestens auf $[0, t_0 - \varepsilon/2 + \varepsilon)$. Somit gilt $[0, t_0 + \varepsilon/2) \times B_\rho(x_0) \subset \mathcal{D}(f)$ und (t_0, x_0) ist ein innerer Punkt von $\mathcal{D}(f)$. Widerspruch. □

Bemerkung 8.1.19 (Vergleich von Lösungen)**.**
Obwohl ich zum Anfangswertproblem

$$\dot x(t) = t^2 + x^2(t), \quad x(0) = 1$$

keine explizite Lösung kenne, kann man doch Aussagen über das Existenzintervall machen.

Eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot y(t) = y^2(t)$ mit $y(0) = 1$ erfüllt $y(t) \le x(t)$ für alle $t \ge 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Eine Lösung $y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\frac{1}{1-\varepsilon} - t}$ der Differentialgleichung für y mit Anfangswert $1 - \varepsilon$ erfüllt nämlich $y_\varepsilon(0) < x(0)$. Daher gilt aufgrund der Stetigkeit von y_ε und x auch $y_\varepsilon(t) < x(t)$ für kleine Werte von $t > 0$. Angenommen, es gibt ein minimales $t_0 > 0$ im Definitionsbereich von x und y_ε mit $x(t_0) = y_\varepsilon(t_0)$. Dann folgt aus $x(t) \ge y_\varepsilon(t)$ für alle $0 \le t \le t_0$, dass $\dot x(t_0) \le \dot y_\varepsilon(t_0)$ gilt. Andererseits folgt jedoch aufgrund der Differentialgleichung

$$\dot x(t_0) = t_0^2 + x^2(t_0) > 0 + y_\varepsilon^2(t_0) = \dot y_\varepsilon(t_0).$$

Widerspruch. Wir erhalten $x(t) \ge y_\varepsilon(t)$ für alle $t \ge 0$ im gemeinsamen Definitionsgebiet. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $x(t) \ge y(t)$. Wegen $y(t) = \frac{1}{1-t}$ kann auch $x(t)$ höchstens bis $t = 1$ existieren.

$\star$ Betrachte also alle $0 \le t < T \le 1$, für die eine Lösung $x(t)$ existiert. Dort gilt
$$\dot{x}(t) \le 1 + x^2(t).$$
Im Falle der Gleichheit löst $\tan(t - t_0)$ diese Differentialgleichung, konkret $x(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Somit erhalten wir ähnlich wie oben mit Hilfe von $\tan\left(t + \frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$, $\varepsilon \searrow 0$, $\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \ge x(t)$.

Daher existiert die Lösung $x(t)$ in einem Intervall $[0, T)$ mit $0{,}785 < \frac{\pi}{4} \le T \le 1$.

Bemerkung 8.1.20. Ein Existenzresultat gilt auch für stetige Funktionen f ohne Lipschitzbedingung: Der Existenzsatz von Peano. Wir werden diesen später behandeln. Die Eindeutigkeitsaussage gilt nicht mehr, da
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, & t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
für jedes $t_0 > 0$ durch
$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \le t_0, \\ \frac{1}{4}(t - t_0)^2, & t > t_0 \end{cases}$$
gelöst wird. Für $t < 0$ gibt es analoge Nichteindeutigkeiten mit negativen Lösungen.

Beschreibt man die Wasserhöhe in einem Eimer mit einem Loch durch eine gewöhnliche Differentialgleichung, so sollte diese nicht eindeutig lösbar sein. Zwar ist die Voraussage möglich, wie das Wasser ausströmt. Ist jedoch bereits alles Wasser herausgeflossen, so ist nicht mehr rekonstruierbar, seit wann der Eimer leer ist.

8.2. **Vergleichssätze.**

Theorem 8.2.1 (Lemma von Gronwall)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $[t_0, t_1)$ oder $[t_0, t_1]$ ($t_1 = \infty$ ist erlaubt), $0 \le \varphi, \psi \in C^0(I, \mathbb{R})$. Sei $a \ge 0$. Nehme an, dass*
$$\varphi(t) \le a + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau$$
für alle $t \in I$ gilt. Dann folgt
$$\varphi(t) \le a \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau\right)$$
für alle $t \in I$.

Di 17.11.2020

Häufig genügt es, dass Lemma im Fall $\psi(t) \equiv c > 0$ zu benutzen.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $a > 0$ gilt. Sonst ersetzen wir a durch $\varepsilon > 0$ und lassen am Ende $\varepsilon \searrow 0$. Definiere
$$h(t) := a + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau.$$
Es folgt $h \in C^1$ und wir erhalten für $t \in (t_0, t_1)$
$$\dot{h}(t) = \psi(t)\varphi(t) \le \psi(t)h(t)$$
nach Annahme an φ. Da $h \ge a > 0$ gilt, schließen wir, dass
$$\frac{d}{dt}\log h(t) = \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \le \psi(t)$$

gilt. Somit erhalten wir

$$\log h(t) - \log h(t_0) \le \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau$$

und hieraus, nochmals nach Annahme an φ,

$$\varphi(t) \le h(t) \le h(t_0) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau\right) = a \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau\right).$$

Das Lemma folgt. $\square$

Hiermit schließen wir, dass Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen stetig vom Anfangswert abhängen. Dies bedeutet physikalisch, dass eine Rechnung mit einem kleinen Messfehler auch nur kleine Abweichungen liefert.

Theorem 8.2.2. *Sei I ein offenes Intervall. Sei Ω eine offene Teilmenge eines Banachraumes E. Seien $x_0, y_0 \in \Omega$. Sei $f \in C^0(I \times \Omega, E)$ und sei $(f(t, \cdot))_t$ gleichmäßig Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante L. Sei $J \subset I$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$. Gelte*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & \text{in } J, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & \text{in } J, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x_0 - y_0\| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$$

für alle $t \in J$.

Beweis. Setze $\varphi(t) := \|x(t) - y(t)\|$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|x(t) - y(t)\| \\ &= \left\| x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau - y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \right\| \\ &\le \|x_0 - y_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\|\, d\tau \\ &\le \|x_0 - y_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} L \cdot \underbrace{\|x(\tau) - y(\tau)\|}_{=\varphi(\tau)}\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Behauptung für $t \ge t_0$ folgt nun direkt aus dem Lemma von Gronwall.

Für $t < t_0$ betrachte man Hilfsfunktionen der Gestalt $z(t) = x(t_0 - t)$ und wende die obigen Überlegungen hierauf an. Details: Übung. $\square$

Dies liefert die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten in der folgenden Form.

Korollar 8.2.3. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 8.2.2 bezeichne $\alpha(t, x)$, $x \in \Omega$, die Lösung von*

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t, x) = f(t, \alpha(t, x)) & \text{in } J_x, \\ \alpha(t_0, x) = x. \end{cases}$$

Sei $r > 0$. Angenommen, es gilt $t \in J_x$ für alle $x \in B_r(x_0)$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto \alpha(t, x)$ in x_0 stetig.

Beweis. Wir verwenden die $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit mit den üblichen Bezeichnungen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für δ mit $0 < \delta < \exp(-L \cdot |t - t_0|) \cdot \varepsilon$, $\delta < r$ und $\|x - x_0\| < \delta$ die Abschätzung $\|\alpha(t, x) - \alpha(t, x_0)\| < \varepsilon$. □

8.3. **Parameterabhängige Differentialgleichungen.** In diesem Kapitel seien E, F stets Banachräume, $I \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in I$. Sei $\Omega \subset E$ offen und $V \subset F$. Sei $f : I \times \Omega \times V \to E$ zumindest stetig und in $\Omega \times V$ gleichmäßig Lipschitz stetig, d. h. es gibt $C > 0$ mit

$$\|f(t, x, v) - f(t, y, w)\| \le C \cdot (\|x - y\| + \|v - w\|)$$

für alle $t \in I$, alle $x, y \in \Omega$ und alle $v, w \in V$.

Sei $\varphi : V \to \Omega$ Lipschitz stetig mit

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \le C \cdot (\|v - w\|)$$

für alle $v, w \in V$.

Um unnötige technische Komplikationen zu vermeiden, wollen wir stets annehmen, dass f, I, Ω und V beschränkt sind. Sei $I \subset [-T, T]$.

Theorem 8.3.1. *Sei $\alpha : I \times V \to E$ mit*

$$\begin{cases} \dot\alpha(t, v) = f(t, \alpha(t, v), v), & t \in I, \\ \alpha(0, v) = \varphi(v) \end{cases}$$

für alle $(t, v) \in I \times V$ gegeben. Dann ist α gleichmäßig Lipschitz stetig.

Beweis.

(i) **Lipschitzstetigkeit in t:** Nach Voraussetzung ist $\dot\alpha(t, v) = f(t, \alpha(t, v), v)$ gleichmäßig beschränkt. Hieraus folgt die gleichmäßige Lipschitzstetigkeit.

(ii) **Lipschitzstetigkeit in v:** Seien $v, w \in V$. α erfüllt die Integralgleichung

$$\alpha(t, v) = \varphi(v) + \int_0^t f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\, d\tau$$

und eine entsprechende Gleichung für w. Wir erhalten

$$\alpha(t, v) - \alpha(t, w) = \varphi(v) - \varphi(w) + \int_0^t f(\tau, \alpha(\tau, v), v) - f(\tau, \alpha(\tau, w), w)\, d\tau$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, v) - \alpha(t, w)\| &\le \|\varphi(v) - \varphi(w)\| + \int_0^t \|f(\tau, \alpha(\tau, v), v) - f(\tau, \alpha(\tau, w), w)\|\, d\tau \\ &\le C \cdot \|v - w\| + \int_0^t C \cdot \|\alpha(\tau, v) - \alpha(\tau, w)\| + C \cdot \|v - w\|\, d\tau \\ &\le C \cdot (1 + T) \cdot \|v - w\| + C \int_0^t \|\alpha(\tau, v) - \alpha(\tau, w)\|\, d\tau. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall erhalten wir daraus

$$\|\alpha(t, v) - \alpha(t, w)\| \le C \cdot (1 + T) \cdot \|v - w\| \cdot e^{CT}.$$

Die Behauptung folgt. □

Fr 20.11.2020

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\Omega \times V$ konvex ist. Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir dies nach Verkleinerung der Definitionsgebiete sogar ohne Einschränkung annehmen.

Theorem 8.3.2. *Sei V offen und seien f und φ von der Klasse C^1. Seien D_2f und D_3f in $\Omega\times V$ und $D\varphi$ in V gleichmäßig Lipschitz stetig. Sei α wie in Theorem 8.3.1. Dann ist α ebenfalls von der Klasse C^1.*

Beweis.

(i) Die stetige Differenzierbarkeit in t ist aufgrund der Differentialgleichung klar.

(ii) Differenzierbarkeit bezüglich v; Vorüberlegungen: Wäre α bezüglich v differenzierbar und die zweiten Ableitungen vertauschbar, so löste $D_v\alpha$ die Differentialgleichung.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D_2\alpha(t,v) =&\, D_2\frac{d}{dt}\alpha(t,v) = D_vf(t,\alpha(t,v),v)\\ =&\, D_2f(t,\alpha(t,v),v)\langle D_v\alpha(t,v)\rangle + D_3f(t,\alpha(t,v),v)\end{aligned}$$
mit Anfangsbedingung
$$D_2\alpha(0,v) = D\varphi(v).$$
Dies ist eine affin lineare Differentialgleichung für $D_2\alpha(t,v)$. Sie besitzt daher lokal eine Lösung. Sei $\lambda = \lambda(t,v)$ die Lösung von
$$\begin{cases}\dot\lambda(t,v) = D_2f(t,\alpha(t,v),v)\langle\lambda(t,v)\rangle + D_3f(t,\alpha(t,v),v),\\ \lambda(0,v) = D\varphi(v).\end{cases}$$

(iii) Wir behaupten, dass $D_2\alpha(t,v) = \lambda(t,v)$ gilt. Nach Theorem 8.3.1 ist α in $I\times V$ Lipschitz stetig. Somit sind auch die Terme in der Differentialgleichung für λ in v Lipschitz stetig und λ ist nach Theorem 8.3.1 in $I\times V$ Lipschitz stetig. Bis auf den Nachweis $D_2\alpha(t,v) = \lambda(t,v)$ erhalten wir also, dass $\alpha\in C^1(I\times V,E)$ gilt.

(iv) Behauptung: Es gilt
$$\alpha(t,v+h) - \alpha(t,v) - \lambda(t,v)\langle h\rangle \in o(\|h\|)$$
für $h\to 0$.

Beweis. Wir definieren für kleine $h\neq 0$
$$\vartheta(t,v) := \alpha(t,v+h) - \alpha(t,v).$$
Es gelten $\vartheta(0,v) = \varphi(v+h) - \varphi(v)$ und
$$\begin{aligned}\dot\vartheta(t,v) - \dot\lambda(t,v)\langle h\rangle =&\, f(t,\alpha(t,v+h),v+h) - f(t,\alpha(t,v),v)\\ &- \left(D_2f(t,\alpha(t,v),v)\langle\lambda(t,v)\langle h\rangle\rangle + D_3f(t,\alpha(t,v),v)\langle h\rangle\right).\end{aligned}$$
Wir integrieren dies und erhalten
$$\begin{aligned}&\vartheta(t,v) - \lambda(t,v)\langle h\rangle\\ =&\,\varphi(v+h) - \varphi(v) - D\varphi(v)\langle h\rangle\\ &+\int\limits_0^t f(\tau,\alpha(\tau,v+h),v+h) - f(\tau,\alpha(\tau,v),v)\,d\tau\\ &-\int\limits_0^t D_2f(\tau,\alpha(\tau,v),v)\langle\lambda(\tau,v)\langle h\rangle\rangle + D_3f(\tau,\alpha(\tau,v),v)\langle h\rangle\,d\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(v+h) - \varphi(v) - D\varphi(v)\langle h\rangle \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 \frac{d}{ds} f(\tau, \underbrace{s\alpha(\tau, v+h) + (1-s)\alpha(\tau, v), v+sh}_{\equiv \xi_s})\, ds\, d\tau \\
&\quad - \int_0^t D_2 f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\langle \lambda(\tau, v)\langle h\rangle\rangle + D_3 f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\langle h\rangle\, d\tau,
\end{aligned}
$$

wobei es wichtig ist, dass wir nicht $\alpha(\tau, v+sh)$ schreiben,

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(v+h) - \varphi(v) - D\varphi(v)\langle h\rangle \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 D_2 f(\tau, \xi_s)\langle \alpha(\tau, v+h) - \alpha(\tau, v)\rangle - D_2 f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\langle \lambda(\tau, v)\langle h\rangle\rangle\, ds\, d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 D_3 f(\tau, \xi_s)\langle h\rangle - D_3 f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\langle h\rangle\, ds\, d\tau \\
&= \varphi(v+h) - \varphi(v) - D\varphi(v)\langle h\rangle \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 D_2 f(\tau, \xi_s)\langle \alpha(\tau, v+h) - \alpha(\tau, v) - \lambda(\tau, v)\langle h\rangle\rangle\, ds\, d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 \left(D_2 f(\tau, \xi_s) - D_2 f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\right)\langle \lambda(\tau, v)\langle h\rangle\rangle\, ds\, d\tau \\
&\quad + \left(\int_0^t \int_0^1 D_3 f(\tau, \xi_s) - D_3 f(\tau, \alpha(\tau, v), v)\, ds\, d\tau\right)\langle h\rangle \\
&\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}
$$

Es gilt $I_1 \in o(\|h\|)$, da φ differenzierbar ist. Da $h \mapsto \xi_s$ stetig mit $\xi_s\ |_{h=0}= (\alpha(\tau, v), v)$ ist, folgt $I_3, I_4 \in o(\|h\|)$. Insgesamt erhalten wir also in ε-Notation

$$\|\vartheta(t, v) - \lambda(t, v)\langle h\rangle\| \le \varepsilon(\|h\|) \cdot \|h\| + c \int_0^t \|\vartheta(\tau, v) - \lambda(\tau, v)\langle h\rangle\|\, d\tau.$$

Das Lemma von Gronwall impliziert nun

$$\|\vartheta(t, v) - \lambda(t, v)\langle h\rangle\| \le \varepsilon(\|h\|) \cdot \|h\| \cdot e^{c|t|}.$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Damit folgt auch das Theorem. $\square$

Bemerkung 8.3.3. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Klasse C^p, $1 \le p < \infty$.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $p < \infty$. Wir benutzen Induktion und dürfen bereits annehmen, dass $\alpha \in C^{p-1}$ gilt. Aus der Gleichung $\dot\alpha(t, v) = f(t, \alpha(t, v), v)$ liest man direkt ab, dass $D_t^p\alpha$ existiert und stetig ist. Das funktioniert analog, solange mindestens eine Zeitableitung auftritt, also für $D_t^q D_v^{p-q}\alpha$ mit $1 \le q \le p$.
$D_v^p\alpha$: Es gilt

$$\frac{d}{dt} D_v^{p-1}\alpha(t, v) = D_2 f(t, \alpha(t, v), v)\langle D_v^{p-1}\alpha(t, v)\rangle + R(t, v)$$

mit $R \in C^1$. Somit folgt nach Theorem 8.3.2 $D_v^{p-1}\alpha \in C^1$ und daher die Behauptung. $\square$

8.4. **Der Satz von Arzelà-Ascoli.** Als Vorbereitung für einen Existenzsatz bei stetiger rechter Seite benötigen wir den Satz von Arzelà-Ascoli.

Definition 8.4.1. Sei E ein metrischer Raum und sei F ein Banachraum.

(i) Dann heißt eine Teilmenge $\Lambda \subset C^0(E, F)$ **gleichgradig stetig,** falls

$$\forall\, x \in E \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, f \in \Lambda \quad \forall\, y \in E : d(x, y) < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

d. h. δ in der Definition von Stetigkeit kann unabhängig von der speziellen Funktion f gewählt werden. (Ohne den Quantor $\forall x \in E$ spricht man von gleichgradiger Stetigkeit im Punkt $x \in E$.)

(ii) Eine Teilmenge $\Lambda \subset C^0(E, F)$ heißt **gleichmäßig gleichgradig stetig,** falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \Lambda \quad \forall x, y \in E : d(x, y) < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

(iii) Wir sagen auch, dass die Funktionen $f \in \Lambda$ bzw. eine Folge (gleichmäßig) gleichgradig stetig sind, wenn dies für Λ bzw. die Menge der Folgeglieder gilt.

Beispiele 8.4.2.

(i) Sei $\Lambda \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Teilmenge von gleichmäßig hölderstetigen Funktionen, d. h. gilt

$$|f(x) - f(y)| \le c \cdot |x - y|^\alpha$$

für ein $c > 0$, ein $\alpha \in (0, 1)$, alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \Lambda$, so ist Λ gleichmäßig gleichgradig stetig.

(ii) Gleichmäßig Lipschitz stetige Funktionen sind gleichmäßig gleichgradig stetig.

(iii) Jede Funktion einer gleichmäßig gleichgradig stetigen Menge ist selbst gleichmäßig stetig.

(iv) Eine Menge, die sich aus endlich vielen stetigen Funktionen oder endlich vielen gleichgradig stetigen Mengen zusammensetzt, ist gleichgradig stetig.

(v) Eine Menge, die sich aus endlich vielen gleichmäßig stetigen Funktionen oder endlich vielen gleichmäßig gleichgradig stetigen Mengen zusammensetzt, ist selbst wieder gleichmäßig gleichgradig stetig.

Di 24.11.2020

Genauso wie bei einer einzelnen Funktion ist eine gleichgradig stetige Menge von Funktionen, die auf einer kompakten Menge definiert sind, gleichmäßig gleichgradig stetig.

Lemma 8.4.3. *Sei E ein kompakter metrischer Raum und F ein Banachraum. Sei $\Lambda \subset C^0(E, F)$ gleichgradig stetig. Dann ist Λ auch gleichmäßig gleichgradig stetig.*

Beweis. $\star$ Falls nicht, gibt es $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n > 0$ eine Funktion $f_n \in \Lambda$ sowie $x_n, y_n \in E$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \ge \varepsilon$. Da E kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $(x_n)_{n>0}$, gelte also ohne Einschränkung $x_n \to x \in E$ für $n \to \infty$. Es folgt $y_n \to x$ für $n \to \infty$ aufgrund der Dreiecksungleichung. Da Λ gleichgradig stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $f \in \Lambda$ und alle $y \in B_\delta(x)$ auch $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ folgt. Sei nun n so groß, dass $x_n, y_n \in B_\delta(x)$ gilt. Dann erhalten wir

$$\varepsilon \le \|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \le \|f_n(x_n) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y_n)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Widerspruch. $\square$

Die nächsten beiden Lemmata zeigen, wie Eigenschaften dank der Gleichgradigkeit im Limes erhalten bleiben.

Lemma 8.4.4. *Sei E ein metrischer Raum und sei F ein Banachraum. Sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(E,F)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon E \to F$, so ist g gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x, y \in E \quad d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$$
gilt. Für feste $x, y \in E$ mit $d(x,y) < \delta$ erhalten wir also im Limes $n \to \infty$
$$\|g(x) - g(y)\| \le \varepsilon$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die gleichmäßige Stetigkeit. ☐

Lemma 8.4.5. *Sei E ein metrischer Raum und sei F ein Banachraum. Sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(E,F)$ gleichgradig stetig. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $g\colon E \to F$, so ist g stetig.*

Beweis. Sei $x \in E$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass
$$y \in B_\delta(x) \quad \Longrightarrow \quad \|f_n(y) - f_n(x)\| < \varepsilon$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir gehen nun für festes $y \in B_\delta(x)$ zum Limes $n \to \infty$ über und erhalten
$$\|g(y) - g(x)\| \le \varepsilon.$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Stetigkeit von g. ☐

Proposition 8.4.6. *Sei E ein metrischer Raum und sei F ein Banachraum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(E,F)$ eine gleichgradig stetige Folge. Sei $D \subset E$ dicht. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise in D, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise in ganz E.*

Beweis. Sei $x \in E$ beliebig. Da F vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\delta > 0$, mit
$$\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, y \in B_\delta(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Da D dicht in E liegt, gibt es $y \in D \cap B_\delta(x)$. Fixiere solch ein y. Nach Voraussetzung ist $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F, d. h. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \ge n_0$
$$\|f_n(y) - f_m(y)\| < \varepsilon$$
gilt. Zusammengenommen erhalten wir
$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \le \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f_m(y)\| + \|f_m(y) - f_m(x)\| < 3\varepsilon$$
für alle $n, m \ge n_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ☐

Auf kompakten Mengen impliziert punktweise Konvergenz gleichgradig stetiger Funktionen bereits gleichmäßige Konvergenz.

Proposition 8.4.7. *Sei E ein kompakter metrischer Raum und F ein Banachraum. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(E,F)$ gleichgradig stetig und sei $g\colon E \to F$ eine Funktion. Dann folgt aus $f_n \to g$ (punktweise) bereits $f_n \rightrightarrows g$.*

Beweis.

(i) Nach Lemma 8.4.3 ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gleichgradig stetig und nach Lemma 8.4.4 ist auch g gleichmäßig stetig. Daher ist $\Lambda := \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g\}$ gleichmäßig gleichgradig stetig.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es aufgrund der gleichmäßigen gleichgradigen Stetigkeit ein $\delta > 0$ so dass für alle $x, y \in E$ und alle $f \in \Lambda$
$$d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$
gilt.

(iii) Da E kompakt ist, gibt es endlich viele $x_i \in E$, $1 \le i \le N$, so dass die Kugeln $B_\delta(x_i)$ die Menge E überdecken.

(iv) Aufgrund der punktweisen Konvergenz $f_n \to g$ gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, N\}$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n(x_i) - g(x_i)\| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_i.$$

Definiere $n_0 := \max\limits_{1 \le i \le N} n_i$.

(v) Sei nun $x \in E$ beliebig. Sei $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $x \in B_\delta(x_i)$ fest gewählt. Dann gilt

$$\|f_n(x) - g(x)\| \le \|f_n(x) - f_n(x_i)\| + \|f_n(x_i) - g(x_i)\| + \|g(x_i) - g(x)\| < 3\varepsilon$$

für alle $n \ge n_0$ aufgrund der obigen Abschätzungen.

Da $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt die Behauptung. □

Lemma 8.4.8. *Sei E ein metrischer Raum und sei F ein Banachraum. Sei $\Lambda \subset C^0(E, F)$ (gleichmäßig) gleichgradig stetig. Dann ist auch der Abschluss $\overline{\Lambda}$ bezüglich der C^0-Norm (gleichmäßig) gleichgradig stetig.*

Beweis. Gehe in der Definition der (gleichmäßigen) gleichgradigen Stetigkeit zum Grenzwert über. Details: Übung. □

Als letzte Vorbereitung für den Satz von Arzelà-Ascoli zeigen wir

Bemerkung 8.4.9. Sei F ein Banachraum und sei $A \subset F$. Dann ist A genau dann relativ kompakt, wenn A präkompakt ist.

Beweis. Nach Definition ist A genau dann relativ kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist. Nach Analysis I ist dies äquivalent dazu, dass $\overline{A}$ präkompakt und vollständig ist. Da $\overline{A}$ in einem Banachraum stets vollständig ist, ist dies auch äquivalent zur Präkompaktheit von $\overline{A}$. Eine kleine Übung zur Präkompaktheit mit Radien ε und $\varepsilon/2$ zeigt nun, dass dies auch zur Präkompaktheit von A äquivalent ist. □

Theorem 8.4.10 (Satz von Arzelà-Ascoli)**.** *Sei E ein kompakter metrischer Raum und sei F ein Banachraum. Dann ist $\Lambda \subset C^0(E, F)$ genau dann relativ kompakt, wenn Λ gleichgradig stetig ist und wenn für jedes $x \in E$ die Menge $\Lambda(x) := \{f(x) : f \in \Lambda\} \subset F$ relativ kompakt ist.*

In Anwendungen ist insbesondere die Rückrichtung wichtig.

Beweis.

- ⋆ „$\Longrightarrow$“: Sei Λ relativ kompakt.

  $\Lambda(x)$ ist relativ kompakt: Sei $x \in E$ beliebig. Wir behaupten, dass $\Lambda(x)$ relativ kompakt ist. Nach Bemerkung 8.4.9 genügt es dazu, zu zeigen, dass $\Lambda(x)$ präkompakt ist. Nochmals nach Bemerkung 8.4.9 ist $\Lambda \subset C^0(E, F)$ genau dann relativ kompakt, wenn Λ präkompakt ist.

  Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren endlich viele $f_i \in \Lambda$, $1 \le i \le N$, so dass zu jedem $f \in \Lambda$ ein $i \in \{1, \dots, N\}$ mit

  $$\|f - f_i\|_{C^0} = \sup_{y \in E} \|f(y) - f_i(y)\| < \varepsilon$$

  existiert. Insbesondere folgt daraus

  $$\|f(x) - f_i(x)\| < \varepsilon$$

  für dieses i. Somit ist $\Lambda(x)$ präkompakt und daher auch relativ kompakt.

  Λ ist gleichgradig stetig: Wir benutzen nochmals, dass Λ präkompakt ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Seien $f_i \in \Lambda$, $1 \le i \le N$, mit $\Lambda \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(f_i)$. Jedes f_i ist gleichmäßig stetig, da E kompakt ist. Die Gleichmäßigkeit ist zwar nicht zu zeigen, erleichtert aber die Notation. Da die Menge $\{f_i : 1 \le i \le N\}$ endlich ist, gibt es $\delta > 0$ mit

$$d(x,y) < \delta \Longrightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in E$ und alle $1 \le i \le N$. Sei nun $f \in \Lambda$ beliebig und $i \in \{1,\ldots,N\}$ mit $f \in B_\varepsilon(f_i)$. Dann folgt für $x, y \in E$ mit $d(x,y) < \delta$

$$\|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f_i(y)\| + \|f_i(y) - f(y)\| < 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die (gleichmäßige) gleichgradige Stetigkeit.

- „$\Longleftarrow$“: Wir zeigen die Kompaktheit von $\overline{\Lambda}$, indem wir zeigen, dass jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ eine in $C^0(E,F)$ konvergente Teilfolge besitzt.

  Da E kompakt ist, ist E auch separabel. Daher besitzt E eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ beliebig. Wir behaupten, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in ganz D punktweise konvergente Teilfolge besitzt. Dann konvergiert die Teilfolge nach Proposition 8.4.6 in ganz E punktweise und nach Proposition 8.4.7 sogar gleichmäßig und damit in $C^0(E,F)$ wie behauptet.

  Die in D konvergente Teilfolge erhalten wir als Diagonalfolge:

  (a) $\{f_n(x_0) \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda(x_0)$ ist nach Voraussetzung relativ kompakt und besitzt daher eine in F konvergente Teilfolge $(f_{0n}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.
  (b) $\{f_{0n}(x_1) \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda(x_1)$ besitzt ebenso eine konvergente Teilfolge: $(f_{1n}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$.
  (c) Iterativ erhalten wir eine Teilfolge $(f_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_{i-1n})_{n\in\mathbb{N}}$, die in $\{x_0,\ldots,x_i\}$ punktweise konvergiert.
  (d) Die Diagonalfolge $(f_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in ganz D: Sei nämlich $x_i \in D$ beliebig, so ist $(f_{nn})_{n\ge i}$ eine Teilfolge von $(f_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ und diese konvergiert in x_i. Dies zeigt die noch ausstehende Behauptung. □

Fr 27.11.2020

Ist der Bildraum endlichdimensional, so erhalten wir

Korollar 8.4.11. *Sei E ein kompakter metrischer Raum und sei*

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0\left(E, \mathbb{R}^d\right),$$

$d \in \mathbb{N}_{>0}$, beliebig. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt, d. h. gilt für alle $x \in E$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\| \le c(x) < \infty,$$

so besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $C^0\left(E,\mathbb{R}^d\right)$ konvergente Teilfolge.

Ein wichtiger Spezialfall davon ist

Korollar 8.4.12. *Sei E ein kompakter metrischer Raum. Seien $\alpha \in (0,1)$ und $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{0,\alpha}\left(E,\mathbb{R}^d\right)$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{C^{0,\alpha}(E,\mathbb{R}^d)} < \infty$$

Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, ohne Einschränkung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst, mit $f_n \longrightarrow f$ in $C^0\left(E,\mathbb{R}^d\right)$ für $n \to \infty$ für ein $f \in C^{0,\alpha}\left(E,\mathbb{R}^d\right)$ und es gilt

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(E,\mathbb{R}^d)} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{C^{0,\alpha}(E,\mathbb{R}^d)}.$$

Man sieht leicht, dass auch die Abschätzung

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(E,\mathbb{R}^d)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \|f_n\|_{C^{0,\alpha}(E,\mathbb{R}^d)}$$

gilt.

Beweis. Wir müssen nur die Regularität und die Abschätzung für f nachweisen. Gelte

$$\sup_{z\in E}\|f_n(z)\| + \sup_{x\neq y\in E}\frac{\|f_n(x)-f_n(y)\|}{d(x,y)^\alpha} \le c.$$

Insbesondere erhalten wir für feste $x\neq y$, $z\in E$

$$\|f_n(z)\|\cdot d(x,y)^\alpha + \|f_n(x)-f_n(y)\| \le c\cdot d(x,y)^\alpha.$$

Nach Arzelà-Ascoli konvergiert eine Teilfolge, ohne Einschränkung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst, in $C^0\left(E,\mathbb{R}^d\right)$ und damit auch punktweise gegen eine Funktion $f\in C^0\left(E,\mathbb{R}^d\right)$. Mit $n\to\infty$ erhalten wir

$$\|f(z)\|\cdot d(x,y)^\alpha + \|f(x)-f(y)\| \le c\cdot d(x,y)^\alpha.$$

Teilen wir durch $d(x,y)^\alpha$ und betrachten das Supremum über alle $x\neq y$, $z\in E$, so folgt die Behauptung. □

8.5. **Der Existenzsatz von Peano.**

Theorem 8.5.1 (Peano)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ stetig. Sei $(t_0,x_0)\in\Omega$ beliebig. Dann gibt es ein offenes Intervall $I\subset\mathbb{R}$ mit $t_0\in I$ und mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases}\dot\alpha(t)=f(t,\alpha(t)), & t\in I,\\ \alpha(t_0)=x_0.\end{cases}$$

Jede Lösung α lässt sich fortsetzen, so dass graph $\alpha\not\subset K$ für jede kompakte Teilmenge $K\subset\Omega$ gilt.

Der wichtigste Teil des Beweises ist das folgende Resultat.

Theorem 8.5.2. *Sei $I=[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}$ mit $t_1>t_0$ und sei $f:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt. Sei $x_0\in\mathbb{R}^n$. Dann gibt es mindestens eine (stetig) differenzierbare Funktion $\alpha:I\to\mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{cases}\dot\alpha(t)=f(t,\alpha(t)), & t\in I,\\ \alpha(t_0)=x_0.\end{cases}$$

Beweis.

(i) Wir benutzen die äquivalente Umformulierung als Integralgleichung

$$\alpha(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\alpha(\tau))\,d\tau$$

für $t\in I$ und zeigen, dass diese eine Lösung $\alpha\in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ besitzt.

Für $\varepsilon>0$ definieren wir eine Funktion α_ε durch

$$\alpha_\varepsilon(t):=\begin{cases}x_0, & t\le t_0,\\ x_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\alpha_\varepsilon(\tau-\varepsilon))\,d\tau, & t\in I.\end{cases}$$

(ii) Die Funktion $\alpha_\varepsilon\in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ ist wohldefiniert: Zunächst können wir das Integral für $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]\cap I$ bestimmen, da dort $\alpha_\varepsilon(\tau-\varepsilon)$ definiert ist. Dann ist α_ε auf $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]\cap I$ definiert, wir können also mit Hilfe der Integraldarstellung α_ε auf $[t_0,t_0+2\varepsilon]\cap I$ bestimmen und erhalten so α_ε nach endlich vielen Schritten auf ganz I.

(iii) (Gleichmäßige) gleichgradige Stetigkeit: Da f beschränkt ist, ist auch $\dot\alpha_\varepsilon$ unabhängig von $\varepsilon>0$ beschränkt.

(iv) Punktweise gleichmäßige Beschränktheit: Gelte $|f| \le C$. Für $t \in I$ gilt

$$|\alpha_\varepsilon(t)| = \left| x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \alpha_\varepsilon(\tau - \varepsilon))\, d\tau \right| \le |x_0| + |t_1 - t_0| \cdot C.$$

Daher gibt es nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine Folge $\varepsilon_i \to 0$, $i \to \infty$, mit

$$\alpha_{\varepsilon_i} \longrightarrow \alpha \qquad \text{in } C^0(I, \mathbb{R}^n).$$

Auch die Funktionen $t \mapsto \alpha_{\varepsilon_i}(t - \varepsilon_i)$ konvergieren gegen α; es gilt nämlich

$$\begin{aligned} |\alpha_{\varepsilon_i}(t - \varepsilon_i) - \alpha(t)| &\le |\alpha_{\varepsilon_i}(t - \varepsilon_i) - \alpha_{\varepsilon_i}(t)| + |\alpha_{\varepsilon_i}(t) - \alpha(t)| \\ &= \left| \int\limits_{t-\varepsilon_i}^{t} f(\tau, \alpha_{\varepsilon_i}(\tau - \varepsilon_i))\, d\tau \right| + |\alpha_{\varepsilon_i}(t) - \alpha(t)| \\ &\le \varepsilon_i \cdot C + |\alpha_{\varepsilon_i}(t) - \alpha(t)| \end{aligned}$$

und der letzte Term konvergiert wegen $\alpha_{\varepsilon_i} \longrightarrow \alpha$ in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ für $i \to \infty$ ebenfalls gegen Null.

(v) Da f auf kompakten Teilmengen der Form $I \times \overline{B_R(0)}$ gleichmäßig stetig ist, konvergiert $f(\cdot, \alpha_{\varepsilon_i}(\cdot - \varepsilon_i)) \rightrightarrows f(\cdot, \alpha(\cdot))$ (kleine Übung). Wir können also in der definierenden Integralgleichung für α_ε zum Grenzwert übergehen und erhalten

$$\alpha(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \alpha(\tau))\, d\tau$$

für $t \in I$ wie behauptet. □

Eine einfache Normabschätzung für die hier definierten Funktionen α_ε zeigt, dass f nur auf einem Rechteck definiert zu sein braucht.

Theorem 8.5.3. *Seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_1 > t_0$, $r > 0$ und $f : R \equiv [t_0, t_1] \times \overline{B_r(x_0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Seien $A := \max\limits_R |f|$, ohne Einschränkung $A > 0$, und $\beta := \min\left\{t_1 - t_0, \frac{r}{A}\right\}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = f(t, \alpha(t)), & t_0 \le t \le t_0 + \beta, \\ \alpha(t_0) = x_0 \end{cases}$$

eine für $t \in [t_0, t_0 + \beta] \equiv I$ definierte Lösung $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Eine entsprechende Aussage gilt für $t_1 < t_0$.

Beweis. Sei f ohne Einschränkung nach $\tilde R := [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ stetig und mit $\sup\limits_{\tilde R} |f| = A$ fortgesetzt, beispielsweise konstant entlang radialer Strahlen. Wir zeigen, dass für eine Lösung $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ stets $|\alpha(t) - x_0| \le r$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ gilt. Dann verlässt keine Lösung aus Theorem 8.5.2 den ursprünglichen Definitionsbereich von f, ist also eine gesuchte Lösung.

Es gilt

$$|\alpha(t) - x_0| = |\alpha(t) - \alpha(t_0)| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \alpha(\tau))\, d\tau \right| \le |t - t_0| \cdot A \le \beta \cdot A \le r.$$

Somit folgt die Behauptung. □

Beweisidee des Satzes von Peano:

(i) Sei $K \Subset \Omega$ beliebig. Wir zeigen lediglich, dass sich α nach rechts soweit fortsetzen lässt, dass graph $\alpha \not\subset K$ gilt. Indem wir Ω durch kompakte Mengen ausschöpfen und α jeweils entsprechend fortsetzen, folgt die Behauptung.
(ii) Sei $I = [t_0, T]$ bzw. $= [t_0, T)$ ein Intervall, auf dem α definiert ist. Indem wir in der äquivalenten Integralrechnung zum Grenzwert übergehen, sehen wir, dass wir α zumindest auf $[t_0, T]$ fortsetzen können.
(iii) Solange $(T, \alpha(T)) \in K$ gilt, gibt es stets eine Umgebung mit festem Radius $r > 0$, auf der $|f| \le C(K)$ gilt. Somit können wir die Lösung α nach Theorem 8.5.3 auf ein Intervall $[t_0, T + \varepsilon(K)]$ mit $\varepsilon(K) > 0$ fortsetzen. Nach endlich vielen solchen Schritten verlässt die Lösung damit K.

Die Behauptung folgt. □

8.6. Separation der Variablen $\star$.

Beispiel 8.6.1 (Separation der Variablen)**.** Sei x die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers, auf den Gravitation und Luftwiderstand wirken. Dabei ist die Geschwindigkeitsänderung (= die Beschleunigung) durch den Luftwiderstand proportional zur Kraft und damit zu x^2. Es gilt

$$\dot{x} = g - lx^2.$$

In den folgenden Rechnungen kümmern wir uns nicht genauer um mögliche Divisionen durch Null. Man überprüft am Ende, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt. Wir formen wie folgt um

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= l\left(\frac{g}{l} - x^2(t)\right), \\
l &= \frac{\dot{x}(t)}{\frac{g}{l} - x^2(t)}, \\
l \cdot t &= \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\frac{g}{l} - x^2(\tau)}\, d\tau = \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\left(\sqrt{\frac{g}{l}} - x(\tau)\right)\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + x(\tau)\right)}\, d\tau \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\sqrt{\frac{g}{l}} - x(\tau)}\, d\tau + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\sqrt{\frac{g}{l}} + x(\tau)}\, d\tau \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \log\left(\sqrt{\frac{g}{l}} - x(\tau)\right)\Bigg|_0^t + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \log\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + x(\tau)\right)\Bigg|_0^t \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \log \frac{\sqrt{\frac{g}{l}} + x(t)}{\sqrt{\frac{g}{l}} - x(t)} + l \cdot t_0, \quad t_0 \text{ geeignet}, \\
\frac{\sqrt{\frac{g}{l}} + x(t)}{\sqrt{\frac{g}{l}} - x(t)} &= \exp\left(2l\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)\right), \\
\sqrt{\ldots} + x(t) &= \sqrt{\ldots}e^{\cdots} - x(t)e^{\cdots}, \\
x(t) &= \sqrt{\frac{g}{l}}\, \frac{e^{2l\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)} - 1}{e^{2l\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0)} + 1}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sqrt{\ldots}\frac{e^{\cdots}(e^{\cdots} + 1) - e^{\cdots}(e^{\cdots} - 1)}{(e^{\cdots} + 1)^2} 2l\sqrt{\ldots} = 4l\frac{g}{l}\frac{e^{\cdots}}{(e^{\cdots} + 1)^2}, \\
\frac{g}{l} - x(t)^2 &= \frac{g}{l} - \frac{g}{l}\left(\frac{e^{\cdots} - 1}{e^{\cdots} + 1}\right)^2 = \frac{g}{l}\frac{(e^{\cdots} + 1)^2 - (e^{\cdots} - 1)^2}{(e^{\cdots} + 1)^2} = \frac{g}{l}\frac{4e^{\cdots}}{(e^{\cdots} + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir für jedes t_0 eine Lösung gefunden.

Als wir den Logarithmus als Stammfunktion verwendet haben, haben wir ein Vorzeichen fixiert. Somit erhalten wir Lösungen für manche Anfangswerte $x(0)$. Weitere Lösungen erhalten wir durch eine andere Vorzeichenwahl.

Beispiel 8.6.2. Ist $\dot{x}(t) = f(at + bx(t) + c)$, so erfüllt $y(t) := at + bx(t) + c$ die Differentialgleichung
$$\dot{y}(t) = a + b\dot{x}(t) = a + bf(y(t)).$$
Dies können wir mit Separation der Variablen lösen.

Zu einem konkreten Beispiel:
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (t + x(t))^2,\\ y(t) &:= t + x(t),\\ \dot{y}(t) &= 1 + y^2(t).\end{aligned}$$

Wir rechnen wieder formal und benötigen zunächst eine Stammfunktion.
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+i)(x-i)}\,dx &= \frac{1}{2i}\int \frac{-1}{x+i} + \frac{1}{x-i}\,dx\\ &= \frac{1}{2i}\left(-\log(x+i) + \log(x-i)\right) = \frac{1}{2i}\log\frac{x-i}{x+i} = \frac{1}{2i}\log\left(-\frac{1+ix}{1-ix}\right).\end{aligned}$$
Mit $1 + ix = \sqrt{1+x^2}\cdot e^{i\varphi}$, $1 - ix = \sqrt{1+x^2}\cdot e^{-i\varphi}$ und $\varphi = \arctan x$ erhalten wir weiter
$$\ldots = \frac{1}{2i}\log e^{i\pi + 2i\varphi} = \frac{\pi}{2} + \arctan x.$$
Die Konstante in der Stammfunktion ist natürlich beliebig. Wir erhalten weiter
$$\begin{aligned}\int \frac{\dot{y}(t)}{1+y^2(t)}\,dt &= \int 1\,dt,\\ \arctan y(t) &= t - t_0, \quad t_0 \text{ geeignet für Anfangsbedingungen},\\ y(t) &= \tan(t-t_0),\\ x(t) &= \tan(t-t_0) - t.\end{aligned}$$
Nun gelten $\frac{d}{dt}\tan t = \frac{1}{\cos^2 t}$ (Quotientenregel und $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$) und $\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$. Somit erhalten wir
$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\tan(t-t_0) - t) = \frac{1}{\cos^2(t-t_0)} - 1 = \tan^2(t-t_0) = (x(t)+t)^2.$$
Damit haben wir für jedes t_0 eine Lösung gefunden.

Beispiel 8.6.3. Aus einer Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$ erhalten wir mit $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ für $t \neq 0$
$$\dot{x}(t) = u(t) + t\dot{u}(t) = f(u).$$
Man kann nun
$$\dot{u}(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t}$$
lösen und aus dem Ergebnis $x(t)$ rekonstruieren.

Als Beispiel wollen wir das Anfangswertproblem
$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} - \frac{t^2}{x^2(t)}, \quad x(1) = 1$$

lösen. Mit $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ erhalten wir bei unterschiedlicher Differentiation von $x(t)$

$$\dot{x}(t) = u(t) - \frac{1}{u^2(t)} = u(t) + t\dot{u}(t)$$

und somit folgt

$$\dot{u}(t) = -\frac{1}{tu^2(t)}.$$

Weiterhin gilt $u(1) = 1$. Es folgt (vom Umbruch her gelesen)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}u^3(t) - \frac{1}{3}\underbrace{u^3(1)}_{=1} &= \int\limits_1^t \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{3}u^3(\tau)\right) d\tau = \int\limits_1^t u^2(\tau)\dot{u}(\tau)\,d\tau \\
&= \int\limits_1^t -\frac{1}{\tau}\,d\tau = -\log t + \log 1 = -\log t, \\
u(t) &= \sqrt[3]{1 - 3\log t}, \\
x(t) &= t\sqrt[3]{1 - 3\log t}, \quad 0 < t < e^{1/3} \approx 1{,}396.
\end{aligned}$$

8.7. **Exakte Differentialgleichungen** $\star$.

Bemerkung 8.7.1. Seien g, h in einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wir suchen eine Kurve $(x(t), y(t)) \colon I \to \mathbb{R}^2$, die die Differentialgleichung $g(x(t), y(t))\dot{x}(t) + h(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0$ löst.

Sei $F \colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gelte

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = g(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = h(x,y).$$

Die Differentialgleichung heißt dann exakt. Dann ist $F(x(t), y(t))$ konstant, denn es gilt

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}(t) = g \cdot \dot{x} + h \cdot \dot{y} = 0.$$

Die Differentialgleichung

$$y\dot{x} + 2x\dot{y} = 0$$

ist nicht exakt (siehe z. B. nächster Abschnitt). Nach Multiplikation mit y (Eulerscher Multiplikator/integrierender Faktor) erhält man jedoch

$$y^2\dot{x} + 2xy\dot{y} = 0,$$

eine exakte Differentialgleichung mit $F(x,y) = xy^2$.

Die Exaktheit einer Differentialgleichung erfordert im Falle $F \in C^2$, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ unabhängig von der Differentiationsreihenfolge ist, also

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist diese Bedingung auch hinreichend für die Exaktheit.

9. Lineare Differentialgleichungen

Di 01.12.2020

Die Resultate in diesem Abschnitt gelten auch für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ oder in einem komplexen Vektorraum.

9.1. **Einführung und Beispiele.**

Definition 9.1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine lineare Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = h(t).$$

$\star$ Dieselbe Form haben lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wir wollen annehmen, dass g und h stetig sind. Die Differentialgleichung heißt

(i) **homogen,** falls $h(t) \equiv 0$ gilt.
(ii) **inhomogen,** wenn h beliebig ist. Ersetzen wir $h(t)$ durch 0, so heißt die resultierende Differentialgleichung die zugehörige homogene Differentialgleichung.

Bemerkung 9.1.2. Lokal sind Lösungen linearer Differentialgleichungen stets eindeutig, da der Term $g(t)x(t)$ bezüglich $x(t)$ linear und damit Lipschitz stetig ist. Hieraus folgt auch die globale Eindeutigkeit.

Beispiel 9.1.3 (Homogene Differentialgleichung, eindimensional)**.** Die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g(t)x(t)$$

können wir durch Separation der Variablen lösen. Wir rechnen formal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log x(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = g(t), \\ \log x(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau + \log C, \\ x(t) &= C \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right). \end{aligned}$$

Man rechnet direkt nach, dass dies eine Lösung ist. Mit $C := x(t_0)$ kann man beliebige Anfangswerte realisieren. Aufgrund der Lipschitzstetigkeit im zweiten Argument sind diese Lösungen auch eindeutig bestimmt.

Lemma 9.1.4. *Sei*

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = h(t)$$

eine lineare Differentialgleichung. Seien x_1, x_2 Lösungen der Differentialgleichung und sei x_0 eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dann ist

(i) $(x_1 - x_2)(t) := x_1(t) - x_2(t)$ *eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.*
(ii) $x_1 + x_0$ *eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.*
(iii) Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden einen Unterraum der C^1-Funktionen.
(iv) Eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe aus einer fixierten Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und einer Lösung der homogenen Differentialgleichung. Anders ausgedrückt: Die Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir, indem wir zur Menge der Lösungen der homogenen Gleichung eine spezielle Lösung (zu jedem Element) hinzuzählen. Solch eine Menge (Unterraum plus spezielles Element) bezeichnet man auch als affinen Unterraum.

Dasselbe Resultat gilt auch für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Beweis.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_1 - x_2)(t) =& \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = h(t) - g(t)x_1(t) - (h(t) - g(t)x_2(t))\\ =& -g(t)(x_1(t) - x_2(t)).\end{aligned}$$

(ii) Dies folgt wieder aus einer direkten Rechnung

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) + x_0(t)) = h(t) - g(t)x_1(t) - g(t)x_0(t) = h(t) - g(t)(x_1(t) + x_0(t)).$$

(iii) Wie in (ii) erhalten wir, dass die Summe von zwei Lösungen der homogenen Differentialgleichung wieder eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\lambda x(t)) = \lambda \dot{x}(t) = -\lambda g(t)x(t).$$

Auch die Nulllösung ist offensichtlicherweise eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(iv) Die ist eine Umformulierung der obigen Aussagen. □

Beispiel 9.1.5 (Inhomogene Differentialgleichung, eindimensional)**.** Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g(t)x(t) + h(t).$$

Die „Methode der Variation der Konstanten“ von Lagrange besteht darin, einen Ansatz der Form

$$x(t) = C(t) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)$$

zu machen, also die Lösung für die zugehörige homogene Differentialgleichung durch Ersetzen der Konstanten C durch eine Funktion $C(t)$ zu modifizieren. Dies ist genau dann eine Lösung, wenn

$$\dot{C}(t)e^{\cdots} + \underline{C(t)e^{\cdots}g(t)} = \underline{g(t)C(t)e^{\cdots}} + h(t)$$

gilt. Wir erhalten

$$C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} g(\rho)\,d\rho\right)\,d\tau + C_0.$$

Mit Hilfe des Eindeutigkeitsresultates für gewöhnliche Differentialgleichungen erhalten wir also:

Theorem 9.1.6. *Die eindeutig bestimmte Lösung von $\dot{x}(t) = g(t)x(t) + h(t)$ mit Anfangswert $x(t_0) = C_0$ ist durch*

$$x(t) = \left[C_0 + \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} g(\rho)\,d\rho\right)\,d\tau\right] \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\sigma)\,d\sigma\right)$$

gegeben.

9.2. **Homogene lineare Systeme.**

Lemma 9.2.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $t_0 \in I$ und jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Entscheidend ist hier, dass die Lösung auf ganz I existiert. Eine analoge Argumentation funktioniert für die inhomogene Gleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ und stetigem $b \in \mathbb{R}^n$.

Das Resultat gilt auch in Banachräumen.

Beweis. Theorem 8.2.2, angewandt auf Teilintervalle von I, liefert die Eindeutigkeit der Lösung. Das Theorem von Picard-Lindelöf liefert die Existenz einer Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.

Die Lösung existiert auf ganz I: Auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir Normen mit $\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \le \|A\|_{\mathbb{R}^{n\times n}} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$. Sei $(a, b) \neq I$ das maximale offene Existenzintervall, auf dem eine C^1-Lösung x existiert. Sei ohne Einschränkung $(b - 3\delta, b + 3\delta) \subset I$ für ein $\delta > 0$ und $t_0 < b - 3\delta$ sowie $t_0 - 3\delta > a$. Sei $C_A \ge 1$ mit $\|A(t)\| \le C_A$ für $t \in [t_0 - 2\delta, b + 2\delta]$. Für die Lösung $x(t)$ erhalten wir aus

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau$$

für alle $t \in [t_0, b)$

$$\|x(t)\| \le \|x(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t} C_A \cdot \|x(\tau)\|\, d\tau$$

und somit mit dem Lemma von Gronwall

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| \cdot e^{C_A\cdot|b-t_0|} \equiv C_x,$$

also eine gleichmäßige Schranke, d. h. C_x hängt nicht von t ab. Dies widerspricht Bemerkung 8.1.14 und es gilt daher $(a, b) = I$. □

Fr 04.12.2020

Theorem 9.2.2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Dann bilden die Lösungen $x(t)$ der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ einen Unterraum U von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Bezeichne mit $x(t; t_0, x_0)$ die Lösung mit $x(t_0) = x_0$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \ni x_0 \mapsto (I \ni t \mapsto x(t; t_0, x_0)) \in U$$

für festes $t_0 \in I$ ein Vektorraumisomorphismus.

Das Resultat gilt auch in Banachräumen.

Beweis. Wir haben bereits in Lemma 9.1.4 gesehen, dass U ein Vektorraum ist. Daraus folgt auch, dass $x_0 \mapsto x(\cdot; t_0, x_0)$ eine lineare Abbildung ist: Die Lösung zum Anfangswert λx_0 ist $\lambda x(\cdot; t_0, x_0) = x(\cdot; t_0, \lambda x_0)$, da beides Lösungen sind und denselben Anfangswert haben. Ebenso erhalten wir $x(\cdot; t_0, x_1) + x(\cdot; t_0, x_2) = x(\cdot, t_0, x_1 + x_2)$. Da jede Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung einen Anfangswert zur Zeit t_0 besitzt und dieser die Lösung eindeutig bestimmt, ist die Abbildung surjektiv und injektiv. □

Korollar 9.2.3.

(i) Die Lösungen $(x(\cdot;t_0,e_i))_{1\le i\le n}$ bilden eine Basis aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\dot x(t)=A(t)x(t)$.
(ii) Die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni x_0 \mapsto x(t_1;t_0,x_0)\in\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Bemerkung 9.2.4.
(i) Sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine Basis des Lösungsraumes. Dann nennen wir $(x_i)_i$ ein **Fundamentalsystem.**
(ii) Setze $X(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$. $X(t)$ mit $(x_i)_i$ wie oben heißt **Lösungs-** oder **Fundamentalmatrix.** Sie erfüllt $\dot X(t)=A(t)X(t)$. Jede Lösung hat die Gestalt $X(t)v$ für ein $v\in\mathbb{R}^n$. Ist $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so ist $X(t)B$ ebenfalls eine Lösungsmatrix. Alle Lösungsmatrizen sind von dieser Form.
(iii) Ist $X_e(t)$ die Lösungsmatrix mit $X_e(t_0)=\mathbb{1}$, so erfüllt eine beliebige Lösungsmatrix $X(t)$
$$X(t)=X_e(t)\cdot X(t_0),$$
denn auf beiden Seiten stehen Lösungsmatrizen mit den gleichen Anfangswerten.
(iv) Eine Lösung zum Anfangswert $x(t_0)=x_0$ ist durch $X_e(t)x_0$ gegeben.

Lemma 9.2.5. *Sei $A=\left(a^i_j\right)_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt*
$$\frac{\partial\det A}{\partial a^i_j}=\det A\cdot\left(a^{-1}\right)^j_i.$$

Beweis. Wir verwenden Resultate über die Determinante und die Inverse einer Matrix; vergleiche [4, Lemma 2.14] und benachbarte Resultate. Setze
$$b^i_j:=(-1)^{i+j}\det A^j_i,$$
wobei $\left(A^i_j\right)$ die Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht, also die Zeile und Spalte, in der a^i_j steht. Es gilt
$$\begin{aligned}\left(a^{-1}\right)^j_i&=(-1)^{i+j}\frac{\det A^i_j}{\det A}=\frac{b^j_i}{\det A},\\ \det A\cdot\delta^i_k&=\sum_{j=1}^n a^i_jb^j_k.\end{aligned}$$
Daraus erhalten wir, da b^j_i nicht von a^i_j abhängt, mit $i=k$
$$\frac{\partial\det A}{\partial a^i_j}=b^j_i=\det A\cdot\left(a^{-1}\right)^j_i.\qquad\square$$

Theorem 9.2.6 (Wronski-Determinante)**.** *Sei $X(t)=(x^i_j(t))$ eine Lösungsmatrix des linearen Differentialgleichungssystems $\dot x(t)=A(t)\cdot x(t)$ mit zeitabhängigen Matrizen $A=\left(a^i_j\right)\in C^0(I,\mathbb{R}^{n\times n})$. Setze $\varphi(t):=\det X(t)$. Dann gilt*
$$\dot\varphi(t)=\operatorname{tr}A(t)\cdot\varphi(t).$$

Beweis. Wir benutzen Lemma 9.2.5 und erhalten
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(t)&=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial\det X(t)}{\partial x^i_j(t)}\frac{\partial x^i_j(t)}{\partial t}=\det X(t)\cdot\sum_{i,j=1}^n\left(x^{-1}\right)^j_i\dot x^i_j\\ &=\det X(t)\cdot\sum_{i,j,k=1}^n\left(x^{-1}\right)^j_i a^i_kx^k_j=\det X(t)\cdot\operatorname{tr}\left((X(t))^{-1}A(t)X(t)\right)\\ &=\det X(t)\cdot\operatorname{tr}\left(X(t)(X(t))^{-1}A(t)\right)=\det X(t)\cdot\operatorname{tr}A(t).\end{aligned}\qquad\square$$

Korollar 9.2.7. *Sind die Spalten x_i, $1 \le i \le n$, einer Matrix X mit $\dot X(t) = A(t)X(t)$ für ein t linear unabhängig, so gilt dies auch für alle anderen Zeiten in einem Intervall, in dem $A(t)$ stetig ist.*

9.3. Inhomogene lineare Systeme.

Bemerkung 9.3.1. Wir wollen das System

$$\dot x(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

für stetige Funktionen $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$ lösen. Sei $X(t)$ die Lösungsmatrix des homogenen Systems $\dot x(t) = A(t)x(t)$ mit $\dot X(t) = A(t)X(t)$ und $X(t_0) = \mathbb{1}$. Wie bei der Variation der Konstanten machen wir einen Ansatz

$$x(t) = X(t) \cdot v(t)$$

und versuchen, den im homogenen Fall konstanten Vektor v so zu wählen, dass wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anfangswert x_0 erhalten. Es ist

$$Ax + b \overset{!}{=} \dot x = \dot X v + X\dot v = AXv + X\dot v.$$

Also sollte $b = X\dot v$ gelten. Setze daher $v(t) := x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau$. Somit ist die Lösung durch

$$x(t) = X(t)\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau\right)$$

gegeben, denn man rechnet nach, dass diese Formel eine Lösung liefert.

9.4. Die Exponentialfunktion für Matrizen $\star$.

Definition 9.4.1. Eine Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Matrizen und eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ heißen verträglich, wenn

(i) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$,
(ii) $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Beispiele 9.4.2.

(i) $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2}$ und $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(a^i_j\right)^2}$, siehe [4, vor Lemma 1.23]. Mit dieser Norm ist $\mathbb{R}^{n\times n}$ ein vollständiger normierter Raum, d. h. ein Banachraum, jede Cauchyfolge konvergiert also.

Ebenso gilt, dass jeder normierte endlichdimensionale $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum ein Banachraum ist, denn für endlichdimensionale Vektorräume sind alle Normen äquivalent, d. h. für beliebige Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gibt es ein $C > 0$ mit

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C \cdot \|x\|_1$$

für alle x.

(ii) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Definiere

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Hier ist $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ für $\|x\| = 1$ nach Definition klar und folgt sonst durch Skalierung. Wegen $\|Bx\| \le \|B\|$ für alle $\|x\| = 1$ und

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$$

erhalten wir

$$\|A \cdot B\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \le \sup_{\|y\|=\|B\|} \|Ay\| = \|B\| \cdot \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Lemma 9.4.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ differenzierbar, ebenso $B(t)$ und $I \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind auch die folgenden Ausdrücke differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) &= \frac{d}{dt}A(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \frac{d}{dt}B(t),\\ \frac{d}{dt}(A(t)x(t)) &= \frac{d}{dt}A(t) \cdot x(t) + A(t) \cdot \frac{d}{dt}x(t).\end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Produktregel, angewandt auf die Definition der entsprechenden Matrixprodukte. □

Wir wollen e^A, A eine Matrix, bestimmen und auch ableiten. Dies kann man in diesem konkreten Fall explizit machen, indem man den eindimensionalen Beweis anpasst. Das folgende Theorem liefert eine allgemeine Methode dafür.

Theorem 9.4.4. *Seien E, F Banachräume, $\Omega \subset E$ offen und zusammenhängend. Sei (f_n) eine Folge differenzierbarer Abbildungen $f_n \colon \Omega \to F$. Gelte:*

(i) Es gibt $x_0 \in \Omega$, so dass $f_n(x_0)$ in F konvergiert.

(ii) Zu jedem Punkt $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $B_r(x) \subset \Omega$, so dass (f_n') gleichmäßig konvergiert.

Dann konvergiert die Folge (f_n) in jeder solchen Umgebung $B_r(x)$ gleichmäßig. Für $x \in \Omega$ gilt

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beide Voraussetzungen sind nötig; Gegenbeispiele sind die Funktionenfolgen

$$f_n(x) = n \quad \text{und} \quad f_n(x) = \tfrac{1}{n}\sin(nx).$$

Beim zweiten Beispiel ist f_n' sogar gleichmäßig beschränkt, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \equiv 0$ ist differenzierbar, aber der Grenzwert der Ableitungen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(nx)$ existiert nicht.

Beweis. Für $y, z \in B_r(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\|f_n(y) - f_m(y) - (f_n(z) - f_m(z))\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt}(f_n - f_m)(ty + (1-t)z)\,dt \right\|\\ &= \left\| \int_0^1 (f_n' - f_m')(ty + (1-t)z)\langle y - z\rangle\,dt \right\|\\ &\le \|z - y\| \cdot \sup_{w\in B_r(x)} \|f_n'(w) - f_m'(w)\|\\ &\le 2r \cdot \sup_{w\in B_r(x)} \|f_n'(w) - f_m'(w)\|. \qquad (9.4.1)\end{aligned}$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung können wir die linke Seite nach unten mit $\ldots \ge \big|\|f_n(y) - f_m(y)\| - \|f_n(z) - f_m(z)\|\big|$ abschätzen. Wir erhalten

$$\|f_n(y) - f_m(y)\| \le 2r \cdot \sup_{w\in B_r(x)} \|f_n'(w) - f_m'(w)\| + \|f_n(z) - f_m(z)\|.$$

Konvergiert $f_n(z)$ für $n \to \infty$, so konvergiert daher f_n gleichmäßig in $B_r(x)$.

Dies liefert, dass die Menge der Punkte x, in der $f_n(x)$ für $n \to \infty$ konvergiert, in Ω offen, abgeschlossen und nicht leer ist. Somit konvergiert f_n in ganz Ω. (Dies benötigt etwas Topologie oder ein elementares Argument für $E = \mathbb{R}$.)

Wir definieren

$$f(y) := \lim_{n\to\infty} f_n(y) \quad \text{und} \quad g(y) := \lim_{n\to\infty} f_n'(y).$$

Zur Vertauschbarkeit der Grenzwertbildung mit der Ableitung: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine Kugel $B_r(x)$ wie in der Annahme. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $m, n \ge n_0$ die Abschätzung $\|f_n'(w) - f_m'(w)\| \le \varepsilon$ für alle $w \in B_r(x)$ gilt. Sei weiterhin n so groß, dass $\|g(w) - f_n'(w)\| \le \varepsilon$ für alle $w \in B_r(x)$ gilt. In (9.4.1) betrachten wir den Grenzwert $m \to \infty$ und erhalten für $n \ge n_0$ in $B_r(x)$

$$\|f(y) - f(z) - (f_n(y) - f_n(z))\| \le \varepsilon \cdot \|y - z\|.$$

Nach Definition der Ableitung im Punkt x gibt es zu jedem $n \ge n_0$ ein $r' \le r$, so dass für $y \in B_{r'}(x)$ die Abschätzung $\|f_n(y) - f_n(x) - f_n'(x)\langle y - x\rangle\| \le \varepsilon \cdot \|y - x\|$ gilt. Für $\|y - x\| \le r'$ erhalten wir daher mit Hilfe der obigen Ungleichungen und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(x) - g(x)\langle y - x\rangle\| \le{}& \|f(y) - f(x) - (f_n(y) - f_n(x))\| \\ &+ \|f_n(y) - f_n(x) - f_n'(x)\langle y - x\rangle\| \\ &+ \|f_n'(x) - g(x)\| \cdot \|y - x\| \\ \le{}& 3\varepsilon \cdot \|y - x\|.\end{aligned}$$

Wir haben für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $r' > 0$ gefunden, so dass $\|f(y) - f(x) - g(x)\langle y-x\rangle\| \le \varepsilon\cdot\|y-x\|$ für $y \in B_{r'}(x)$ gilt. Damit ist $g(x) = f'(x)$. Die Behauptung folgt. ☐

Korollar 9.4.5. *Sei $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ eine Potenzreihe, die in $B_r(0)$ konvergiert. Sei $I \ni t \to A(t) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ stetig differenzierbar mit $\|A(t)\| < r$ für alle $t \in I$ für eine verträgliche Norm $\|\cdot\|$. Gelte*

$$A(t)\dot{A}(t) - \dot{A}(t)A(t) = \left[A(t), \dot{A}(t)\right] = 0.$$

(Ohne diese Bedingung sieht die Ableitung deutlich komplizierter aus.) Dann existiert

$$g(A(t)) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i A^i(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i(t),$$

ist in I differenzierbar und die Ableitung erfüllt

$$\frac{d}{dt} g(A(t)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i a_i A^{i-1}(t)\dot{A}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i A^{i-1}(t)\dot{A}(t).$$

Beweis. Hierbei ist A^i induktiv durch $A^0 = \mathbb{1}$ und $A^{i+1} := A \cdot A^i$ definiert. Wir wollen Theorem 9.4.4 anwenden. Setze

$$f_n(t) := \sum_{i=0}^{n} a_i A^i(t).$$

(i) Es gilt für $m > n$

$$\|f_m(t) - f_n(t)\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} a_i A^i(t)\right\| \le \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| \cdot \|A(t)\|^i.$$

Wegen $\|A(t)\| < r$ und da die Potenzreihe für reelle x absolut konvergiert, ist $(f_n(t))$ für festes $t \in I$ eine Cauchyfolge in $\left(\mathbb{R}^{N\times N}, \|\cdot\|\right)$. Da $\left(\mathbb{R}^{N\times N}, \|\cdot\|\right)$ ein Banachraum ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

(ii) Es gilt aufgrund der Produktregel

$$\frac{d}{dt} f_n(t) \equiv f_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} i a_i A^{i-1}(t)\dot{A}(t),$$

da $A(t)$ und $\dot{A}(t)$ vertauschen. Wie oben sieht man, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(t) =: h(t)$ existiert, da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzradiusses differenzierbar sind und die Ableitung durch die absolut konvergente Potenzreihe der Ableitungen der Summanden gegeben ist. Sei t in einem Intervall J, in dem $\|A(t)\| \le r_0 < r$ gilt. Dort gilt für $m > n$

$$\begin{aligned}\|f_m'(t) - f_n'(t)\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} i a_i A^{i-1}(t)\dot{A}(t) \right\| \le \left\| \sum_{i=n+1}^{m} i a_i A^{i-1}(t) \right\| \cdot \left\|\dot{A}(t)\right\| \\ &\le \left(\sum_{i=n+1}^{m} i|a_i| \|A(t)\|^{i-1} \right) \cdot \left\|\dot{A}(t)\right\|.\end{aligned}$$

Wegen $\|A(t)\| \le r_0$ und der gleichmäßigen absoluten Konvergenz von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i a_i x^i$ auf $\overline{B_{r_0}(0)}$ konvergiert auch f_n' für $t \in J$ gleichmäßig: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $m > n \ge n_0$ die Abschätzung $\|f_m'(t) - f_n'(t)\| \le \varepsilon$ für alle $t \in J$ gilt. Mit $m \to \infty$ sieht man, dass f_n' gleichmäßig gegen $h(t)$ konvergiert.

Nach Theorem 9.4.4 erhalten wir also

$$\frac{d}{dt}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dt} f_n(t)\right)$$

und die Behauptung folgt. □

Korollar 9.4.6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}.$$

Beweis. Für die zweite Darstellung schreibt man $\dot{A}(t)$ im Beweis der Ableitungsregeln für Potenzreihen auch bei f_n' bereits nach links. □

Lemma 9.4.7. *Seien $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt*

(i) $e^{B+C} = e^B \cdot e^C$, *falls* $BC = CB$,
(ii) $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$,
(iii) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ *für* $s, t \in \mathbb{R}$,
(iv) $e^{A+\lambda \mathbb{1}} = e^{\lambda} \cdot e^A$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$,
(v) $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C$, *falls* C *invertierbar ist,*
(vi) $e^{\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$ *für* $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Beweis.

(i) e^B und e^C konvergieren absolut. Daher dürfen wir die Reihen gliedweise miteinander multiplizieren (Beweis wie im Reellen) und erhalten

$$\begin{aligned} e^B \cdot e^C &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B^p}{p!} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{C^q}{q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k C^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B^k C^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B+C)^n}{n!} = e^{B+C}. \end{aligned}$$

(ii) Folgt aus (i) mit der Rechnung

$$\mathbb{1} = e^0 = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A}.$$

(iii) Dies folgt unmittelbar aus (i).

(iv) Dies folgt ebenso aus (i), da $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A$ gilt.

(v) Per Induktion erhält man $\left(C^{-1}BC\right)^k = C^{-1}B^kC$ für alle k. Dies setzt man in die Anfangsstücke der Potenzreihe ein und erhält die Behauptung durch Grenzübergang.

(vi) Dies funktioniert analog, denn per Induktion erhält man

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^k = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right). \qquad \square$$

9.5. **Systeme mit konstanten Koeffizienten.** Analog zum eindimensionalen Fall erhalten wir

Lemma 9.5.1. *Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

die Lösung

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Für $A = A(t)$ funktioniert solch ein Vorgehen, mit $(t-t_0)A$ durch ein Integral ersetzt, falls alle Matrizen $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, kommutieren.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Es gilt

$$\dot{x}(t) = e^{A(t-t_0)}Ax_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t)$$

und der Anfangswert ist wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 9.5.2. Lässt sich A mit Hilfe einer invertierbaren Matrix B auf eine einfache Gestalt $C = BAB^{-1}$ bringen, so können wir $e^A = B^{-1}e^CB$ einfacher bestimmen, z. B. wenn C eine Diagonalmatrix ist.

Ist A eine Matrix, die aus genau einem Jordankästchen besteht, so können wir e^A wie folgt ausrechnen: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv D + N.$$

Per Induktion folgt, dass $N^k = \left({}^k m^i_j\right)$, $k \ge 1$, mit ${}^k m^i_j = \delta^{i+k}_j$ gilt. N^k ist also eine Matrix, die in der k-ten oberen Nebendiagonalen Einsen und sonst Nullen enthält. Die Matrizen D und N kommutieren, somit auch D und alle Potenzen N^k, sowie beliebige Potenzen N^k untereinander. Beachte auch, dass $N^i = 0$ für alle $i \geq n$ gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tD+tN} = e^{tD} \cdot e^{tN} = e^{t\lambda} \mathbb{1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i N^i}{i!} \right) \\ &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & \ddots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Besteht A (oder C) aus mehreren Jordankästchen, so ist für jeden Block entsprechend zu verfahren.

Differentialgleichungen höherer Ordnung sind wie üblich zunächst als Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung umzuschreiben.

Di 08.12.2020

Beispiel 9.5.3. Wir wollen die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = 4\dot{x}(t) - 4x(t)$$

für beliebige Anfangswerte lösen.

Wir schreiben die Differentialgleichung als System erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Aus

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$. Für $\lambda = 2$ erhalten die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Diese hat den Rang 1 und einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 0. Dieser ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. Definiere die orthogonale Matrix $D := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}^{=D^T} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} &= \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}^{=D^T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}^{=D} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}^{=D^T} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ist zwar nicht in Jordanscher Normalform, jedoch lässt sich auch hier leicht e^{At} bestimmen. Es gilt $e^{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit lautet die allgemeine Lösung mit Parametern $a\sqrt{5}, b\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 5t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5}a \\ \sqrt{5}b \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} ae^{2t} + 5tbe^{2t} \\ be^{2t} \end{pmatrix}.$$

Dies multiplizieren wir von links mit D und erhalten
$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2t} + 5tbe^{2t} \\ be^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + b(5t-2)e^{2t} \\ a2e^{2t} + b(10t+1)e^{2t} \end{pmatrix}.$$
Man überprüft leicht, dass e^{2t} und $(5t-2)e^{2t}$ oder auch e^{2t} und te^{2t} tatsächlich eine Basis des zweidimensionalen Lösungsraumes der Gleichung $\ddot{x} = 4\dot{x} - 4x$ sind.

Bemerkung 9.5.4. Allgemeiner kann man im Falle einer skalaren linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung wie in Beispiel 9.5.3 aus der Darstellung für e^{At} im Falle, dass $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in Jordanscher Normalform ist, ablesen, dass es eine Basis des Lösungsraumes mit Elementen der Form $p(t)e^{\lambda t}$ gibt, wobei λ ein Eigenwert von A und p ein Polynom mit $\deg p < n$ ist. Damit lassen sich Lösungen häufig schnell durch Probieren finden.

9.6. **Stabilität linearer Systeme.** In einer Vorlesung über dynamische Systeme beschäftigt man sich intensiver mit dem Verhalten von Lösungen.

Definition 9.6.1. Sei E ein Banachraum und $f\colon [0,\infty) \times E \to E$ stetig. Sei $x\colon [0,\infty) \to E$ eine C^1-Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0,\infty).$$

(i) Dann heißt x **stabil,** falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle Lösungen y der Differentialgleichung
$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad \|y(0) - x(0)\| < \delta$$
für alle $t \geq 0$ existieren und
$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [0,\infty)$$
erfüllen. (Dies bedeutet, dass Lösungen y existieren und nahe bei x bleiben.)

(ii) x heißt **asymptotisch stabil,** falls x stabil ist und ein $\delta > 0$ existiert, so dass alle Lösungen y mit $\|y(0) - x(0)\| < \delta$ auch
$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$$
erfüllen.

(iii) x heißt **instabil,** falls x nicht stabil ist.

(iv) x heißt **stationär,** falls $f(t, x(t)) = 0$ für alle t gilt.

Diese Definition verwenden wir auch, falls $f(t,\cdot)$ nur auf geeigneten offenen Teilmengen $\Omega \subset E$ definiert ist, z. B. für $f\colon [0,\infty) \times B_\alpha(0) \to E$.

Da wir Stabilitätsaussagen in Abhängigkeit der Eigenwerte formulieren wollen, beschränken wir uns nun auf den Fall $E = \mathbb{R}^n$ bzw. $E = \mathbb{C}^n$. Unendlichdimensional betrachtet man für Stabilitätsfragen das Spektrum $\sigma(A)$ des linearen Operators $A \in L(E)$.

Bemerkung 9.6.2. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sei $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ein generisches zweidimensionales lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Generisch bedeutet hier, dass das charakteristische Polynom von A in $\mathbb{C}[X]$ keine doppelten Nullstellen hat und 0 kein Eigenwert ist. Somit ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar und 0 der einzige stationäre Punkt.

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ die (möglicherweise komplexen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Ist ein Eigenwert nicht reell, so gilt $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$, die Eigenwerte sind also komplex konjugiert zueinander, da sonst das charakteristische Polynom keine reellen Koeffizienten hätte. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1, λ_2. Dann lösen $y_1(t) := e^{\lambda_1 t}x_1$ und $y_2(t) := e^{\lambda_2 t}x_2$ die Differentialgleichung und bilden ein Fundamentalsystem.

Es treten die folgenden Fälle auf:

(i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: 0 ist asymptotisch stabil.
(ii) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ oder umgekehrt: 0 ist instabil, Lösungen laufen entlang von Kurven, die im Fall $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ und orthogonaler Eigenvektoren Hyperbeln sind. (Phasenportrait zeichnen.)
(iii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: 0 ist instabil.
(iv) $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:
   (a) $\lambda_1 = ir$, $\lambda_2 = -ir$, $r \in \mathbb{R}$: Komplexe Lösungen sind $e^{irt}x_1 \equiv e^{irt}(a+ib)$ und $e^{-irt}(a-ib)$, $a, b \in \mathbb{R}^2$ da aus $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ direkt $A\bar{x}_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{x}_1$ folgt. Eine reelles Fundamentalsystem ist durch

$$\begin{aligned} e^{irt}(a+ib) + e^{-irt}(a-ib) =& (\cos(rt) + i\sin(rt))(a+ib) \\ &+ (\cos(rt) - i\sin(rt))(a-ib) \\ =& 2\cos(rt)a - 2\sin(rt)b \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} i\left(e^{irt}(a+ib) - e^{-irt}(a-ib)\right) =& (-\sin(rt) + i\cos(rt))(a+ib) \\ &+ (-\sin(rt) - i\cos(rt))(a-ib) \\ =& -2\sin(rt)a - 2\cos(rt)b \\ =& 2\cos\left(rt + \tfrac{\pi}{2}\right)a - 2\sin\left(rt + \tfrac{\pi}{2}\right)b. \end{aligned}$$

   gegeben. Lösungen „rotieren“ also um den Ursprung herum. Somit ist 0 stabil, aber nicht asymptotisch stabil.
   (b) Gilt $\lambda_1 = s + ir$, $\lambda_2 = s - ir$, so erhalten wir dieselben Lösungen wie im Falle $s = 0$, jedoch mit e^{st} multipliziert. Lösungen „schrauben“ sich also um den Ursprung herum und nähern sich ihm, falls $s < 0$ gilt (0 ist stabil) und entfernen sich für $s > 0$ (0 ist instabil).

Bemerkung 9.6.3. $\star$ Bei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Form $\dot{x}(t) = f(x(t))$ heißt ein stationärer Punkt x_0 **linear stabil,** falls x_0 ein stabiler Punkt der affin linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = df(x_0)\langle x(t) - x_0\rangle$ ist. Dies ist äquivalent zur Stabilität von 0 für $y(t) := x(t) - x_0$ unter der linearen Differentialgleichung $\dot{y}(t) = df(x_0)\langle y(t)\rangle$.

Den Zusammenhang zwischen linearer Stabilität und Stabilität werden wir im Stabilitätssatz bzw. Instabilitätssatz noch genauer auch im nicht autonomen Fall betrachten.

Bemerkung 9.6.4. Im nichtlinearen Fall kann man Stabilität mit Hilfe von Lyapunovfunktionen untersuchen. Eine Lyapunovfunktion ist eine Funktion L, die

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) \le 0$$

erfüllt. Hiermit kann man unter geeigneten Voraussetzungen folgern, dass $x(t)$ gegen ein Minimum von L konvergiert.

Beispiel: Sei $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^1. Dann erfüllt eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -\nabla L(x(t))$

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) = DL(x(t))\langle \dot{x}(t)\rangle = -DL(x(t))\langle \nabla L(x(t))\rangle = -\|\nabla L(x(t))\|^2 \le 0.$$

Lemma 9.6.5. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Seien λ_i, $1 \le i \le n$, die Eigenwerte von A entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten. Gilt $\operatorname{Re}\lambda_i < \alpha$ für $1 \le i \le n$, so folgt*

$$\left\|e^{At}\right\| \le c \cdot e^{\alpha t} \quad \text{für alle } t \ge 0$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$.

Beweis. Es gibt eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass BAB^{-1} in Jordanscher Normalform ist. Es folgt $e^{BAB^{-1}t} = Be^{At}B^{-1}$. Anhand der Formel für e^{At} für Jordanblöcke in Bemerkung 9.5.2 erhalten wir die Abschätzung

$$\left\|e^{At}\right\| \le p(t)\cdot \exp\left(t\cdot \max_{1\le i\le n} \operatorname{Re}\lambda_i\right) \le c\cdot e^{\alpha t},$$

da die strikte Ungleichung $\operatorname{Re}\lambda_i < \alpha$ gilt. Der Betrag der Transformationsmatrizen lässt sich durch eine weitere Konstante abschätzen. □

Theorem 9.6.6. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Seien λ_i die Eigenwerte von A mit $\operatorname{Re}\lambda_1 \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_n$. Dann ist die Lösung $x(t) \equiv 0$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ im Fall*

(i) $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$ *asymptotisch stabil.*
(ii) $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ *instabil.*
(iii) $\operatorname{Re}\lambda_n = 0$ *nicht asymptotisch stabil; es kann Stabilität oder Instabilität vorliegen.*

Beweis. Benutze, dass sich jede Lösung in der Form $e^{At}x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ darstellen lässt. Alternativ nutzt man Bemerkung 9.5.4.

Betrachte im Fall $\operatorname{Re}\lambda_n = 0$ die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Details: Übung. □

Fr 11.12.2020

9.7. **Der Stabilitätssatz.** Bei kleinen Störungen, beispielsweise bei einem Zusatzterm $g(t,x) = x^2$ ist die Stabilität erhalten.

Theorem 9.7.1 (Stabilitätssatz)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und gelte für die Eigenwerte λ_i, $1 \le i \le n$, die Ungleichung $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Sei $g\colon [0,\infty)\times \overline{B_\alpha(0)} \to \mathbb{C}^n$, $\alpha > 0$, stetig und gelte*

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|g(t,x)|}{|x|} = 0,$$

gleichmäßig in $t \in [0,\infty)$. (Insbesondere gilt also $g(t,0) = 0$.) Dann ist die Lösung $x(t) \equiv 0$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t,x(t))$$

asymptotisch stabil.

Beweis. Nach Lemma 9.6.5 gibt es Konstanten $c > 1$ und $\beta > 0$ mit $\operatorname{Re}\lambda_i < -\beta < 0$, $1 \le i \le n$, und

$$\left\|e^{At}\right\| \le c\cdot e^{-\beta t} \quad \text{für alle } t \ge 0.$$

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens von g gibt es δ mit $0 < \delta < \alpha$ und $|g(t,z)| \le \frac{\beta}{2c}|z|$ für alle $|z| \le \delta$ und alle $t \ge 0$. Wir behaupten nun, dass aus $|y(0)| \equiv |y_0| \le \varepsilon < \frac{\delta}{2c}$ für eine Lösung y der Differentialgleichung bereits

$$|y(t)| \le c\cdot\varepsilon\cdot e^{-\frac{\beta}{2}t}$$

für alle $t \ge 0$, für die die Lösung existiert, folgt. Dies beweist dann das Theorem, weil hieraus mit $c\cdot\varepsilon \le \frac{\alpha}{2}$ bereits Langzeitexistenz und asymptotische Stabilität folgen.

Zum Beweis der Behauptung: Wir benutzen die Darstellungsformel aus Bemerkung 9.3.1 für Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen und erhalten mit $b(t) = g(t, y(t))$ für eine Lösung y mit Startwert y_0 und $X(t) = e^{At}$

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}g(s, y(s))\,ds.$$

Mit den Abschätzungen an e^{At} und g erhalten wir daraus

$$|y(t)| \le |y_0|ce^{-\beta t} + \int\limits_0^t ce^{-\beta(t-s)}\frac{\beta}{2c}|y(s)|\,ds$$

solange $|y(s)| \le \delta$ für alle $0 \le s \le t$ gilt.

Definiere $\varphi(t) := |y(t)|e^{\beta t}$. Dann folgt nach Multiplikation mit $e^{\beta t}$

$$\varphi(t) \le c\varepsilon + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds.$$

Mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir daraus $\varphi(t) \le c\varepsilon e^{\frac{\beta}{2}t}$ oder, äquivalent dazu, $|y(t)| \le c\varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t} \overset{\text{s.o.}}{<} \frac{\delta}{2}$, solange $|y(t)| \le \delta$ ist. Daher gilt stets $|y(t)| < \delta < \alpha$ und somit lässt sich die Lösung auch auf ganz $[0, \infty)$ fortsetzen. □

Der Beweis des Instabilitätssatzes ist etwas komplizierter, da A auch im instabilen Fall Eigenwerte mit negativem Realteil besitzen kann.

Theorem 9.7.2 (Instabilitätssatz). *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ für mindestens einen Eigenwert λ von A. Erfülle g die Voraussetzungen aus Theorem 9.7.1. Dann ist die Lösung $x(t) \equiv 0$ der Differentialgleichung*

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t, y(t))$$

instabil.

Beweis. Zunächst transformieren wir die Gleichung. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten. Sei $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, so dass $B = C^{-1}AC$ in Jordanscher Normalform ist, d. h. für $B = \left(b^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ gilt $b^i_i = \lambda_i$, $b^i_{i+1} \in \{0, 1\}$ und $b^i_j = 0$ sonst. Definiere $H := \operatorname{diag}\left(\eta, \eta^2, \ldots, \eta^n\right)$ für $\eta > 0$, also $H = \left(h^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ mit $h^i_j = \eta^i\delta^i_j$. Mit Hilfe dieser Matrix wollen wir die Gleichung so transformieren, dass die Einser neben der Diagonalen in den Jordanblöcken zu kleinen η-Beiträgen werden. Wir erhalten $H^{-1} = \operatorname{diag}\left(\eta^{-1}, \eta^{-2}, \ldots, \eta^{-n}\right)$ sowie $D \equiv \left(d^i_j\right)_{1\le i,j\le n} := H^{-1}BH$ mit $d^i_j = b^i_j\eta^{j-i}$ für beliebige Matrizen B. In unserem Fall erhalten wir $d^i_i = \lambda_i$, $d^i_{i+1} \in \{0, \eta\}$ sowie $d^i_j = 0$ sonst. Wir setzen $y(t) = CHz(t)$ und erhalten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= H^{-1}C^{-1}\dot{y}(t)\\
&= H^{-1}C^{-1}[Ay(t) + g(t, y(t))]\\
&= H^{-1}C^{-1}ACHz(t) + H^{-1}C^{-1}g(t, CHz(t))\\
&= Dz(t) + f(t, z(t))
\end{aligned}$$

mit $f(t, \cdot) = H^{-1}C^{-1}g(t, CH\cdot)$. Die Funktion f erfüllt dieselbe Abfallbedingung wie g, denn aus $|g(t, z)| \le \varepsilon|z|$ für $|z| \le \delta$ folgt

$$|f(t, z)| = \left|H^{-1}C^{-1}g(t, CHz)\right| \le \left\|H^{-1}C^{-1}\right\| \cdot \varepsilon \cdot \|CH\| \cdot |z|$$

für $|z| \le \frac{\delta}{\|CH\|}$.

Damit haben wir unsere Differentialgleichung auf die Form

$$\dot{z}^i = \lambda_i z^i \left\{+\eta z^{i+1}\right\} + f^i(t, z),$$

$1 \le i \le n$, transformiert, wobei der Term in geschweiften Klammern nur auftritt, wenn die i-te Zeile/Spalte nicht die letzte Zeile/Spalte eines Jordankästchens ist.

Seien $I := \{k \in \{1, \ldots, n\} \colon \operatorname{Re} \lambda_k > 0\}$ und $S := \{k \in \{1, \ldots, n\} \colon \operatorname{Re} \lambda_k \le 0\}$. Wir definieren die wachsenden bzw. nichtwachsenden Anteile der Lösung durch

$$\varphi(t) := \sum_{j \in I} \left|z^j(t)\right|^2 \quad \text{bzw.} \quad \psi(t) := \sum_{j \in S} \left|z^j(t)\right|^2.$$

Fixiere $\eta > 0$ so klein, dass $0 < 6\eta < \operatorname{Re} \lambda_j$ für alle $j \in I$ gilt. Fixiere weiterhin $\delta > 0$ so, dass aufgrund der Abfallbedingung

$$|f(t, x)| \le \eta |x| \quad \text{für alle } |x| \le \delta$$

gilt. Angenommen, es gelten $|z(0)| \le \delta$ und $\psi(0) < \varphi(0)$. Wir erhalten, solange $|z(t)| \le \delta$ und $\psi(t) \le \varphi(t)$ gelten

$$\begin{aligned}
\dot\varphi(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{j \in I} \left(\operatorname{Re} z^j(t)\right)^2 + \frac{d}{dt} \sum_{j \in I} \left(\operatorname{Im} z^j(t)\right)^2 \\
&= 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Re} z^j(t) \operatorname{Re} \dot z^j(t) + 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Im} z^j(t) \operatorname{Im} \dot z^j(t) \\
&= 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left[\left(\operatorname{Re} \dot z^j(t) + i \operatorname{Im} \dot z^j(t)\right) \left(\operatorname{Re} z^j(t) - i \operatorname{Im} z^j(t)\right)\right] \\
&= 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left(\dot z^j(t) \overline{z}^j(t)\right) \\
&= 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left[\left(\lambda_j z^j(t) \ \left\{+\eta z^{j+1}(t)\right\} + f^j(t, z)\right) \overline{z}^j(t)\right] \\
&= 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \lambda_j \left|z^j(t)\right|^2 + \left\{ 2\eta \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left(z^{j+1}(t) \overline{z}^j(t)\right) \right\} + 2 \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left(f^j(t, z) \overline{z}^j(t)\right).
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass aufgrund des Eindeutigkeitssatzes $\varphi > 0$ erhalten bleibt. Nun gelten

$$\sum_{j \in I} \operatorname{Re} \lambda_j \left|z^j(t)\right|^2 > \sum_{j \in I} 6\eta \left|z^j(t)\right|^2 = 6\eta \varphi(t)$$

und, sofern dieser Term auftritt,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left(z^{j+1}(t) \overline{z}^j(t)\right) \right| &\le \sum_{j \in I} \left|z^{j+1}(t)\right| \cdot \left|z^j(t)\right| \\
&\le \sum_{j \in I} \left(\frac{1}{2} \left|z^{j+1}(t)\right|^2 + \frac{1}{2} \left|z^j(t)\right|^2 \right) \le \varphi(t),
\end{aligned}$$

da auch $j + 1 \in I$ gilt, falls dieser Term in geschweiften Klammern überhaupt auftritt. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j \in I} \operatorname{Re} \left(f^j(t, z) \overline{z}^j(t)\right) \right| &\le \sum_{j \in I} \left|f^j(t, z)\right| \cdot \left|z^j(t)\right| \\
&\le \sqrt{\sum_{j \in I} |f^j(t, z)|^2} \cdot \sqrt{\varphi(t)} \le |f(t, z)| \cdot \sqrt{\varphi(t)}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung an f gilt weiterhin

$$|f(t, z)| \le \eta \cdot |z| = \eta \sqrt{\varphi + \psi} \le \eta \sqrt{2\varphi} \le 2\eta \sqrt{\varphi}.$$

Somit erhalten wir

$$\dot{\varphi}(t) > 12\eta\varphi(t) - 2\eta\varphi(t) - 4\eta\varphi(t) = 6\eta\varphi(t).$$

Eine entsprechende Rechnung für ψ ergibt

$$\dot{\psi}(t) = 2\sum_{j\in S} \operatorname{Re}\lambda_j \left|z^j(t)\right|^2 + \left\{ 2\eta \sum_{j\in S} \operatorname{Re}\left(z^{j+1}(t)\overline{z}^j(t)\right) \right\} + 2\sum_{j\in S} \operatorname{Re}\left(f^j(t,z)\overline{z}^j(t)\right).$$

Durch Kombination der obigen Abschätzungen, die entsprechend auch für ψ gelten, erhalten wir daraus mit $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ für $j \in S$ solange $\psi(t) \le \varphi(t)$ gilt

$$\dot{\psi}(t) \le 0 \cdot \psi(t) + 2\eta\psi(t) + 4\eta\sqrt{\psi(t)} \cdot \sqrt{\varphi(t)} \le 2\eta\varphi(t) + 4\eta\varphi(t) < \dot{\varphi}(t).$$

Somit bleibt die Ungleichung $\psi(t) \le \varphi(t)$ gültig, solange $|z(t)| \le \delta$ ist. Andererseits wächst jedoch φ im Falle $\varphi \neq 0$ unter diesen Bedingungen mindestens exponentiell in t. Also existiert $t_0 \ge 0$ mit $|z(t_0)| = \delta$. Daher ist die Lösung $x(t) \equiv 0$ instabil. □

Beispiele 9.7.3.

(i) Die Lösung $x(t) \equiv 0$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -\varepsilon x(t) + \alpha x^2(t), \quad \varepsilon > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

ist asymptotisch stabil.

(ii) Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta x^3(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

und die zugehörige linearisierte Gleichung um $x \equiv 0$

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)$$

auf Stabilität. Wir erhalten:

<table>
<tr><th></th><th>linearisierte Gleichung</th><th>nichtlineare Gleichung</th></tr>
<tr><td>$\alpha < 0$</td><td>asymptotisch stabil</td><td>asymptotisch stabil</td></tr>
<tr><td>$\alpha > 0$</td><td>instabil</td><td>instabil</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 0, \beta < 0$</td><td rowspan="3">stabil</td><td>asymptotisch stabil</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 0, \beta = 0$</td><td>stabil</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 0, \beta > 0$</td><td>instabil</td></tr>
</table>

9.8. **Rand- und Eigenwertprobleme ⋆.**

Bemerkung 9.8.1. ⋆

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir erinnern daran, dass $C^k(\Omega)$ für $k = 0, 1, \ldots, \infty$ der Raum aller k-fach (beliebig oft, falls $k = \infty$) in Ω stetig differenzierbaren Funktionen ist. $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ ist der Raum aller dieser Funktionen, deren (partielle) Ableitungen bis zur Ordnung k sich stetig und beschränkt auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen. Ist $k < \infty$, so versehen wir ihn mit der C^k-Norm $\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum\limits_{i=0}^{k} \sum\limits_{|\alpha|=i} \|D^\alpha u\|_{C^0(\Omega)}$, wobei $\|u\|_{C^0(\Omega)} := \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x)|$ die Supremumsnorm und α ein Multiindex ist.

(ii) Motivation: Die Schwingung einer Membran oder Saite wird durch

$$\frac{d^2}{dt^2} u(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschrieben. Der Ansatz $u(x,t) = \alpha(t)v(x)$ führt zu der Gleichung

$$\ddot{\alpha} \cdot v = \alpha \Delta v.$$

Für eine schwingende nicht gedämpfte Saite ist $\alpha(t) = \sin(\mu(t - t_0))$, also $\ddot{\alpha} = -\mu^2\alpha$. Als Gleichung im Ort erhält man mit $\lambda = \mu^2$

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 & \text{in } (a, b), \\ v(a) = v(b) = 0. \end{cases}$$

Lösungen sind die Funktionen $v(x) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, für $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}$.

Bemerkung 9.8.2. Wir hatten gesehen, dass das System

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t),$$

$F \in C^0\left([a, b], \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $g \in C^0\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$ mit einer Fundamentalmatrix X mit

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t)$$

des homogenen Systems die Lösung

$$x(t) = X(t)d + X(t)\left(\int\limits_a^t X^{-1}(\tau)g(\tau)\,d\tau\right)$$

besitzt.

Dies bleibt auch auf dem abgeschlossenen Intervall richtig, man kann die Daten nämlich stetig über $[a, b]$ hinaus fortsetzen.

Theorem 9.8.3. *Seien $F \in C^0\left([a, b], \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $g \in C^0\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Betrachte das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t), \\ Ax(a) + Bx(b) = c. \end{cases}$$

Sei X eine Fundamentalmatrix des zugehörigen linearen Systems. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Das Randwertproblem ist für beliebige $g \in C^0\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$ und $c \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
(ii) Die charakteristische Matrix $C_X := AX(a) + BX(b)$ ist invertierbar.
(iii) Das zugehörige homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t), \\ Ax(a) + Bx(b) = 0 \end{cases}$$

besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.

Beweis. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems hat die Form

$$x(t) = X(t)d + X(t)\left(\int\limits_a^t X^{-1}(\tau)g(\tau)\,d\tau\right).$$

Wir setzen dies in die Randbedingung ein und erhalten

$$\underbrace{(AX(a) + BX(b))}_{=C_X} d + BX(b)\int\limits_a^b X^{-1}(\tau)g(\tau)\,d\tau = c. \tag{9.8.1}$$

Dies ist für beliebige $c \in \mathbb{R}^n$ genau dann nach d auflösbar, wenn C_X regulär ist.

Im Spezialfall $g \equiv 0$ und $c = 0$ erhält man eine Bedingung dafür, dass eine Lösung der homogenen Differentialgleichung existiert. Sie ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es nur ein d gibt, das die Bedingung erfüllt. Aus $(AX(a)+BX(b))d = C_X d = 0$ sieht man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn C_X regulär und damit invertierbar ist. $\square$

9.9. **Selbstadjungierte Eigenwertprobleme $\star$.**
Wir untersuchen das folgende Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

$$(9.9.1)\qquad \begin{cases} (Lx)(t) \equiv -\frac{1}{r(t)}\left[\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}(t)) - q(t)x(t)\right] = \lambda x(t) & \text{in } [a,b], \\ R^1 x \equiv \alpha_1^1 x(a) + \alpha_2^1 \dot{x}(a) = \gamma^1, \\ R^2 x \equiv \beta_1^2 x(b) + \beta_2^2 \dot{x}(b) = \gamma^2 \end{cases}$$

mit $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, $q, r \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ mit $r(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$, $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma^i \in \mathbb{R}$ mit $\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1\right) \neq 0$ und $\left(\beta_1^2, \beta_2^2\right) \neq 0$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in C^2([a,b],\mathbb{C})$. Hier ist es wichtig, dass die auftretenden Koeffizienten reellwertig sind.

Definition 9.9.1.
(i) Definiere den Operator

$$A\colon \underbrace{\left\{x \in C^2([a,b],\mathbb{C})\colon R^1 x = 0 = R^2 x\right\}}_{\equiv \mathcal{D}(A) \subset C^0([a,b],\mathbb{C})} \to C^0([a,b],\mathbb{C})$$

durch $Ax := Lx$ für $x \in \mathcal{D}(A)$.
(ii) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, falls es ein $u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$ mit $Au = \lambda u$ gibt. u heißt dann Eigenfunktion von A zum Eigenwert λ.
(iii) Zum Eigenwertproblem (9.9.1) definieren wir ein zugehöriges unitäres Skalarprodukt durch

$$\langle u, v\rangle_L := \int\limits_a^b r(t)u(t)\overline{v(t)}\,dt$$

für $u, v \in C^0([a,b],\mathbb{C})$.

Bemerkung 9.9.2.
(i) λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $Au = \lambda u$ nicht eindeutig lösbar ist, da $Au = \lambda u$ stets die triviale Lösung $u \equiv 0$ besitzt.
(ii) Sei $\{\varphi_1 = \varphi_1(t,\lambda), \varphi_2 = \varphi_2(t,\lambda)\}$ ein Fundamentalsystem der gewöhnlichen Differentialgleichung $Au - \lambda u = 0$. Dann ist eine beliebige Lösung $x = c^1\varphi_1 + c^2\varphi_2$, $c^i \in \mathbb{C}$, genau dann eine Lösung von (9.9.1) mit $\gamma \equiv 0$, falls

$$\sum_{j=1}^{2} c^j R^i \varphi_j(\cdot,\lambda) = 0$$

für $i = 1, 2$ gilt. Mit Linearer Algebra erhalten wir, dass es Lösungen mit $\left(c^1, c^2\right) \neq 0$ genau dann gibt, falls

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{pmatrix} R^1\varphi_1(\cdot,\lambda) & R^1\varphi_2(\cdot,\lambda) \\ R^2\varphi_1(\cdot,\lambda) & R^2\varphi_2(\cdot\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

gilt.

Theorem 9.9.3.
(i) A ist ein symmetrischer Operator, d. h. für $u, v \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\langle Au, v\rangle_L = \langle u, Av\rangle_L.$$

(ii) Alle Eigenwerte λ sind reell. Die zugehörigen Eigenfunktionen können wir ebenfalls reellwertig wählen.
(iii) Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ Eigenfunktionen zu Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt

$$\langle u_1, u_2\rangle_L = 0.$$

Beweis.

(i) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle Au, v\rangle_L &= -\int\limits_a^b \frac{d}{dt}(p(t)\dot u(t))\overline{v(t)} - q(t)u(t)\overline{v(t)}\,dt \\
&= \int\limits_a^b p(t)\dot u(t)\overline{\dot v(t)} + q(t)u(t)\overline{v(t)}\,dt - p(t)\dot u(t)\overline{v(t)}\Big|_a^b, \\
\langle u, Av\rangle_L &= \int\limits_a^b p(t)\dot u(t)\overline{\dot v(t)} + q(t)u(t)\overline{v(t)}\,dt - p(t)u(t)\overline{\dot v(t)}\Big|_a^b, \\
\langle Au, v\rangle_L - \langle u, Av\rangle_L &= p(t)\left(u(t)\overline{\dot v(t)} - \dot u(t)\overline{v(t)}\right)\Big|_a^b = 0.
\end{aligned}$$

Die beiden Randterme fallen einzeln, d. h. für $t = a$ und $t = b$, weg, denn aus den Randbedingungen folgt (hier nur für $t = b$ vorgerechnet)

$$\begin{aligned}
R^2u &= \beta_1^2 u(b) + \beta_2^2 \dot u(b) = 0, \\
\overline{R^2 v} &= \beta_1^2\overline{v(b)} + \beta_2^2\overline{\dot v(b)} = 0.
\end{aligned}$$

Wegen $\left(\beta_1^2, \beta_2^2\right) \neq 0$ hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} u(b) & \dot u(b) \\ \overline{v(b)} & \overline{\dot v(b)} \end{pmatrix}$$

also einen nichttrivialen Kern. Daher verschwindet die oben als Randterm auftretende Determinante davon.

(ii) Gelte $Au = \lambda u$ mit $u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$. Es folgt

$$\lambda\langle u, u\rangle_L = \langle \lambda u, u\rangle_L = \langle Au, u\rangle_L = \langle u, Au\rangle_L = \langle u, \lambda u\rangle_L = \bar\lambda\langle u, u\rangle_L.$$

Daher ist λ reell.

Sei u eine Eigenfunktion. Da die Koeffizienten und λ in der linearen Gleichung $(A-\lambda)u = 0$ alle reell sind, sind auch der Realteil und der Imaginärteil von u Eigenfunktionen zum selben Eigenwert. Eine dieser beiden Funktionen ist von Null verschieden.

(iii) Zur Orthogonalität bezüglich des $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$-Skalarproduktes: Auch hier rechnet man genau wie in der Linearen Algebra unter Benutzung von $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1\langle u_1, u_2\rangle_L = \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle_L = \langle Au_1, u_2\rangle_L = \langle u_1, Au_2\rangle_L = \overline{\lambda_2}\langle u_1, u_2\rangle_L = \lambda_2\langle u_1, u_2\rangle_L.$$

Hieraus folgt $\langle u_1, u_2\rangle_L = 0$. □

Bemerkung 9.9.4. ⋆ Man kann mit Zusatzaufwand folgendes zeigen: A besitzt unendlich viele Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Nach Umnummerierung gilt $|\lambda_i| \to \infty$ für $i \to \infty$.

Seien u_i zugehörige normierte und paarweise orthogonale Eigenfunktionen, d. h. gelte $Au_i = \lambda_i u_i$ und $\langle u_i, u_j\rangle_L = \delta_{ij}$ für alle i, j. Dann können wir $f \in \mathcal{D}(A)$ als

$$f(t) = \sum_{i=1}^\infty \langle f, u_i\rangle_L u_i$$

mit noch genauer zu definierender Konvergenz schreiben.

Für weitere Details, auch im Falle von mehreren Raumdimensionen, siehe [8].

Di 15.12.2020

10. Masstheorie

Wollen wir gewissen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ einen Flächeninhalt zuordnen, so müssen wir uns zunächst einmal mit den Mengen beschäftigen, für die dies sinnvoll möglich ist. Aufgrund des Banach-Tarski-Paradoxons ist dies nicht für alle Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ in sinnvoller Weise möglich. Wir orientieren uns an [10] und [11].

10.1. **Das Jordansche Maß.** Dies ist die naheliegende Definition eines Flächeninhaltes.

Definition 10.1.1.

(i) Seien $I_i \subset \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, (offene, abgeschlossene oder halboffene) beschränkte Intervalle. Dann definieren wir den Elementarinhalt des Quaders $Q := \prod\limits_{i=1}^{n} I_i$ durch
$$\mu(Q) \equiv \mu_n(Q) = \prod_{i=1}^{n} |I_i|.$$

(ii) Gibt es (bis auf die Seitenflächen) disjunkte Quader $Q_j \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le j \le k$, mit $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$, so heißt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **Elementarfigur**. Wir definieren
$$\mu(\Omega) := \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j).$$

(iii) Eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-messbar**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ Elementarfiguren $E, G \subset \mathbb{R}^n$ mit $E \subset \Omega \subset G$ und
$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \le \varepsilon$$
gibt. Wir definieren in diesem Fall das **Jordansche Maß** μ durch
$$\mu(\Omega) := \inf_{\substack{G \supset \Omega \\ G \text{ ist Elementarfigur}}} \mu(G) = \sup_{\substack{E \subset \Omega \\ E \text{ ist Elementarfigur}}} \mu(E).$$

(iv) Eine beschränkte Jordan-messbare Menge Ω heißt **Jordan-Nullmenge**, falls $\mu(\Omega) = 0$ gilt.

Bemerkung 10.1.2. $\star$

(i) Für eine Elementarfigur, die zugleich Quader ist, überlegt man sich leicht, dass μ wohldefiniert ist.
(ii) Für Elementarfiguren ist μ unabhängig von der Zerlegung definiert.
(iii) Implizit haben wir in der Definition verwendet, dass mit E und G auch $G \setminus E$ eine Elementarfigur ist.
(iv) Für Elementarfiguren A, B folgt aus $A \subset B$ die Ungleichung $\mu(A) \le \mu(B)$.
(v) Jede Elementarfigur ist Jordan-messbar.
(vi) Die Definition des Jordanschen Maßes auf Elementarfiguren liefert denselben Wert wie die vorherige Definition von μ für Elementarfiguren. Dies verallgemeinert (i).
(vii) Das Jordansche Maß ist als Zahl in $\mathbb{R}$ wohldefiniert.
(viii) Zunächst ist nur implizit definiert, auf welchen Mengen das Jordansche Maß definiert ist.
(ix) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Elementarfigur $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset G$ und $\mu(G) \le \varepsilon$, so ist Ω Jordan-messbar und daher eine Jordan-Nullmenge.

Beweis. Übung. Hinweis: Nutze ein rechteckiges „Raster“, in dem alle Koordinaten der Quadereckpunkte vorkommen. $\square$

Bemerkung 10.1.3. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Setzen wir

$$\underline{\mu}(A) := \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ ist Elementarfigur}}} \mu(E) \quad \text{und} \quad \overline{\mu}(A) := \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ ist Elementarfigur}}} \mu(G),$$

so gilt stets $\underline{\mu}(A) \le \overline{\mu}(A)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn A Jordan-messbar ist.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 10.1.4. ⋆ Damit kann man das Riemannsche Integral im $\mathbb{R}^n$ für auf Quadern definierte Funktionen definieren. Es verläuft analog zum Riemannschen Integral in $\mathbb{R}$. Wir skizzieren es hier nur, da wir anschließend das allgemeinere Lebesguesche Integral kennenlernen werden.

Einen Quader können wir in diskunkte Quader zerlegen, $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_k$. Die Feinheit dieser Zerlegung ist das Maximum der Durchmesser der Quader Q_k. Eine Funktion $f\colon Q \to E$, E ein Banachraum, heißt Riemann integrierbar, falls

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \operatorname*{osc}_{Q_j} f$$

gegen Null geht, wenn die Feinheit der Zerlegung von Q gegen Null geht. Dann definieren wir $\int\limits_Q f$ als den Grenzwert von

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot f(x_j),$$

wobei $x_j \in Q_j$ beliebig gewählte Punkte sind, wenn die Feinheit der Zerlegung gegen Null geht.

Insbesondere erhalten wir für eine Treppenfunktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ der Gestalt $f = \sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{Q_j} \cdot c_j$ als Integral

$$\int\limits_Q f = \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot c_j.$$

Theorem 10.1.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) Ω ist Jordan-messbar.
(ii) $\partial\Omega$ ist Jordan-messbar und es gilt $\mu(\partial\Omega) = 0$.

Beweis.

- „(ii) $\implies$ (i)“: Eine Menge $\partial\Omega$ ist genau dann Jordan-messbar mit Wert $\mu(\partial\Omega) = 0$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Elementarfigur U mit $\partial\Omega \subset U$ und $\mu(U) < \varepsilon$ gibt. Wir definieren
$$E := \Omega \setminus U \quad \text{und} \quad G := \Omega \cup U.$$
Dann sind E und G Elementarfiguren (Zerlege entsprechend der Koordinaten einer Zerlegung von U und nutze alle Quader in Ω und aus der Zerlegung von U.). Es gilt
$$\mu(G \setminus E) = \mu(U) \le \varepsilon.$$
- „(i) $\implies$ (ii)“: Funktioniert analog mit $U := G \setminus E$. □

Mit dem folgenden Korollar erhalten wir insbesondere, dass $B_1(0)$ eine Jordanmessbare Menge ist ist.

Korollar 10.1.6. *Sei $0 < \alpha \leq 1$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar und seien $f, g \in C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ mit $g \leq f$. Dann ist*

$$G := \{(\hat{x}, x^n) \in \Omega \times \mathbb{R} \colon g(\hat{x}) < x^n < f(\hat{x})\}$$

Jordan-messbar.

Beweis. Übung. □

Wir sammeln Eigenschaften des Jordanschen Maßes.

Theorem 10.1.7.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar. Sei Q ein Quader mit $\Omega \subset Q$. Dann ist $Q \setminus \Omega$ Jordan-messbar.

*(ii) **Subadditivität:** Seien $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq k$, beschränkt und Jordan-messbar. Dann ist $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \Omega_j$ Jordan-messbar und es gilt*

$$\mu(\Omega) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(\Omega_j)$$

mit Gleichheit, falls $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

*(iii) **Translationsinvarianz:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\Omega + a = \{x + a \colon x \in \Omega\}$ ebenfalls Jordan-messbar und es gilt $\mu(\Omega + a) = \mu(\Omega)$.*

*(iv) **Rotationsinvarianz:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar. Sei $R \in O(n)$. Dann ist $R\Omega = \{Rx \colon x \in \Omega\}$ ebenfalls Jordan-messbar und es gilt $\mu(R\Omega) = \mu(\Omega)$.*

Beweis.

(i) Es gilt $\partial(Q \setminus \Omega) \subset \partial Q \cup \partial\Omega$. Daher folgt die Behauptung aus Theorem 10.1.5.

(ii) Die Jordan-Messbarkeit folgt wiederum aus Theorem 10.1.5, da $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} \partial\Omega_j$. Nutze nun die Definition des Jordanschen Maßes als Supremum über eingeschlossene Elementarfiguren für jedes Ω_j und vereinige diese. Sind die Mengen paarweise disjunkt, so gilt dies auch für die Elementarfiguren und wir erhalten Gleichheit.

(iii) Klar.

(iv) Wir nutzen das nachfolgende Lemma 10.1.9 mit $A = R$. Wähle $\Omega = B_1(0)$. Beachte, dass dies nach Korollar 10.1.6 eine Jordan-messbare Menge ist. Dann gilt $RB_1(0) = B_1(0)$. Somit ist $m_R = 1$ und wir erhalten $\mu(R\Omega) = \mu(\Omega)$ für beschränkte Jordan-messbare Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. □

Lemma 10.1.8. *Sei $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein lipschitzstetiger Homöomorphismus mit Lipschitzkonstante L. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und beschränkt.*

(a) Dann ist $\Phi(\Omega)$ ist Jordan-messbar und es gilt $\mu(\Phi(\Omega)) \leq (\sqrt{n}L)^n \cdot \mu(\Omega)$. Im Falle $\mu(\Omega) = 0$ braucht Φ kein Homöomorphismus zu sein.

(b) Definiert man das Jordan-Maß mit Hilfe von Elementarfiguren aus achsparallelen Würfeln einer (vorher noch nicht festgelegten und für jede Elementarfigur möglicherweise unterschiedlichen) Größe statt aus Quadern, so erhält man dasselbe Maß. Hierbei genügt es, Würfel mit Kantenlängen $1/N$, $N \in \mathbb{N}_{>0}$, zu betrachten.

Beweis. In diesem Beweis bezeichnen wir achsparallele abgeschlossene Würfel in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $p = \left(p^i\right)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ und halber Kantenlänge $r > 0$ mit $W_r(p)$:

$$W_r(p) := \prod_{i=1}^{n} \left[p^i - r, p^i + r\right].$$

(i) Betrachte zunächst den Fall $\Omega = W_r(p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Für $x \in \Omega$ gilt $|x - p| \le \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} r^2} = \sqrt{n} \cdot r$. Somit gilt $|\Phi(x) - \Phi(p)| \le L\sqrt{n} \cdot r$ und es folgt $\Phi(W_r(p)) \subset W_{L\sqrt{n}\cdot r}(\Phi(p))$. Weiterhin gilt $\mu(W_{L\sqrt{n}\cdot r}(\Phi(p))) = L^n \sqrt{n}^n \cdot \mu(W_r(p))$.

(ii) Sei nun Ω eine Jordan-Nullmenge und daher beschränkt. Dann ist $\Phi(\Omega)$ beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$ und sei Q_j, $1 \le j \le k$, eine Familie von Quadern mit $\Omega \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \le \varepsilon$. Wir überdecken nun jeden Quader mit Würfeln, deren Kantenlänge gleich der kleinsten Seitenlänge des Quaders ist. Geschickt gemacht sind diese zusammengenommen in maximal $n - 1$ Koordinatenrichtungen um einen solchen Würfel oder um den Faktor 2 zu groß. Somit finden wir Würfel $W_j \equiv W_{r_j}(m_j)$, $r_j > 0$, $m_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \le j \le l$, mit $\Omega \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{l} \mu(W_j) \le 2^n\varepsilon$. Es folgt

$$\Phi(\Omega) \subset \Phi\left(\bigcup_{j=1}^{l} W_j\right) = \bigcup_{j=1}^{l} \Phi(W_j) \subset \bigcup_{j=1}^{l} W_{L\sqrt{n}\cdot r_j}(\Phi(m_j)).$$

Weiterhin gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{l} W_{L\sqrt{n}\cdot r_j}(\Phi(m_j))\right) \le L^n\sqrt{n}^n 2^n\varepsilon.$$

Fr 18.12.2020

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\Phi(\Omega)$ eine Jordan-Nullmenge.

(iii) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige beschränkte Jordan-messbare Menge. Da Φ ein Homöomorphismus ist, folgt $\partial\Phi(\Omega) = \Phi(\partial\Omega)$. Da Ω Jordan-messbar ist, erhalten wir $\mu(\partial\Omega) = 0$ und weiter $\mu(\partial(\Phi(\Omega))) = \mu(\Phi(\partial\Omega)) = 0$. Somit ist auch $\Phi(\Omega)$ Jordan-messbar. Sei $\varepsilon > 0$. Wir gehen analog zum Fall einer Jordan-Nullmenge vor und überdecken Ω mit Quadern Q_j, $1 \le j \le k$, mit $\sum\limits_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \le \mu(\Omega) + \varepsilon$. Wenn wir nun jeden Quader geschickt mit Würfeln überdecken, deren Kantenlänge maximal $1/N$, $N \in \mathbb{N}_{>0}$, der minimalen Kantenlänge des Quaders ist, so erhalten wir als Vereinigung dieser Würfel Quader, deren Kantenlängen jeweils maximal um den Faktor $1 + \frac{1}{N}$ größer ist als die der ursprünglichen Quader. Insgesamt finden wir also Würfel W_j, $1 \le j \le l$, mit

$$\bigcup_{j=1}^{l} W_j \supset \Omega \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{l} \mu(W_j) \le \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n \cdot (\mu(\Omega) + \varepsilon).$$

Da $\Phi(\Omega)$ und ebenso $\Phi\left(\bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j\right)$ und $\Phi(W_j)$ Jordan-messbar sind, gilt

$$\begin{aligned}\mu(\Phi(\Omega)) &\le \mu\left(\Phi\left(\bigcup_{j=1}^{l} W_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{l} \Phi(W_j)\right)\\ &\le \sum_{j=1}^{l} \mu(\Phi(W_j)) \le \sum_{j=1}^{l} L^n \sqrt{n}^n \cdot \mu(W_j)\\ &\le L^n\sqrt{n}^n \left(1+\frac{1}{N}\right)^n \cdot (\mu(\Omega)+\varepsilon).\end{aligned}$$

Da $N \ge 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt die erste Behauptung.

(iv) Sei $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$ eine Elementarfigur und sei $r > 0$ (kleiner als) die kleinste Kantenlänge eines der Quader Q_j. Sei $N \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. Dann gibt es Elementarfiguren $E, G \subset \mathbb{R}^n$ mit $E \subset \Omega \subset G$, bestehend aus Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{N} \cdot \frac{r}{2}$ mit

$$\mu(E) \ge \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \cdot \mu(\Omega) \quad \text{und} \quad \mu(G) \le \left(1+\frac{1}{N}\right)^n \cdot \mu(\Omega),$$

da wir die Würfel so wählen können, dass maximal „eine Lage“ bis zu den Quadern fehlt bzw. maximal „eine Lage“ übersteht. Mit solchen Elementarfiguren aus Würfeln können wir die Elementarfiguren aus der Definition des Jordan-Maßes approximieren und erhalten wegen $\mu(E) \le \mu(\Omega)$ und $\mu(G) \ge \mu(\Omega)$ die zweite Behauptung.

Wir lassen es als kleine Übung, dass man diese Würfel auch auf einem festen „Gitter“ wählen kann. $\square$.

Lemma 10.1.9. *Sei $A \in \mathrm{GL}(n)$ eine bijektive lineare Abbildung (und damit automatisch ein Homöomorphismus). Dann gibt es eine Zahl $m_A > 0$, so dass $\mu(A\Omega) = m_A \cdot \mu(\Omega)$ für alle beschränkten Jordan-messbaren Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt.*

Beweis.

(i) Nach Lemma 10.1.8 ist $A\Omega$ Jordan-messbar.

(ii) Setze $\Omega = [0,1]^n$ und definiere $m_A := \frac{\mu(A\Omega)}{\mu(\Omega)}$. Nach Definition ist $\mu(\Omega) > 0$. (Aufgrund der Monotonie und durch Vergleich mit $[0,1]^n$ folgt sogar $\mu(\Omega) = 1$.) Es gilt $m_A \ge 0$. Der Fall $m_A = 0$ ist ausgeschlossen, da wir sonst aus $\mu(A\Omega) = 0$ aufgrund der Invertierbarkeit von A mit Hilfe von Lemma 10.1.8 zu $0 < \mu(\Omega) = \mu(A^{-1}A\Omega) \le c(n,A)\mu(A\Omega) = 0$ und damit zu einem Widerspruch kämen.

(iii) Seien W_j, $1 \le j \le N^n$, $N \in \mathbb{N}_{>0}$, (bis auf die Seitenflächen) disjunkte achsparallele Würfel der Seitenlänge $\frac{1}{N}$ mit $\bigcup\limits_{j=1}^{N^n} W_j = [0,1]^n$. Aufgrund der Linearität sind die Bilder AW_j ebenso wie die Mengen W_j bis auf Translation gleich und disjunkt. Es gilt daher für alle j

$$\mu(AW_j) = \frac{1}{N^n}\mu\left(A[0,1]^n\right) = \frac{m_A}{N^n}\mu\left([0,1]^n\right) = m_A\mu(W_j).$$

Aufgrund der Translationsinvarianz folgt $\mu(ATW) = m_A\mu(TW)$ für alle achsparallelen Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}_{>0}$.

(iv) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und beschränkt und seien $E, G \subset \mathbb{R}^n$ Elementarfiguren aus achsparallelen disjunkten Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $E \subset \Omega \subset G$, die wir beispielsweise mit Hilfe eines zugrundeliegenden

Gitters wählen können. Da AE und AG aus disjunkten Bildern dieser Würfel bestehen, erhalten wir die beiden Gleichheitszeichen in

$$m_A\mu(E) = \mu(AE) \le \mu(A\Omega) \le \mu(AG) = m_A\mu(G).$$

Gehen wir nun auf der linken Seite zum Supremum und auf der rechten Seite zum Infimum über, so konvergieren beide Seiten gegen $m_A\mu(\Omega)$ und wir erhalten $m_A\mu(\Omega) = \mu(A\Omega)$. □

10.2. σ-Algebren.

Definition 10.2.1 (Maß)**.** Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ heißt **Maß** auf X, falls

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ und

(ii) für alle $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ gilt

$$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Beispiele 10.2.2.

(i) Sei X eine Menge. Dann ist $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \ne \emptyset \end{cases}$$

ein Maß auf X.

(ii) Das Zählmaß $A \mapsto |A|$ ist ein Maß auf X, das A auf die Anzahl der Elemente in A abbildet.

Bemerkung 10.2.3.

(i) Ein Maß ist σ-**subadditiv**:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(Diese Bedingung folgt aus der zweiten Bedingung an ein Maß und ist im monotonen Fall sogar äquivalent. Daher werden beiden Bedingungen auch als σ-Subadditivität bezeichnet. Für endliche Vereinigungen und Summen spricht man bei solch einer Eigenschaft von Subadditivität.)

(ii) Ein Maß ist **monoton**: Für $A \subset B$ gilt $\mu(A) \le \mu(B)$.

Beweis der Monotonie. Wir wählen $A_1 = B$, $A_k = \emptyset$ für $k \ge 2$ und nutzen beide Eigenschaften eines Maßes. □

Bemerkung 10.2.4. Das Jordansche Maß ist (möglicherweise) nicht für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert. Die Bezeichnung als Maß ist historisch bedingt und etabliert. Definieren wir ein äußeres Jordansches Maß $\overline{\mu}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ durch

$$\overline{\mu}(\Omega) = \inf_{\substack{G \supset \Omega \\ G \text{ ist Elementarfigur}}} \mu(G),$$

so ist $\overline{\mu}(\Omega) = \infty$ z. B. für unbeschränkte Mengen Ω nach Definition des Infimums. Es verletzt aber auch die Definition eines Maßes; es gilt nämlich für $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ und $A_k = \{q_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$, aber auch

$$1 = \overline{\mu}(A) \not\le \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_k) = 0.$$

Definition 10.2.5 (Carathéodory)**.** Sei μ ein Maß auf X. Eine Menge $A \subset X$ heißt dann **μ-messbar**, falls für alle $B \subset X$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

gilt. (Diese Gleichheit oder die Ungleichung $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ heißt **Carathéodory-Bedingung**.)

Bemerkung 10.2.6.
(i) Aufgrund der Subadditivität des Maßes gilt stets

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

(ii) In manchen Quellen heißen σ-subadditive Funktionen **äußeres Maße** und ihre Einschränkung auf messbare Mengen ein Maß.

Beispiele 10.2.7.
(i) In Beispiel 10.2.2 (i) sei $X \neq \emptyset$ und sei A messbar. Wir verwenden die Definition von Messbarkeit mit $B = X$ und erhalten

$$1 = \mu(X) = \mu(X \cap A) + \mu(X \setminus A) = \mu(A) + \mu\left(\complement A\right).$$

Die rechte Seite ist nur für $A \in \{\emptyset, X\}$ gleich eins und sonst strikt größer. Daher sind nur diese beiden Mengen messbar.
(ii) Jede Menge ist bezüglich des Zählmaßes messbar.

Definition 10.2.8 (σ-Algebra)**.** Sei X eine Menge. Dann heißt $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **σ-Algebra** über (oder auf) X, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
(i) $X \in \mathcal{A}$,
(ii) $A \in \mathcal{A} \implies \complement A \in \mathcal{A}$,
(iii) $A_j \in \mathcal{A}$ für alle $j \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Gilt die letzte Bedingung nur für endliche Vereinigungen oder für Vereinigungen von zwei Mengen, so heißt $\mathcal{A}$ eine **Algebra**.

Bemerkung 10.2.9. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und seien $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\emptyset, \quad A_0 \setminus A_1, \quad \bigcup_{j=0}^{m} A_j, \quad \bigcap_{j=0}^{m} A_j, \quad \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Wir betrachten nur endliche Vereinigungen. Definiere dazu $B_k := A_k$ für $k \leq m$ und $B_k := A_m$ für $k > m$. Wir erhalten $\bigcup\limits_{j=0}^{m} A_j = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{A}$.

Benutze die De Morganschen Regeln für die anderen Aussagen. □

Beispiele 10.2.10. Für jede Menge X sind $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ jeweils σ-Algebren.

Di 22.12.2020

Theorem 10.2.11. *Sei $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Maß. Dann ist*

$$\Sigma := \{A \subset X \colon A \text{ ist } \mu\text{-messbar}\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis.
(i) $X \in \Sigma$: Sei $B \subset X$. Es gilt

$$\mu(B) \overset{!}{=} \mu(B \cap X) + \mu(B \setminus X) = \mu(B) + \mu(\emptyset) = \mu(B).$$

(ii) Komplemente: Die Carathéodory-Bedingung können wir auch als $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu\left(B \cap \complement A\right)$ schreiben. Sie ist also bezüglich $A \leftrightarrow \complement A$ symmetrisch. Daher sind $A \in \Sigma$ und $\complement A \in \Sigma$ äquivalent.

(iii) Endliche Vereinigungen: Seien $A_1, A_2 \in \Sigma$. Wir zeigen, dass dann auch $A_1 \cup A_2 \in \Sigma$ gilt. Per Induktion erhalten wir dann, dass Σ eine Algebra ist.

Sei $B \subset X$. Die Messbarkeit von A_1 impliziert
$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1).$$
Die Messbarkeit von A_2 mit $B \setminus A_1$ liefert
$$\mu(B \setminus A_1) = \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2).$$
Wegen $B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup ((B \setminus A_1) \cap A_2)$ erhalten wir
$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1)\\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2)\\ &\geq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)),\end{aligned}$$
wobei wir die Subadditivität genutzt haben.

(iv) Abzählbare Vereinigungen: Seien $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, und $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $A_k \cap A_l = \emptyset$, $k \neq l$, gilt. (Sonst betrachten wir $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{k-1} A_l \overset{!}{\in} \Sigma$, $k \geq 2$, und erhalten die Behauptung wegen $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Zu „$\overset{!}{\in}$“: $C \setminus D = C \cap \complement D = \complement\complement\left(C \cap \complement D\right) = \complement\left(\complement C \cup D\right)$.)

Seien $B \subset X$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Aus $A_k \in \Sigma$, mit der Disjunktheit und per Induktion erhalten wir
$$\begin{aligned}\mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) &= \mu\left(\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \cap A_m\right) + \mu\left(\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \setminus A_m\right)\\ &= \mu(B \cap A_m) + \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) \qquad (10.2.1)\\ &= \ldots = \sum_{k=1}^{m} \mu(B \cap A_k).\end{aligned}$$
Wir kombinieren dies nun mit der Messbarkeit endlicher Vereinigungen und der Monotonie. Es folgt
$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right)\\ &\geq \sum_{k=1}^{m} \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A).\end{aligned}$$
Wir lassen nun $m \to \infty$, nutzen die σ-Subadditivität und bekommen
$$\begin{aligned}\mu(B) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B \cap A_k) + \mu(B \setminus A)\\ &\geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap A_k)\right) + \mu(B \setminus A)\\ &= \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).\end{aligned}$$
Somit ist A μ-messbar. □

Definition 10.2.12 (Maßraum)**.** Sei $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Maß auf X und Σ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen, so heißt (X, Σ, μ) **Maßraum**.

Theorem 10.2.13. *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Seien $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *σ-**Additivität**: Sind die Mengen A_k paarweise disjunkt, $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(ii) *Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(iii) *Gilt $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\mu(A_1) < \infty$, so gilt*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Beweis.

(i) Für endliche disjunkte Vereinigungen nutzen wir (10.2.1) mit $B = X$ und erhalten

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k). \tag{10.2.2}$$

Wir kombinieren dies nun mit der Monotonie des Maßes und der σ-Subadditivität. Es folgt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \ge \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ge \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Da die obere und die untere Schranke übereinstimmen, folgt Gleichheit.

(ii) Wir definieren disjunkte Menge $\tilde{A}_1 := A_1$ und $\tilde{A}_k := A_k \setminus A_{k-1}$, $k \ge 2$, sowie $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$. Nun nutzen wir die gerade gezeigte σ-Additivität und (10.2.2) und erhalten

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu(A) \overset{\sigma}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\tilde{A}_k\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu\left(\tilde{A}_k\right) \overset{(10.2.2)}{=} \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} \tilde{A}_k\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).
\end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten die Komplemente in A_1 und setzen $\tilde{A}_k = A_1 \setminus A_k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gelten $\emptyset = \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \ldots$ und $\mu(A_1) = \mu\left(\tilde{A}_k\right) + \mu(A_k)$. Wir benutzen nun (ii) für eine Familie aufsteigender Mengen, die Additivität für zwei disjunkte Mengen (10.2.2) sowie Bemerkung 10.2.9 um zu zeigen, dass der Schnitt auch wieder in Σ liegt. Den ersten Grenzwert dürfen wir aufgrund der Monotonie hinschreiben. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu\left(\tilde{A}_k\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\right) \\
&= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 10.2.14. Für das Zählmaß μ auf $\mathbb{N}$ ist Theorem 10.2.13 (iii) ohne die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ i. A. falsch. Betrachte $A_k := \mathbb{N}_{\geq k}$. Dann gelten $A_k \supset A_{k+1}$, $A := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, aber auch

$$0 = \mu(A) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \infty.$$

Definition 10.2.15. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Dann heißt eine Menge $N \subset X$ eine **μ-Nullmenge**, falls $\mu(N) = 0$ gilt.

Theorem 10.2.16. *Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Dann ist eine μ-Nullmenge N eine μ-messbare Menge.*

Beweis. Sei $B \subset X$ beliebig. Dann folgt aufgrund der Monotonie

$$\mu(B) \overset{!}{=} \mu(B \cap N) + \mu(B \setminus N) \leq \mu(N) + \mu(B) = \mu(B).$$

Da somit überall Gleichheit gilt, ist N eine μ-messbare Menge. □

10.3. **Konstruktion von Maßen.**

Definition 10.3.1. Sei X eine Menge. $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Überdeckungsklasse** für X, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{K}$ und
(ii) es $(K_j)_{j\in\mathbb{N}_{>0}} \subset \mathcal{K}$ mit $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$ gibt.

Beispiele 10.3.2. ⋆

(i) Die (verallgemeinerten) offenen Intervalle $I = \prod\limits_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$ für $a_k \leq b_k \in \mathbb{R}$ bilden eine Überdeckungsklasse für $\mathbb{R}^n$, ebenso die abgeschlossenen oder halboffenen (verallgemeinerten Intervalle), soweit noch nicht mit dabei, zusammen mit der leeren Menge.
(ii) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra, so ist $\mathcal{A}$ wegen $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ auch eine Überdeckungsklasse für X.

Theorem 10.3.3. *Sei $\mathcal{K}$ eine Überdeckungsklasse für X. Sei $\lambda\colon \mathcal{K} \to [0, \infty]$ eine Funktion mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Dann ist $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit*

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_j) \colon K_j \in \mathcal{K} \text{ mit } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right\} \tag{10.3.1}$$

ein Maß auf X.

Beweis.

(i) Es ist klar, dass $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu \geq 0$ gelten.
(ii) σ-Subadditivität: Sei $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Definition $(K_{k,j})_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ mit $A_k \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_{k,j}$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(K_{k,j}) < \mu(A_k) + 2^{-k}\varepsilon.$$

Es folgt $A \subset \bigcup\limits_{k,j=1}^{\infty} K_{k,j}$. Dies sind abzählbar viele Mengen. Es gilt daher nach Definition von μ

$$\mu(A) \leq \sum_{k,j=1}^{\infty} \lambda(K_{k,j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die σ-Subadditivität. □

Fr 08.01.2021

Beispiel 10.3.4. Sei X eine Menge und $\mathcal{K} = \{\emptyset, X\}$. Sei $\lambda\colon \mathcal{K} \to [0,\infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$ und $\lambda(X) = 1$. Dann stimmt das Maß μ nach (10.3.1) mit dem Maß μ aus Beispiel 10.2.2 (i) überein.

Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra und sei $\lambda\colon \mathcal{K} \to [0,\infty]$ endlich additiv. Dann liefert die folgende Definition eine notwendige Bedingung dafür, dass das in (10.3.1) definierte Maß μ eine Fortsetzung von λ ist.

Definition 10.3.5. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra.
(a) Eine Abbildung $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt **Prämaß**, falls
  (i) $\lambda(\emptyset) = 0$ und
  (ii) $\lambda(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$, für $A, A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $A = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} A_k$ gelten.
(b) Ein Prämaß λ heißt **σ-endlich**, falls es eine (ohne Einschränkung) disjunkte Überdeckung $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$ mit $S_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, und $\lambda(S_k) < \infty$ für alle k gibt.

Bemerkung 10.3.6. Wir betrachten den Fall, dass wir die Definition aus Gleichung (10.3.1) für μ mit $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ auf ein Prämaß λ anwenden. Dann ist die zugrunde liegende Überdeckungsklasse eine Algebra $\mathcal{A}$ und es gilt $A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}_{>0}$. In dieser Situation dürfen wir vermöge $\tilde{A}_1 = A_1$ und $\tilde{A}_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{k-1} A_l$ annehmen, dass die überdeckenden Mengen disjunkt sind. Nach Definition eines Prämaßes gilt dabei für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ die Abschätzung $\lambda\big(\tilde{A}_k\big) \le \lambda(A_k) = \lambda\big(A_k \setminus \tilde{A}_k\big) + \lambda\big(\tilde{A}_k\big)$.

Theorem 10.3.7 (Carathéodory-Hahn Erweiterungssatz)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X, sei $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf X und sei μ durch* (10.3.1) *definiert. Dann gelten:*
(i) $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ist ein Maß auf X,
(ii) $\mu(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und
(iii) jedes $A \in \mathcal{A}$ ist μ-messbar.

Beweis.
(i) Wir haben in den Beispielen 10.3.2 gesehen, dass $\mathcal{A}$ eine Überdeckungsklasse für X ist. Somit ist μ nach Theorem 10.3.3 ein Maß auf X.
(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Zunächst einmal gilt nach (10.3.1) $\mu(A) \le \lambda(A)$.

Zur Umkehrung: Seien $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, beliebig mit $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Nach Bemerkung 10.3.6 dürfen wir annehmen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind, $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$. Definiere nun Mengen $\tilde{A}_k := A \cap A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist die Familie $\big(\tilde{A}_k\big)_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$ disjunkt und es gilt $A = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} \tilde{A}_k$. Nach Voraussetzung ist λ ein Prämaß; also folgt

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(\tilde{A}_k\big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Auf der rechten Seite gehen wir nun zum Infimum über alle die Menge A überdeckenden Familien über und erhalten

$$\lambda(A) \le \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)\colon A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ mit } A_k \in \mathcal{A}\right\} = \mu(A).$$

(iii) Sei $A \in \mathcal{A}$ und sei $B \subset X$ beliebig. Wir rechnen die Carathéodory-Bedingung für μ nach. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition von μ gibt es $B_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Da λ ein Prämaß ist und $A, B_k \in \mathcal{A}$ gilt, erhalten wir für alle $k \geq 1$

$$\lambda(B_k) = \lambda(B_k \cap A) + \lambda(B_k \setminus A).$$

Es gelten $B \cap A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A)$ und $B \setminus A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \setminus A)$. Wir nutzen nun die Subbaditivität für die stets gültige Ungleichung in der Carathéodory-Bedingung, die Definition von μ, die Möglichkeit nichtnegative Summanden umzuordnen und die Wahl der Mengen B_k und erhalten

$$\begin{aligned}\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k \setminus A) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \leq \mu(B) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt zunächst überall Gleichheit und daraus dann die Behauptung. □

Für die Carathéodory-Hahn-Erweiterung erhalten wir das folgende Eindeutigkeitsresultat.

Theorem 10.3.8. *Sei $\lambda \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ wie in Satz 10.3.7 zusätzlich σ-endlich, μ das von λ vermöge* (10.3.1) *induzierte Maß und Σ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen. Ist $\tilde{\mu} \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Maß mit $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \lambda$. Dann gilt $\tilde{\mu}|_{\Sigma} = \mu|_{\Sigma}$.*

Beweis.

(i) Sei zunächst $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Da $\tilde{\mu}$ als Maß σ-subadditiv ist, folgt

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Auf der rechten Seite gehen wir nun zum Infimum über alle solchen überdeckenden Familien über und erhalten

$$\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A)$$

für beliebige $A \subset X$.

(ii) Sei nun $A \in \Sigma$. Zunächst nehmen wir an, dass es $S \in \mathcal{A}$ mit $A \subset S$ und $\lambda(S) < \infty$ gibt. Dann folgt auch $\mu(S \setminus A) \leq \mu(S) = \lambda(S) < \infty$.

Nach Theorem 10.3.7 gilt $S \in \mathcal{A} \subset \Sigma$. Also gelten $A, S \in \Sigma$. Wir nutzen,

(1) die Carathéodory-Bedingung,
(2) dass μ auf $\mathcal{A}$ mit dem Prämaß λ übereinstimmt,
(3) sowie die Subadditivität von $\tilde{\mu}$

und erhalten

$$\begin{aligned}\mu(A) + \mu(S \setminus A) &\overset{\text{(ii1)}}{=} \mu(S) \overset{\text{(ii2)}}{=} \lambda(S) = \tilde{\mu}(S) \\ &\overset{\text{(ii3)}}{\leq} \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(S \setminus A) \overset{\text{(i)}}{\leq} \tilde{\mu}(A) + \mu(S \setminus A).\end{aligned}$$

Da $\mu(S \setminus A) < \infty$ ist, folgt auch $\mu(A) \leq \tilde{\mu}(A)$ und mit (i) sogar $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$.

(iii) Im allgemeinen Fall, wenn keine solche Menge S existiert, gibt es aufgrund der σ-Endlichkeit eine disjunkte Familie $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ mit $S_k \in \mathcal{A}$ und $\lambda(S_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Damit erhalten wir vermöge $A_k := A\cap S_k$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, die disjunkte Vereinigung $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Es gilt $\Sigma \ni \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$. Da λ ein Prämaß ist, ist $\lambda\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k\right) < \infty$. Somit können wir (ii) anwenden und es folgt

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right).$$

Mit der Monotonie des Maßes $\tilde{\mu}$ und Theorem 10.2.13 (ii) ergibt sich somit

$$\tilde{\mu}(A) \ge \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \mu(A)$$

wie behauptet. □

Bemerkung 10.3.9. $\star$

(i) Wir haben in Theorem 10.3.8 nicht untersucht, ob jedes $A \in \Sigma$ auch bezüglich $\tilde{\mu}$ messbar ist.

(ii) In Theorem 10.3.8 haben wir $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \Sigma$ gezeigt. Für $A \notin \Sigma$ gilt dies i. A. nicht mehr: Seien dazu $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. Sei dass Prämaß $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ wie in Beispiel 10.3.4 gegeben. Sei μ das gemäß (10.3.1) von λ induzierte Maß. Dann gelten $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) = 1$ für alle $A \neq \emptyset$. Nach Beispiel 10.2.7 gilt $\Sigma = \{\emptyset, X\} = \mathcal{A}$. Das im folgenden Abschnitt konstruierte Lebesguesche Maß $\mathcal{L}^1$ ist ebenfalls eine Erweiterung von λ. Die Maße $\mathcal{L}^1$ und μ stimmen auf Mengen $\notin \mathcal{A}$ im Allgemeinen jedoch nicht überein. Es gilt nämlich $\mathcal{L}^1([0,1/2]) = 1/2 \neq \mu([0,1/2]) = 1$.

10.4. **Das Lebesguesche Maß.** Das Lebesguesche Maß erhalten wir durch Erweiterung des Elementarinhalts von Quadern und Elementarfiguren.

Definition 10.4.1.

(i) Seien $a = \left(a^1, \ldots, a^n\right), b = \left(b^1, \ldots, b^n\right) \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$(a,b) := \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(a^k, b^k\right), & \text{falls } a^k < b^k,\ 1 \le k \le n,\\ \emptyset, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Analog definieren wir (verallgemeinerte) Intervalle $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$. Auch, wenn die Randpunkte für unterschiedliche k's manchmal dazugehören und manchmal nicht, sprechen wir von verallgemeinerten Intervallen. Bei offenen oder halboffenen Intervallen für ein k erlauben wir auch $a^k = -\infty$ bzw. $b^k = +\infty$.

(ii) Das Jordansche Maß eines Intervalls oder einer Elementarfigur heißt **Elementarinhalt**, abgekürzt z. B. mit $\operatorname{Vol}([a,b])$.

(iii) Nachfolgend lassen wir auch Elementarfiguren Ω zu, die unbeschränkte Quader $Q = (a,b)$ enthalten und definieren in diesem Fall

$$\operatorname{Vol}(Q) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a^k < b^k \text{ für alle } 1 \le k \le n,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Bemerkung 10.4.2. Die Elementarfiguren in $\mathbb{R}^n$ bilden eine Algebra. Vol ist auf ihnen endlich additiv, σ-endlich, nicht negativ und monoton.

Lemma 10.4.3. *Der Elementarinhalt* Vol *ist ein Prämaß auf der Algebra der Elementarfiguren in* $\mathbb{R}^n$.

Beweis.

(i) Wir müssen nachweisen, dass für eine Elementarfigur I, die sich als $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ mit Elementarfiguren I_k, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, als disjunkte Vereinigung darstellen lässt,
$$\operatorname{Vol}(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_k)$$
gilt. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass die I_k's verallgemeinerte Intervalle sind.

(ii) „$\geq$": Es gilt $I \supset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$. Da Vol monoton und endlich additiv ist, gilt für alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$
$$\operatorname{Vol}(I) \geq \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Vol}(I_k).$$
Di 12.01.2021 Wir lassen nun $m \to \infty$ und erhalten die behauptete Ungleichung.

(iii) „$\leq$": Ohne Einschränkung dürfen wir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_k) < \infty$ annehmen, da wir sonst fertig wären. Weiterhin dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass I ein Intervall ist und dass $0 \in \mathring{I}$ gilt.

Intervalle können auch $\pm\infty$ als Grenze aufweisen. Daher definieren wir für $L \in \mathbb{N}$ das Intervall $I^L := \overline{I} \cap [-L, L]^n$. Dann gilt für $L \to \infty$ offenbar $\operatorname{Vol}\left(I^L\right) \to \operatorname{Vol}(I)$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt $\overline{I} \subset (1+\varepsilon)I = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (1+\varepsilon)I_k$. Die Intervalle $(1+\varepsilon)I_k$ vergrößern wir etwas zu offenen Intervallen $\tilde{I}_k$ mit $\tilde{I}_k \supset (1+\varepsilon)I_k$ und
$$\operatorname{Vol}\left(\tilde{I}_k\right) \leq (1+\varepsilon)^n \cdot \operatorname{Vol}(I_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}_{>0}.$$
Auch die offenen Intervalle $\tilde{I}_k$ überdecken die kompakte Menge I^L. Dies gilt aufgrund der Kompaktheit auch schon für endlich viele Intervalle $\tilde{I}_k$, $1 \leq k \leq m = m(L)$. Für dieses m folgt
$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}\left(I^L\right) &\leq \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{k=1}^{m} \tilde{I}_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Vol}\left(\tilde{I}_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Vol}\left(\tilde{I}_k\right)\\ &\leq (1+\varepsilon)^n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_k) + \varepsilon.\end{aligned}$$
Wir lassen nun $\varepsilon \downarrow 0$ und $L \to \infty$ und erhalten auch die umgekehrte Ungleichung. ☐

Definition 10.4.4. Die Carathéodory-Hahn Erweiterung des Elementarinhalts auf $\mathbb{R}^n$ nennen wir (n-dimensionales) **Lebesguesches Maß**, $\mathcal{L}^n$.

Theorem 10.4.5. *Jede offene Menge* $G \subset \mathbb{R}^n$ *ist* $\mathcal{L}^n$*-messbar.*

Beweis.

(i) Wir schreiben $\mathbb{R}^n$ als disjunkte Vereinigung halboffener achsenparalleler Kuben I_l^0, $l \in \mathbb{N}$, mit Seitenlängen $1 = 2^{-0}$. Indem wir sukzessiv jede Kante halbieren, erhalten wir achsenparallele, für festes k disjunkte Kuben I_l^k, $l \in \mathbb{N}_{>0}$, mit Seitenlängen 2^{-k} für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir wählen nun im k-ten Schritt diejenigen der Kuben I_l^k, $l \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $I_l^k \subset G$ aus, die zu den in den Schritten $0, \ldots, k-1$ schon ausgewählten Kuben disjunkt sind. Es ist eine kleine Übung, nachzuweisen, dass diese höchstens abzählbare Familie disjunkter achsenparalleler Kuben G ausschöpft.

(ii) Nach Theorem 10.3.7 ist jede Elementarfigur $\mathcal{L}^n$-messbar und nach Theorem 10.2.11 gilt dies aus für höchstens abzählbare Vereinigungen. Somit ist G eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge. □

Definition 10.4.6.

(i) Die von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra heißt **Borelsche** σ-**Algebra** $\mathcal{B}$. Die Mengen $B \in \mathcal{B}$ heißen **Borelmengen**.

(ii) Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Borelsch**, falls jede Borelmenge μ-messbar ist.

Damit wird aus Theorem 10.4.5.

Korollar 10.4.7. *$\mathcal{L}^n$ ist ein Borelmaß.*

Theorem 10.4.8. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt*

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ offen}}} \mathcal{L}^n(G).$$

Beweis.

- „$\le$" folgt direkt aus der Monotonie des Lebesguemaßes.
- „$\ge$": Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Intervalle $(I_l)_{l \in \mathbb{N}_{>0}}$ mit $A \subset \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_l$ und

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_l) \le \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Dazu finden wir offene Intervalle $I_l^* \supset I_l$ mit

$$\operatorname{Vol}(I_l^*) \le \operatorname{Vol}(I_l) + \varepsilon \cdot 2^{-l}, \quad l \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Wir definieren $G := \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} I_l^*$. Dann ist G offen. Es gilt $A \subset G$ und wir erhalten

$$\mathcal{L}^n(G) \le \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_l^*) \le \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_l) + \varepsilon \le \mathcal{L}^n(A) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 10.4.9. Man mache sich als Übung anhand des Beweises klar, dass Theorem 10.4.8 für $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$ gilt.

Definition 10.4.10. Ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Borel regulär**, falls es zu jedem $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge $B \supset A$ mit $\mu(A) = \mu(B)$ gibt.

Korollar 10.4.11. *Das Lebesguesche Maß $\mathcal{L}^n$ ist Borel regulär.*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Ohne Einschränkung dürfen wir $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ annehmen, denn sonst sind wir mit $B = \mathbb{R}^n$ fertig. Nach Theorem 10.4.8 gibt es offene Mengen G_k, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $G_k \supset A$ und

$$\mathcal{L}^n(G_k) \le \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Insbesondere gilt also $\mathcal{L}^n(G_1) \le \mathcal{L}^n(A) + 1 < \infty$. Offenbar gilt $\mathcal{L}^n(A) \le \mathcal{L}^n(G_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Ohne Einschränkung dürfen wir weiterhin $G_{k+1} \subset G_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ annehmen; sonst definieren wir für $k = 1, 2, \ldots$ induktiv $\tilde{G}_{k+1} := G_{k+1} \cap G_k$ und betrachten dann diese Mengen statt der Mengen G_k. Wir definieren $B := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. Dann ist B eine Borelmenge und nach Theorem 10.2.13 (iii) erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(B) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}^n(G_k) = \mathcal{L}^n(A)$$

wie behauptet. □

Theorem 10.4.12. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist $\mathcal{L}^n$-messbar.
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge G mit $G \supset A$ und $\mathcal{L}^n(G \setminus A) < \varepsilon$ (oder $\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \varepsilon$).

Beweis.

- „(i) $\implies$ (ii)“:
  - Wir nehmen zunächst an, dass $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Theorem 10.4.8 eine offene Menge G mit $G \supset A$ und
  $$\mathcal{L}^n(G) \le \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$
  Die Menge A ist nach Voraussetzung messbar. Wir setzen G in die Carathéodory-Bedingung für Messbarkeit ein und erhalten
  $$\mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(G \cap A) + \mathcal{L}^n(G \setminus A) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(G \setminus A).$$
  Zusammengenommen folgt daraus $\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \varepsilon$ und somit die Behauptung.
  - Ist $\mathcal{L}^n(A) = \infty$, so definieren wir Mengen $A_k = A \cap [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Es gilt $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Wenden wir nun unsere Überlegungen im Falle eines endlichen Maßes auf die $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen A_k an, so erhalten wir offene Mengen G_k, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $G_k \supset A_k$ und
  $$\mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) \le \varepsilon \cdot 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}_{>0}.$$
  Dann ist $G := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ offen, es gilt $G \supset A$ und wegen
  $$G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A_k)$$
  erhalten wir
  $$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(G_k \setminus A_k) \le \varepsilon.$$
- „(ii) $\implies$ (i)“: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine offene Menge G mit $G \supset A$ und
  $$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \varepsilon.$$
  Nach Theorem 10.4.5 ist G eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge. Somit erhalten wir die Gleichheit in
  $$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(B) &= \mathcal{L}^n(B \cap G) + \mathcal{L}^n(B \setminus G) \\ &\ge \mathcal{L}^n(B \cap A) + \mathcal{L}^n(B \setminus A) - \mathcal{L}^n(G \setminus A), \end{aligned}$$
  wobei wir für den ersten Term die Monotonie des Maßes benutzt haben. Aus $B \setminus A \subset (B \setminus G) \cup (G \setminus A)$ und der Subadditivität des Maßes folgt die Abschätzung für den zweiten Term. Somit gilt
  $$\mathcal{L}^n(B) \ge \mathcal{L}^n(B \cap A) + \mathcal{L}^n(B \setminus A) - \varepsilon.$$
  Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die nichttriviale Ungleichung der Carathéodory-Bedingung. Also ist A eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge. $\square$

Die $\mathcal{L}^n$-Messbarkeit ist auch äquivalent dazu, dass sich eine Menge gut von außen und von innen einschachteln lässt. (Zur Wahl der Buchstaben: F soll an fermé und G soll an Gebiet erinnern.)

Korollar 10.4.13. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge G mit $F \subset A \subset G$ und*

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) + \mathcal{L}^n(A \setminus F) \le \varepsilon$$

gibt.

Beweis.
- „$\Longleftarrow$": Dies folgt direkt aus Theorem 10.4.12.
- „$\Longrightarrow$": Sei $\varepsilon > 0$ und sei A eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge. Dann ist auch $\complement A$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Menge. Nach Theorem 10.4.12 gibt es somit offene Mengen $G, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \supset \complement A$ und $G \supset A$ sowie $\mathcal{L}^n\left(\Omega \setminus \complement A\right) \le \varepsilon$ und $\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \varepsilon$. Wir definieren die abgeschlossene Menge $F := \complement\Omega$. Dann gelten $F \subset A$ und $\mathcal{L}^n(A \setminus F) = \mathcal{L}^n(A \cap \Omega) = \mathcal{L}^n\left(\Omega \setminus \complement A\right) \le \varepsilon$ wie gewünscht. □

Bemerkung 10.4.14. ⋆
(i) Die Bedingung in Korollar 10.4.13 ist auch äquivalent zu der Tatsache, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge G mit $F \subset A \subset G$ und $\mathcal{L}^n(G \setminus F) \le \varepsilon$ gibt.
(ii) Aus der Bedingung von Korollar 10.4.13 folgt

$$\mathcal{L}^n(F) + \varepsilon \ge \mathcal{L}^n(A) \ge \mathcal{L}^n(G) - \varepsilon.$$

(iii) Indem wir statt F die Menge $F \cap [-k, k]^n$ betrachten, so sehen wir mit Theorem 10.2.13 (ii), dass wir im Falle $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ die Menge F auch als kompakte Menge wählen können.

Beweis. Übung. □

Fr 15.01.2021

Wir erinnern an die Definition in Bemerkung 10.1.3 und erhalten.

Theorem 10.4.15. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.*
(i) Es gilt stets $\underline{\mu}(A) \le \mathcal{L}^n(A) \le \overline{\mu}(A)$.
(ii) Sei A Jordan-messbar. Dann ist A auch $\mathcal{L}^n$-messbar und es gilt $\mathcal{L}^n(A) = \mu(A)$.

Beweis.
(i) In Bemerkung 10.1.3 hatten wir Elementarfiguren aus endlich vielen Intervallen betrachtet. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(I_k) \colon A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k = \text{Intervalle}\right\}\\ &\le \inf\left\{\operatorname{Vol}(E) \colon A \subset E = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, I_k = \text{Intervalle}, m \in \mathbb{N}\right\} = \overline{\mu}(A).\end{aligned}$$

Für jede Elementarfigur $E \subset A$ gilt

$$\operatorname{Vol}(E) = \mathcal{L}^n(E) \le \mathcal{L}^n(A).$$

Wir gehen zum Supremum über Elementarfiguren $E \subset A$ über und erhalten

$$\underline{\mu}(A) \le \mathcal{L}^n(A).$$

(ii)
- **Gleichheit:** Da A Jordan-messbar ist, gilt $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$. Daher folgt $\mathcal{L}^n(A) = \mu(A)$ nach (i).
- **$\mathcal{L}^n$-Messbarkeit:** Wir nehmen zusätzlich an, dass $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ gilt. Ist dies nicht der Fall, so wenden wir das folgende Argument auf die Jordan-messbaren Mengen $A_k := A \cap [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, mit $\varepsilon \cdot 2^{-k}$ statt ε an und erhalten daraus die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Da A Jordan-messbar ist, gibt es Elementarfiguren $I_\varepsilon, I^\varepsilon$ mit $I_\varepsilon \subset A \subset I^\varepsilon$ und

$$\mathrm{Vol}(I^\varepsilon) - \varepsilon \le \mu(A) \le \mathrm{Vol}(I_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ohne Einschränkung können wir durch leichtes Vergrößern annehmen, dass $G := I^\varepsilon$ offen ist. Wir erhalten

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \mathcal{L}^n(I^\varepsilon \setminus I_\varepsilon) = \mathrm{Vol}(I^\varepsilon) - \mathrm{Vol}(I_\varepsilon) \le 2\varepsilon.$$

Nun folgt die $\mathcal{L}^n$-Messbarkeit von A aus Theorem 10.4.12 (ii). □

Theorem 10.4.16. *Das Lebesguemaß ist unter Bewegungen, d. h. unter Abbildungen $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Rx + x_0$, mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R \in O(n)$, invariant.*

Beweis.

(i) In Theorem 10.1.7 haben wir bereits gezeigt, dass das Jordanmaß unter Bewegungen invariant ist. Dies überträgt sich direkt für Intervalle I auf des Lebesguemaß. Es gilt

$$\mathcal{L}^n(\Phi(I)) = \mu(\Phi(I)) = \mu(I) = \mathcal{L}^n(I).$$

Nach Theorem 10.4.15 folgt (zunächst für beschränkte und dann (σ-Algebra-Eigenschaft) auch für unbeschränkte Intervalle I), dass auch $\Phi(I)$ $\mathcal{L}^n$-messbar ist.

(ii) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann können wir G wie im Beweis von Theorem 10.4.5 als abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, schreiben, $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. Dann ist auch $\Phi(G)$ offen und es gilt $\Phi(G) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(I_k)$ mit paarweise disjunkten $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen $\Phi(I_k)$. Nach (i) und der σ-Additivität (Theorem 10.2.13 (i)) folgt also

$$\mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) = \mathcal{L}^n(G).$$

(iii) Seien $A, G \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann sind $A \subset G$ und $\Phi(A) \subset \Phi(G)$ sowie die Offenheit von G und die von $\Phi(G)$ äquivalent. Wir können also Theorem 10.4.8 und (ii) kombinieren und erhalten

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ offen}}} \mathcal{L}^n(\Phi(G)) = \inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ offen}}} \mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^n(A)$$

wie behauptet. □

10.5. **Nicht messbare Mengen $\star$.** Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass nicht jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ auch $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

Beispiel 10.5.1 (Vitali)**.** Sei $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und sei $G := \{k + l\xi\colon k, l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ die von 1 und ξ erzeugte additive Gruppe. Wir erklären auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x \sim y :\iff x - y \in G$ und bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $X = \{[x] = x + G,\, x \in \mathbb{R}\}$. Wegen $1 \in G$ gilt $[x] \cap [0,1] \neq \emptyset$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher finden wir für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten in $[0,1]$. Nach Auswahlaxiom gibt es eine Menge $A \subset [0,1]$ von Repräsentanten, so dass in jeder Äquivalenzklasse genau ein Repräsentant liegt: $|A \cap [x]| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. A heißt Vitalimenge.

Theorem 10.5.2. *Die Vitalimenge $A \subset \mathbb{R}$ ist nicht $\mathcal{L}^1$-messbar.*

Beweis.

(i) Wegen $\xi \notin \mathbb{Q}$ enthält $G \cap [-1,1]$ unendlich viele Punkte. Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $G \cap [-1,1]$. Setze $A_k := A + g_k \subset [-1,2]$.

(ii) **Behauptung:** Die Mengen A_k, $k \in \mathbb{N}$, sind paarweise disjunkt.

Beweis. Sei $x \in A_k \cap A_l$. Dann gilt $[x] \ni x - g_k, x - g_l \in A$. Somit sind diese beiden Zahlen Repräsentanten von $[x]$. Da A jedoch nur einen Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse enthält, erhalten wir nacheinander $x - g_k = x - g_l$, $g_k = g_l$ und $k = l$. □

(iii) **Behauptung:** Es gilt $[0,1] \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$.

Beweis. Sei $y \in [0,1]$. Betrachte $[y]$. Dann gibt es nach Wahl von A ein $x \in A$ mit $[x] = [y]$. Somit folgt $x - y \in G$. Aus $0 \le x, y \le 1$ erhalten wir $-1 \le y - x \le 1$. Daher ist $y - x = g_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten daraus $y = x + g_k \in A_k$ und somit die Behauptung. □

(iv) Wäre A eine $\mathcal{L}^1$-messbare Menge, so auch A_k, $k \in \mathbb{N}$, aufgrund der Translationsinvarianz. Aus der Monotonie und der σ-Additivität erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{L}^1([0,1]) &\le \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^1(A_k) \\ &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \le \mathcal{L}^1([-1,2]) = 3. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}^1$ translationsinvariant ist, folgt $\mathcal{L}^1(A_k) = \mathcal{L}^1(A)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $\mathcal{L}^1(A) = 0$ oder $\mathcal{L}^1(A) > 0$. Beide Möglichkeiten widersprechen jedoch der obigen Ungleichungskette. □

Bemerkung 10.5.3. Das Banach-Tarski Paradoxon besagt, dass sich $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ in endlich viele disjunkte Mengen A_i zerlegen lässt. Nach Anwendung verschiedener Bewegungen kann man daraus zwei disjunkte Kugeln mit gleichem Radius in $\mathbb{R}^3$ zusammensetzen. Dabei geht ein, dass unendliche Mengen in Bijektion zu echten Teilmengen von sich selbst stehen können. Wir bemerken, dass dabei mindestens eine der Mengen A_i nicht $\mathcal{L}^3$-messbar sein kann.

10.6. **Metrische Maße.** Wir erinnern an die Distanz zweier Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{|a-b| \colon a \in A,\, b \in B\}$$

und die Distanz zwischen einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{|x-a| \colon a \in A\} = \operatorname{dist}(\{x\},A).$$

Definition 10.6.1. Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **metrisch**, falls für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

gilt.

Theorem 10.6.2 (Carathéodory-Kriterium für Borelmaße)**.** *Ein metrisches Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ ist Borelsch.*

Beweis.

(i) Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene Menge. Es genügt der Nachweis, dass F eine μ-messbare Menge ist, dass also für eine beliebige Menge $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(B) \ge \mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F)$$

gilt. Da die Aussage für $\mu(B) = \infty$ klar ist, nehmen wir ohne Einschränkung $\mu(B) < \infty$ an.

Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir abgeschlossene Vergrößerungen von F durch

$$F_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \operatorname{dist}(x,F) \le \frac{1}{k}\right\}.$$

Nun gilt $\operatorname{dist}(B \setminus F_k, B \cap F) \geq \frac{1}{k} > 0$. Da μ metrisch ist, erhalten wir unter Verwendung der Monotonie

$$\mu(B \cap F) + \mu(B \setminus F_k) = \mu((B \cap F) \cup (B \setminus F_k)) \leq \mu(B).$$

Die Messbarkeit folgt nun aus der nächsten Behauptung.

(ii) **Behauptung:** Es gilt $\mu(B \setminus F_k) \to \mu(B \setminus F)$ für $k \to \infty$.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir „ringförmige" Mengen um F in B durch

$$R_k = (F_k \setminus F_{k+1}) \cap B.$$

Die Mengen $(R_k)_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$ sind paarweise disjunkt und es gilt

$$B \setminus F = (B \setminus F_k) \cup \bigcup_{l=k}^{\infty} R_l$$

für beliebige $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Aus der Monotonie und der σ-Subadditivität von μ erhalten wir damit für beliebige $k \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\mu(B \setminus F_k) \leq \mu(B \setminus F) \leq \mu(B \setminus F_k) + \sum_{l=k}^{\infty} \mu(R_l).$$

Aus der nachfolgenden Behauptung erhalten wir, dass die Summe auf der rechten Seite für $k \to \infty$ gegen Null geht. Dies beendet den Beweis dieser Behauptung. □

(iii) **Behauptung:** Es gilt $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) < \infty$.

Beweis. Wir beobachten, dass für $|i - j| \geq 2$

$$\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$$

gilt. Da μ metrisch ist, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k}\right) \leq \mu(B)$$

und

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(R_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} R_{2k+1}\right) \leq \mu(B).$$

Wir addieren diese beiden Ungleichungen und gehen zum Grenzwert $m \to \infty$ über. Es folgt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_l) \leq 2\mu(B) < \infty$$

wie behauptet. □

Die Gesamtaussage folgt. □

10.7. **Das Hausdorffmaß.** Das Hausdorffmaß ist für die Geometrie nicht regulärer Objekte wichtig, z. B. in der geometrischen Maßtheorie.

Die folgende Bemerkung führt uns zur Definition des Hausdorffmaßes.

Bemerkung 10.7.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Seien $s, \delta > 0$. Wir definieren

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^\infty r_k^s \colon A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_{r_k}(x_k),\, r_k < \delta\right\}.$$

Nach Theorem 10.3.3 ist das ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ zur Überdeckungsklasse der Bälle, das **s-dimensionale Hausdorff-δ-Maß**.

(ii) Für $\delta_2 \le \delta_1$ gilt

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \le \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A).$$

Daher existiert der Grenzwert $\delta \downarrow 0$

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

(iii) Für $s = 0$ setzen wir

$$\mathcal{H}^0(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } |A| \text{ endlich ist,}\\ \infty, & \text{sonst.}\end{cases}$$

$\mathcal{H}^0$ heißt **Zählmaß**.

Definition 10.7.2. $\mathcal{H}^s$ heißt **s-dimensionales Hausdorffmaß**. Di 19.01.2021

Wir rechtfertigen nun, dass wir $\mathcal{H}^s$ ein Maß genannt haben. (Den Fall $s = 0$ lassen wir als einfache Übung; hier ist jede Menge $\mathcal{H}^0$-messbar.)

Theorem 10.7.3. *Für $s > 0$ ist $\mathcal{H}^s$ ein Borel reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis.

(i) **$\mathcal{H}^s$ ist ein Maß:** Sei $s > 0$. Es ist einfach zu sehen, dass $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ gilt. Gelte $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k \subset \mathbb{R}^n$. Für $\mathcal{H}^s_\delta$, $\delta > 0$ ist die σ-Subadditivität leicht zu sehen bzw. folgt aus Theorem 10.3.3. Dies kombinieren wir mit der Monotonie in δ und erhalten

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

Für $\delta \downarrow 0$ konvergiert die linke Seits gegen $\mathcal{H}^s(A)$ und wir erhalten die σ-Subadditivität von $\mathcal{H}^s$.

(ii) **$\mathcal{H}^s$ ist metrisch:** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\delta_0 = \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Dann zerfällt jede Überdeckung $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_{r_k}(x_k)$ mit $r_k < \delta \le \frac{1}{2}\delta_0$ in zwei Teile, welche die Menge A bzw. die Menge B überdecken. Zusammen mit der Definition des Hausdorffmaßes erhalten wir somit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \le \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \le \mathcal{H}^s(A \cup B).$$

Lassen wir nun $\delta \downarrow 0$, so folgt $\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \le \mathcal{H}^s(A \cup B)$. Die umgekehrte Ungleichung haben wir bereits beim Nachweis, dass $\mathcal{H}^s$ ein Maß ist, gezeigt.

Nun folgt aus Theorem 10.6.2, dass $\mathcal{H}^s$ als metrisches Maß auch Borelsch ist.

(iii) $\mathcal{H}^s$ **ist Borel regulär:** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Der Fall $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ ist wieder einfach, da dann für $G = \mathbb{R}^n$ sowohl $A \subset G$ als auch $\mathcal{H}^s(G) \geq \mathcal{H}^s(A) = \infty$ gelten. Daher dürfen wir nun annehmen, dass $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ gilt.

Nach Definition finden wir zu $\delta_l = \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}_{>0}$, eine Überdeckung $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{r_{l,k}}(x_{l,k}) =: G_l$ mit $r_{l,k} < \delta_l$ und

$$\mathcal{H}^s_{\delta_l}(G_l) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r^s_{l,k} \leq \mathcal{H}^s_{\delta_l}(A) + \frac{1}{l} \leq \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{l}.$$

Mit G_l ist auch $G := \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} G_l$ Borelsch. Es gilt weiterhin $A \subset G$ und daher $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(G)$. Schießlich erhalten wir mit $G \subset G_l$ und der obigen Ungleichung

$$\mathcal{H}^s(G) = \lim_{l\to\infty} \mathcal{H}^s_{\delta_l}(G) \leq \limsup_{l\to\infty} \mathcal{H}^s_{\delta_l}(G_l) \leq \mathcal{H}^s(A)$$

wie behauptet. □

Das Hausdorffmaß liefert eine Skala / eine Familie $\mathcal{H}^s$, $s \geq 0$, von Maßen. Damit kann man beliebigen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Dimension zuordnen. Dazu benötigen wir

Lemma 10.7.4. ⋆ *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und seien $0 \leq s < t < \infty$. Dann gelten*

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0.$

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty.$

Beweis.

(i) Gelte $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Sei $\delta > 0$ und gelte $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k)$ mit $r_k < \delta$. Dann folgt

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r^t_k \leq \delta^{t-s} \sum_{k=1}^{\infty} r^s_k.$$

Wir betrachten das Infimum über alle solchen Überdeckungen und erhalten

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \cdot \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \cdot \mathcal{H}^s(A).$$

Nun lassen wir $\delta \downarrow 0$ und folgern $\mathcal{H}^t(A) = 0$ wie behauptet.

(ii) Dies ist gerade die Kontraposition von (i). □

Das n-dimensionale Lebesgue- und Hausdorffmaß haben dasselbe Skalierungsverhalten.

Lemma 10.7.5. ⋆ *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, sei $\mu > 0$ und sei $s \geq 0$. Dann gelten*

$$\mathcal{H}^s(\mu \cdot A) = \mu^s \cdot \mathcal{H}^s(A) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^n(\mu \cdot A) = \mu^n \cdot \mathcal{L}^n(A).$$

Beweisidee. Benutze skalierte Überdeckungen. □

Beispiel 10.7.6. ⋆ Sei $Q = [-1, 1]^n$. Dann gilt

$$2^{-n} \cdot \mathcal{L}^n(Q) \leq \mathcal{H}^n(Q) \leq 2^{-n} n^{n/2} \cdot \mathcal{L}^n(Q).$$

Beweis.

(i) Sei $\delta > 0$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ mit $r := 2^{-k-1}\sqrt{n} < \delta$. Beachte, dass jeder Würfel mit Kantenlänge 2^{-k} bzw. halber Kantenlänge 2^{-k-1} in einer (abgeschlossenen) Kugel mit Radius $r < \delta$ und gleichem Mittelpunkt enthalten ist. Nun zerlegen wir den Quader Q in $2^{(k+1)n}$ achsparallele Würfel Q_l der Kantenlänge 2^{-k}. Somit erhalten wir

$$\mathcal{H}^n_\delta(Q) \leq 2^{(k+1)n} r^n = n^{n/2} \cdot 1 = n^{n/2} \cdot 2^{-n} \cdot \mathcal{L}^n(Q).$$

Da dies für beliebige $\delta > 0$ gilt, folgt hieraus die obere Abschätzung für $\mathcal{H}^n(Q)$.

(ii) Sei umgekehrt $B_1(0)$ durch Kugeln $B_{r_k}(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$, vom Radius $r_k < \delta$ überdeckt. Da $B_1(0)$ einen kleinen Würfel enthält, mit der σ-Subadditivität und aus Lemma 10.7.5 erhalten wir

$$0 < \omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_k}(x_k)) = \omega_n \sum_{k=1}^{\infty} r_k^n.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\delta(Q) \ge \mathcal{H}^n_\delta(B_1(0)) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} r_k^n \colon B_1(0) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(x_k),\, r_k < \delta\right\}\\ &\ge 1 = 2^{-n}\mathcal{L}^n(Q).\end{aligned}$$

Mit $\delta \downarrow 0$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 10.7.7. ⋆

(i) Tatsächlich gilt $\mathcal{L}^n(A) = \omega_n \mathcal{H}^n(A)$ für alle $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$. Daher definiert man manchmal das Hausdorffmaß $\mathcal{H}^s$ mit einem Vorfaktor ω_s, über die Γ-Funktion definiert.

(ii) Man kann zeigen, dass ein translationsinvariantes lokal endliches Maß (für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x)$ endliches Maß hat) auf $\mathbb{R}^n$ auf den $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen bis auf einen Vorfaktor (der auch Null sein kann) mit $\mathcal{L}^n$ übereinstimmt.

Vergleiche dazu [1] bzw. den auskommentierten Teil.

Lemma 10.7.8. ⋆ *Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s > n$ gilt $\mathcal{H}^s(A) = 0$.*

Beweis. Sei $s > n$. Der $\mathbb{R}^n$ ist durch Würfel $Q_l = [-l, l]^n$, $l \in \mathbb{N}$, überdeckt. Nach Lemma 10.7.6 gilt $\mathcal{H}^n(Q_l) < \infty$. Nach Lemma 10.7.4 folgt daher $\mathcal{H}^s(Q_l) = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{H}^s$ für $s > 0$ Borel regulär und damit ein Borelmaß ist, ist Q_l eine $\mathcal{H}^s$-messbare Menge. Mit Theorem 10.2.13 (ii) dürfen wir in dieser aufsteigenden Folge zum Grenzwert übergehen (Alternative: σ-Subadditivität) und erhalten $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$. □

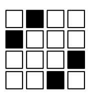
Nach Lemma 10.7.4 und Lemma 10.7.8 ist die Dimension aus der folgenden Definition wohldefiniert.

Definition 10.7.9. ⋆ Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{s > 0 \colon \mathcal{H}^s(A) = 0\} \le n$$

die **Hausdorffdimension** von A.

Beispiel 10.7.10 (Cantorstaub)**.** ⋆ Sei $A_0 = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Wir zerlegen A_0 in 16 kongruente abgeschlossene Teilwürfel der Kantenlänge $\frac{1}{4}$. Sei A_1 die aus den 4 Teilwürfeln bestehende Menge, die die Geradensegmente $\left\{\binom{x}{y} \in A_0 \colon y = x \pm \frac{1}{2}\right\}$ enthält. Schematisch sind dies diese Würfel:



Analog unterteilen wir A_1 weiter zu A_2, einer Menge, die aus 4^2 Teilwürfeln der Kantenlänge $\frac{1}{4^2}$ besteht. Dies iterieren wir und definieren schließlich $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \le \mathcal{H}^1(A) \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Somit hat A die Hausdorffdimension 1.

Beweis. A_k besteht aus 4^k Quadraten der Kantenlänge 4^{-k}. Somit wird A_k von 4^k Bällen vom Radius $r_k = 4^{-k}\frac{\sqrt{2}}{2}$ überdeckt. Es folgt

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \le \mathcal{H}^1_\delta(A_k) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

für alle $k \ge k_0$ mit $r_{k_0} < \delta$.

Sei $\pi_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die orthogonale Projektion auf die erste Komponente.

Behauptung: Es gilt $\pi_1(A) = [0,1]$.

Beweisskizze für die Behauptung. Dies gilt, denn für jedes x, so dass $4^k \cdot x$ für große k nicht ganzzahlig wird, was der Tatsache entspricht, dass der Würfel nie genau an der Stelle x geteilt wird, ist $\pi_2((\{x\} \times \mathbb{R}) \cap A_k)$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Intervalle und somit selbst nichtleer. Da die Menge A als Schnitt kompakter Mengen selbst wieder kompakt ist, folgt die Behauptung auch für andere Werte von x. ☐

Sei $\delta > 0$. Betrachte eine Überdeckung $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{r_k}(z_k)$ mit $z_k = \left(\begin{smallmatrix} x_k \\ y_k \end{smallmatrix}\right)$ und $r_k < \delta$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann folgt

$$[0,1] = \pi_1(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi_1(B_{r_k}(z_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - r_k, x_k + r_k).$$

Somit folgt

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^1((x_k - r_k, x_k + r_k)) = 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k$$

und daher die Behauptung. ☐

Beispiel 10.7.11 (Kochsche Schneeflockenkurve)**.** ⋆ Wir betrachten die Kochsche Schneeflockenkurve K wie in `https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve` dargestellt und wollen ihre Hausdorffdimension bestimmen. Als Darstellung von K können wir die stetige Abbildung nehmen, die sich als gleichmäßiger Limes aus der Konstruktionsvorschrift ergibt. Geometrischer ist die Betrachtung als kompakte unter einer Iterationsvorschrift invariante Menge. Wegen $\mathcal{H}^0(K) = \infty$ nehmen wir nachfolgend $s > 0$ an.

(i) **Heuristik:** Entsprechend der Vorschrift, dass sich K aus 4 mit dem Faktor 1/3 skalierten Kopien von sich selbst zusammensetzt, erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(K) \le 4 \cdot \mathcal{H}^s\left(\tfrac{1}{3}K\right) = 4 \cdot 3^{-s} \cdot \mathcal{H}^s(K).$$

Da die Kopien sich jeweils nur in den Randpunkten berühren, erwarten wir sogar Gleichheit. Dies ist eine gute Motivation, bringt uns aber nicht direkt weiter, da $\mathcal{H}^s(K)$ für alle bis auf möglicherweise ein $s \in [0,2]$ den Wert 0 oder ∞ hat.

(ii) **Eine Schranke:** Sei $B_r(x)$ ein Ball mit $K \subset B_r(x)$. Entsprechend der Iterationsvorschrift können wir K auch durch 4 Bälle mit Radius $r/3$ überdecken. Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_{2r}(K) &\le r^s, \\ \mathcal{H}^s_{\frac{2r}{3}} &\le 4 \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^s, \\ \mathcal{H}^s_{\frac{2r}{3^2}} &\le 4^2 \cdot \left(\frac{r}{3^2}\right)^s, \quad \ldots, \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}^s_{\frac{2r}{3^k}} \le 4^k \cdot \left(\frac{r}{3^k}\right)^s = \left(\frac{4}{3^s}\right)^k \cdot r^s, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da die maximal zulässigen Radien gegen Null konvergieren, erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(K) = 0 \quad \text{für} \quad s > \frac{\log 4}{\log 3}$$

und $\mathcal{H}^s(K) < \infty$ für $s = \frac{\log 4}{\log 3}$.

(iii) **Dimensionsbestimmung mit Zusatzannahme:** Aufgrund der bisherigen Überlegungen wissen wir, dass die Hausdorffdimension von $K \subset \mathbb{R}^2$ nicht größer als $\frac{\log 4}{\log 3}$ ist. Wir nehmen nun an, dass für ein $s > 0$ die Ungleichung

$$0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$$

gilt. Sei $l \in \mathbb{N}_{>1}$. Dann bezeichnen wir mit R_l (R für Rest) eine Kopie von K mit $3^l \cdot R_l = K$. Rotationen und Translationen werden wir in der Notation unterdrücken. Wir definieren weiterhin W_l (wesentlicher Anteil) als $K \setminus R_l$, wobei wir R_l ganz rechts außen wegnehmen. In K passen 4 disjunkte (kleine Überlegung, vergleiche eine alternative Darstellung auf `wikipedia` mit Dreiecken) rotierte und verschobene Kopien von $\frac{1}{3}W_l$, so dass diese jeweils einen positiven Abstand voneinander haben. Den Nachweis des positiven Abstandes lassen wir als Übung. Da das Hausdorffmaß metrisch ist, folgt

$$\mathcal{H}^s(K) \ge 4 \cdot \mathcal{H}^s\left(\tfrac{1}{3}W_l\right) = \frac{4}{3^s} \cdot \mathcal{H}^s(W_l).$$

Eine Abschätzung für $\mathcal{H}^s(W_l)$ nach unten erhalten wir aus

$$\mathcal{H}^s(K) \le \mathcal{H}^s(W_l) + \mathcal{H}^s(R_l) \le \mathcal{H}^s(W_l) + \frac{1}{3^{l\cdot s}}\mathcal{H}^s(K).$$

Zusammengenommen ergibt sich daraus

$$\mathcal{H}^s(K) \ge \frac{4}{3^s}\mathcal{H}^s(K) - \frac{4}{3^{(l+1)s}}\mathcal{H}^s(K).$$

Aus der Überdeckung von K mit 4 kleineren Kopien von K erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(K) \le 4 \cdot \mathcal{H}^s\left(\tfrac{1}{3}K\right) = \frac{4}{3^s}\mathcal{H}^s(K).$$

Wir kombinieren diese Abschätzungen, lassen $l \to \infty$ und erhalten

$$\mathcal{H}^s(K) = \frac{4}{3^s}\mathcal{H}^s(K).$$

Somit muss aufgrund unserer Annahme $s = \frac{\log 4}{\log 3}$ gelten.

(iv) Es ist bekannt, dass dies tatsächlich die Dimension der Kochschen Schneeflockenkurve ist.

10.8. **Radonmaße $\star$.** Wer dieses Kapitel auslässt, nimmt nachfolgend überall dort, wo ein Radonmaß angenommen wird, ein Lebesguemaß.

Definition 10.8.1. Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Radonmaß**, falls

(i) μ Borel regulär ist und
(ii) $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt.

Beispiele 10.8.2.

(i) $\mathcal{L}^n$ ist ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$.
(ii) $\mathcal{H}^s$ ist für $s < n$ kein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$.

(iii) Ist μ ein Radonmaß und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge, so ist auch $\mu \llcorner A$ mit
$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B)$$
für $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Radonmaß. $\mu \llcorner A$ heißt auch die **Einschränkung** von μ auf A.

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung über die Einschränkung. Wir setzen $\nu := \mu \llcorner A$.

(i) Zunächst ist klar, dass ν ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist und dass $\nu(K) = \mu(A \cap K) \le \mu(K) < \infty$ für kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt.

(ii) ν **ist Borelsch:** Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge. Wir wollen zeigen, dass C eine ν-messbare Menge ist. Da C eine μ-messbare Menge ist, gilt für beliebige $B \subset \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned}\nu(B) = \mu(A \cap B) &= \mu((A \cap B) \cap C) + \mu((A \cap B) \setminus C)\\ &= \mu(A \cap (B \cap C)) + \mu(A \cap (B \setminus C))\\ &= \nu(B \cap C) + \nu(B \setminus C).\end{aligned}$$

(iii) ν **ist Borel regulär:** Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Ohne Einschränkung sei $\mu(B) < \infty$, da wir sonst $\mathbb{R}^n$ als umfassende Borelmenge mit gleichem Maß wählen können. Da μ Borel regulär ist, gibt es Borelmengen $C, D \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap B \subset C$, $B \setminus A \subset D$ und
$$\mu(A \cap B) = \mu(C) \quad \text{sowie} \quad \mu(B \setminus A) = \mu(D) \le \mu(B) < \infty.$$
Da A eine μ-messbare Menge ist und $A \cap B \subset A \cap C$ gilt, erhalten wir
$$0 \le \mu(C \setminus A) = \mu(C) - \mu(C \cap A) = \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) \le 0.$$
In der Carathéodory-Bedingung haben wir dabei auf beiden Seiten $\mu(C \cap A)$ abgezogen. Dies ist wegen $\mu(C \cap A) \le \mu(C) = \mu(A \cap B) \le \mu(B) < \infty$ zulässig. Daher gilt in der obigen abgesetzten Formel überall Gleichheit und es folgt
$$\nu(C) = \mu(A \cap C) = \mu(A \cap B) = \nu(B).$$
Analog folgt wegen $B \setminus A \subset D \setminus A$
$$\nu(D) = \mu(D \cap A) = \mu(D) - \mu(D \setminus A) \le \mu(D) - \mu(B \setminus A) = 0.$$
Nun definieren wir $E := C \cup D$. Es gelten $B \subset E$ und
$$\nu(B) \le \nu(E) \le \nu(C) + \nu(D) = \nu(B) + 0$$
wie gewünscht. □

Wie für das Lebesguemaß, siehe Theorem 10.4.12, gilt allgemeiner

Lemma 10.8.3. *Sei μ ein Radonmaß. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $B \subset G$ und $\mu(G \setminus B) < \varepsilon$.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Borelmengen B, die die Behauptung des Lemmas erfüllen, also
$$\mathcal{G} := \{B \subset \mathcal{B} \colon \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, G = \text{offen} \colon B \subset G \subset \mathbb{R}^n \text{ und } \mu(G \setminus B) < \varepsilon\}.$$
Wir zeigen das Lemma, indem wir $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ nachweisen.

(i) **Offene Mengen:** Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, so gilt offenbar $B \in \mathcal{G}$, da wir $G = B$ verwenden können.

(ii) **Abzählbare Vereinigungen:** Seien $B_k \in \mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wollen $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$ zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung zu jedem $k \geq 1$ offene Mengen G_k mit $B_k \subset G_k$ und $\mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon \cdot 2^{-k}$. Wir definieren $G := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. Die Menge G ist offen und es gilt $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \subset G$. Außerdem gilt

$$G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(G_k \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l \right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k).$$

Damit gilt

$$\mu\left(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt.

(iii) **Endliche Schnitte:** Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{G}$. Wir behaupten, dass dann auch $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{G}$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es offene Mengen A_1, A_2 mit $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$ und $\mu(A_1 \setminus B_1) < \varepsilon$ und $\mu(A_2 \setminus B_2) < \varepsilon$. Elementar zeigt man, dass $(A_1 \cap A_2) \setminus (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$ gilt. Wir definieren $A := A_1 \cap A_2$. Dann ist A offen, es gilt $B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2 = A$ und wir erhalten

$$\mu(A \setminus (B_1 \cap B_2)) \leq \mu(A_1 \setminus B_1) + \mu(A_2 \setminus B_2) < 2\varepsilon.$$

Die Behauptung folgt.

(iv) **Abzählbare Schnitte I:** Seien $B_k \in \mathcal{G}$ mit $\mu(B_k) < \infty$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. (Es genügt auch, $\mu(B_1) < \infty$ anzunehmen.) Wir wollen zeigen, dass dann auch $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen wieder offene Mengen G_k mit $B_k \subset G_k$ und $\mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon \cdot 2^{-k}$. Dann sind die Mengen $G^K := \bigcap\limits_{k=1}^{K} G_k$, $K \in \mathbb{N}_{>0}$, offen und es gelten $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \subset G^K$ sowie

$$\mu\left(G^K\right) \leq \mu(G_1) < \infty.$$

Wie in (iii) gilt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k).$$

(Beachte dazu, dass für $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ für alle k die Aussage $x \in G_k$ und für mindestens ein k die Aussage $x \notin B_k$ gelten.) Nun wenden wir Theorem 10.2.13 (iii) an und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{K\to\infty} \mu\left(G^K \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) &= \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus B_k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k \setminus B_k) < \varepsilon\end{aligned}$$

wie gewünscht.

(v) **Abzählbare Schnitte II:** Seien nun $B_k \in \mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Wir wollen wiederum zeigen, dass dann auch $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{G}$ gilt. Dazu definieren wir Quader

$Q_l = (-l, l)^n$, $l \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \mathbb{R}^n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\ &= \bigcup_{l=1}^{\infty}\left(Q_l \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}(Q_l \cap B_k).\end{aligned}$$

Da jedes Q_l offen ist, gilt stets $Q_l \in \mathcal{G}$. Da weiterhin jedes Q_l in einer kompakten Menge enthalten ist und μ ein Radonmaß ist, folgt $\infty > \mu(Q_l) \ge \mu(Q_l \cap B_k)$. Außerdem ist $Q_l \cap B_k \in \mathcal{G}$ als Schnitt von zwei Mengen in $\mathcal{G}$ in $\mathcal{G}$. Nach (iv) liegt somit auch der abzählbare Schnitt über diese Mengen in $\mathcal{G}$. Nach (ii) gilt dies auch für die abzählbare Vereinigung davon und somit erhalten wir die Behauptung.

(vi) **Abgeschlossene Mengen:** Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Sei $\delta > 0$. Dann ist

$$U_\delta(F) := \bigcup_{x \in F} B_\delta(x)$$

als Vereinigung von offenen Mengen offen. Somit gilt $U_\delta(F) \in \mathcal{G}$. Da F abgeschlossen ist, gilt

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{\frac{1}{k}}(F).$$

Als abzählbarer Schnitt über Mengen in $\mathcal{G}$ ist also auch $F \in \mathcal{G}$.

(vii) **σ-Algebra $\mathcal{F}$:** Wir definieren

$$\mathcal{F} := \left\{B \in \mathcal{G} \colon \complement B \in \mathcal{G}\right\}$$

und wollen nachweisen, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält.

- Da $\mathcal{G}$ alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält, enthält $\mathcal{F}$ alle offenen Mengen.
- Nach Definition von $\mathcal{F}$ folgt aus $B \in \mathcal{F}$ auch $\complement B \in \mathcal{F}$ (und umgekehrt).
- Seien nun $B_k \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wollen $V := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{F}$ zeigen. Unsere Aussage über abzählbare Vereinigungen liefert $V \in \mathcal{G}$. Aufgrund der de Morganschen Regeln gilt

$$\complement V = \complement\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \complement B_k.$$

  Wegen $\complement B_k \in \mathcal{G}$ und unserer Aussage über abzählbare Schnitte folgt also $\complement V \in \mathcal{G}$. Somit gilt $V \in \mathcal{F}$.

Somit ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ umfasst. Somit folgt

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$$

wie behauptet. □

Wir können nun Theorem 10.4.8 auf Radonmaße verallgemeinern.

Theorem 10.8.4. *Sei μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$.*

(i) Für jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \inf_{\substack{A \subset G \\ G \text{ offen}}} \mu(G).$$

(ii) Für μ-messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K).$$

Beweis.

(a) (i): Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Da μ als Radonmaß Borel regulär ist, gibt es eine Borelmenge B mit $A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$. Für eine offene Menge G mit $B \subset G$ und $\mu(G \setminus B) < \infty$ gilt nun

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(G) - \mu(G \setminus B).$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 10.8.3.

(b) Wir zeigen (ii) zunächst für beschränkte Mengen: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte μ-messbare Menge und sei Q ein offener Würfel mit $A \subset \overline{A} \subset Q$. Dann folgt nach (i)

$$\mu(Q \setminus A) = \inf_{\substack{Q \setminus A \subset G \\ G \text{ offen}}} \mu(G) = \inf_{\substack{Q \setminus A \subset G \subset Q \\ G \text{ offen}}} \mu(G).$$

Setzen wir $F := Q \setminus G$ für $G \subset Q$, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(A) G offen, $Q \setminus A \subset G$ und

(B) F kompakt, $F \subset A$.

Beachte dazu für die Abgeschlossenheit von F, dass A und $\overline{A}$ einen positiven Abstand zu ∂Q haben. Somit gehört ein ganzer „Streifen" am Rand von Q noch zu G. Somit ist F nicht nur *relativ* in Q abgeschlossen, sondern auch als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Ersetzen wir nun G durch $Q \setminus F$, so folgt unter doppelter Verwendung der μ-Messbarkeit

$$\mu(Q) - \mu(A) = \mu(Q \setminus A) = \mu(Q) - \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ kompakt}}} \mu(F).$$

Da μ auf kompakten Mengen endlich ist, folgt $\mu(Q) < \infty$ und daher die Behauptung.

(c) (ii) für unbeschränkte Mengen: Sei $\varepsilon > 0$ und sei zunächst $\mu(A) < \infty$. Da μ ein Radonmaß ist, bilden die Würfel $Q_l := [-l, l]^n$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ durch μ-messbare Mengen. Betrachte die μ-messbaren Mengen $A_l := A \cap Q_l$, $l \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 10.2.13 (ii) gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A) - \varepsilon \le \mu(A_l) \le \mu(A)$. Nach (ii) für die beschränkte μ-messbare Menge A_l gibt es eine kompakte Menge $F \subset A_l \subset A$ mit $\mu(F) \ge \mu(A_l) - \varepsilon$. Umordnen liefert die Behauptung.

Ist $\mu(A) = \infty$, so funktioniert der obige Beweis entsprechend mit $M \le \mu(A_l)$ für beliebige $M \in \mathbb{R}$ statt $\mu(A) - \varepsilon \le \mu(A_l)$. □

Als Korollar erhalten wir daraus

Theorem 10.8.5. *Sei μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann sind für $A \subset \mathbb{R}^n$ äquivalent:*

(i) A ist μ-messbar.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists G \supset A \colon G$ ist offen und es gilt $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$.

Beweis. Argumentiere wie im Beweis von Theorem 10.4.12 und nutze dabei Theorem 10.8.4 statt Theorem 10.4.8 dort. Details: Übung. □

11. Messbare Funktionen

11.1. **Definition und elementare Eigenschaften.** Wir setzen in diesem Kapitel stets voraus, dass μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist und dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge ist.

Definition 11.1.1. Eine Funktion $f \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ heißt μ-messbar, falls

(i) $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ zwei μ-messbare Mengen sind und
(ii) $f^{-1}(U)$ für jedes offene $U \subset \mathbb{R}$ eine μ-messbare Menge ist.

Bemerkung 11.1.2. Sei $f\colon \Omega \to I$ eine Funktion mit $I \subset \mathbb{R}$ und der Inklusionsabbildung $\iota\colon I \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir verwenden insbesondere $I = \mathbb{R}$, $I = [0, \infty]$ oder $I = [0, \infty)$. Dann nennen wir f eine μ-messbare Funktion, falls $\iota \circ f$ eine μ-messbare Funktion ist. Später lassen wir ι laxerweise auch einfach weg.

Die zweite Bedingung können wir äquivalent wie folgt umformen.

Bemerkung 11.1.3. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:
(i) $f^{-1}(U)$ ist für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ eine μ-messbare Menge.
(ii) $f^{-1}(B)$ ist für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$ eine μ-messbare Menge.
(iii) $f^{-1}((-\infty, a))$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine μ-messbare Menge.

In Bedingung (iii) können wir $(-\infty, a)$ auch durch $(-\infty, a]$, (a, ∞) oder $[a, \infty)$ ersetzen.

Beweis.
- „(i) $\implies$ (ii)“: Die Menge $\mathcal{G} = \big\{B \subset \mathbb{R}\colon f^{-1}(B) \text{ ist } \mu\text{-messbar}\big\}$ ist eine σ-Algebra, die die offenen Mengen umfasst.
- „(iii) $\implies$ (ii)“: $\{(-\infty, a)\colon a \in \mathbb{R}\}$ erzeugt die Borel-Algebra $\mathcal{B}$.
- Die restlichen Implikationen sind klar. □

Bemerkung 11.1.4. Wir versehen $\overline{\mathbb{R}}$ mit der von den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und den Umgebungen $[-\infty, a)$ und $(a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$, von $\pm\infty$ erzeugten Topologie. In dieser Topologie ist eine Menge $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ genau dann offen, wenn $A \cap \mathbb{R}$ offen ist und im Falle $\pm\infty \in A$ auch eine Umgebung des jeweiligen Punktes in A enthalten ist.

Dann ist $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann μ-messbar, falls
(i) $f^{-1}(U)$ für jedes offen $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-messbare Menge ist oder
(ii) $f^{-1}([-\infty, a))$ für alle $a \in \mathbb{R}$ eine μ-messbare Menge ist.

Beweis. Es genügt, die Bedingungen aus Definition 11.1.1, oder äquivalente Bedingungen dazu, aus (ii) herzuleiten.
- Definition 11.1.1 (i): Dies folgt aus den Darstellungen

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, k)) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{+\infty\}) = \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, k)).$$

- Bemerkung 11.1.3 (iii): Dies folgt wegen

$$f^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}([-\infty, a)) \setminus f^{-1}(\{-\infty\}).$$ □

Lemma 11.1.5. *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine μ-messbare Funktion und sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $g \circ f$ eine μ-messbare Funktion.*

Beweis. Einfache Übung. □

Theorem 11.1.6.
(i) Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zwei μ-messbare Funktionen. Dann sind die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ ebenfalls μ-messbar. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$, so ist auch f/g eine μ-messbare Funktion.
(ii) Seien $f_k\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\liminf\limits_{k \to \infty} f_k$ und $\limsup\limits_{k \to \infty} f_k$ wieder μ-messbar.

Beweis.
(i) Da wir hier reellwertige Funktionen betrachten, sind alle zu untersuchenden Funktionen in jedem Punkt wohldefiniert.

- „$f+g$“: Dies folgt aus
$$(f+g)^{-1}((-\infty,a)) = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q}\\ r+s<a}} f^{-1}((-\infty,r))\cap g^{-1}((-\infty,s)).$$
- Die Funktionen $s\mapsto s^2$, $s\mapsto -s$ und $s\mapsto s/2$ sind auf $\mathbb{R}$ stetig. Daher folgt die μ-Messbarkeit von $f\cdot g$ aus der Identität
$$f\cdot g = \frac{1}{2}\left\{(f+g)^2 - f^2 - g^2\right\}$$
und Lemma 11.1.5.
- Es gilt
$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}((-\infty,a)) = \begin{cases} g^{-1}\left(\left(\frac{1}{a},0\right)\right), & a<0,\\ g^{-1}((-\infty,0)), & a=0,\\ g^{-1}\left((-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{a},\infty\right)\right), & a>0.\end{cases}$$
- Wir definieren für $s\in\mathbb{R}$ bzw. punktweise für reellwertige Funkionen
$$s_+ := \max\{s,0\} \quad \text{sowie} \quad s_- := \max\{-s,0\} = (-s)_+.$$
Die Abbildungen $s\mapsto s_+$ und $s\mapsto s_-$ sind stetig und es gilt $s=s_+-s_-$. Weiterhin gelten
$$|f| = f_+ + f_-, \quad \max\{f,g\} = f + (g-f)_+$$
sowie $\min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}$. Daraus folgt die μ-Messbarkeit dieser Funktionen.

(ii) Seien $f_k\colon\Omega\to[-\infty,\infty]$, $k\in\mathbb{N}$, μ-messbar. Dann gelten die Darstellungen
$$\begin{aligned}\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a)) &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k^{-1}([-\infty,a)),\\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k &= -\inf_{k\in\mathbb{N}}(-f_k),\\ \liminf_{k\to\infty} f_k &= \sup_{l\in\mathbb{N}}\inf_{k\ge l} f_k\end{aligned}$$
und
$$\limsup_{k\to\infty} f_k = -\liminf_{k\to\infty}(-f_k).$$
Hieraus folgt die μ-Messbarkeit dieser Funktionen. □

Wir können μ-messbare Funktionen durch „Treppenfunktionen“ approximieren. Dabei benutzen wir die charakteristische Funktion χ_A einer Menge A.

Theorem 11.1.7. *Sei $f\colon\Omega\to[0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Dann gibt es μ-messbare Mengen $A_k\subset\Omega$, $k\in\mathbb{N}$, mit*
$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}.$$

Beweis. Wir definieren
$$A_1 := \{x\in\Omega\colon f(x)\ge 1\} = f^{-1}([1,\infty]).$$
Dann ist A_1 eine μ-messbare Menge. Induktiv definieren wir nun für $k=2,3,\ldots$ die μ-messbaren Mengen
$$A_k := \left\{x\in\Omega\colon f(x)\ge \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\chi_{A_j}(x)\right\}.$$

Dann ist leicht einzusehen, dass

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$$

gilt.

$\star$ Der Vollständigkeit halber beweisen wir diese elementare Gleichheit: Offenbar gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$f \ge \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \chi_{A_k}.$$

Durch Grenzübergang folgt daraus in ganz Ω die Abschätzung

$$f \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}. \tag{11.1.1}$$

Im Falle $f(x) = 0$ oder $f(x) = \infty$ ist die Aussage klar. Ist $0 < f(x) < \infty$, so gilt für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $x \notin A_k$, da sonst $\infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) > f(x)$ der Abschätzung (11.1.1) widersprechen würde. Sei also $k \in \mathbb{N}$ mit $x \notin A_k$. Dann folgt nach (11.1.1) und der Definition der Menge A_k

$$0 \le f(x) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \chi_{A_l}(x) < \frac{1}{k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} \chi_{A_l}(x) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \chi_{A_l}(x) \le \frac{1}{k}.$$

Da es unendlich viele solche Zahlen $k \in \mathbb{N}$ gibt, folgt die Gleichheit durch Grenzübergang. $\square$

Fr 22.01.2021

Bemerkung 11.1.8.

(i) Die Konvergenz

$$f_k := \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} \chi_{A_l} \to f$$

ist monoton. Ist f beschränkt, so gilt sogar $f_k \rightrightarrows f$ (Kleine Übung). Vergleiche dazu auch den nachfolgenden Satz von Egoroff, Theorem 11.2.1.

(ii) Durch Approximation von f_+ und f_- sehen wir, dass sich jede μ-messbare Funktion $f\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ durch „Treppenfunktionen“ approximieren lässt.

Definition 11.1.9. Eine Aussage(form) $A(x)$ gilt für μ-fast alle $x \in \Omega$, bzw. μ-fast überall, falls

$$\mu(\{x \in \Omega\colon A(x) \text{ gilt nicht}\}) = 0$$

ist.

Definition 11.1.10. Eine Funktion $F\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Carathéodory-Funktion**, falls

(i) die Abbildung $x \mapsto F(x, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ eine μ-messbare Abbildung ist und
(ii) die Abbildung $y \mapsto F(x, y)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ stetig ist.

Lemma 11.1.11. *Sei $F\colon \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion und sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine μ-messbare Funktion. Dann ist $f(x) := F(x, u(x))$ ebenfalls μ-messbar.*

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $F(x, \cdot) \in C^0(\mathbb{R})$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Da die Ausnahmemenge eine Nullmenge ist, ändert sie Urbilder höchstens um Nullmengen, bewirkt also keine Änderung für die Messbarkeit.

Wir behaupten, dass

$$\{x \in \Omega\colon f(x) \le a\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{x \in \Omega\colon F(x,u(x)) \le a\} \\
&= \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y\in\mathbb{Q}} \left(\left\{x \in \Omega\colon F(x,y) < a + \tfrac{1}{l}\right\} \cap \left\{x \in \Omega\colon |u(x)-y| < \tfrac{1}{k}\right\}\right) \\
&\equiv \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{y\in\mathbb{Q}} RS
\end{aligned}$$

gilt. Da auf der rechten Seite für feste l, k, y nach den Schnitten und der Vereinigung μ-messbare Mengen stehen, folgt daraus die Behauptung. Wir zeigen nun diese Mengengleichheit.

- „$\subset$“: Seien $x \in f^{-1}((-\infty, a])$ und $l \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann steht auf der rechten Seite der folgenden abgesetzten Formel aufgrund der Stetigkeit von $F(x,\cdot)$ eine offene Menge, die nach Wahl von x den Punkt $u(x)$ enthält. Somit gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$B_{\frac{1}{k_0}}(u(x)) \subset F(x,\cdot)^{-1}\left(\left(-\infty, a + \tfrac{1}{l}\right)\right).$$
Somit gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $y \in B_{\frac{1}{k}}(u(x)) \cap \mathbb{Q}$ mit $F(x,y) < a + \frac{1}{l}$. Also gilt $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{y\in\mathbb{Q}} RS$. Da $l \in \mathbb{N}_{>0}$ oben beliebig gewählt war, folgt $x \in \bigcap\limits_{l\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{y\in\mathbb{Q}} RS$ wie behauptet.
- „$\supset$“: Sei $x \in \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{y\in\mathbb{Q}} RS$ beliebig. Somit gibt es zu jedem $l \ge 1$ und jedem $k \ge 1$ ein $y \in \mathbb{Q}$, so dass RS für diese Werte x, l, k, y gilt. Fixiere zunächst $l \ge 1$. Wähle nun zu gegebenem $l \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Folge $\left(y_k^l\right)_{k\in\mathbb{N}_{>0}} \subset \mathbb{Q}$ mit
$$\left|u(x) - y_k^l\right| < \tfrac{1}{k} \quad \text{und} \quad F\left(x, y_k^l\right) < a + \tfrac{1}{l}$$
für alle $k \ge 1$ wählen. Hieraus folgt insbesondere $y_k^l \to u(x)$ für festes $l \in \mathbb{N}_{>0}$ und $k \to \infty$. Nun ist $F(x,\cdot)$ nach Annahme stetig. Daher erhalten wir im Limes $k \to \infty$ für das fixierte $l \ge 1$ die Ungleichung $F(x,u(x)) \le a + \frac{1}{l}$. Wir lassen nun $l \to \infty$ und erhalten die Behauptung. □

Ist μ ein Borelmaß, so erhalten wir die μ-Messbarkeit aus der (Halb-)Stetigkeit.

Lemma 11.1.12. *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und μ ein Borelmaß. Dann ist f eine μ-messbare Funktion.*

Beweis. Die Urbilder von $\pm\infty$ sind leer und daher μ-messbar. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f^{-1}(U)$ aufgrund der Stetigkeit von f offen. Da μ ein Borelmaß ist, ist $f^{-1}(U)$ auch μ-messbar. Also ist f eine μ-messbare Funktion. □

Bemerkung 11.1.13.

(i) Eine Funktion $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **oberhalbstetig**, falls
$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0)$$
für alle $x_0 \in \Omega$ gilt. Dies ist äquivalent zu den topologischen Bedingungen
- $f^{-1}([a,\infty]) =$ abgeschlossen für alle $a \in \mathbb{R}$ oder
- $f^{-1}([-\infty,a)) =$ offen für alle $a \in \mathbb{R}$.

Somit ist eine oberhalbstetige Funktion für ein Borelmaß μ eine μ-messbare Funktion.

(ii) Analog dazu sind unterhalbstetige Funktionen, also Funktionen $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \ge f(x_0)$$

für alle $x_0 \in \Omega$, μ-messbar.

Wir bemerken, dass hier die entsprechenden topologischen Bedingungen zu $f^{-1}([-\infty, a]) =$ abgeschlossen für alle $a \in \mathbb{R}$ bzw. $f^{-1}((a, \infty]) =$ offen für alle $a \in \mathbb{R}$ werden.

Beweis. $\star$ Wir zeigen die Äquivalenz der drei Bedingungen für Unterhalbstetigkeit. Dies ist nur deshalb als Zusatzstoff markiert, weil es sich um Material handelt, das unabhängig von messbaren Funktionen ist und durch Variation von Analysis-II-Methoden gezeigt wird.

- Wir bemerken zunächst, dass die topologischen Bedingungen für die abgeschlossenen Mengen durch Grenzübergang auch für $a = \pm\infty$ gelten, wenn wir sie für $a \in \mathbb{R}$ fordern.
- Durch Betrachtung der Komplemente sehen wir direkt, dass die beiden topologischen Bedingungen äquivalent sind.
- „$\Longleftarrow$“: Von der Topologie zum Limes inferior: Sei $f^{-1}((a, \infty])$ für alle $a \in \mathbb{R}$ offen. Sei $x_0 \in \Omega$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $a := f(x_0) - \varepsilon$. Dann ist also $f^{-1}((a, \infty])$ offen. Wegen $f(x_0) > a$ folgt $x_0 \in f^{-1}((a, \infty])$. Sei $x_n \to x_0$ eine Folge, so dass $(f(x_n))_n \subset \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Aus Offenheit und Konvergenz erhalten wir, dass es $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ bereits $x_n \in f^{-1}((a, \infty])$ gilt. Also folgt $f(x_n) > a$ und im Grenzwert erhalten wir $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq a = f(x_0) - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.
- „$\Longrightarrow$“: Vom Limes inferior zur Topologie: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $f^{-1}((a, \infty])$ nicht offen ist. Dann gibt es ein $x_0 \in f^{-1}((a, \infty])$ und eine Folge $(x_n)_n \subset \complement f^{-1}((a, \infty])$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Somit gilt $f(x_n) \leq a < f(x_0)$. Für diese spezielle Folge gilt also $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) < f(x_0)$. Daher erhalten wir $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) < f(x_0)$. Widerspruch. Die Behauptung folgt. □

11.2. **Die Sätze von Lusin und Egoroff.** Bei punktweiser Konvergenz erhalten wir außerhalb einer kleinen Menge gleichmäßige Konvergenz.

Theorem 11.2.1 (Egoroff)**.** *Sei μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < \infty$. Seien $f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Sei $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ebenfalls μ-messbar und zusätzlich μ-fast überall endlich. Gelte weiterhin $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$ und μ-fast alle $x \in \Omega$. Dann gibt es für alle $\delta > 0$ eine kompakte Menge $F \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega \setminus F) \leq \delta$ und*

$$\sup_{x\in F} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

für $k \to \infty$.

Beispiele 11.2.2. $\star$

(i) Im Allgemeinen benötigen wir die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$. Im Falle des Lebesguemaßes $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ konvergieren die Funktionen $f_k = \chi_{B_k(0)}$ zwar punktweise gegen die Funktion $f \equiv 1$, eine Aussage wie im Satz von Egoroff gilt jedoch nicht.

(ii) Betrachten wir $\mathcal{L}^1$ auf $[0, 1]$ sowie die Funktionen f_k mit $f_k(x) = x^k$, so sehen wir, dass wir nicht $\delta = 0$, was einer Ausnahmemenge vom Maß 0 entspricht, wählen können.

Beweis von Theorem 11.2.1. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wir definieren für $i, j \in \mathbb{N}$ Mengen

$$C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty} \left\{ x \in \Omega \colon |f_k(x) - f(x)| \geq 2^{-i} \right\}.$$

Diese Mengen sind aufgrund der μ-Messbarkeit von f_k und f alle μ-messbar. Weiterhin gilt direkt nach Definition $C_{i,(j+1)} \subset C_{i,j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Für μ-fast alle $x \in \Omega$ gilt $f_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Somit ist $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} C_{i,j}$ eine μ-Nullmenge. Wegen $\mu(\Omega) < \infty$ folgt daher mit Theorem 10.2.13 (iii)

$$\lim_{j\to\infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\right) = 0$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Somit gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $N(i) \in \mathbb{N}$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) \leq \delta \cdot 2^{-i-2}$. Wir definieren nun $A := \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} C_{i,N(i)}$. Dann folgt

$$\mu(\Omega \setminus A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Nach Definition der Mengen $C_{i,N(i)}$ erhalten wir für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in A} |f_k(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \quad \text{für alle } k \geq N(i).$$

Dies ist die gewünschte gleichmäßige Konvergenz. Nach Theorem 10.8.4 (ii) gibt es eine kompakte Menge $F \subset A$ mit $\mu(A \setminus F) \leq \delta/2$. Also folgt

$$\mu(\Omega \setminus F) \leq \mu(\Omega \setminus A) + \mu(A \setminus F) \leq \delta$$

wie gewünscht. □

Theorem 11.2.3 (Lusin). *Sei μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge mit $\mu(\Omega) < \infty$. Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ein μ-messbare und μ-fast überall endliche Funktion. Dann gibt es für alle $\delta > 0$ eine kompakte Menge $F \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega \setminus F) \leq \delta$, so dass $f|_F : F \to \mathbb{R}$ stetig ist.*

Beispiel 11.2.4. ⋆ Auf $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ mit dem Lebesgueschen Maß betrachten wir die Funktion $f = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$. Dann ist f in keinem Punkt stetig, aber die Einschränkung auf $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ ist stetig. An diesem Beispiel sieht man auch, dass man in Lusins Theorem keine **kompakte** Menge F finden kann (da deren Komplement offen ist), so dass $f|_F$ stetig ist und $\mu(\Omega \setminus F) = 0$ ist; wir können also im Allgemeinen nicht $\delta = 0$ wählen.

Beweis von Theorem 11.2.3.

(i) Zunächst zeigen wir den Satz für eine Treppenfunktion g. Seien $B_i \subset \Omega$, $1 \leq i \leq I$, paarweise disjunkte Mengen mit $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{I} B_i$ und sei

$$g = \sum_{i=1}^{I} b_i \chi_{B_i}.$$

Sei $\delta > 0$. Dann gibt es nach Theorem 10.8.4 (ii) kompakte Mengen $F_i \subset B_i$ mit

$$\mu(B_i \setminus F_i) \leq \delta \cdot 2^{-i}, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Da die Mengen B_i, $1 \leq i \leq I$, paarweise disjunkt sind, gilt dies auch für die Mengen F_i. Aufgrund der Kompaktheit folgt $\operatorname{dist}(F_i, F_j) > 0$ für alle $i \neq j$. Somit ist g auf der Menge $F = \bigcup\limits_{i=1}^{I} F_i \subset \Omega$ lokal konstant (um jeden Punkt gibt es eine Umgebung, in der g konstant ist) und daher stetig. Weiterhin ist $F \subset \Omega$ kompakt und es gilt

$$\mu(\Omega \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{I}(B_i \setminus F_i)\right) \le \sum_{i=1}^{I} \mu(B_i \setminus F_i) \le \delta.$$

Di 26.01.2021

(ii) Nach Theorem 11.1.7 gibt es Treppenfunktionen $f_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{für } x \in \Omega,$$

nämlich, unter Benutzung der Mengen A_k aus diesem Theorem,

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{A_j}.$$

Für festes k betrachten wir nun die Mengen $(A_j)_{1\le j\le k}$ und $\Omega \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j$. Wir betrachten weiterhin alle möglichen (endlichen) Schnitte dieser Mengen und können daraus die gröbste dieser Mengenfamilie untergeordnete Partition von Ω erhalten. Diese Partition besteht aus μ-messbaren Mengen. Wir fassen sie als (paarweise disjunkte) Mengenfamilie auf und bezeichnen sie mit $(B_{ik})_{1\le i\le I_k}$. Mit

$$b_{ik} = \sum_{B_{ik}\subset A_j} \frac{1}{j}, \quad 1 \le i \le I_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

erhalten wir daraus

$$f_k = \sum_{i=1}^{I_k} b_{ik}\chi_{B_{ik}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $\delta > 0$. Nach (i) gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ zur Funktion $g = f_k$ kompakte Mengen $F_k \subset \Omega$, so dass

$$\mu(\Omega \setminus F_k) \le \delta \cdot 2^{-k-2},$$

so dass die Abbildungen $f_k|_{F_k} \colon F_k \to \mathbb{R}$ stetig sind. Nach dem Satz von Egoroff, Theorem 11.2.1, gibt es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit

$$\mu(\Omega \setminus K) \le \tfrac{\delta}{2} \quad \text{und} \quad \sup_{x\in K} |f_k(x) - f(x)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wir definieren nun $F := K \cap \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} F_k$. Dann ist F als Schnitt kompakter Mengen selbst wieder kompakt und es gilt

$$\mu(\Omega \setminus F) = \mu\left((\Omega \setminus K) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty}(\Omega \setminus F_k)\right) \le \mu(\Omega \setminus K) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\Omega \setminus F_k) \le \delta.$$

Wegen $F \subset K$ liegt in F gleichmäßige Konvergenz vor. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $f_k|_F \rightrightarrows f|_F$ ist $f|_F$ stetig und die Behauptung folgt. $\square$

11.3. **Maßkonvergenz.**

Definition 11.3.1 (Maßkonvergenz)**.** Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Seien $f, f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar und sei f eine μ-fast überall endliche Funktion.

Dann konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f, $f_k \xrightarrow{\mu} f$ für $k \to \infty$, falls für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in \Omega \colon |f(x) - f_k(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0$$

für $k \to \infty$ gilt.

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen Maßkonvergenz und μ-fast überall punktweiser Konvergenz.

Theorem 11.3.2. *Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Seien $f, f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar und sei f eine μ-fast überall endliche Funktion.*

Ist $\mu(\Omega) < \infty$ und gilt $f_k \to f$, $k \to \infty$, μ-fast überall, so gilt auch $f_k \xrightarrow{\mu} f$, für $k \to \infty$.

Beweis. $\star\star$ [1] Wir gehen wie beim Beweis des Satzes von Egoroff, Theorem 11.2.1, vor. Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren für $j \in \mathbb{N}$ Mengen

$$C_j := \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x \in \Omega\colon |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}.$$

Aufgrund der μ-Messbarkeit von f und f_k sind die Mengen C_j ebenfalls μ-messbar. Weiterhin gelten $C_{j+1} \subset C_j$ für $j \in \mathbb{N}$, sowie $\mu(C_1) \le \mu(\Omega) < \infty$. Da $f_k(x) \to f(x)$, $k \to \infty$, für μ-fast alle $x \in \Omega$ konvergiert, folgt aus Theorem 10.2.13 (iii)

$$\mu(\{x \in \Omega\colon |f_j(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \le \mu(C_j) \to \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j\right) = 0$$

für $j \to \infty$ wie gewünscht. $\square$

Für die Umkehrung dieser Aussage gibt es ein Gegenbeispiel. Dabei betrachtet man charakteristische Funktionen f_k zu Intervallen der Länge 2^{-n}. Man startet ganz links bei 0 und legt das Intervall für das nächste k jeweils direkt rechts daneben. Hat man so das gesamte Intervall $[0,1)$ ausgeschöpft, so startet man mit Intervallen der Länge $2^{-(n+1)}$ wieder von vorne bei 0.

Beispiel 11.3.3. $\star$ Sei $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$ und sei μ das Lebesguemaß. Wir betrachten die Funktionen

$$f_k = \chi_{\left[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k+1-2^n}{2^n}\right)},$$

$k \in \mathbb{N}_{>0}$, wobei wir für k den Index $n \in \mathbb{N}$ so gewählt haben, dass $2^n \le k < 2^{n+1}$ gilt. Es folgt für beliebige $0 < \varepsilon < 1$

$$\mu(\{x \in \Omega\colon |f_k(x)| \ge \varepsilon\}) \le \mu(\{x \in \Omega\colon |f_k(x)| > 0\}) = \frac{1}{2^n} \le \frac{2}{k} \to 0$$

für $k \to \infty$. Damit gilt $f_k \xrightarrow{\mu} 0$ für $k \to \infty$. Für $x \in \Omega$, $n, k \in \mathbb{N}$ gilt jedoch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } k = [2^n x] + 2^n, \\ 0, & \text{für alle übrigen } k \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $[s] = \sup\{n \in \mathbb{Z}\colon n \le s\}$ die Gaußklammer von s. Somit ist $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in [0,1)$ divergent.

Für Teilfolgen erhält man jedoch

Theorem 11.3.4. *Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Seien $f, f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar und sei f eine μ-fast überall endliche Funktion.*

Gilt $f_k \xrightarrow{\mu} f$ für $k \to \infty$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_l$ von $(f_k)_k$ mit

$$f_{k_l} \to f \quad \mu\text{-fast überall für } l \to \infty.$$

[1] Neues Symbol: Würde ich eigentlich schon gerne zeigen, passt aber nicht mehr in das Semester hinein.

Beweis. ⋆ ⋆ Für $k, l \in \mathbb{N}$ definieren wir die Mengen

$$A_{k,l} := \left\{x \in \Omega \colon |f_l(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\right\}.$$

Aufgrund der Konvergenz im Maß gilt $\mu(A_{k,l}) \to 0$ für $l \to \infty$ und festes $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen für $k \in \mathbb{N}$ ein $\varphi(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(A_{k,\varphi(k)}) \leq 2^{-k-1}.$$

Nun definieren wir

$$B_l := \bigcup_{k \geq l} A_{k,\varphi(k)}$$

und erhalten

$$\mu(B_l) \leq \sum_{k \geq l} \mu(A_{k,\varphi(k)}) \leq 2^{-l}$$

für $l \in \mathbb{N}$. Es gilt $B_{l+1} \subset B_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Da $\mu(B_1) < \infty$ ist, erhalten wir mit Theorem 10.2.13 (iii)

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} B_l\right) = \lim_{l \to \infty} \mu(B_l) = 0.$$

Sei also $x \notin \bigcap\limits_{l=0}^{\infty} B_l$. Dann existiert $l \in \mathbb{N}$ mit $x \notin B_l = \bigcup\limits_{k \geq l} A_{k,\varphi(k)}$. Es folgt $x \notin A_{k,\varphi(k)}$ für alle $k \geq l$. Nach Definition bedeutet dies

$$|f_{\varphi(k)} - f(x)| < 2^{-k}$$

für alle $k \geq l$. Somit folgt $f_{\varphi(k)}(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$, also, wie behauptet, Konvergenz außerhalb einer μ-Nullmenge. □

12. Integrationstheorie

Wir folgen weiterhin [11], einer Vorlage, die uns schnell zum Lebesgueintegral führt. Ein anderer konzeptionell sehr schöner Zugang findet sich in [1], liefert ein allgemeineres Integral, sprengt jedoch den zeitlichen Umfang der Vorlesung, ist jedoch herauskommentiert auch in diesem Skript zu finden.

Wir haben in Analysis II bereits das Riemannsche Integral kennengelernt. Dies lässt sich auch auf Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Mit dem Lebesgueschen Integral können wir jedoch mehr Funktionen integrieren, z. B. die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und erhalten mehr (Konvergenz-)Sätze.

Wir nehmen in diesem Kapitel stets an, dass

- μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ ist und dass
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge ist.

12.1. Definition und elementare Eigenschaften.

Definition 12.1.1. Eine Funktion $g \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **(σ-)Treppenfunktion**, falls $\operatorname{im} g$ höchstens abzählbar ist.

Später werden wir nur μ-messbare Treppenfunktionen betrachten.

Für eine Treppenfunktion g definieren wir das Integral ohne annehmen zu müssen, dass $\mu(\Omega) < \infty$ gilt oder μ-fast überall $|g| < \infty$ ist.

Definition 12.1.2.

(i) Sei $g \colon \Omega \to [0, \infty]$ eine μ-messbare Treppenfunktion. Dann definieren wir

$$\int_\Omega g \, d\mu := \sum_{0 < a < \infty} a \cdot \mu\left(g^{-1}(\{a\})\right) \leq \infty,$$

falls μ-fast überall $g < \infty$ gilt und sonst $\int_\Omega g \, d\mu = \infty$.

(ii) Sei $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-messbare Treppenfunktion. Gelte $\int\limits_\Omega g_+\,d\mu < \infty$ oder $\int\limits_\Omega g_-\,d\mu < \infty$. Dann definieren wir im Fall $|g| < \infty$ μ-fast überall

$$\int\limits_\Omega g\,d\mu = \int\limits_\Omega g_+\,d\mu - \int\limits_\Omega g_-\,d\mu = \sum_{0\neq a\in\mathbb{R}} a\cdot\mu\left(g^{-1}(\{a\})\right).$$

Weiterhin setzen wir $\int\limits_\Omega g\,d\mu = \pm\infty$, falls $\mu\left(g^{-1}(\{\pm\infty\})\right) > 0$ ist.

Mit diesen Treppenfunktionen als Vergleichsfunktionen definieren wir uneigentliche Integrierbarkeit.

Definition 12.1.3. Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-messbare Funktion.

(i) Wir definieren

$$\overline{\int\limits_\Omega} f\,d\mu \equiv \overline{\int} f := \inf\left\{\int\limits_\Omega g\,d\mu\colon g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfunktion mit } \int\limits_\Omega g_-\,d\mu < \infty \text{ und } g \ge f\ \mu\text{-f. ü.}\right\}$$

sowie

$$\underline{\int\limits_\Omega} f\,d\mu \equiv \underline{\int} f := \sup\left\{\int\limits_\Omega g\,d\mu\colon g \text{ ist } \mu\text{-messbare Treppenfunktion mit } \int\limits_\Omega g_+\,d\mu < \infty \text{ und } g \le f\ \mu\text{-f. ü.}\right\}$$

als **oberes** bzw. **unteres μ-Integral** von f.

(ii) Ist $\overline{\int} f = \underline{\int} f$, so heißt f **uneigentlich μ-integrabel** mit

$$\int\limits_\Omega f\,d\mu \equiv \int f = \overline{\int\limits_\Omega} f\,d\mu = \underline{\int\limits_\Omega} f\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(iii) Ist $\mu = \mathcal{L}^n$, so heißt das Integral **Lebesgue-Integral**.

Bemerkung 12.1.4. $\star$

(i) Die Bedingung an $\int g_-$ bzw. $\int g_+$ sichert dabei, dass die Integrale über die Treppenfunktionen nur jeweils in eine Richtung unendlich werden können.

(ii) Offenbar gilt stets $\underline{\int\limits_\Omega} f\,d\mu \le \overline{\int\limits_\Omega} f\,d\mu$.

(iii) Den Integrationsbereich Ω oder das Maß μ lassen wir in der Notation nur weg, wenn klar ist, über welche Menge und mit welchem Maß integriert wird.

Lemma 12.1.5. *Sei $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Dann ist f uneigentlich μ-integrabel.*

Beweis. Gelte ohne Einschränkung μ-fast überall $f < \infty$, denn sonst ist $\overline{\int} f = \underline{\int} f = +\infty$ und wir sind fertig.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so definieren wir für $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ die μ-messbaren Mengen

$$A_k := \{x \in \Omega\colon k\varepsilon \le f(x) < (k+1)\varepsilon\}$$

und die μ-messbaren Treppenfunktionen

$$e = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \chi_{A_k} \quad \text{sowie} \quad g = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \chi_{A_k}.$$

Es gilt $e \le f \le g$. Im Fall $\int e_+ \, d\mu = \infty$ ist $\underline{\int} f = \overline{\int} f = \infty$ und wir sind fertig. Sonst erhalten wir

$$\int_\Omega e \, d\mu \le \underline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \overline{\int_\Omega} f \, d\mu \le \int_\Omega g \, d\mu \le \int_\Omega e \, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(\Omega).$$

(ii) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(\Omega) = \infty$. Als Radonmaß ist μ auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ endlich. Wir zerlegen also $\mathbb{R}^n = \dot{\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}} Q_l$ disjunkt in beschränkte Würfel. Wir setzen $\Omega_l := \Omega \cap Q_l$ und erhalten wie oben Treppenfunktionen $e_l, g_l \colon \Omega_l \to [0, \infty]$ mit $e_l \le f \le g_l$ auf Q_l und

$$\int_{\Omega_l} g_l \, d\mu \le \int_{\Omega_l} e_l \, d\mu + 2^{-l} \varepsilon.$$

Wir setzen e_l, g_l konstant durch Null nach Ω fort. Dann sind $e = \sum\limits_{l=1}^{\infty} e_l$ und $g_l = \sum\limits_{l=1}^{\infty} g_l$ zwei μ-messbare Treppenfunktionen mit $e \le f \le g$ und es gilt

$$\int_\Omega g \, d\mu \le \int_\Omega e \, d\mu + \varepsilon.$$

Ist $\int e_+ = \infty$, so sind wir wie oben fertig. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir die Behauptung. □

Definition 12.1.6. Eine μ-messbare Funktion $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **μ-integrabel** bzw. **μ-integrierbar**, falls

$$\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$$

ist.

Fr 29.01.2021

Beispiele 12.1.7.

(i) Ist f eine μ-integrable Funktion, so ist f auch uneigentlich μ-integrabel.

(ii) Gilt μ-fast überall $f = 0$, so ist f eine μ-integrable Funktion und es gilt $\int\limits_\Omega f \, d\mu = 0$.

Beweis.

(i) Wir zerlegen $f = f_+ - f_-$. Nach Lemma 12.1.5 sind f_+ und f_- zwei uneigentlich μ-integrierbare Funktionen. Da die Treppenfunktion g dort nicht nur für $|f|$, sondern auch für f_+ und f_- eine obere Schranke ist, folgt $\int\limits_\Omega f_\pm \, d\mu < \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen mit $0 \le e_\pm \le f_\pm \le g_\pm$ μ-fast überall und

$$0 \le \int e_\pm \le \int f_\pm \le \int g_\pm \le \int e_\pm + \varepsilon < \infty.$$

Da die Mengen $A_\pm = \{x \in \Omega \colon f_\pm(x) > 0\}$ μ-messbar sind, dürfen wir annehmen, dass $e_\pm = g_\pm = 0$ in $\Omega \setminus A_\pm$ gilt. Somit sind $e := e_+ - g_-$ und $g := g_+ - e_-$

Treppenfunktionen mit $e \le f \le g$ μ-fast überall (mit Fallunterscheidungen und kleiner Skizze leicht einzusehen). Es gilt

$$\int e \le \underline{\int} f \le \overline{\int} f \le \int g \le \int e + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(ii) Die Behauptung ist offensichtlich; wir können $e = g = 0$ wählen. □

Theorem 12.1.8 (Monotonie des Integrals)**.** *Seien $f_1, f_2 \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uneigentlich μ-integrabel. Gilt μ-fast überall $f_1 \ge f_2$, so folgt*

$$\int_\Omega f_1 \, d\mu \ge \int_\Omega f_2 \, d\mu.$$

Beweis. Gelten für eine Funktion g μ-fast überall $g \ge f_1$ und $f_1 \ge f_2$, so gilt auch μ-fast überall $g \ge f_2$. Also ist

$$\int f_1 = \overline{\int} f_1 = \inf_{g \ge f_1} \int g \ge \overline{\int} f_2 = \int f_2,$$

wobei wir das Infimum über alle μ-messbaren Treppenfunktionen mit $g \ge f_1$ μ-fast überall und $\int g_- < \infty$ betrachten. □

Korollar 12.1.9. *Seien $f_1, f_2 \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uneigentlich μ-integrabel mit $f_1 = f_2$ μ-fast überall. Dann gilt $\int f_1 = \int f_2$.*

Theorem 12.1.10 (Tschebychev-Ungleichung)**.** *Sei $f \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt für alle $a > 0$*

$$\mu(\{x \in \Omega \colon |f(x)| \ge a\}) \le \frac{1}{a} \int_\Omega |f| \, d\mu.$$

Beweis. Wir wenden Theorem 12.1.8 auf die Funktionen $f_1 = |f|$ und $f_2 = a \cdot \chi_{\{x \in \Omega \colon |f(x)| \ge a\}}$ an. □

Korollar 12.1.11. *Seien $f, f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-integrierbar mit*

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Dann gilt $f_k \xrightarrow{\mu} f$ für $k \to \infty$ und es gibt eine Teilfolge $(f_{k_l})_l$ mit $f_{k_l} \to f$ μ-fast überall.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Tschebychev-Ungleichung, Theorem 12.1.10, erhalten wir

$$\mu(\{x \in \Omega \colon |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |f_k - f| \, d\mu \to 0$$

für $k \to \infty$. Nach Definition gilt also $f_k \xrightarrow{\mu} f$ für $k \to \infty$. Der zweite Teil der Behauptung folgt nun direkt aus Theorem 11.3.4. □

Theorem 12.1.12 (Linearität des Integrals)**.** *Seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrabel. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und λf μ-integrabel und es gelten*

$$\int_\Omega (f + g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$$

sowie

$$\int_\Omega (\lambda f) \, d\mu = \lambda \cdot \int_\Omega f \, d\mu.$$

Beweis. ⋆

(i) Es ist klar, dass die Behauptungen für Treppenfunktionen $f = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k\chi_{A_k}$, $g = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} b_k\chi_{B_k} : \Omega \to \mathbb{R}$ gelten. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $A_k = B_k$ gilt; sonst betrachten wir $(A_k \cap B_l)_{k,l\in\mathbb{N}}$.

(ii) Nach Theorem 11.1.6 ist die Funktion $f+g$ wieder μ-messbar. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen mit μ-fast überall $f_\varepsilon \le f \le f^\varepsilon$ und $g_\varepsilon \le g \le g^\varepsilon$ mit $\int (f^\varepsilon)_- < \infty$, $\int (f_\varepsilon)_+ < \infty$ und

$$\int f^\varepsilon - \int f \le \varepsilon, \quad \int f - \int f_\varepsilon \le \varepsilon$$

sowie analogen Bedingungen für g. Dann sind $f_\varepsilon + g_\varepsilon$ und $f^\varepsilon + g^\varepsilon$ Treppenfunktionen mit μ-fast überall $f_\varepsilon + g_\varepsilon \le f + g \le f^\varepsilon + g^\varepsilon$ und $\int (f_\varepsilon + g_\varepsilon)_+ < \infty$, $\int (f^\varepsilon + g^\varepsilon)_- < \infty$ sowie

$$\begin{aligned}\overline{\int}(f+g) &\le \int (f^\varepsilon + g^\varepsilon) = \int f^\varepsilon + \int g^\varepsilon \\ &\le \int f + \int g + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Analog dazu erhalten wir

$$\underline{\int}(f+g) \ge \int f + \int g - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir, dass $f+g$ uneigentlich μ-integrabel ist und es gilt $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Dies wenden wir auf die Funktionen $|f|$ und $|g|$ an. Weiterhin nutzen wir die Monotonie des Integrals. Damit erhalten wir

$$\int |f+g| \le \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| < \infty.$$

Somit ist $f+g$ eine μ-integrable Funktion.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen wie oben mit μ-fast überall $f_\varepsilon \le f \le f^\varepsilon$. Ist $\lambda \ge 0$, so sind λf_ε und λf^ε Treppenfunktionen mit μ-fast überall $\lambda f_\varepsilon \le \lambda f \le \lambda f^\varepsilon$ und $\int (\lambda f^\varepsilon)_- = \lambda \int (f^\varepsilon)_- < \infty$ sowie $\int (\lambda f_\varepsilon)_+ = \lambda \int (f_\varepsilon)_+ < \infty$. Es folgt

$$\overline{\int}(\lambda f) \le \int (\lambda f^\varepsilon) = \lambda \int f^\varepsilon \le \lambda \int f + \lambda\varepsilon$$

sowie, analog dazu,

$$\underline{\int}(\lambda f) \ge \lambda \int f - \lambda\varepsilon.$$

Somit ist λf uneigentlich μ-integrabel mit $\int (\lambda f) = \lambda \int f$. Wenden wir dies auf die Funktion $|f|$ an, so erhalten wir

$$\int |\lambda f| = |\lambda| \int |f| < \infty.$$

Ist $\lambda < 0$, so erhalten wir Treppenfunktionen $\lambda f^\varepsilon \le \lambda f \le \lambda f_\varepsilon$ μ-fast überall mit $\int (\lambda f^\varepsilon)_+ < \infty$ und $\int (\lambda f_\varepsilon)_- < \infty$. Beachte dabei, dass $(\lambda f^\varepsilon)_+ = |\lambda|(f^\varepsilon)_-$ und $(\lambda f_\varepsilon)_- = |\lambda|(f_\varepsilon)_+$ gelten. Der Rest des Beweises funktioniert nun analog zum Fall $\lambda \ge 0$. □

Korollar 12.1.13. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt*
$$\left|\int\limits_{\Omega} f\,d\mu\right| \le \int\limits_{\Omega} |f|\,d\mu.$$

Beweis. Es gilt $-|f| \le f \le |f|$. Wir benutzen nun die Monotonie des Integrals, Theorem 12.1.8. Das Vorzeichen dürfen wir nach Theorem 12.1.12 aus dem Integral herausziehen. Aus $-\int |f| \le \int f \le \int |f|$ folgt schließlich die Behauptung. ☐

Lemma 12.1.14. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Sei $\Omega_1 \subset \Omega$ eine μ-messbare Menge. Dann sind $f_1 := f|_{\Omega_1}$ über Ω_1 und $f \cdot \chi_{\Omega_1}$ über Ω μ-integrabel und es gilt*
$$\int\limits_{\Omega_1} f_1\,d\mu = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu.$$
Wir schreiben später auch
$$\int\limits_{\Omega_1} f\,d\mu \quad \textit{für} \quad \int\limits_{\Omega_1} f_1\,d\mu.$$

Beweis. ⋆

(i) Offenbar sind f_1 und $f \cdot \chi_{\Omega_1}$ auf Ω_1 bzw. Ω μ-messbar.

(ii) Sei $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-messbare Treppenfunktion mit $g \le f$. Dann sind $g_1 := g|_{\Omega_1}\colon \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g \cdot \chi_{\Omega_1}\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ebenfalls Treppenfunktionen und es gilt $g_1 \le f_1$ sowie $g \cdot \chi_{\Omega_1} \le f \cdot \chi_{\Omega_1}$. Es gilt
$$\int\limits_{\Omega_1} g_1\,d\mu = \int\limits_{\Omega} (g \cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu.$$
Analoges gilt für Treppenfunktionen $h \ge f$.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen g, h mit $g \le f \le h$ und
$$\int h - \int f \le \varepsilon \quad \text{und} \quad \int f - \int g \le \varepsilon.$$
Wir definieren nun g_1, h_1 wie oben und erhalten
$$\begin{aligned}\overline{\int\limits_{\Omega_1}} f_1\,d\mu - \underline{\int\limits_{\Omega_1}} f_1\,d\mu &\le \int\limits_{\Omega_1} h_1\,d\mu - \int\limits_{\Omega_1} g_1\,d\mu\\ &= \int\limits_{\Omega_1} (h_1 - g_1)\,d\mu = \int\limits_{\Omega} ((h-g)\cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu\\ &\le \int\limits_{\Omega} (h-g)\,d\mu = \int\limits_{\Omega} h\,d\mu - \int\limits_{\Omega} g\,d\mu \le 2\varepsilon\end{aligned}$$
sowie
$$\overline{\int\limits_{\Omega}} (f \cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu - \underline{\int\limits_{\Omega}} (f \cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu \le \int\limits_{\Omega} ((h-g)\cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu \le 2\varepsilon.$$
Somit sind die Funktionen f_1 und $f \cdot \chi_{\Omega_1}$ uneigentlich μ-integrabel. Weiter gelten
$$\int\limits_{\Omega_1} f_1\,d\mu - \int\limits_{\Omega} (f \cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu \le \int\limits_{\Omega_1} h_1\,d\mu - \int\limits_{\Omega} (g \cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu$$

$$= \int_\Omega ((h-g)\cdot \chi_{\Omega_1})\,d\mu$$
$$\le \int_\Omega (h-g)\,d\mu \le 2\varepsilon$$

und analog

$$\int_{\Omega_1} f_1\,d\mu - \int_\Omega (f\cdot\chi_{\Omega_1})\,d\mu \ge \int_{\Omega_1} g_1\,d\mu - \int_\Omega (h\cdot\chi_{\Omega_1})\,d\mu$$
$$= \int_\Omega ((g-h)\cdot\chi_{\Omega_1})\,d\mu \ge -2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, stimmen die beiden Integrale überein.

(iv) Zum Nachweis der μ-Integrabilität wenden wir die gerade gezeigte Integralgleichheit auf $|f|$ an, nutzen die Monotonie des Integrals, Theorem 12.1.8, und erhalten
$$\int_{\Omega_1} |f_1|\,d\mu = \int_\Omega |f\cdot\chi_{\Omega_1}|\,d\mu \le \int_\Omega |f|\,d\mu < \infty.$$
Hieraus folgt die Behauptung. □

Korollar 12.1.15. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Sei $\Omega_1 \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega_1) = 0$. Dann folgt*
$$\int_{\Omega_1} f\,d\mu = 0.$$

Beweis. Als μ-Nullmenge ist Ω_1 eine μ-messbare Menge. Wir nutzen nun die Integralgleichheit aus Lemma 12.1.14. Da $f\cdot\chi_{\Omega_1} = 0$ μ-fast überall gilt, folgt die Behauptung aus Korollar 12.1.9. □

Theorem 12.1.16. *Sei $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Sei $\Omega = \Omega_1 \dot\cup \Omega_2$ eine disjunkte Zerlegung in μ-messbare Mengen Ω_1 und Ω_2. Dann gilt*
$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_{\Omega_1} f\,d\mu + \int_{\Omega_2} f\,d\mu.$$

Beweis. Wir schreiben $f = f\cdot\chi_{\Omega_1} + f\cdot\chi_{\Omega_2}$ und nutzen die Linearität des Integrals, Theorem 12.1.12. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 12.1.14. □

Wir wollen nun das Lebesguesche Integral mit dem Riemannschen Integral vergleichen. Dazu erinnern wir zunächst an die Charakterisierung Riemann integrabler Funktionen aus Analysis II, die auch im $\mathbb{R}^n$ gilt:

Theorem 12.1.17 (Lebesgue)**.** *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Würfel. Dann ist eine beschränkte Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen $\Sigma(f) := \{x \in Q\colon f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge ist: $\mathcal{L}^n(\Sigma(f)) = 0$.*

Beweis. Siehe Analysis II, [7], für $n = 1$ bzw. [11, Satz 3.1.5] für beliebige Dimensionen. □

Korollar 12.1.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte eigentlich (nicht uneigentlich) Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f auch $\mathcal{L}^n$-messbar und $\mathcal{L}^n$-integrabel und das Riemannsche und das Lebesguesche Integral stimmen überein.*

Beweisidee. Nutze Treppenfunktionen wie sie beim Riemannschen Integral auftreten als Approximation von oben und unten. □

Beweis. ⋆ Ohne Einschränkung seit $\Omega = Q$ ein abgeschlossener Würfel; sonst setzen wir f durch Null auf einen solchen Würfel fort. Nach dem Satz von Lebesgue, Theorem 12.1.17, gilt $\mathcal{L}^n(\Sigma(f)) = 0$. Die auf $Q \setminus \Sigma(f)$ eingeschränkte Funktion ist stetig und daher $\mathcal{L}^n$-messbar. Da $\Sigma(f)$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge ist, ist somit auch die ursprüngliche Funktion f $\mathcal{L}^n$-messbar.

Sei hier $\mathcal{R}$ die Menge aller Riemannschen Treppenfunktionen. Treppenfunktionen in $\mathcal{R}$ sind $\mathcal{L}^n$-messbar und σ-Treppenfunktionen. Wir hatten das Riemannsche Integral im Falle

$$\sigma(f,(Q_k)_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \operatorname*{osc}_{Q_j} f \to 0$$

für gegen Null gehende Feinheiten von Zerlegungen $Q = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{k}} Q_k$ als Grenzwert von

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot f(x_j), \quad x_j \in Q_j,$$

definiert. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \inf_{Q_j} f \le \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot f(x_j) &\le \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \sup_{Q_j} f \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \inf_{Q_j} f + \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \operatorname*{osc}_{Q_j} f.\end{aligned}$$

Da die untere Schranke bei weiterer Verfeinerung wächst und die obere Schranke fällt, erhalten wir für das Riemannsche Integral, hier zur Unterscheidung mit $\int^R$ bezeichnet,

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \inf_{Q_j} f \le \int\limits_Q^R f \le \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \sup_{Q_j} f \le \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) \cdot \inf_{Q_j} f + \sigma(f,(Q_k)_k).$$

Betrachten wir nun Treppenfunktionen, die auf jedem Q_j das Infimum bzw. Supremum auf dieser Menge annehmen, so folgt

$$\int\limits_Q^R f = \sup\left\{\int e \colon e \le f,\, e \in \mathcal{R}\right\} = \inf\left\{\int g \colon f \le g,\, g \in \mathcal{R}\right\}.$$

Auf den hier benutzten Treppenfunktionen in $\mathcal{R}$ stimmt das Riemannsche Integral mit dem Lebesgueintegral überein. Da wir die Treppenfunktionen auch als σ-Treppenfunktionen bei der Bestimmung des Lebesgueintegrals nutzen können, erhalten wir

$$\int\limits_{\underline{Q}} f \, d\mathcal{L}^n \ge \sup\left\{\int e \colon e \le f,\, e \in \mathcal{R}\right\} = \int\limits_Q^R f$$

sowie, aufgrund der stets gültigen Ungleichung zwischen $\overline{\int}$ und $\underline{\int}$,

$$\underline{\int\limits_Q} f\, d\mathcal{L}^n \le \overline{\int\limits_Q} f\, d\mathcal{L}^n \le \inf\left\{\int g\colon f \le g,\, g \in \mathcal{R}\right\} = \int\limits_Q^R f.$$

Somit gilt überall Gleichheit und die Integrale stimmen überein. □

Di 02.02.2021

12.2. **Konvergenzsätze.**

Theorem 12.2.1 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $f_k\colon \Omega \to [0,\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega \liminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k\, d\mu.$$

Beweis.

(i) Nach Theorem 11.1.6 ist auch $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ eine μ-messbare Funktion. Nach Lemma 12.1.5 sind f_k, $k \in \mathbb{N}$, und $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ daher uneigentlich μ-integrabel.

(ii) Sei $g = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j \chi_{A_j}$ eine μ-messbare Treppenfunktion mit $g \le f := \liminf\limits_{k\to\infty} f_k$. Nach Definition des Integrals für uneigentlich μ-integrable Funktionen genügt der Nachweis, dass

$$\int\limits_\Omega g\, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k\, d\mu$$

gilt.

(iii) Ohne Einschränkung sei $g \ge 0$. Wir dürfen weiterhin annehmen, dass $a_0 = 0$ und $a_j > 0$ für $j \ge 1$ gelten (ggf. wählen wir $A_j = \emptyset$) und dass die Mengen A_j, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind.

(iv) Fixiere $0 < t < 1$. Wir definieren μ-messbare Mengen

$$B_{j,k} := \{x \in A_j\colon f_l(x) > t a_j \text{ für } l \ge k\}.$$

Dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}_{>0}$

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,k}.$$

Direkt nach Definition gilt für alle $j, k \in \mathbb{N}$ die Inklusion $B_{j,k} \subset B_{j,k+1}$. Daher erhalten wir mit Theorem 10.2.13 (ii) für $j > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_{j,k}) = \mu(A_j).$$

Aufgrund der Additivität des Integrals bei Zerlegung in disjunkte Integrationsbereiche, Theorem 12.1.16, erhalten wir für $J, k \in \mathbb{N}$ wegen $a_0 = 0$

$$\int\limits_\Omega f_k\, d\mu \ge \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{A_j} f_k\, d\mu \ge \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{B_{j,k}} f_k\, d\mu \ge t \cdot \sum_{j=0}^{J} a_j \cdot \mu(B_{j,k}).$$

Mit $k \to \infty$ folgt daraus

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k\, d\mu \ge t \cdot \sum_{j=0}^{J} a_j \cdot \mu(A_j).$$

Nun lassen wir $J \to \infty$ und bekommen

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k\, d\mu \ge t \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \mu(A_j) = t \cdot \int\limits_\Omega g\, d\mu.$$

Dies gilt für alle $t \in (0,1)$. Im Grenzwert $t \uparrow 1$ erhalten wir somit die behauptete Ungleichung. □

Beispiel 12.2.2. ⋆ Das Beispiel $\mu = \mathcal{L}^n$ auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ und die Funktionenfolge $f_k := -k^{-n}\chi_{B_k(0)}$, $k \in \mathbb{N}$, zeigen, dass die Bedingung $f \geq 0$ im Allgemeinen notwendig ist.

Für nichtnegative Funktionen H erhalten wir Unterhalbstetigkeit für Integranden, wie sie in der Variationsrechnung auftreten.

Beispiel 12.2.3. Seien $f, f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-integrabel mit

$$\int_\Omega |f_k - f|\, d\mu \to 0$$

für $k \to \infty$. Sei $H \geq 0$ eine Carathéodory-Funktion, siehe Definition 11.1.10. Dann gilt

$$\int_\Omega H(x, f(x))\, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega H(x, f_k(x))\, d\mu =: I.$$

Beweis. Wähle $\Lambda \subset \mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k\in\Lambda}} \int_\Omega H(x, f_k(x))\, d\mu = I$. Nach Korollar 12.1.11 gilt $f_k \xrightarrow{\mu} f$ für $k \to \infty$ und es gibt $\Gamma \subset \Lambda$ mit $f_k \to f$ μ-fast überall für $\Gamma \ni k \to \infty$. Da $H(x, \cdot)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ nach Definition einer Carathéodory-Funktion stetig ist, erhalten wir

$$H(x, f_k(x)) \to H(x, f(x))$$

für μ-fast alle $x \in \Omega$ für $\Gamma \ni k \to \infty$. Nach dem Lemma von Fatou, Theorem 12.2.1, folgt daher

$$\begin{aligned}
\int_\Omega H(x, f(x))\, d\mu &= \int_\Omega \lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in\Gamma}} H(x, f_k(x))\, d\mu \\
&\leq \liminf_{\substack{k\to\infty\\ k\in\Gamma}} \int_\Omega H(x, f_k(x))\, d\mu \\
&= \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega H(x, f_k(x))\, d\mu
\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Theorem 12.2.4 (Beppo Levi, Satz von der monotonen Konvergenz)**.**
Seien $f_k \colon \Omega \to [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar mit $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu.$$

Beweis. Die μ-Messbarkeit alles auftretenden Funktionen folgt aus Theorem 11.1.6.

Aufgrund der Monotonie des Integrals, Theorem 12.1.8, erhalten wir für jedes feste $j \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega f_j\, d\mu \leq \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu.$$

Da die linken Seite für alle j gleichmäßig beschränkt ist, folgt daraus direkt

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\, d\mu \leq \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu.$$

Aus dem Lemma von Fatou, Theorem 12.2.1, erhalten wir die noch fehlende Ungleichung und somit die Behauptung. □

Theorem 12.2.5 (Lebesgue, Satz von der dominierten Konvergenz)**.** *Sei $g\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine μ-integrierbare Funktion. Seien $f, f_k\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar mit $|f_k| \le g$, $k \in \mathbb{N}$, μ-fast überall und $f_k \to f$ für $k \to \infty$ μ-fast überall. Dann gilt*

$$\left|\int\limits_\Omega f_k\,d\mu - \int\limits_\Omega f\,d\mu\right| \le \int\limits_\Omega |f_k - f|\,d\mu \to 0$$

für $k \to \infty$. Daraus folgt direkt

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k\,d\mu = \int\limits_\Omega f\,d\mu.$$

Beweis. Wegen $|f_k| \le g$, $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir, dass alle Funktionen f_k, $k \in \mathbb{N}$, μ-integrierbar sind. Weiterhin erhalten wir μ-fast überall in Ω die Abschätzung $|f| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_k| \le g < \infty$. Insbesondere gilt μ-fast überall in Ω die Ungleichung $|f_k - f| \le 2g$. Die Funktion $|f_k - f|$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ μ-fast überall wohldefiniert (also nicht von der Form „$\infty - \infty$") und eine μ-integrierbare Funktion. Wir erhalten $2g - |f_k - f| \ge 0$ μ-fast überall in Ω für beliebige $k \in \mathbb{N}$. Nun wenden wir die Tatsache, dass Nullmengen bei der Integration keine Rolle spielen, Korollar 12.1.9, das Lemma von Fatou, Theorem 12.2.1, und die Linearität des Integrals, Theorem 12.1.12, an und erhalten

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega 2g\,d\mu &\overset{\text{f. ü.}}{\underset{\text{gleich}}{=}} \int\limits_\Omega \liminf_{k\to\infty} (2g - |f_k - f|)\,d\mu \\ &\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (2g - |f_k - f|)\,d\mu \\ &\overset{\text{lin.}}{=} \int\limits_\Omega 2g\,d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |f_k - f|\,d\mu \le \int\limits_\Omega 2g\,d\mu.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |f_k - f|\,d\mu = 0.$$

Die erste behauptete Ungleichung folgt nun aus der Linearität des Integrals und durch Hineinziehen der Betragsstriche ins Integral, Korollar 12.1.13. Beachte dabei, dass $|f_k|, |f| \le g$ dabei die μ-Integrierbarkeit von f_k und f sichert. ☐

Fr 05.02.2021

Als wichtige Anwendung erhalten wir

Theorem 12.2.6 (Differenzieren unter dem Integral)**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Sei $f\colon \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Für festes $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ über $[a,b]$ Lebesgue-integrabel.
(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existiert und ist beschränkt. (Lokal gleichmäßige Beschränktheit in x genügt.)

Dann ist $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ für festes $x \in \mathbb{R}$ bezüglich y über $[a,b]$ Lebesgue-integrabel und es gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dy\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis. Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall $[a,b] = [0,1]$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $h \neq 0$. Dann gilt aufgrund der Linearität des Integrals

$$\frac{\int\limits_0^1 f(x+h,y)\,dy - \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy}{h} = \int\limits_0^1 \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\,dy.$$

Für eine beliebige Folge $h_k \to 0$, $k \to \infty$, gilt

$$g_k(x) := \frac{f(x+h_k,y)-f(x,y)}{h_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$|g_k| \le \sup\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| =: C$$

für beliebige $k \in \mathbb{N}$. Als Limes von Lebesgue-messbaren Funktionen, siehe Theorem 11.1.6, ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ bezüglich $y \in [0,1]$ Lebesgue-messbar und aufgrund der Beschränktheit integrabel. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, Theorem 12.2.5, erhalten wir

$$\int\limits_0^1 g_k(y)\,dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Da dies für jede Folge $h_k \to 0$, $k \to \infty$, gilt, erhalten wir (man lese die Gleichung von rechts)

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\int\limits_0^1 f(x+h,y)\,dy - \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy}{h} = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

wie behauptet. □

12.3. **Der Satz von Fubini.**

Bemerkung 12.3.1. Ziel: Wir wollen Integrale über Quader mit Hilfe mehrfacher Integration bestimmen, beispielsweise für $Q = [a,b] \times [c,d]$

$$\int\limits_Q f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Nach Theorem 10.3.3 ist das nachfolgend definierte Produktmaß tatsächlich ein Maß.

Definition 12.3.2. Sei μ ein Maß auf einer Menge X und sei ν ein Maß auf einer Menge Y. Dann definieren wir das **Produktmaß** $(\mu \times \nu)\colon \mathcal{P}(X \times Y) \to [0,\infty]$ für $S \subset X \times Y$ durch

$$(\mu\times\nu)(S) := \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)\cdot\nu(B_i)\colon S \subset \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \times B_i),\right.$$
$$\left. A_i \subset X\ \mu\text{-messbar}, B_i \subset Y\ \nu\text{-messbar},\ i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bemerkung 12.3.3. $\star$ Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ messbar. Als Verallgemeinerung des Jordanmaßes kann man den Produktinhalt $\lambda(A \times B) := \mu(A)\cdot\nu(B)$ definieren. Dann ist die Konstruktion des Produktmaßes dieselbe wie in Theorem 10.3.3.

Durch additive Fortsetzung auf disjunkte Vereinigungen von Mengen der Form $A \times B$ erhält man ein Prämaß, vgl. den nachfolgenden Beweis von Theorem 12.3.5

(i). Somit ist $(\mu \times \nu)$ nach Theorem 10.3.7 die Carathéodory-Hahn-Erweiterung von λ.

Bemerkung 12.3.4. $\star$ Im Fall $X = \mathbb{R}^k$ und $Y = \mathbb{R}^l$, sowie $\mu = \mathcal{L}^k$ und $\nu = \mathcal{L}^l$ ist $(\mu \times \nu) = \mathcal{L}^{k+l}$.

Beweis. Übung. $\square$

Der folgende Satz von Fubini gilt insbesondere für das Lebesguesche Maß.

Theorem 12.3.5 (Fubini). *Seien μ, ν Radonmaße auf $X = \mathbb{R}^k$ bzw. $Y = \mathbb{R}^l$. Sei $(\mu \times \nu)$ das zugehörige Produktmaß auf $X \times Y = \mathbb{R}^n$, $n = k + l$. Dann gelten:*

(i) Für μ-messbares $A \subset X$ und ν-messbares $B \subset Y$ ist $A \times B$ eine $(\mu \times \nu)$-messbare Menge und es gilt
$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

(ii) Sei $S \subset X \times Y$ eine $(\mu \times \nu)$-messbare Menge mit $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Dann ist $S_y := \{x \in X : (x, y) \in S\}$ für ν-fast alle $y \in Y$ eine μ-messbare Menge,
$$y \mapsto \mu(S_y) = \int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x)$$
ist ν-integrabel und es gilt
$$(\mu \times \nu)(S) = \int\limits_Y \mu(S_y)\, d\nu(y) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$
Eine analoge Aussage gilt mit vertauschten Rollen und $S^x = \{y \in Y : (x, y) \in S\}$.

(iii) Das Maß $(\mu \times \nu)$ ist ein Radonmaß.

(iv) Für $(\mu \times \nu)$-integrables $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ ist
$$y \mapsto \int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x)$$
ν-integrabel und
$$x \mapsto \int\limits_Y f(x, y)\, d\nu(y)$$
μ-integrabel und es gilt
$$\int\limits_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Wir starten mit Beweisvorbereitungen und beweisen anschließend die vier Teile das Satzes von Fubini separat.

Wir definieren
$$\mathcal{F} := \{S \subset X \times Y : S \text{ erfüllt (12.3.1) und (12.3.2)}\},$$
wobei

$$x \mapsto \chi_S(x, y) \text{ ist } \mu\text{-messbar für } \nu\text{-fast alle } y \in Y, \tag{12.3.1}$$

und

$$y \mapsto \int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) = \mu(S_y) \text{ ist } \nu\text{-messbar.} \tag{12.3.2}$$

Für $S \in \mathcal{F}$ definieren wir

$$\rho(S) := \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Nach Lemma 12.1.5 ist $\rho(S) \in [0, \infty]$ wohldefiniert.

Wir wollen nun für $(\mu \times \nu)$-messbare Mengen $S \subset X \times Y$ die Aussage $S \in \mathcal{F}$ und $\rho(S) = (\mu \times \nu)(S)$ zeigen, insbesondere für Mengen der Form $S = A \times B$.

Dazu definieren wir die Familien

$$\mathcal{P}_0 := \{A \times B \colon A \subset X \ \mu\text{-messbar}, \quad B \subset Y \ \nu\text{-messbar}\},$$
$$\mathcal{P}_1 := \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \colon S_j \in \mathcal{P}_0 \right\}$$

und

$$\mathcal{P}_2 := \left\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j \colon R_j \in \mathcal{P}_1 \right\}.$$

Wir starten mit elementaren Beobachtungen.

Lemma 12.3.6. *Seien $A \times B, C \times D \in \mathcal{P}_0$. Dann gilt auch $(A \times B) \cap (C \times D) \in \mathcal{P}_0$.*

Beweis. Folgt aus $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, da Schnitte μ- und ν-messbarer Mengen wieder diese Eigenschaft besitzen. $\square$

Lemma 12.3.7. *Seien $S_i, T_i \in \mathcal{P}_0$, $i \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i \in \mathcal{P}_1.$$

Daher ist $\mathcal{P}_1$ unter endlichen Schnitten abgeschlossen: $S, T \in \mathcal{P}_1$ impliziert $S \cap T \in \mathcal{P}_1$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der elementaren Identität

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} S_i \cap T_j,$$

die für beliebige Mengen gilt, da $S_i \cap T_j \in \mathcal{P}_0$ nach Lemma 12.3.6 für beliebige $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt. $\square$

Lemma 12.3.8. *Es gilt $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$ und für $A \times B \in \mathcal{P}_0$ ist*

$$\rho(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B). \tag{12.3.3}$$

Beweis. Sei $S = A \times B \in \mathcal{P}_0$.

(i) $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$:
- (12.3.1): $\chi_S(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$. Die dort betrachtete Funktion ist also gleich χ_A für $y \in B$ und 0 sonst, also sogar für alle $y \in Y$ eine μ-messbare Funktion.
- (12.3.2): Die dort betrachtete Funktion ist

$$y \mapsto \int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) = \int\limits_X \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)\, d\mu(x) = \mu(A) \cdot \chi_B(y)$$

  und daher ν-messbar.

(ii) Wir erhalten

$$\rho(S) = \int\limits_Y \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int\limits_Y \mu(A)\chi_B(y)\, d\nu(y) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

und folgen dabei der Konvention $\infty \cdot 0 = 0$. □

Lemma 12.3.9.

(i) Es gilt

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} S_j : S_j \in \mathcal{P}_0 \right\},$$

*$\mathcal{P}_1$ besteht also aus Mengen, die sich als **disjunkte** Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{P}_0$ schreiben lassen.*

(ii) Es gilt $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$.

(iii) Sei $S = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{P}_1$ mit $S_j \in \mathcal{P}_0$, $j \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt

$$\rho(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j) \tag{12.3.4}$$

Beweis.

(i) Anhand einer kleinen Skizze sieht man sofort dass

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \dot{\cup} ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2))$$

gilt. Somit lässt sich die linke Seite als disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{P}_0$ darstellen. Damit können wir die für eine Menge in $\mathcal{P}_1$ vereinigten Mengen sukzessive diskunkt machen und können somit jedes $S \in \mathcal{P}_1$ als disjunkte Vereinigung $S = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} S_j$, $S_j \in \mathcal{P}_0$, schreiben. Seien S und S_j, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, für den Rest des Beweises wie hier.

(ii) Nach dem Satz über Konstruktionen neuer messbarer Funktionen, Theorem 11.1.6, ist die Funktion

$$x \mapsto \chi_S(x, y) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \chi_{S_j}(x, y)$$

für jedes $y \in Y$ μ-messbar. Nach Annahme sind die Abbildungen

$$y \mapsto \int\limits_X \chi_{S_j}(x, y)\, d\mu(x),$$

$j \in \mathbb{N}_{>0}$, ν-messbar. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, Theorem 12.2.4, folgt die Gleichheit in

$$y \mapsto \int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_X \chi_{S_j}(x, y)\, d\mu(x).$$

Da die Summanden auf der rechten Seite ν-messbar sind, ist diese Funktion, nochmals nach Theorem 11.1.6, ν-messbar. Es folgt $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$.

(iii) Wir erhalten nun

$$\rho(S) \overset{\text{Def.}}{=} \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$\overset{\text{s. o.}}{=} \int\limits_Y \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Thm.}}{\underset{12.2.4}{=}} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_{S_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j).$$

Damit haben wir (12.3.4) gezeigt. $\square$

Lemma 12.3.10. *Sei $R = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} R_j$ mit $R_j \in \mathcal{P}_1$, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, also $R \in \mathcal{P}_2$.*

(i) Es gilt $R \in \mathcal{F}$ und damit $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{F}$.
(ii) Im Fall $\rho(R_1) < \infty$ gilt

$$\rho(R) = \lim_{k\to\infty} \rho\left(\bigcap_{j=1}^{k} R_j \right). \tag{12.3.5}$$

Beweis.

(a) Ohne Einschränkung gelte $R_{j+1} \subset R_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_{>0}$, da wir sonst $\tilde{R}_1 = R_1$ und $\tilde{R}_{j+1} := R_{j+1} \cap \tilde{R}_j$ betrachten können. Beachte dazu, dass die Schnitte von zwei Elementen von $\mathcal{P}_1$ nach Lemma 12.3.7 wieder in $\mathcal{P}_1$ liegen.

(b) Zu (12.3.1): Es gilt $\chi_R = \inf\limits_{j\in\mathbb{N}} \chi_{R_j}$ (oder $= \lim\limits_{j\to\infty} \chi_{R_j}$). Für die Mengen R_j, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, gilt (12.3.1) nach Lemma 12.3.9 bereits. Es gibt also ν-Nullmengen N_j, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass für alle $y \in Y \setminus N_j$ die Abbildungen $x \mapsto \chi_{R_j}(x,y)$ jeweils μ-messbare Funktionen sind. Auch $N := \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}_{>0}} N_j$ ist eine ν-Nullmenge. Nach Theorem 11.1.6 ist daher auch die Abbildung $x \mapsto \chi_R(x,y)$ für fast alle $y \in Y \setminus N$ eine μ-messbare Funktion. Dies liefert (12.3.1).

(c) Zu (12.3.2): Auch hier gilt (12.3.2) für die Mengen R_j, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, nach Lemma 12.3.9. Dies überträgt sich nach Theorem 11.1.6 wiederum auf das Infimum, also auf R. Somit erhalten wir $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{F}$.

(d) Zu (12.3.5): Nach Voraussetzung gilt

$$\infty > \rho(R_1) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_{R_1}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Daher folgt für μ-fast alle $y \in Y$ auch $\mu((R_1)_y) = \int\limits_X \chi_{R_1}(x,y)\, d\mu(x) < \infty$. Für diese y folgt daher nach Theorem 10.2.13 (iii) oder nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, Theorem 12.2.5,

$$\int\limits_X \chi_R(x,y)\, d\mu(x) = \mu(R_y) = \lim_{j\to\infty} \mu((R_j)_y) = \lim_{j\to\infty} \int\limits_X \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x).$$

Da die anderen $y \in Y$ eine μ-Nullmenge bilden, gilt die Gleichheit weiterhin, wenn wir $\chi_R = \lim\limits_{j\to\infty} \chi_{R_j}$ nutzen und über Y integrieren

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_X \lim_{j\to\infty} \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_Y \lim_{j\to\infty} \left(\int\limits_X \chi_{R_j}\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

(e) Für alle $j \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $\chi_{R_j} \le \chi_{R_1}$. Wir integrieren diese Ungleichung und erhalten

$$\int\limits_X \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \le \int\limits_X \chi_{R_1}(x,y)\, d\mu(x).$$

Nach Voraussetzung $\rho(R_1) < \infty$ ist die rechte Seite als Funktion von y eine ν-integrable Funktion. Daher dürfen wir in der folgenden Rechnung an der mit „SdK“ markierten Stelle den Satz von der dominierten Konvergenz, Theorem 12.2.5, anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\rho(R) &= \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_R(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int\limits_Y \left(\int\limits_X \lim_{j\to\infty} \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &\overset{\text{(d)}}{=} \int\limits_Y \lim_{j\to\infty} \left(\int\limits_X \chi_{R_j}\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &\overset{SdK}{=} \lim_{j\to\infty} \int\limits_Y \left(\int\limits_X \chi_{R_j}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \lim_{j\to\infty} \rho(R_j).\end{aligned}$$

Dies zeigt (12.3.5). □

Lemma 12.3.11. *Sei $S \subset X \times Y$ beliebig. Dann gilt*

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\{\rho(R) \colon S \subset R \in \mathcal{P}_1\}.$$

Beweis. Seien $A_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}_{>0}$, μ-messbare und $B_i \subset Y$, $i \in \mathbb{N}_{>0}$, ν-messbare Mengen mit $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i) =: R$. Wir wollen nun (12.3.4) nutzen. Dazu unterteilen wir die „Rechtecke“ $A_i \times B_i$ feiner, so dass sie disjunkt werden oder in bereits betrachteten Rechtecken enthalten sind. Dies erreichen wir wie in Lemma 12.3.9: $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j \times B'_j$. Dies machen wir so, dass sich jedes Rechteck $A_i \times B_i$ aus endlich vielen Rechtecken $A'_j \times B'_j$, die nur für $A_i \times B_i$ verwendet werden, disjunkt vereinigen lässt. So ergibt sich – nach Rekombination zu den ursprünglichen Rechtecken – mit (12.3.4) für die disjunkten Rechtecke die erste Ungleichung, wobei „$\le$“ statt „=“ aufgrund der Rechtecke gilt, die bereits in vorher betrachteten enthalten sind, und weiter erhalten wir mit (12.3.3) das Gleichheitszeichen in

$$\rho(R) \le \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i).$$

Auf der linken Seite gehen wir nun zum Infimum über und nutzen auf der rechten Seite die Definition von $(\mu \times \nu)$ und erhalten

$$\inf\{\rho(R) \colon S \subset R \in \mathcal{P}_1\} \le (\mu \times \nu)(S).$$

Zerlegen wir nun R nochmals nach Lemma 12.3.9 disjunkt als $R = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A'_j \times B'_j$, nun ohne doppelt auftretenden Rechtecke, so folgt, wieder mit (12.3.4) und (12.3.3),

$$\rho(R) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A'_j \times B'_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A'_j) \cdot \nu(B'_j) \ge (\mu \times \nu)(S).$$

Die Behauptung folgt. □

Beweis von Theorem 12.3.5 (i). Sei $A \times B \in \mathcal{P}_0$. Dann folgt für alle $R \in \mathcal{P}_1$ mit $A \times B \subset R$

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(A \times B) &\le \mu(A) \cdot \nu(B) && \text{(Definition von } (\mu \times \nu)) \\ &= \rho(A \times B) && (12.3.3)\end{aligned}$$

$$\le \rho(R) \qquad\qquad \text{(Monotonie des Integrals).}$$

Auf der rechten Seite gehen wir nun zum Infimum über alle solchen Mengen R über. Nach Lemma 12.3.11 stimmen dann die beiden äußeren Ausdrücke dieser Ungleichungskette überein. Somit gilt überall Gleichheit, also insbesondere

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

wie behauptet.

$(\mu \times \nu)$**-Messbarkeit von** $A \times B$**:** Sei $T \subset X \times Y$ beliebig. Sei weiterhin $R \in \mathcal{P}_1$ mit $T \subset R$. Wir schreiben $R = (R \setminus (A \times B)) \cup (R \cap (A \times B))$. Die beiden hier vereinigten Mengen können wir disjunkt als $(R \setminus (A \times B)) = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} W_i$ bzw. $(R \cap (A \times B)) = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}} V_j$ mit $W_i, V_j \in \mathcal{P}_0$ zerlegen, siehe Lemma 12.3.9. Implizit verwenden wir diese Darstellungen beim nächsten Gleichheitszeichen. Es folgt

$$\begin{aligned}&(\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B))\\ &\underset{12.3.11}{\overset{\text{Lem.}}{\le}} \rho(R \setminus (A \times B)) + \rho(R \cap (A \times B)) \overset{(12.3.4)}{=} \rho(R).\end{aligned}$$

Wir gehen nun auf der rechten Seite zum Infimum über alle $R \supset T$ mit $R \in \mathcal{P}_1$ über und nutzen dabei nochmals Lemma 12.3.11. Somit folgt daraus

$$(\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) + (\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) \le (\mu \times \nu)(T).$$

Also ist $A \times B$ eine $(\mu \times \nu)$-messbare Menge. □

Bemerkung 12.3.12. Sei $A \subset X$ eine μ- und sei $B \subset Y$ eine ν-messbare Menge. Gelte $S = A \times B = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} S_i$ mit disjunkten Mengen $S_i \in \mathcal{P}_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda(A \times B) &\underset{12.3.3}{\overset{\text{Bem.}}{=}} \mu(A) \cdot \nu(B) \overset{(12.3.3)}{=} \rho(A \times B) = \rho(S)\\ &\overset{(12.3.4)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \rho(S_i) \overset{\text{analog}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S_i).\end{aligned}$$

Also ist λ ein Prämaß auf der von $\mathcal{P}_0$ erzeugten Algebra der Elementarfiguren. Daher folgt Theorem 12.3.5 (i) auch aus dem Carathéodory-Hahn Erweiterungssatz, Theorem 10.3.7.

Bemerkung 12.3.13. Wir haben gezeigt, dass alle Mengen der Familie $\mathcal{P}_0$ $(\mu \times \nu)$-messbar sind. Da die $(\mu \times \nu)$-messbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, sind auch alle Mengen in $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ jeweils $(\mu \times \nu)$-messbar.

Lemma 12.3.14. *Sei* $R = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} R_j \in \mathcal{P}_2$ *mit* $R_j \in \mathcal{P}_1$ *und* $\rho(R_j) < \infty$ *für alle* $j \in \mathbb{N}_{>0}$*. Dann gilt*

$$(\mu \times \nu)(R) = \rho(R). \tag{12.3.6}$$

(Es genügt $\rho(R_j) < \infty$ *für* $j = 1$ *vorauszusetzen.)*

Beweis. Wir führen den Beweis in zwei Schritten; zunächst für Mengen in $\mathcal{P}_1$ und dann darauf aufbauend für $R \in \mathcal{P}_2$.

(i) Seien zunächst $S_j \equiv A_j \times B_j \in \mathcal{P}_0$, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, disjunkt. Es folgt

$$\rho\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} S_j\right) \overset{(12.3.4)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \rho(S_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j \times B_j) \overset{(12.3.3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \cdot \nu(B_j)$$

$$\overset{\text{Thm.}}{\underset{12.3.5\text{ (i)}}{=}} \sum_{j=1}^{\infty}(\mu\times\nu)(A_j\times B_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(\mu\times\nu)(S_j) = (\mu\times\nu)\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right),$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $(\mu\times\nu)$ ein Maß ist, dass die beteiligten Mengen $(\mu\times\nu)$-messbar sind und dass somit Theorem 10.2.13 (i) gilt. Wir haben also gezeigt, dass ρ und $(\mu\times\nu)$ auf $\mathcal{P}_1$ übereinstimmen.

(ii) Da auf $\mathcal{P}_1$ wie oben gezeigt ρ und $(\mu\times\nu)$ übereinstimmen, folgt aus $\rho(R_j)<\infty$ für $R_j\in\mathcal{P}_1$, $j\in\mathbb{N}$, $(\mu\times\nu)(R_j)=\rho(R_j)<\infty$. Nach Lemma 12.3.7 ist $\bigcap\limits_{j=1}^{k} R_j\in\mathcal{P}_1$ in der Gestalt $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} S_j$, $S_j\in\mathcal{P}_0$, darstellbar. Somit folgt

$$\begin{aligned}\rho(R) &\overset{(12.3.5)}{=} \lim_{k\to\infty}\rho\left(\bigcap_{j=1}^{k} R_j\right) \overset{\text{s. o.}}{=} \lim_{k\to\infty}(\mu\times\nu)\left(\bigcap_{j=1}^{k} R_j\right)\\ &\overset{\text{Theorem}}{\underset{10.2.13\text{ (iii)}}{=}} (\mu\times\nu)(R)\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Lemma 12.3.15. *Sei $S\subset X\times Y$ beliebig. Dann gibt es $R\in\mathcal{P}_2$ mit $S\subset R$ und*

$$\rho(R)=(\mu\times\nu)(R)=(\mu\times\nu)(S).$$

Beweis. Die erste Gleichheit gilt für beliebige $R\in\mathcal{P}_2$ nach Lemma 12.3.14.

Ohne Einschränkung sei $(\mu\times\nu)(S)<\infty$, denn sonst können wir $R=X\times Y$ wählen.

Nach Lemma 12.3.11 gibt es für jedes $j\in\mathbb{N}_{>0}$ Mengen $R_j\in\mathcal{P}_1$ mit $S\subset R_j$ und

$$(\mu\times\nu)(S)\le\rho(R_j)\le(\mu\times\nu)(S)+\frac{1}{j}.$$

Ohne Einschränkung gelte $R_{j+1}\subset R_j$ für alle $j\in\mathbb{N}_{>0}$, denn sonst könnten wir stattdessen die Mengen $\tilde{R}_j$, $j\in\mathbb{N}_{>0}$, mit $\tilde{R}_1=R_1$ und $\tilde{R}_{j+1}=R_{j+1}\cap\tilde{R}_j$ für $j>1$ betrachten, denn $\mathcal{P}_1$ ist nach Lemma 12.3.7 unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

Wir definieren nun

$$R:=\bigcap_{j=1}^{\infty} R_j\in\mathcal{P}_2.$$

Wegen $S\subset R_j$ für alle $j\in\mathbb{N}_{>0}$ folgt $S\subset R$. Nun folgt die Behauptung aus (12.3.5). □

Als vorbereitendes Hilfsresultat benötigen wir

Lemma 12.3.16. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge und sei $f\colon\Omega\to[0,\infty]$ eine μ-messbare Funktion. Gilt $\int\limits_{\Omega} f\,d\mu=0$, so folgt $f=0$ μ-fast überall.*

Beweis. Nach Lemma 12.1.5 ist f uneigentlich μ-integrabel und wegen $\int\limits_{\Omega} f\,d\mu=0$ ist f auch μ-integrabel. Wir definieren für $k\in\mathbb{N}_{>0}$ die Mengen

$$A_k:=\left\{x\in\Omega\colon f(x)\ge\frac{1}{k}\right\}.$$

Wegen $f\ge\frac{1}{k}\chi_{A_k}$ und der Monotonie des Integrals, Theorem 12.1.8, erhalten wir

$$0=\int\limits_{\Omega} f\,d\mu\ge\int\limits_{\Omega}\frac{1}{k}\chi_{A_k}\,d\mu=\frac{1}{k}\cdot\mu(A_k).$$

Vergleiche dazu auch Theorem 12.1.10. Somit ist A_k für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine μ-Nullmenge. Dies überträgt sich folglich auch auf $\{x \in \Omega \colon f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Beweis von Theorem 12.3.5 (ii). Sei $S \subset X \times Y$ eine $(\mu \times \nu)$-messbare Menge mit $(\mu \times \nu)(S) < \infty$. Nach Lemma 12.3.15 gibt es $R \in \mathcal{P}_2$ mit $S \subset R$ und $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R)$.

Wir betrachten nun zwei Fälle:

(a) Angenommen, es gilt $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) = 0$. Nach Lemma 12.3.10 gilt $R \in \mathcal{F}$. Weiterhin gilt $0 \le \chi_S \le \chi_R$. Wegen $\rho(R) = 0$ gilt nach Lemma 12.3.16 $0 = \int\limits_X \chi_R(x, y)\, d\mu(x)$ für ν-fast alle $y \in Y$. Für diese $y \in Y$ ist daher wiederum aufgrund dieses Lemmas $0 = \chi_R(x, y)$ für μ-fast alle $x \in X$. Folglich gilt für diese $y \in Y$ auch $0 = \chi_S(x, y)$ für μ-fast alle $x \in X$. Daher ist $x \mapsto \chi_S(x, y)$ für diese $y \in Y$ eine μ-messbare Funktion und (12.3.1) folgt. Da die Funktion $y \mapsto \int\limits_X \chi_R(x, y)\, d\mu(x)$ für ν-fast alle $y \in Y$ verschwindet, gilt dies auch für $y \mapsto \int\limits_X \chi_S(x, y)\, d\mu(x)$. Somit ist diese Funktion ν-messbar und (12.3.2) folgt. Also gilt $S \in \mathcal{F}$. Beachte, dass eine Menge genau dann messbar ist, wenn dies für die zugehörige charakteristische Funktion gilt. Somit folgt aus (12.3.1) die μ-Messbarkeit von S_y für ν-fast alle $y \in Y$. In (12.3.2) verschwindet die dort betrachtete Funktion ν-fast überall. Somit ist sie auch ν-integrabel. Schließlich ergibt sich aus $0 \le \chi_S \le \chi_R$ auch $\rho(S) = 0$ wie gewünscht.

(b) Angenommen, es gilt $(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) > 0$. Wir haben R mit Hilfe von Lemma 12.3.15 bestimmt. Im hier betrachteten Fall $(\mu \times \nu)(S) < \infty$ geht aus dem dortigen Beweis hervor, dass auch alle dort im Schnitt auftretenden Mengen $R_j \in \mathcal{P}_1$ die Ungleichung $\rho(R_j) < \infty$ erfüllen. Daher erhalten wir mit Lemma 12.3.14 $(\mu \times \nu)(R) = \rho(R)$. Somit gilt

$$0 = (\mu \times \nu)(R) - (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(R \setminus S).$$

Dabei haben die $(\mu \times \nu)$-Messbarkeit von S und je nach Argumentation auch die von R benutzt. Für S ist diese nach Voraussetzung gegeben, für R folgt sie aus Theorem 12.3.5 (i) und der Definition von $\mathcal{P}_k$, $k = 0, 1, 2$. Nach Lemma 12.3.15 gibt es nun $T \in \mathcal{P}_2$ mit $R \setminus S \subset T$ und $\rho(T) = (\mu \times \nu)(R \setminus S) = 0$. Wie in (a) folgt nun $\rho(R \setminus S) = \rho(T) = 0$. Weiterhin gilt $\rho(R) < \infty$. Daraus ergeben sich $\mu(R_y) < \infty$, $\mu((R \setminus S)_y) = 0$ und weiter, da sich S_y von R_y nur um eine μ-Nullmenge unterscheidet und damit selbst μ-messbar ist, $\mu(S_y) = \mu(S_y) + \mu((R \setminus S)_y) = \mu(R_y)$, jeweils für ν-fast alle $y \in Y$. Nun ergibt sich daraus

$$(\mu \times \nu)(S) = \rho(R) = \int\limits_Y \mu(R_y)\, d\nu(y) = \int\limits_Y \mu(S_y)\, d\nu(y) = \rho(S).$$

Hieraus liest man auch direkt die ν-Integrabilität von $\mu(S_y)$ ab. Dies ergibt gerade die Behauptung. $\square$

Beweis von Theorem 12.3.5 (iii). Sei $S \subset \mathbb{R}^n$, $n = k + l$, offen. Dann ist S nach Theorem 10.4.5 als abzählbare Vereinigung von Intervallen darstellbar, also nach Theorem 12.3.5 (i) $(\mu \times \nu)$-messbar. Somit ist $(\mu \times \nu)$ Borelsch.

Da die beiden Maße μ und ν als Borelmaße Borel regulär sind, gelten die Aussagen von Lemma 12.3.11 und Lemma 12.3.15 auch, wenn wir dort die Mengen $\mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, 2$, durch

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = \{A \times B \colon A, B \text{ Borelsch}\},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j : S_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \right\}$$

und

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \left\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j : S_j \in \tilde{\mathcal{P}}_1 \right\}$$

ersetzt. Um dies einzusehen ersetzt man die auftretenden Mengen in der aufeinander aufbauenden Konstruktion von $\tilde{\mathcal{P}}_i$, $i = 0, 1, 2$, jeweils durch maßgleiche umschließende Borelmengen, die aufgrund der Borelregularität existieren.

Nach Definition sind $\tilde{\mathcal{P}}_i$, $i = 0, 1, 2$, und insbesondere $\tilde{\mathcal{P}}_2$ in der Borelalgebra von $\mathbb{R}^n$ enthalten. Dies sieht man nacheinander für $i = 0, 1$ und dann für $i = 2$. Somit ist $(\mu \times \nu)$ nach Lemma 12.3.15 ein Borel reguläres Maß.

Sei $K \subset \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{k+l}$ kompakt. Die Projektionen $Q_1 := \pi_1(K) \subset \mathbb{R}^k$ und $Q_2 := \pi_2(K) \subset \mathbb{R}^l$ sind somit ebenfalls kompakt. Da μ und ν Radonmaße sind, folgen $\mu(Q_1) < \infty$ und $\nu(Q_2) < \infty$. Es folgt auch, dass Q_1 μ-messbar und Q_2 ν-messbar sind. Weiterhin gilt $K \subset Q_1 \times Q_2$. Wir erhalten

$$(\mu \times \nu)(K) \le (\mu \times \nu)(Q_1 \times Q_2) = \mu(Q_1) \cdot \nu(Q_2) < \infty.$$

Somit ist $(\mu \times \nu)$ ein Radonmaß. □

Beweis von Theorem 12.3.5 (iv). Es genügt, in x, μ, X und y, ν, Y symmetrische Aussagen nur einmal zu zeigen.

Ist $f = \chi_S$ mit S wie in Theorem 12.3.5 (ii), so folgt die Behauptung aus diesem Teil.

Ist $f \ge 0$, also nach Lemma 12.1.5 uneigentlich $(\mu \times \nu)$-integrabel, so gibt es nach Theorem 11.1.7 $(\mu \times \nu)$-messbare Mengen $S_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass wir f vermöge

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{S_j}$$

als (monotonen) Limes von Treppenfunktionen darstellen können. Aufgrund von Theorem 12.3.5 (ii) und der Linearität des Integrals gilt die Behauptung für die Partialsummen $f_k := \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \chi_{S_j}$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Theorem 12.2.4, können wir nun zum Grenzwert $k \to \infty$ übergehen und erhalten die behauptete Integralidentität. Hieraus lesen wir die Integrabilität der beiden in der Behauptung angegebenen Funktionen ab.

Eine beliebige Funktion zerlegen wir als $f = f_+ - f_-$ und benutzen die Linearität. □

Im folgenden Beispiel sehen wir dass eine Menge $S \subset X \times Y$, die (12.3.1) und (12.3.2) erfüllt, nicht $(\mu \times \nu)$-messbar sein muss.

Beispiel 12.3.17. Seien $X = Y = \mathbb{R}$, $\mu = \nu = \mathcal{L}^1$ und sei $A \subset [0, 1]$ eine nicht $\mathcal{L}^1$-messbare Menge. Wir definieren

$$S := \left\{ (x, y) \colon |x - \chi_A(y)| < \frac{1}{2}, y \in [0, 1] \right\}.$$

Dann ist S nach Theorem 12.3.5 (ii) (mit vertauschten Rollen) nicht $(\mu \times \nu)$-messbar. Die Menge $S_y = \{x \in \mathbb{R} \colon (x, y) \in S\}$ ist jedoch für alle y ein Intervall der Länge Eins, daher μ-messbar und es gilt $\mu(S_y) = 1$.

Bemerkung 12.3.18 (Tonelli)**.** Ist $f\colon X\times Y\to[0,\infty]$ bezüglich $(\mu\times\nu)$ messbar, so folgt aus dem Beweis von Theorem 12.3.5 (iv), dass f bezüglich $(\mu\times\nu)$ integrabel ist, falls eines der iterierten Integrale endlich ist.

Bemerkung 12.3.19. Im Allgemeinen kann eines der iterierten Integrale existieren, ohne dass f eine $(\mu\times\nu)$-messbare Funktion ist oder ohne dass f bezüglich $(\mu\times\nu)$ integrabel ist.

- Betrachte S wie in Beispiel 12.3.17. Es gilt
$$\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}}\chi_S(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 1\,dy=1.$$
- Betrachte $f(x,y)=\frac{\sin(y)}{x}$ auf $(0,1)\times[0,2\pi]$. Dann gilt $\int\limits_0^{2\pi}f(x,y)\,dy=0$ für alle $x\in(0,1)$, jedoch gilt
$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(y)}{x}\right|\,dy\,dx\ge\int\limits_0^1\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left|\frac{\sin(y)}{x}\right|\,dy\,dx\ge\frac12\int\limits_0^1\frac1x\,dx=\infty.$$

Literatur

1. Herbert Amann and Joachim Escher, *Analysis. III*, Grundstudium Mathematik, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
2. Robert Denk, *Mathematik für Physiker III*, 2007, Skript zur Vorlesung.
3. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
4. Michael Dreher, *Mathematik für Physiker II*, 2009, Skript zur Vorlesung.
5. Claus Gerhardt, *Analysis. II*, International Series in Analysis, International Press, Cambridge, MA, 2005.
6. Oliver C. Schnürer, *Analysis I*, 2019, Skript zur Vorlesung.
7. Oliver C. Schnürer, *Analysis II*, 2020, Skript zur Vorlesung.
8. Ralph E. Showalter, *Hilbert space methods for partial differential equations. Electronic reprint of the 1977 original*, Electronic Journal of Differential Equations. Monograph. 1. San Marcos, TX: Southwest Texas State University, iii, 242 p. , 1994.
9. Wolfgang Soergel, *Analysis 1*, 2020, Vorlesungsskript.
10. Michael Struwe, *Analysis I und II*, 2012, Vorlesungsskript.
11. Michael Struwe, *Analysis III. Mass und Integral*, 2013, Vorlesungsskript.
12. Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, fifth ed., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1993, Eine Einführung.
13. Wikipedia, `http://www.wikipedia.org`.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

Email address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`