DIFFERENTIALGEOMETRIE I

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Differentialgeometrie I an der Universität Konstanz: Sommersemester 2010, Wintersemester 2013/14.

Vielen Dank an die Hörer für Korrekturen.

Inhaltsverzeichnis

1. Kurven in der Ebene 1
2. Hyperflächen im Euklidischen 3
3. Topologische Grundbegriffe 11
4. Mannigfaltigkeiten 13
5. Tangentialbündel 16
6. Vektorbündel 21
7. Vektorfelder 26
8. Zusammenhänge 32
9. Metriken und Levi-Civita Zusammenhänge 36
10. Krümmung 41
11. Geodätische 49

Literatur 58

In der Differentialgeometrie geht es um Mannigfaltigkeiten und deren Krümmung.

Wir orientieren uns hier an [2–6, 8].

1. Kurven in der Ebene

Definition 1.1 (Kurven)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $\alpha \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ heißt Kurve der Klasse C^k. α heißt regulär oder eine Immersion, wenn $k \geq 1$ und $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gelten.

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall. Dann heißt $\varphi : J \to I$ Parametertransformation der Klasse C^k, wenn φ bijektiv ist und φ und φ^{-1} von der Klasse C^k sind. Ist $\varphi' > 0$, so heißt φ orientierungserhaltend, sonst orientierungsumkehrend.

Eine Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, falls $\alpha(a) = \alpha(b)$ gilt. Ist $\alpha \in C^k$, so heißt α geschlossen von der Klasse C^k, falls $\alpha^{(l)}(a) = \alpha^{(l)}(b)$ für alle $0 \leq l \leq k$ gilt. Eine geschlossene Kurve heißt Jordankurve, wenn $\alpha(s) = \alpha(t)$ impliziert, dass $s = t$ oder $(t, s) = (a, b)$ oder $(t, s) = (b, a)$ gilt.

Definition 1.2 (Bogenlänge)**.** Ist $\alpha \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ (oder stückweise von der Klasse C^1), so ist $L(\alpha) := \int\limits_a^b |\alpha'(t)|\, dt$ die Bogenlänge von α.

Eine Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls $|\alpha'(s)| = 1$ für alle $s \in I$ gilt.

Date: 11. April 2014.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Lemma 1.3. *$L(\alpha)$ ist invariant unter Parametertransformationen.*

Beweis. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Sei $\varphi : J \to I$ eine Parametertransformation. Dann gilt

$$L(\alpha \circ \varphi) = \int_J |(\alpha \circ \varphi)'(t)|\, dt = \int_J |\alpha'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_I |\alpha'(s)|\, ds = L(\alpha)$$

aufgrund der Integraltransformationsformel. □

Lemma 1.4. *Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve der Klasse C^1. Dann gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation φ der Klasse C^1, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. (Sinngemäß gilt dies auch für C^1-Kurven.)*

Beweis. Setze

$$l := L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt \quad \text{und} \quad \psi(t) := \int_a^t |\alpha'(\tau)|\, d\tau.$$

Dann ist $\psi : [a, b] \to [0, l]$ wegen $|\alpha'| \neq 0$ strikt monoton, $\psi'(t) = |\alpha'(t)| > 0$. Somit existiert $\varphi := \psi^{-1}$ und ist ebenfalls von der Klasse C^1. Es gilt $\varphi'(s) = \frac{1}{\psi'(\varphi(s))}$. Daher folgt

$$|(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot |\varphi'(s)| = \frac{|\alpha'(\varphi(s))|}{|\alpha'(\varphi(s))} = 1.$$

□

Definition 1.5 (Krümmung)**.** Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve der Klasse C^2. Dann heißt $T(s) := \alpha'(s)$ (Einheits-)Tangentialvektor an α und $\alpha''(s)$ Krümmungsvektor von α im Punkte $\alpha(s)$.

Aus $\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 1$ folgt $\langle \alpha''(s), \alpha'(s)\rangle = 0$. Somit steht α'' stets senkrecht auf α'.

$\underline{n = 2}$: Sei $T = \left(T^1, T^2\right)$. Definiere $N(s) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) T(s) = \left(-T^2, T^1\right)$ und $\alpha''(s) = \kappa(s)N(s)$. $\kappa(s)$ heißt Krümmung der Kurve α im Punkt $\alpha(s)$. (Aus Platzgründen schreiben wir Vektoren im $\mathbb{R}^n$ häufiger als Zeilenvektoren.)

$\underline{n = 3}$: Falls $\alpha''(s) \neq 0$ gilt, setzen wir $N(s) := \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$ und definieren die Krümmung ebenfalls durch $\alpha''(s) = \kappa(s)N(s)$.

$|\kappa(s)|$ heißt Absolutkrümmung.

Die Krümmung eines im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreises mit Radius r ist $\frac{1}{r}$.

Die Wahl der Normalen bei Kurven ist eine andere als in höheren Dimensionen.

Theorem 1.6 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei ∂G das Bild einer nach der Bogenlänge parametrisierten stückweisen C^1-Kurve $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$. Sei $A := |G|$ der Flächeninhalt von G und L die Länge von α. Dann gilt*

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn G ein Ball ist.

Lemma 1.7. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei ∂G das Bild einer stückweisen C^1-Kurve $\alpha : [0, a] \to \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha|_{[0,a)}$ injektiv und gelte $\alpha(0) = \alpha(a)$. Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Dann gilt $|G| = \int\limits_0^a x(t)y'(t)\, dt$.*

Beweis. Sei ν die äußere Normale an G. Nehme an, dass G links der Kurve liegt und dass diese nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann sind $T = \alpha' = (x', y')$ und $\nu = (y', -x')$. Nach dem Divergenzsatz gilt

$$2|G| = \int\limits_G 2 = \int\limits_G \operatorname{div}(x,y) = \int\limits_{\partial G} \langle \nu, (x,y)\rangle = \int\limits_0^a (xy' - yx')(s)\, ds.$$

Da α eine geschlossene Kurve ist, sehen wir mit partieller Integration, dass beide Summanden denselben Beitrag liefern. Aufgrund der Integraltranformationsformel gilt die Behauptung auch, wenn α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist. □

Beweis von 1.6. Sei $x(t)$ ohne Einschränkung in $t = 0$ minimal und in $t = t_0$ maximal. Sei $(x(t), \bar{y}(t))$ eine Parametrisierung eines Kreises vom Radius r, ohne Einschränkung $B_r(0)$, der nach orthogonaler Projektion auf die x-Achse dasselbe Bild wie die Kurve α hat. Es gilt

$$A + \pi r^2 = \int\limits_0^L xy' - \bar{y}x'\, ds = \int\limits_0^L \left\langle \begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$\le \int\limits_0^L \underbrace{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}_{=r,\ \text{da } (x,\bar{y}) \in \partial B_r(0)} \cdot \underbrace{\sqrt{x'^2 + y'^2}}_{=|\alpha'|=1} ds = Lr. \tag{1.1}$$

Somit ist

$$2\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \le A + \pi r^2 \le Lr \tag{1.2}$$

und die isoperimetrische Ungleichung folgt.

Gilt überall Gleichheit, so folgt aus der ersten Ungleichung in (1.2) $A = \pi r^2$. r hängt damit insbesondere nicht von der Richtung ab, in die wir die Kurve projizieren. Aus (1.1) folgt $(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)(x'^2 + y'^2)$, also auch (direktes Ausmultiplizieren oder: drehe einen Vektor um 90° und benutze die Orthogonalität) $(xx' + \bar{y}y')^2 = 0$. Aus dieser Gleichung folgen die ersten beiden Gleichheitszeichen in

$$\frac{x}{y'} = -\frac{\bar{y}}{x'} = \pm \frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \pm r.$$

(Falls $y' = 0$ ist, folgt $x = 0$ und die nächste Gleichung gilt trotzdem.) Also gilt $x = \pm r y'$. Da r unabhängig von Drehungen des Koordinatensystems ist, folgt ebenso $y = \pm r x'$. Also ist $x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2$. α durchläuft also einen Kreis. □

2. Hyperflächen im Euklidischen

2.1. **Metrik, Normale, zweite Fundamentalform und Hauptkrümmungen.**

Definition 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ sei von der Klasse C^1. X heißt regulär, falls die Vektoren $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i} X$ in jedem Punkt in Ω linear unabhängig sind. Dann ist $X = X(x)$, $x \in \Omega$, der Einbettungsvektor einer in den $\mathbb{R}^{n+1}$ immersierten Hyperfläche X bzw. $\operatorname{im} X \equiv M$. Ist X ein Homöomorphismus auf $\operatorname{im} X$, so heißt X Einbettung. X ist eine Parametrisierung der Hyperfläche M. Ist $n = 2$, so heißt M eine Fläche.

In Ω definieren wir eine Metrik $g = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, die von X auf Ω induzierte Metrik, durch

$$g_{ij}(x) = \langle X_i(x), X_j(x) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}, \quad x \in \Omega.$$

In jedem Punkt $x \in \Omega$ definiert die Metrik g ein Skalarprodukt. Seien $V = (V^i)_{1\le i\le n}$, $W = (W^j)_{1\le j\le n}$ Vektoren. Wir schreiben

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} V^i W^j = g(V,W) = \langle V,W\rangle_g = \langle V,W\rangle.$$

Mit $g^{-1} = (g^{ij})_{1\le i,j\le n}$ bezeichnen wir die Inverse der Metrik oder die inverse Metrik.

Lemma 2.2. *Sei $\alpha : [a,b] \to \Omega$ eine C^1-Kurve. Dann ist die Metrik die eindeutig definierte stetige symmetrische $n\times n$-Matrix (genauer: Tensor), so dass*

$$L(X\circ\alpha) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\alpha(t))(\alpha'(t))^i(\alpha'(t))^j}\,dt$$

für alle solchen Kurven gilt.

Bemerkung 2.3 (Einsteinsche Summenkonvention)**.** Wir wollen die Einsteinsche Summenkonvention verwenden. D. h. wir summieren über doppelt auftretende Indices (einmal „oben“ und einmal „unten“) und zwar von 1 bis n für lateinische Indices (da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) und von 1 bis $n+1$ für griechische Indices (da im $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$). Wir summieren nicht (nochmals), wenn bereits explizit Summen ($\sum$) dastehen. Wir schreiben $\delta = (\delta_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le n+1}$ für das Euklidische Skalarprodukt. Beispiele:

$$g_{ij}V^iW^j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}V^iW^j \text{ oder } g_{ij} = X_i^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} X_i^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\beta = \langle X_i, X_j\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Beweis von Lemma 2.2. Setze $\gamma := X\circ\alpha$. Dann gilt nach Definition und Kettenregel

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b |DX(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle|\,dt = \int_a^b \left|X_i(\alpha(t))(\alpha')^i(t)\right|\,dt\\
&= \int_a^b \sqrt{(\alpha')^i(t)X_i^\beta(\alpha(t))\delta_{\beta\gamma}X_j^\gamma(\alpha(t))(\alpha')^j(t)}\,dt\\
&= \int_a^b \sqrt{(\alpha')^i(t)g_{ij}(\alpha(t))(\alpha')^j(t)}\,dt.
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle Kurven, insbesondere auch für solche mit $\alpha' \in \{e_i, e_j, e_i+e_j, e_i-e_j\}$. Wegen der Stetigkeit von g und der Polarisationsformel charakterisiert das die Metrik g. □

Definition 2.4 (Normalenvektor)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche oder Immersion. Dann heißt eine stetige Abbildung $\nu : \Omega \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein (Einheits-)Normalenvektor an die Hyperfläche X, falls

$$\langle \nu, X_i\rangle = 0 \text{ für alle } 1\le i\le n \text{ gilt,}$$

d. h. falls ν senkrecht auf der Hyperfläche X steht.

Lemma 2.5. *Sei $\gamma := X\circ\alpha$ eine Kurve in einer immersierten Hyperfläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ und sei α von der Klasse C^1. Sei ν ein Normalenvektor an die Hyperfläche. Dann gilt*

$$\langle\gamma'(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0 \text{ für alle } t.$$

Beweis. Kettenregel und Definition des Normalenvektors. □

Definition 2.6 (Zweite Fundamentalform)**.** Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche der Klasse C^2 mit Normalenvektor ν. Dann heißt der symmetrische Tensor $A = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$, definiert durch

$$h_{ij} := -\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle \equiv -\langle X_{,ij}, \nu\rangle,$$

zweite Fundamentalform von X bzgl. ν.

Bemerkung 2.7. Der geometrisch interessante Teil der zweiten Ableitungen des Einbettungsvektors X sind die normalen Anteile. Daher definieren wir

$$X_{;ij} \equiv X_{ij} := \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} X_k$$

wobei $\left(\Gamma^k_{ij}\right)_{1\le i,j,k\le n}$ sogenannte Christoffelsymbole bezeichnet, die durch

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{kl} \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j} g_{il} + \tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} - \tfrac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)$$

definiert sind. $X_{;ij}$ ist gerade der normale Anteil von $X_{,ij}$. Dies ist äquivalent zu

$$0 = X_{;ij} - \langle X_{,ij}, \nu\rangle \nu.$$

Diese Gleichheit gilt, denn die rechte Seite verschwindet nach Definition, wenn wir das Skalarprodukt mit ν bilden. Beim Skalarprodukt mit X_k erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \langle X_{,ij}, X_k\rangle - \Gamma^l_{ij} \langle X_l, X_k\rangle \\ &= \langle X_{,ij}, X_k\rangle - \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \\ &= \langle X_{,ij}, X_k\rangle - \tfrac{1}{2}\langle X_{,ij}, X_k\rangle - \tfrac{1}{2}\langle X_i, X_{,kj}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle X_{,ij}, X_k\rangle - \tfrac{1}{2}\langle X_j, X_{,ki}\rangle \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\langle X_{,ik}, X_j\rangle + \tfrac{1}{2}\langle X_i, X_{,jk}\rangle = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt direkt nach Definition

Lemma 2.8 (Gaußsche Formel)**.** *Es gilt*

$$X_{;ij} = -h_{ij}\nu.$$

Definition 2.9 (Hauptkrümmungen)**.** Die Eigenwerte von h_{ij} bzgl. g_{ij} heißen Hauptkrümmungen λ_i von M: Ein Vektor ξ heißt Eigenvektor von h_{ij} bzgl. g_{ij} zum Eigenwert λ, falls

$$h_{ij}\xi^j = \lambda g_{ij}\xi^j \quad \text{oder, äquivalent dazu,} \quad A(\cdot, \xi) = \lambda g(\cdot, \xi)$$

gilt. Eine Hyperfläche M heißt lokal konvex, falls h_{ij} positiv semidefinit ist; wir schreiben $h_{ij} \succcurlyeq 0$. M heißt (lokal) strikt konvex, falls h_{ij} positiv definit ist: $h_{ij} \succ 0$. Elementarsymmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen sind wohldefiniert,

- $H = S_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = g^{ij} h_{ij}$ heißt mittlere Krümmung,
- $S_2 = \sum\limits_{1\le i<j\le n} \lambda_i \lambda_j$ heißt Skalarkrümmung,
- $S_k = \sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k}$,
- $K = S_n = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}$ heißt Gaußkrümmung (letzte Gleichheit herleiten).

Lemma 2.10. *Die Hauptkrümmungen sind unabhängig von der Parametrisierung der Fläche M definiert.*

Beweis. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Parametrisierung von M. Sei $\hat{X} : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine weitere Parametrisierung mit $\hat{X} = X \circ \psi$, wobei $\psi \colon \hat{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus ist. Beachte, dass die Normalenvektoren übereinstimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{X}_i &= X_k \psi^k_i, \\
\hat{X}_{,ij} &= X_{,kl}\psi^k_i\psi^l_j + X_k\psi^k_{,ij}, \\
\hat{h}_{ij} &= -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \nu \right\rangle = -\psi^k_i \langle X_{,kl}, \nu\rangle \psi^l_j, \\
\hat{g}_{ij} &= \psi^k_i X^\alpha_k \delta_{\alpha\beta} X^\beta_l \psi^l_j.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Die Hauptkrümmungen ändern sich auch nicht, wenn wir die Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ translatieren oder rotieren.

Eine n-dimensionale Hyperfläche besitzt in jedem Punkt n Hauptkrümmungen: Unter der Transformation $\psi^k(x) = A^k_i x^i$, A eine invertierbare $n \times n$-Matrix wird die Metrik zu $\hat{g}_{ij} = g_{kl} A^k_i A^l_j$. Wähle A so, dass $\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}$ gilt. Dann folgt die Behauptung aus der linearen Algebra, denn eine symmetrische $n \times n$-Matrix (hier $\hat{h}_{ij}$) besitzt n reelle Eigenwerte.

Definition 2.11. Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Parametrisierung von M. Sei ν eine Wahl des Normalenvektors.

(i) Ein Vektor $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt normal im Punkt $X(p)$, falls V ein Vielfaches von $\nu(p)$ ist.
(ii) Ein Vektor $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt tangential im Punkt $X(p)$, falls $\langle \nu(p), V\rangle = 0$ gilt.

Lemma 2.12 (Weingartengleichung)**.** *Es gilt*

$$\nu_{,i} = h^j_i X_j \equiv g^{jk} h_{ki} X_j.$$

Beweis. Wir differenzieren $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ und erhalten $\langle \nu, \nu_{,i}\rangle = 0$. Somit ist $\nu_{,i}$ ein Tangentialvektor. Damit können wir $\nu_{,i}$ in der Form $\nu_{,i} = a^k_i X_k$ darstellen. Differenziere nun $\langle \nu, X_j\rangle = 0$. Wir erhalten

$$0 = \langle \nu_{,i}, X_j\rangle + \langle \nu, X_{,ij}\rangle = \left\langle a^k_i X_k, X_j\right\rangle + \langle \nu, -h_{ij}\nu\rangle = a^k_i g_{kj} - h_{ij}.$$

Multipliziere nun mit g^{jl} und benutze die Symmetrie der zweiten Fundamentalform. □

2.2. Graphische Hyperflächen.

Lemma 2.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ und $M := \operatorname{graph} u$ mit Einbettungsvektor $X(x) = (x, u(x))$. Dann gilt*

(i) $\nu = \dfrac{(Du, -1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$,
(ii) $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$, $\quad g^{ij} = \delta^{ij} - \dfrac{u^i u^j}{1 + |Du|^2}$, $\quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, $\quad u^i = u_j \delta^{ji}$,
(iii) $\det g_{ij} = 1 + |Du|^2$,
(iv) $h_{ij} = \dfrac{u_{ij}}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$, $\quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$,
(v) $H = \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right)$,
(vi) $K = \dfrac{\det D^2 u}{\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}$.

Beweis. Es gilt $X_i = (e_i, u_i)$, $X_{,ij} = (0, u_{,ij})$.

(i) ν steht auf allen Vektoren X_i senkrecht und hat Länge eins. Also ist ν ein Normalenvektor. (Man könnte aber auch $-\nu$ betrachten.)

(ii) $g_{ij} = \langle (e_i, u_i), (e_j, u_j) \rangle = \delta_{ij} + u_i u_j$,

$$\begin{aligned} g^{ik} g_{kj} &= \left(\delta^{ik} - \frac{u^i u^k}{1+|Du|^2} \right) (\delta_{kj} + u_k u_j) \\ &= \delta^i_j + u^i u_j - \frac{u^i u_j}{1+|Du|^2} - \frac{u^i u_j |Du|^2}{1+|Du|^2} = \delta^i_j, \end{aligned}$$

(iii) g_{ij} hat bezüglich δ_{ij} die Eigenvektoren Du (falls dieser von Null verschieden ist) mit Eigenwert $1+|Du|^2$ und $n-1$ dazu orthogonale Vektoren zum Eigenwert 1.

(iv) $h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu \rangle = \dfrac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$,

(v) $H = g^{ij} h_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\delta^{ij} u_{ij} - \dfrac{u^i u^j u_{ij}}{1+|Du|^2} \right)$,

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{u^i}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \frac{\Delta u}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u^j u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}^3}.$$

(vi) $K = \dfrac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} = \dfrac{\det D^2 u}{\sqrt{1+|Du|^2}^n \cdot \left(1+|Du|^2\right)}$.

□

2.3. **Beispiele.**

Beispiel 2.14.

(i) Sei $u : B_R(0) \to \mathbb{R}$ durch $u(x) = -\sqrt{R^2 - |x|^2}$ gegeben. Dann sind sämtliche Hauptkrümmungen von $\operatorname{graph} u$ in jedem Punkt $\frac{1}{R}$:

Es gilt $u_i = \frac{x_i}{-u}$, $|Du|^2 = \frac{|x|^2}{u^2}$, $g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{R^2 - |x|^2}$,

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{\delta_{ij}}{-u} + \frac{x_i x_j}{(-u)^3} = \frac{1}{-u}(\delta_{ij} + u_i u_j) = \frac{g_{ij}}{-u}, \\ h_{ij} &= \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{g_{ij}}{(-u)\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{u^2+|x|^2}} = \frac{g_{ij}}{R}. \end{aligned}$$

(ii) Die Hauptkrümmungen des Graphen von $x \mapsto \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{2} b y^2$ im Ursprung sind a und b.

Beispiele 2.15 (rotationssymmetrische Graphen)**.** Sei $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder auf einer Teilmenge definiert) mit $u(x) = \varphi(|x|)$ für ein $\varphi \in C^2$ mit (falls dort definiert) $\varphi'(0) = 0$ für die Regularität im Ursprung. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(|x|) \equiv \varphi(r), \\ u_i(x) &= \varphi' \frac{x_i}{|x|}, \\ u_{ij}(x) &= \varphi' \frac{1}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) + \varphi'' \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + u_i u_j = \delta_{ij} + (\varphi')^2 \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|}, \\ h_{ij} &= \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}} \left(\frac{\varphi'}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) + \varphi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right). \end{aligned}$$

Bezüglich einer Orthogonalbasis bestehend aus $\frac{x}{r}$ und $n-1$ dazu orthogonalen Vektoren werden die quadratischen Formen (g_{ij}) und (h_{ij}) durch Diagonalmatrizen mit Einträgen

	$1-\text{fach}$	$(n-1)-\text{fach}$
g_{ij}	$1+(\varphi')^2$	1
g^{ij}	$\frac{1}{1+(\varphi')^2}$	1
h_{ij}	$\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\varphi''$	$\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\frac{\varphi'}{r}$

dargestellt, wobei der nur einfach auftretende Wert jeweils zur Richtung $\frac{x}{r}$ gehört. Somit ist eine Hauptkrümmung $\frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}}$ und die anderen $(n-1)$ Hauptkrümmungen sind jeweils $\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\frac{\varphi'}{r}$.

(i) **Sphäre:** Ist graph u eine (Halb-)sphäre, so gilt $u(x) = -\sqrt{R^2-|x|^2}$ und daher $\varphi(r) = -\sqrt{R^2-r^2}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi =& -\sqrt{R^2-r^2},\\
\varphi' =& \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}},\\
\varphi'' =& \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} + \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}^3} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2-r^2}^3},\\
1+(\varphi')^2 =& 1+\frac{r^2}{R^2-r^2} = \frac{R^2}{R^2-r^2},\\
\sqrt{1+(\varphi')^2} =& \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}},\\
\lambda_1 =& \frac{\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}^3} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2-r^2}^3}\frac{\sqrt{R^2-r^2}^3}{R^3} = \frac{1}{R},\\
\lambda_2 = \ldots = \lambda_n =& \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\frac{\varphi'}{r} = \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{r}{r\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

Die Hauptkrümmungen sind dabei wie üblich nur bis auf Permuationen wohldefiniert.

(ii) **Parabel:** Es gilt $u(x) = \frac{1}{2}a|x|^2$, also $\varphi(r) = \frac{1}{2}ar^2$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $\varphi' = ar$ und $\varphi'' = a$. Die Hauptkrümmungen sind somit (bis auf Permutationen)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 =& \frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}} = \frac{a}{(1+a^2r^2)^{3/2}},\\
\lambda_2 = \ldots = \lambda_n =& \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\frac{\varphi'}{r} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2r^2}}.
\end{aligned}$$

Somit gehen sämtliche Hauptkrümmungen für $r \to \infty$ gegen Null.

So ein Verhalten ist typisch für „ganze Graphen“: Man kann zeigen, dass die Hauptkrümmungen eines beliebigen auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierten Graphen, d. h. eines ganzen Graphen, in $\mathbb{R}^{n+1}$ nicht alle gleichmäßig nach unten durch eine positive Konstante beschränkt sein können.

(iii) **Kegel:** Sei $u(x) = a|x|$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\varphi(r) = ar$. Wir erhalten $\varphi' = a$ sowie $\varphi'' = 0$. Somit sind die Hauptkrümmungen für $x \neq 0$ durch 0 (einfach) und $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{a}{r}$ mit Vielfachheit $(n-1)$ gegeben.

(iv) **Zylinder:** $\mathbb{S}^{n-k}_R \times \mathbb{R}^k$ hat die Hauptkrümmungen $\frac{1}{R}$ mit Vielfachheit $n-k$ und 0 mit Vielfachheit k. (Übung.)

Beispiele 2.16 (Minimalflächen)**.** Eine Fläche oder Hyperfläche heißt Minimalfläche, falls $H = 0$ gilt. Diese Definition ist historisch gewachsen. Man kann zeigen, dass solch eine Fläche stets ein kritischer Punkt des Flächeninhaltes ($A = \int \sqrt{\det g_{ij}} = \int \sqrt{1 + |Du|^2}$ im graphischen Fall) ist, i. a. ist sie aber kein Minimum des Flächeninhaltes.

(i) **Helikoid:** Das Helikoid ist durch die Einbettung

$$\mathbb{R}^2 \ni (r, \vartheta) \overset{X}{\longmapsto} (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, \vartheta) \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
X_r &= (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0),\\
X_\vartheta &= (-r \sin \vartheta, r \cos \vartheta, 1),\\
X_{,rr} &= (0, 0, 0),\\
X_{,\vartheta\vartheta} &= (-r \cos \vartheta, -r \sin \vartheta, 0),\\
X_{,r\vartheta} &= (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0),\\
g &= \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\vartheta} \\ g_{r\vartheta} & g_{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + r^2 \end{pmatrix},\\
\nu &= \frac{(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, -r)}{\sqrt{1 + r^2}},\\
A &= \begin{pmatrix} h_{rr} & h_{r\vartheta} \\ h_{r\vartheta} & h_{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

g ist eine Diagonalmatrix. Daher ist auch g^{-1} diagonal. $A = (h_{\cdot\cdot})$ hat aber auf der Diagonalen nur Nullen. Daher folgt $H = \sum\limits_{i,j \in \{r,\vartheta\}} g^{ij} h_{ij} = 0$. Somit ist das Helikoid eine Minimalfläche.

Katenoid: Das Katenoid ist die Menge

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = \cosh^2 z\right\}.$$

Wir erinnern uns an $\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$. Diese Menge können wir mit Hilfe der Immersion

$$\mathbb{R}^2 \ni (z, \vartheta) \overset{X}{\longmapsto} (\varphi(z) \cdot \sin \vartheta, \varphi(z) \cdot \cos \vartheta, z)$$

mit $\varphi(z) = \cosh z$ parametrisieren. Wir rechnen zunächst mit einer allgemeinen Funktion φ und zeigen dann, dass wir für dieses spezielle φ eine Minimalfläche erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned}
X_z &= (\varphi' \cdot \sin \vartheta, \varphi' \cdot \cos \vartheta, 1),\\
X_\vartheta &= (\varphi \cdot \cos \vartheta, -\varphi \cdot \sin \vartheta, 0),\\
X_{,zz} &= (\varphi'' \cdot \sin \vartheta, \varphi'' \cdot \cos \vartheta, 0),\\
X_{,\vartheta\vartheta} &= (-\varphi \cdot \sin \vartheta, -\varphi \cdot \cos \vartheta, 0),\\
X_{,z\vartheta} &= (\varphi' \cdot \cos \vartheta, -\varphi' \cdot \sin \vartheta, 0),\\
\nu &= \frac{(\sin \vartheta, \cos \vartheta, -\varphi')}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}},\\
g_{zz} &= 1 + (\varphi')^2,\\
g_{z\vartheta} &= 0,\\
g_{\vartheta\vartheta} &= \varphi^2,\\
h_{zz} &= -\langle X_{,zz}, \nu \rangle = -\frac{\varphi''}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\varphi}{\sqrt{1+(\varphi')^2}},\\
h_{z\vartheta} &= 0,\\
\left(g^{-1}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\varphi')^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varphi^2} \end{pmatrix},\\
H &= g^{zz}h_{zz} + 2g^{z\vartheta}h_{z\vartheta} + g^{\vartheta\vartheta}h_{\vartheta\vartheta} \qquad \text{(keine Summenkonvention)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\left(\frac{-\varphi''}{1+(\varphi')^2} + \frac{\varphi}{\varphi^2}\right).
\end{aligned}$$

Es folgt $H = 0$ für $\varphi(z) = \cosh z$, da

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right),\\
\varphi'(z) &= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right),\\
\varphi''(z) &= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \varphi(z),\\
0 &\stackrel{!}{=} 4\left(-\varphi''\varphi + 1 + (\varphi')^2\right)\\
&= 4 + \left(e^z - e^{-z}\right)^2 - \left(e^z + e^{-z}\right)^2\\
&= 4 + e^{2z} - 2 + e^{-2z} - e^{2z} - 2 - e^{-2z}\\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt.

2.4. **Umlaufsatz.** Das Folgende benötigt einige topologische Grundbegriffe aus dem nächsten Kapitel, insbesondere Grundkenntnisse über Überlagerungen.

Definition 2.17 (Windungszahl)**.** Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Gelte $\alpha(a) = (\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0)$. Es gibt genau eine stetige Funktion $\vartheta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t))$ und $\vartheta(a) = \vartheta_0$. ($\vartheta$ ist die Liftung von α bezüglich der Überlagerung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = (\cos t, \sin t)$.) Ist α eine geschlossene Kurve, d. h. gilt $\alpha(a) = \alpha(b)$, so folgt aus $\cos\vartheta(a) = \cos\vartheta(b)$ und $\sin\vartheta(a) = \sin\vartheta(b)$ dass $\vartheta(b) - \vartheta(z) = 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ gilt. m heißt Windungszahl der geschlossenen Kurve $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{S}^1$.

Für eine stetige geschlossene Kurve $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist die Windungszahl von α als die Windungszahl von $|\alpha|^{-1}\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{S}^1$ definiert.

Bemerkung 2.18. Die Windungszahl ist wohldefiniert, denn aus

$$\alpha(t) = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)) = \left(\cos\tilde{\vartheta}(t), \sin\tilde{\vartheta}(t)\right)$$

folgt $\vartheta(t) - \tilde{\vartheta}(t) = 2\pi m(t)$ mit $m(t) \in \mathbb{Z}$. Da m stetig ist, ist m konstant. Insbesondere ist also $\vartheta(a) - \vartheta(b) = \tilde{\vartheta}(a) - \tilde{\vartheta}(b)$ und damit wohldefiniert.

Die Windungszahl ist unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen invariant.

Definition 2.19. Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^1-geschlossene Kurve. Dann ist die Umlaufzahl von α als Windungszahl von $T := \alpha'$ definiert.

Bemerkung 2.20. Ist α eine C^2 geschlossene Kurve von der Klasse C^2 und nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\begin{aligned}
T(s) &= \alpha'(s) = (\cos\vartheta(s), \sin\vartheta(s)), \quad \vartheta \in C^1,\\
\alpha''(s) &= \vartheta'(s)(-\sin\vartheta(s), \cos\vartheta(s)) = \kappa(s)\cdot N(s),\\
\kappa(s) &= \vartheta'(s).
\end{aligned}$$

Für die Umlaufzahl von α gilt

$$\frac{1}{2\pi}(\vartheta(b)-\vartheta(a)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \vartheta'(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \kappa(s)\,ds \in \mathbb{Z}.$$

Theorem 2.21 (Umlaufsatz)**.** *Für eine reguläre C^1-geschlossene C^1-Jordankurve hat die Umlaufzahl den Wert ± 1.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei α nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l-periodisch und von der Klasse C^1. Sei weiterhin ohne Einschränkung $\alpha^2(0)$ minimal. Somit gilt $(\alpha^2)'(0) = 0$ und $\alpha'(0) = (\pm 1, 0)$, wir nehmen ohne Einschränkung auch $\alpha'(0) = (1,0)$ an. Setze $\triangle := \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le s_1 \le s_2 \le l\}$ und definiere $e : \triangle \to \mathbb{S}^1$ durch

$$e(s_1,s_2) := \begin{cases} \frac{\alpha(s_2)-\alpha(s_1)}{|\alpha(s_2)-\alpha(s_1)|}, & \text{falls } s_1 < s_2 \text{ und } (s_1,s_2) \neq (0,l),\\ \alpha'(s) & \text{falls } s_1 = s_2 = s,\\ -\alpha'(0) & \text{falls } (s_1,s_2) = (0,l). \end{cases}$$

Da α eine Jordankurve ist, ist e wohldefiniert. e ist stetig, da

$$\frac{\alpha(s_2)-\alpha(s_1)}{|\alpha(s_2)-\alpha(s_1)|} = \frac{\frac{\alpha(s_2)-\alpha(s_1)}{s_2-s_1}}{\frac{|\alpha(s_2)-\alpha(s_1)|}{s_2-s_1}} \to \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}$$

für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$. Da $\alpha'(0) = (1,0)$ gilt, existiert eine stetige Liftung $\vartheta\colon \triangle \to \mathbb{R}$ mit $\vartheta(0,0) = 0$, so dass ϑ der Abbildung e unter der Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto (\cos x, \sin x)$ überlagert ist:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \triangle \arrow[ur, "\vartheta"] \arrow[r, "e"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

Wegen $\alpha'(s) = e(s,s) = (\cos\vartheta(s,s), \sin\vartheta(s,s))$ erfüllt die Umlaufzahl k von α

$$k = \tfrac{1}{2\pi}(\vartheta(l,l) - \vartheta(0,0)) = \tfrac{1}{2\pi}((\vartheta(l,l)-\vartheta(0,l)) + (\vartheta(0,l)-\vartheta(0,0))).$$

Es gilt

$$e(t,l) = \begin{cases} -\alpha'(0) = (-1,0) & \text{für } t = 0,\\ \alpha'(0) = (1,0) & \text{für } t = l,\\ \frac{\alpha(l)-\alpha(t)}{|\alpha(l)-\alpha(t)|} & \text{für } 0 < t < l. \end{cases}$$

Da $\alpha^2(0) = \alpha^2(l)$ minimal ist, folgt $e^2(t,l) \le 0$ für $0 \le t \le l$. $e^2(\cdot, l)$ nimmt also nur Werte auf dem unteren Halbkreis an. Dort ist p invertierbar. Damit ist $\vartheta(l,l) - \vartheta(0,l) = 2\pi - \pi = \pi$.

Ebenso ist $e^2(0,t) \ge 0$ für $0 \le t \le l$ und daher gilt $\vartheta(0,l) - \vartheta(0,0) = \pi - 0 = \pi$. Daher hat α die Umlaufzahl 1. $\square$

3. Topologische Grundbegriffe

Definition 3.1 (Topologie)**.** Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Topologie auf X ist eine Kollektion $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(ii) $A_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, impliziert $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$,
(iii) A_1, $A_2 \in \mathcal{O}$ impliziert $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

Die Mengen $A \in \mathcal{O}$ heißen offene Mengen. $B \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus B$ offen ist.

Eine Topologie $\mathcal{O}_1$ heißt feiner als eine Topologie $\mathcal{O}_2$ (und $\mathcal{O}_2$ heißt gröber als $\mathcal{O}_1$) falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ gilt.

Sei $Y \subset X$ und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Dann heißt $\mathcal{O}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{O}\}$ von $\mathcal{O}$ auf Y induzierte Topologie.

Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, falls jedes $A \subset \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$, wenn die Kollektion aller endlichen Schnitte von Mengen in $\mathcal{S}$ eine Basis der Topologie bildet.

Beispiel 3.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die Kugeln $B_\varepsilon(x)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, Basis der metrischen Topologie. Die metrische Topologie des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine abzählbare Basis.

Definition 3.3 (Umgebung, Stetigkeit)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $x \in X$, $U \subset X$ mit $x \in U$. Dann heißt U Umgebung von x, wenn es $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt. Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt in $x \in X$ stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}_Y(f(x))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ gibt. f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} stetig sind.

Definition 3.4 (Initiale Topologie, Produkttopologie)**.** Sei X eine Menge und seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Dann existiert eine gröbste Topologie auf X, die Initialtopologie, so dass alle Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stetig werden. $\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{O}_i, i \in I\}$ ist eine Subbasis dieser Topologie.

Spezialfall Produkttopologie: Ist $X := X_1 \times X_2 \times \ldots$ und f_i die Projektion auf den Faktor i, so ist $\mathcal{S} := \{X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times \ldots : A_i \subset X_i \text{ offen}, i \in I\}$. Ist $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, so ist $\{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathcal{O}_i\}$ eine Basis.

Definition 3.5 (Finale Topologie, Quotiententopologie)**.** Sei Y eine Menge und seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen. Dann existiert eine feinste Topologie auf Y, die finale Topologie, so dass alle f_i stetig werden, nämlich $\mathcal{O} := \{A \subset Y : f_i^{-1}(A) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}$.

Spezialfall Quotientenraum: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von x und $\bar{X} := \{\bar{x} : x \in X\}$. Definiere die Projektion $p : X \to \bar{X}$ durch $x \mapsto \bar{x}$. Die zugehörige finale Topologie heißt Quotiententopologie. $U \subset \bar{X}$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Beispiele 3.6.

(i) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, $\bar{X} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Vermöge $h \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ mit $h(\bar{x}) = e^{2\pi i x}$ sehen wir, dass $\bar{X}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.

(ii) $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, $x \sim y \iff x = \pm y$. $\mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n/\sim$ ist der n-dimensionale reelle projektive Raum.

Definition 3.7 (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt überdeckungskompakt, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein überdeckungskompakter Raum heißt kompakt, falls er ein T_2-Raum (= Hausdorffraum) ist, d. h. falls je zwei Punkte $x \neq y \in X$ disjunkte Umgebungen besitzen.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind Kompaktheit, Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

Theorem 3.8 (Tychonov)**.** *Das Produkt kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

Beweis. Topologievorlesung. □

Definition 3.9 (Überlagerung)**.** Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt $p : X \to Y$ Überlagerung, wenn

(i) p stetig und surjektiv ist,
(ii) jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass $p^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ mit paarweise disjunkten offenen $U_i \subset X$ ist und $p|_{U_i} : U_i \to V$ für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind.

Beispiel 3.10.

(i) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{it}$,
(ii) $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $p(x) = \bar{x}$. „2-blättrige Überlagerung".

Theorem 3.11. *Sei $p : X \to B$ eine Überlagerung. Sei Z ein topologischer Raum und $f : Z \to B$ eine stetige Abbildung. Ist Z einfach zusammenhängend (also z. B. $Z = [0,1]$ oder $Z = [0,1]^2$), so existiert eine stetige Liftung $\tilde{f} : Z \to X$ mit $f = p \circ \tilde{f}$.*

Beweis. Topologievorlesung. □

4. Mannigfaltigkeiten

Definition 4.1 (Mannigfaltigkeit)**.**

(i) Ein topologischer Raum M heißt lokal euklidisch von der Dimension m, falls M mit offenen Mengen überdeckt werden kann, von denen jede zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist.
(ii) Ein Paar (U, φ), wobei $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus (wie oben) ist, heißt Karte von M. Eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Karten heißt Atlas von M, falls $M \subset \bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ gilt.
(iii) Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) heißen C^k-verträglich, $k \geq 1$, wenn $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Ein Atlas heißt von der Klasse C^k, falls je zwei seiner Karten C^k-verträglich sind.
(iv) Ist $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas, so gibt es genau einen maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_0$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$; er besteht aus allen Karten, welche mit den Karten von $\mathcal{A}$ auch C^k-verträglich sind.
(v) Eine differenzierbare (C^k-)Struktur auf M ist ein maximaler C^k-Atlas auf M.
(vi) Ein lokal-euklidischer Hausdorff-Raum mit einer differenzierbaren Struktur heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 4.2.

(i) Beispiele sind $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$.
(ii) Offene Teilmengen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
(iii) Teilweise fordert man zusätzlich, dass die Topologie von M eine abzählbare Basis besitzt.
(iv) In der algebraischen Topologie lernt man, dass offene nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nur dann homöomorph zueinander sein können, wenn $m = n$ gilt. Somit ist die Dimension eines nichtleeren lokal euklidischen Raumes wohldefiniert.
(v) Wir schreiben häufig M^m für eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit M.

Beispiel 4.3 (Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{m+n}$)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$, wenn es zu jedem $x \in$

M eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

gibt. Ein solches M besitzt einen C^k-Atlas, nämlich

$$\mathcal{A} := \{(U \cap M, \varphi|_{U \cap M})\colon \text{wobei } (U, \varphi) \text{ wie oben}\}.$$

M ist lokal euklidisch von der Dimension m. Es gilt

$$(\psi|_{V \cap M}) \circ (\varphi|_{U \cap M})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \varphi(U \cap V)} \in C^k.$$

Bemerkung 4.4. Der Einbettungssatz von Whitney (vgl. z. B. eine Vorlesung Differentialtopologie) besagt, dass jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit (bis auf einen Diffeomorphismus) eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, falls $n \gg 1$ genügend groß ist.

In der folgenden Definition verlangen wir nicht, dass f stetig ist. Stattdessen fordern wir die Existenz gewisser Umgebungen.

Die Forderung, dass $f(U)$ offen ist, ist nötig, da wir sonst die Dimension im Zielraum erhöhen könnten.

Definition 4.5 (Differenzierbare Abbildungen)**.**
Seien M, N C^k-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt von der Klasse C^k, falls es zu jedem $x \in M$ Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N mit $x \in U$, $f(U) \subset V$ gibt und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls von der Klasse C^k, $k \geq 1$, so heißt f Diffeomorphismus von der Klasse C^k.

Gibt es für jedes $x \in M$ eine Umgebung U, so dass $f(U)$ offen und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, so heißt f ein lokaler Diffeomorphismus.

Bemerkung 4.6.

(i) Ist f von der Klasse C^k, so ist f stetig: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist stetig, also auch $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.

(ii) Ist f von der Klasse C^k, so ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ für alle Karten (U, φ), (V, ψ) der betreffenden differenzierbaren Strukturen. (Falls U klein genug ist, so dass die Komposition wohldefiniert ist.)

Beweis. Sei $x \in U$, $f(x) \in V$ und $z := \varphi(x)$. Nach Definition existieren Karten (U_0, φ_0) und (V_0, ψ_0) mit $x \in U_0$, $f(U_0) \subset V_0$, so dass $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \in C^k$ ist. Wir wählen eine offene Umgebung W von z mit $\varphi^{-1}(W) \subset U_0 \cap U$ und $f(\varphi^{-1}(W)) \subset V \cap V_0$. In W gilt dann

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\left(\psi \circ \psi_0^{-1}\right)}_{\in C^k} \circ \underbrace{\left(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}\right)}_{\in C^k} \circ \underbrace{\left(\varphi_0 \circ \varphi^{-1}\right)}_{\in C^k} \in C^k.$$

Dies beendet den Beweis, da $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ genau dann in C^k ist, wenn dies lokal um jeden Punkt herum gilt. Dies haben wir aber gerade nachgewiesen. □

(iii) Eine Karte ist eine differenzierbare Abbildung, da $\mathrm{id} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ dies ist.

Beispiel 4.7 (Kartesisches Produkt)**.** Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ zwei C^k-Mannigfaltigkeiten. Dann ist ein C^k-Atlas auf $M \times N$ durch

$$\{(U \times V, \varphi \times \psi)\colon (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

mit $(\varphi \times \psi)((x, y)) = (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definition 4.8 (Zurückziehen einer differenzierbaren Struktur)**.** Sei M ein topologischer Raum, N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$ und $h : M \to N$ ein Homöomorphismus. Definiere

$$h^*\mathcal{A} := \left\{ \left(h^{-1}(U), \varphi \circ h\right) : (U, \varphi) \in \mathcal{A} \right\}$$

Bemerkung 4.9. Eine zurückgezogene Struktur $h^*\mathcal{A}$ ist ein C^k-Atlas auf M und $h : (M, h^*\mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A})$ ist ein Diffeomorphismus.

Sei $M = N = \mathbb{R}$ und $h(x) = x^3$. Sei $\mathcal{A}$ die Standardstruktur auf $\mathbb{R}$ mit der Identität als Karte. Dann ist $(\mathbb{R}, h^*\mathcal{A}) \neq (\mathbb{R}, \mathcal{A})$, da h kein Diffeomorphismus von $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ist.

Beweis. Für die Kartenwechselabbildungen gilt

$$(\psi \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \in C^k.$$

Somit ist $h^*\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas.

Wähle die Karten φ und $\varphi \circ h$. Dann gelten

$$\varphi \circ h \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$$

und analog $(\varphi \circ h) \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$ und somit ist h ein Diffeomorphismus. □

Ein Atlas legt im folgenden Sinne bereits die Topologie fest:

Lemma 4.10. *Sei $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ ein Atlas auf einer Menge X (bis auf die Stetigkeitsforderung an φ), d. h. gelte*

(i) $U \subset X$, $\varphi \colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist bijektiv und $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.
(ii) $X = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U$ und für (U, φ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ ist $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ stets ein Homöomorphismus.

Dann gibt es genau eine Topologie auf X, so dass X lokal euklidisch mit $\mathcal{A}$ als Atlas wird.

Beweis. **Eindeutigkeit:** Ist X lokal euklidisch mit Atlas $\mathcal{A}$, so sind die Abbildungen $\varphi \colon U \to \varphi(U)$ für $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ Homöomorphismen. Sei $V \subset X$ offen. Dann gilt

$$V = \bigcup_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U \cap V = \bigcup \varphi^{-1}(\underbrace{\varphi(U \cap V)}_{\text{offen im } \mathbb{R}^n}).$$

Zunächst ist $U \cap V$ relativ offen in U. Dann ist $\varphi(U \cap V)$ relativ offen in $\varphi(U)$ und daher auch in $\mathbb{R}^n$.

Definiere

$$\mathcal{B} := \{\varphi^{-1}(W) \colon (U, \varphi) \in \mathcal{A},\, W \subset \varphi(U) \text{ offen}\}.$$

Mengen der Form $\varphi^{-1}(W)$ sind offen in U und, da $\mathcal{A}$ ein Atlas auf X ist, auch in X. Die Menge ist $\mathcal{B}$ in einer Basis von X enthalten. Weil sich aber aufgrund der obigen Gleichung jede offene Menge in X als eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ darstellen lässt, ist B eine Basis. Daher ist die Topologie eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir behaupten, dass $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie ist.

(i) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$, da für eine Karte (U, φ) nach Definition $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U \in \mathcal{B}$ ist und da nach Voraussetzung $X = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U$ gilt.

(ii) Seien $W_i \subset \varphi_i(U_i)$ offen, $i = 1, 2$, und sei $x \in \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$. $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Topologie, wenn wir eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $x \in A \subset \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$ finden ([7, Satz 2.7]). Setze $z_i := \varphi_i(x)$. Dann gelten $z_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z_1)$ und $z_i \in W_i$. Da $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ stetig ist, gibt es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, so dass $z_1 \in W \subset W_1$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(W) \subset W_2$. Es folgt $\varphi_1^{-1}(W) \subset \varphi_2^{-1}(W_2)$. Daher ist

$$x \in \underbrace{\varphi_1^{-1}(W)}_{\in \mathcal{B}} \subset \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$$

und somit ist $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie.

□

Definition 4.11 (Untermannigfaltigkeit)**.** Sei N eine n-dimensionale differenzierbare C^k-Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt C^k-Untermannigfaltigkeit von N, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Karte (U, φ) von N mit $x \in U$ und

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

$m \le n$, gibt. Die Kollektion aller $(U \cap M, \varphi|_{U\cap M})$ ist dann ein C^k-Atlas von M.

5. Tangentialbündel

Wir haben die folgende anschauliche Definition.

Definition 5.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann wird der Tangentialraum von M in x von allen Vektoren $\alpha'(0)$ aufgespannt, wobei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$ ist.

Bemerkung 5.2. Diesen Vektorraum können wir auch als

$$T_xM := (d\varphi(x))^{-1} (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

schreiben, wobei φ eine Karte des $\mathbb{R}^n$ ist, die zeigt, dass M^m eine Untermannigfaltigkeit ist.

Wir wollen diese Definition auf abstrakte (= nicht immersierte) Mannigfaltigkeiten M verallgemeinern: Sei $x \in M$. Betrachte alle differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$. Zwei solche Kurven α und β heißen äquivalent, wenn es eine Karte (U, φ) um x mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

gibt. Gilt diese Relation für eine Karte (U, φ), so auch für jede andere Karte (V, ψ) um x:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \beta)'(0)\rangle = (\psi \circ \beta)'(0).\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch die Transitiviät dieser Relation.

Definition 5.3. Ein Tangentialvektor im Punkt x ist eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$.

Die Menge dieser Äquivalenzklassen heißt Tangentialraum im Punkt x: T_xM.

Lemma 5.4. *Ist (U, φ) eine Karte, so ist für alle $x \in U$ durch $\varphi_{*,x}([\alpha]) := (\varphi \circ \alpha)'(0)$ eine bijektive Abbildung $\varphi_{*,x} : T_xM \to \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$, definiert.*

Für zwei Karten (U, φ), (V, ψ) und $x \in U \cap V$ gilt

$$\psi_{*,x} \circ \varphi_{*,x}^{-1} = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x)) \in GL(\mathbb{R}^m).$$

Beweis. $\varphi_{*,x}([\alpha])$ ist wohldefiniert, denn $\alpha \sim \beta$ ist äquivalent zu $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. $\varphi_{*,x}$ ist injektiv, denn $\varphi_{*,x}([\alpha]) = \varphi_{*,x}([\beta])$ bedeutet $\alpha \sim \beta$.

$\varphi_{*,x}$ ist surjektiv: Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Definiere $\alpha(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)$. Dann ist

$$\varphi_{*,x}([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = \left.\frac{d}{dt}(\varphi(x) + tv)\right|_{t=0} = v.$$

Wir haben bereits gesehen, dass

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle$$

gilt. Nach Definition folgt also

$$\psi_{*,x}([\alpha]) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\,\langle\varphi_{*,x}([\alpha])\rangle$$

wie behauptet. □

Korollar 5.5. *T_xM besitzt genau eine Vektorraumstruktur, so dass alle $\varphi_{*,x}$ Vektorraumisomorphismen werden: Setze für v, $w \in T_xM$ und $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$v + \lambda w := \varphi_{*,x}^{-1}(\varphi_{*,x}(v) + \lambda\varphi_{*,x}(w)).$$

Nach Lemma 5.4 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte. Bringe $\varphi_{*,x}$ auf die andere Seite und benutze die Linearität der Komposition $\varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\varphi_{*,x}(v +_\varphi \lambda w) &= \varphi_{*,x}(v) + \lambda\varphi_{*,x}(w)\\ &= \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1} \circ \psi_{*,x}(v) + \lambda\varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1} \circ \psi_{*,x}(w)\\ &= \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1}(\psi_{*,x}(v) + \lambda\psi_{*,x}(w))\\ &= \varphi_{*,x}(v +_\psi \lambda w).\end{aligned}$$

Definition 5.6. Die (disjunkte) Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

heißt Tangentialbündel von M. Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ setze $TU := \bigcup\limits_{p \in U} \{p\} \times T_pM$.

Ist (U, φ) eine Karte von M, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_*\colon TU &\to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m,\\ (x, v) &\mapsto (\varphi(x)), \varphi_{*,x}(v))\end{aligned}$$

die von (U, φ) induzierte Karte von TM.

Lemma 5.7. *Ist M von der Klasse C^k, so bilden die von einem Atlas induzierten Karten einen C^{k-1}-Atlas der Menge TM im Sinne von Lemma 4.10.*

Beweis.

(i) φ_* ist bijektiv: Aus $\varphi_*((x, v)) = \varphi_*((y, w))$ folgt $\varphi(x) = \varphi(y)$ und $\varphi_{*,x}(v) = \varphi_{*,y}(w)$ und somit $x = y$ und, nach Lemma 5.4, $v = w$. Die Surjektivität folgt ebenfalls nach Lemma 5.4.

(ii) Aus $M = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U$ folgt $TM = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} TU$.

(iii) Zur Verträglichkeit: Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten von M mit $z \in \varphi(U \cap V)$ und $z = \varphi(x)$, $v \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt nach Lemma 5.4

$$\begin{aligned}\psi_* \circ \varphi_*^{-1}((z, v)) &= \psi_*\left(\left(x, \varphi_{*,x}^{-1}(v)\right)\right) = \left(\psi(x), \psi_{*,x}\left(\varphi_{*,x}^{-1}(v)\right)\right)\\ &= \left(\psi\left(\varphi^{-1}(z)\right), d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(z)\langle v\rangle\right).\end{aligned}$$

$\psi_* \circ \varphi_*^{-1}$ ist, als Funktion von (z, v), $(k-1)$-mal stetig differenzierbar.

(iv) TM ist mit diesem Atlas und der damit induzierten Topologie Hausdorffsch: Punkte (x, v) und (y, w) lassen sich für $x \neq y$ trennen, da M Hausdorffsch ist und für $w \neq v$, da dies für $\mathbb{R}^m$ der Fall ist. □

Korollar 5.8. *Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$. Nach Lemma 4.10 besitzt TM genau eine Topologie, die TM zu einer (differenzierbaren) C^{k-1}-Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, der aus den von M induzierten Karten besteht, macht.*

Die natürliche Projektion $p : TM \to M$, $(x, v) \mapsto x$ ist von der Klasse C^{k-1}.

Beweis. Es gilt

$$\begin{tikzcd} & TU \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \supset & \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "p_1"] & \varphi(U). \end{tikzcd}$$

Wegen $p_1(\varphi_*(x,v)) = p_1((\varphi(x), \varphi_{*,x}(v))) = \varphi(x)$ und $\varphi(p(x,v)) = \varphi(x)$ kommutiert das Diagramm. Aus $p_1 = \varphi \circ p \circ \varphi_*^{-1} \in C^\infty$ erhalten wir $p \in C^{k-1}$. ☐

Bemerkung 5.9.

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir identifizieren TU mit $U \times \mathbb{R}^m$ vermöge

$$[\alpha] \leftrightarrow (\alpha(0), \alpha'(0)).$$

(ii) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von N. Für jedes $x \in M$ ist $T_xM \subset T_xN$. Also gilt $TM \subset TN$. TM ist sogar eine Untermannigfaltigkeit von TN. (Übung.)

Spezialfall $N = \mathbb{R}^n$: T_xM ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $TM \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Definition 5.10 (Induzierte Abbildung der Tangentialbündel)**.** Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten (C^k) und $f\colon M \to N$ eine Abbildung der Klasse C^k. Dann definieren wir für $x \in M$ die Abbildung

$$\begin{aligned} f_{*,x} &: T_xM \to T_{f(x)}N, \\ f_{*,x}([\alpha]) &= [f \circ \alpha], \end{aligned}$$

wobei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ differenzierbar ist und $\alpha(0) = x$ gilt. Definiere

$$\begin{aligned} f_* &: TM \to TN, \\ f_*((x,v)) &:= (f(x), f_{*,x}(v)). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.11. Wohldefiniertheit von f_*:

Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten um x bzw. $f(x)$. Seien $\alpha, \beta\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = x$ gegeben. Ist $\alpha \sim \beta$, so folgt $(\varphi\circ\alpha)'(0) = (\varphi\circ\beta)'(0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle(\varphi\circ\alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle(\varphi\circ\beta)'(0)\rangle = (\psi \circ f \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

Somit ist $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$.

Koordinatendarstellung von f_*: Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten um x bzw. $f(x)$. In Karten hat $f_{*,x}$ die Form $d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))$, wenn wir die Kommutativität des folgenden Diagrammes nachrechnen können:

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "f_{*,x}"] \arrow[d, "\varphi_{*,x}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & T_{f(x)}N \arrow[d, "\psi_{*,f(x)}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "d\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(x))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Für $v = [\alpha] \in T_xM$ gilt

$$\begin{aligned} \psi_{*,f(x)} \circ f_{*,x}(v) &= \psi_{*,f(x)}([f\circ\alpha]) = (\psi \circ f \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle\underbrace{(\varphi\circ\alpha)'(0)}_{=\varphi_{*,x}(v)}\rangle. \end{aligned}$$

Beachte: In Koordinaten ist f_* somit gerade die Ableitung der Abbildung in Koordinaten.

Bemerkung 5.12.
(i) $f_{*,x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ ist linear. (Benutze (5.1).)
(ii) Gelte ohne Einschränkung $f(U) \subset V$ (in der üblichen Notation).

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & TV \arrow[d, "\psi_*"] \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_*"'] & \psi(V) \times \mathbb{R}^n. \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist f_* von der Klasse C^{k-1}, falls f von der Klasse C^k ist.
(iii) Es gilt die folgende funktorielle Eigenschaft von „$*$“: Sind $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ differenzierbare Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Beweis. Sei $[\alpha] \in T_xL$.

$$(g \circ f)_{*,x}([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_{*,f(x)}([f \circ \alpha]) = g_{*,f(x)}(f_{*,x}([\alpha])).$$

□

Definition 5.13 (Immersion, Submersion, Einbettung)**.** Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung.
(i) f heißt immersiv bzw. submersiv im Punkt $x \in M$, falls $f_{*,x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ injektiv bzw. surjektiv ist. f hat in $x \in M$ den Rang k, falls dies für $f_{*,x}$ gilt.
(ii) f heißt Immersion bzw. Submersion bzw. eine Abbildung von konstantem Rang k, wenn f in allen Punkten immersiv bzw. submersiv ist bzw. den Rang k hat.
(iii) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Einbettung, wenn $f : X \to f(X)$ Homöomorphismus ist, wobei $f(X)$ die Unterraumtopologie trägt.
(iv) Eine differenzierbare Abbildung f zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbare Einbettung, wenn f Immersion und Einbettung ist.
(v) Sei $f : M \to N$ eine Immersion. $f(M)$ heißt immersierte Mannigfaltigkeit.
Ist f zusätzlich injektiv, dann heißt $\tilde{M} := f(M)$ mit der Topologie und differenzierbaren Struktur, die $f : M \to \tilde{M}$ zu einem Diffeomorphismus macht, eine immersierte Untermannigfaltigkeit von N. (Die induzierten Strukturen erhält man wie folgt: $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ ist offen, falls $f^{-1}\big(\tilde{U}\big)$ in M offen ist. Ist (U, φ) eine Karte für M, so ist $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ eine Karte für $\tilde{M}$.)

Bemerkung 5.14. Achtung, eine injektive Immersion ist i. a. keine differenzierbare Einbettung: Sei $M = (-1, 2\pi)$, $N = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{für } -1 < x \le 0, \\ (\cos x, \sin x) & \text{für } 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Bemerkung 5.15. Ist $f : X \to Y$ stetig und injektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch, so ist f eine Einbettung.

Beweis. Siehe Topologievorlesung [7, Satz 9.12]. □

Das Rangtheorem aus der Analysis [1, Theorem 10.3.1] liefert

Theorem 5.16. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine Abbildung die in jedem Punkt den Rang l hat. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $p \in U$, $f(p) \in V$ und $f(U) \subset V$, so dass*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(x^1, \dots, x^m\right) = \left(x^1, \dots, x^l, 0, \dots, 0\right).$$

Ohne Einschränkung können wir auch $\varphi(U) = B_1^m(0)$ und $\psi(V) = B_1^n(0)$ annehmen.

Theorem 5.17. *Sei $f\colon M^m \to N^n$ von der Klasse C^k, $k \geq 1$.*

(i) Ist f eine differenzierbare Einbettung, so ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N der Klasse C^k und der Dimension $m = \dim M$.
(ii) Ist $y_0 \in N$ und hat f konstanten Rang l, so ist $f^{-1}(y_0) \equiv f^{-1}(\{y_0\})$ entweder leer oder eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - l$.
(iii) Ist $y_0 \in N$ und f für alle $x \in f^{-1}(y_0)$ submersiv, so ist $f^{-1}(y_0)$ entweder leer oder eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n = \dim M - \dim N$.

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in M$, $y_0 := f(x_0)$. Seien (U, φ) bzw. (V, ψ) Karten um x_0 bzw. y_0. Setze $z_0 := \varphi(x_0)$. f_{*,x_0} ist injektiv. Also folgt, dass $L := d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(z_0)$ injektiv ist, insbesondere $m \leq n$.

Ergänze eine Basis von $L(\mathbb{R}^m)$ durch $v_{m+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$. Definiere

$$F(z) := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(z^1, \ldots, z^m\right) + \sum_{l=m+1}^{n} z^l v_l, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $dF(z_0, 0)$ bijektiv und es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $F : B_\varepsilon(z_0, 0) \to F(B_\varepsilon(z_0, 0))$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$F|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}. \tag{5.2}$$

Setze $V_\varepsilon := \psi^{-1}(F(B_\varepsilon((z_0, 0))))$. Dann ist $(V_\varepsilon, F^{-1} \circ \psi)$ eine Karte um y_0. Da f^{-1} stetig ist, existiert eine offene Umgebung V_0 von y_0 mit $V_0 \subset V_\varepsilon$ und $f^{-1}(V_0) \subset \varphi^{-1}(B_\varepsilon(z_0, 0) \cap \mathbb{R}^m)$, wobei wir $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ identifizieren.

$$\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(z_0, 0) \cap \mathbb{R}^m\right) \subset U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \supset V_\varepsilon \supset V_0 \arrow[d, "\psi"] \\
B_\varepsilon(z_0, 0) \cap \mathbb{R}^m \subset \varphi(U) & \psi(V) \supset F(B_\varepsilon(z_0, 0))
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
f(M) \cap V_0 &= V_0 \cap \left(f \circ \varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(z_0, 0) \cap \mathbb{R}^m\right)\right) \\
&= V_0 \cap \left(\psi^{-1} \circ F\left(B_\varepsilon(z_0, 0) \cap \mathbb{R}^m\right)\right) \qquad \text{nach (5.2).}
\end{aligned}$$

(ii) Sei $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, (U, φ) und (V, ψ) seien Karten um x_0 bzw. y_0. Gelte ohne Einschränkung $f(U) \subset V$. Für $z \in \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)^{-1}(\psi(y_0)) = \varphi \circ f^{-1}(y_0)$ hat $d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)$ konstanten Rang l. Somit ist (ggf. nach Verkleinern von U und V) die Menge $\varphi\left(f^{-1}(y_0)\right) \cap \varphi(U)$ nach dem Rangtheorem eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$. Da φ^{-1} Diffeomorphismus ist, ist $f^{-1}(y_0) \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

(iii) Lokal hat f nahe $f^{-1}(y_0)$ konstanten Rang n. Die Behauptung folgt. ☐

Lokal sind Immersionen stets Einbettungen:

Theorem 5.18. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ mit $p \in U$, so dass $f|_U$ eine Einbettung ist.*

Beweis. Wähle Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $p \in U$ und $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ so dass $\hat{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon B_1^m(0) \to B_1^n(0)$ die Form

$$\hat{f}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0\right)$$

hat. Dann ist $\hat{f} : B_1^m(0) \to B_1^n(0)$ eine Einbettung. $\varphi\colon U \to B_1^m(0)$ und $\psi\colon V \to B_1^n(0)$ sind Diffeomorphismen. Daher ist $f : U \to V$ eine Einbettung, wenn $f(U)$ die Unterraumtopologie bezüglich der Menge V trägt. Da aber $V \subset N$ offen ist, ist das dieselbe Topologie wie die Unterraumtopologie bezüglich der Menge N. Also ist $f|_U$ eine Einbettung. $\square$

Theorem 5.19. *Sei M eine kompakte (differenzierbare) Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $0 \le k \le \infty$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ und eine (differenzierbare) Einbettung $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ der Klasse C^k.*

Beweis. Sei $m = \dim M$. Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine Karte (V, φ) mit $\varphi(x) = 0$ und $B_3(0) \subset \varphi(V)$. Da M kompakt ist, gibt es $(V_1, \varphi_1), \ldots, (V_l, \varphi_l)$ mit $M = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \varphi_j^{-1}(B_1(0))$. Sei $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\lambda(x) = 1$ für $x \in B_1(0)$ und $\lambda(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^m \setminus B_2(0)$. Definiere $\lambda_j\colon M \to \mathbb{R}$ und $f_j\colon M \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\lambda_j(x) := \begin{cases} \lambda \circ \varphi_j(x), & x \in V_j, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$f_j(x) := \begin{cases} \lambda_j(x)\varphi_j(x), & x \in V_j, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Es gilt λ_j, $f_j \in C^k$. Definiere $f\colon M \to \mathbb{R}^{(m+1)l}$, $f \in C^k$, durch

$$f(x) := (f_1(x), \lambda_1(x), \ldots, f_l(x), \lambda_l(x)).$$

f ist injektiv: Seien $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$. Da die Mengen $\varphi_j^{-1}(B_1(0))$ die Mannigfaltigkeit M überdecken, gibt es ein j_0 mit $\lambda_{j_0}(x) = 1$. Wegen $\lambda_{j_0}(y) = 1$ folgt $x, y \in V_{j_0}$. Wegen $\varphi_{j_0}(x) = \varphi_{j_0}(x)\lambda_{j_0}(x) = f_{j_0}(x) = f_{j_0}(y) = \varphi_{j_0}(y)$ folgt $x = y$. Nach Bemerkung 5.15 ist f eine topologische Einbettung, denn M ist kompakt und $\mathbb{R}^k$ ist Hausdorffsch.

Sei $k \ge 1$. Dann ist f auch eine Immersion, denn für $x \in \varphi_{j_0}^{-1}(B_1(0))$ ist $(f_{j_0})_{*,x} = (\varphi_{j_0})_{*,x}$ injektiv, also auch $f_{*,x}$. Im Fall $k = 0$ liefert Bemerkung 5.15, dass f eine Einbettung ist. $\square$

6. Vektorbündel

Vektorbündel verallgemeinern das Tangentialbündel.

Definition 6.1 (Vektorbündel)**.** Seien X, B topologische Räume, $p : X \to B$ stetig und E ein normierter Vektorraum. Eine E-Bündelkarte ist ein Paar (U, Φ), wobei

(i) $U \subset B$ offen ist und $\Phi\colon p^{-1}(U) \to U \times E$ ein Homöomorphismus ist.

(ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times E \arrow[dl, "p_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Für $y \in p^{-1}(x)$ (genauer: $p^{-1}(\{x\})$) erhalten wir

$$\Phi(y) = (p_1\Phi(y), p_2\Phi(y)) \equiv (x, \Phi_x(y)).$$

$p^{-1}(x)$ heißt Faser von x; es ist $\Phi(p^{-1}(x)) = \{x\} \times E$. (Äquivalent zur obigen Definition erhalten wir $\Phi_x := p_2 \circ \Phi|_{p^{-1}(x)}$.) $\Phi_x : p^{-1}(x) \to E$ ist ein Homöomorphismus.

Definition 6.2. Ein E-Bündelatlas $\mathcal{A}$ für $p : X \to B$ ist eine Kollektion von E-Bündelkarten, so dass

(i) $B \subset \bigcup_{(U,\Phi)} U$,
(ii) Für (U,Φ), $(V,\Psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt
  (a) $\Psi_x \circ \Phi_x^{-1} \colon E \to E$ ist ein Isomorphismus normierter Vektorräume,
  (b) $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ ist stetig von $U \cap V$ nach $L(E)$ mit der Operatornorm $\|T\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

Definition 6.3.
(i) Ein Vektorbündel $p \colon X \to B$ ist eine Abbildung p wie oben mit einem zugehörigen Bündelatlas $\mathcal{A}$. Wir nennen auch X Vektorbündel. Wir sprechen auch von Bündeln statt von Vektorbündeln. (Es gibt z. B. auch $\mathbb{S}^1$-Bündel. Hier sind aber sämtliche Bündel stets Vektorbündel.)
(ii) Ein Vektorbündel heißt E-Bündel, falls E ein normierter Vektorraum ist und die Bilder der Bündelkarten die Form $U \times E$ haben. Ein Linienbündel ist (bei reellen Mannigfaltigkeiten wie hier) ein $\mathbb{R}$-Bündel.

Bemerkung 6.4.
(i) Sei $(x,v) \in U \times E$. Wegen $\Psi \circ \Phi^{-1}(x,v) = \left(x, \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)\right)$ und da Ψ, Φ Homöomorphismen sind, ist $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ automatisch stetig, falls E endlichdimensional ist.
(ii) Wie beim Tangentialbündel erhalten die Fasern $p^{-1}(x)$ eine eindeutige Vektorraumstruktur, so dass alle $\Phi_x \colon p^{-1}(x) \to E$ Vektorraumisomorphismen werden: Für v, $w \in p^{-1}(x)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzt man
$$v + \lambda w := \Phi_x^{-1}(\Phi_x(v) + \lambda \Phi_x(w)).$$
(iii) Das triviale Bündel über B ist durch $X = B \times E$, $\Phi(x,v) = (x,v)$ gegeben.
(iv) Das Tangentialbündel ist ein Vektorbündel: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel TM. Definiere $p : TM \to B \equiv M$ durch $T_xM \ni v \mapsto p(v) = x \in M$. Ist (U,φ) eine Karte von M, so definieren wir
$$\begin{aligned}\Phi \colon T_UM \equiv p^{-1}(U) &\to U \times E \equiv U \times \mathbb{R}^m,\\ T_xM \ni v &\mapsto \Phi(v) = (x, \varphi_{*,x}(v)).\end{aligned}$$
$\Psi_x \circ \Phi_x^{-1} = \psi_{*,x} \circ \varphi_{*,x}^{-1}$ ist ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^m$, $m = \dim M$.

Definition 6.5 (Vektorbündel der Klasse C^k)**.** Ist $p : X \to B$ ein Vektorbündel und B eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, so heißt ein Vektorbündelaltlas $\mathcal{A} = \{(U,\Phi)\}$ von der Klasse C^k, falls für je zwei Karten (U,Φ), $(V,\Psi) \in \mathcal{A}$ die Kartenwechselabbildung
$$\Psi \circ \Phi^{-1} \colon (U \cap V) \times E \to (U \cap V) \times E$$
von der Klasse C^k ist.

Bemerkung 6.6. Betrachte E-Vektorbündel mit $\dim E < \infty$.
(i) Besitze $U \cap V$ eine differenzierbare Struktur. Wegen
$$\Psi \circ \Phi^{-1}(x,v) = \left(x, \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)\right)$$
und da $\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ ein Vektorraumisomorphismus von E ist, sind $\Psi \circ \Phi^{-1} \in C^k$ und $\left(x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right) \in C^k$ äquivalent.
(ii) Jedes Vektorbündel der Klasse C^k über einer C^k-Mannigfaltigkeit ist auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k der Dimension $\dim B + \dim E$: Sei $\mathcal{A} = \{(U,\Phi)\}$ ein Vektorbündelatlas und sei $\mathcal{B} = \{(V,\varphi)\}$ ein Atlas von B. Nehme ohne Einschränkung an, dass für jedes $(U,\Phi) \in \mathcal{A}$ ein $(U,\varphi) \in \mathcal{B}$ existiert; sonst ersetze U durch $U \cap V$. Als

Diagramm erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
X \supset p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times E \arrow[r, "(\varphi,\mathrm{id})"] \arrow[dl, "p_1"] & \varphi(U) \times E \arrow[d, "p_1"] \\
U \arrow[rr, "\varphi"] & & \varphi(U).
\end{tikzcd}$$

Die Verträglichkeit der Karten ergibt sich aus

$$(\psi, \mathrm{id}) \circ \Psi \circ \Phi^{-1} \circ (\varphi, \mathrm{id})^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)).$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}} := \{(p^{-1}(U), (\varphi, \mathrm{id}) \circ \Phi)\}$ ein C^k-Atlas von X.

Definition 6.7 (Schnitte, Vektorfelder)**.** Sei $p\colon X \to B$ ein Vektorbündel. Ein Schnitt ist eine stetige Abbildung $s : B \to X$ mit $p \circ s = \mathrm{id}$, d. h. $s(x) \in p^{-1}(x)$ für alle $x \in B$. Die Schnitte des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißen Vektorfelder.

$s_0(x) := 0_x \in p^{-1}(x)$ heißt Nullschnitt.

Bemerkung 6.8. Sei $\dim E < \infty$. s_0 ist eine (differenzierbare) Einbettung, d. h. man kann B mit $s_0(B)$ identifizieren.

$$\begin{tikzcd}
s_0(U) \arrow[r, "\Phi"] & U \times \{0\} \subset U \times E \arrow[dl, "p_1"] \\
U. \arrow[u, "s_0"] &
\end{tikzcd}$$

$\Phi \circ s_0$ ist die Abbildung $U \ni x \mapsto (x, 0) \in U \times E$, eine Einbettung. Somit ist $s_0 : B \to s_0(B)$ ein lokaler Homöomorphismus bzw. Diffeomorphismus. s_0 ist eineindeutig, da $p \circ s_0 = \mathrm{id}$ ist und $p|_{s_0(B)}$ ist eine stetige Inverse. Die Behauptung folgt.

Definition 6.9 (Abbildungen von Vektorbündeln)**.** Seien $p_i\colon X_i \to B_i$, $i = 0, 1$, E_i-Vektorbündel mit $\dim E_i < \infty$. Eine stetige Abbildung $F : X_0 \to X_1$ heißt eine Vektorbündelmorphismus, wenn F jede Faser von X_0 linear in eine Faser von X_1 abbildet, d. h. wenn für jedes $x_0 \in B_0$ ein $x_1 \in B_1$ existiert, so dass $F_{x_0} := F|_{p_0^{-1}(x_0)} \to p_1^{-1}(x_1)$ linear ist.

Bemerkung 6.10.

(i) Ist s_0 der Nullschnitt von X_0, so ist $f := p_1 \circ F \circ s_0$ stetig. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & X_1 \arrow[d, "p_1"] \\
B_0 \arrow[r, "f"'] & B_1.
\end{tikzcd}$$

(ii) Ist $B_0 = B_1$, $f = \mathrm{id}$ und F_x ein Isomorphismus für jedes x, so heißt F Vektorbündelisomorphismus.

(iii) Das Vektorbündel $p\colon X \to B$ heißt trivial, wenn es zum Vektorbündel $B \times E$ isomorph ist.

(iv) Ein Vektorbündel mit $\dim E = n$ ist genau dann trivial, wenn es n linear unabhängige Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ besitzt, d. h. $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ sind für jedes x linear unabhängig.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Seien $s_1, \ldots, s_n$ die linear unabhängigen Schnitte. Definiere $F\colon B \times \mathbb{R}^n \to X$ durch $F(y, (x^1, \ldots, x^n)) := \sum\limits_{j=1}^{n} x^j s_j(y)$.

„$\Longrightarrow$“: Sei umgekehrt $F : B \times \mathbb{R}^n \to X$ ein Vektorbündelisomorphismus und sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Setze $s_j(x) := F(x, e_j)$. $\square$

(v) Die Existenz einer Vektorbündelkarte $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times E$ impliziert, dass $p^{-1}(U)$ trivial ist.

(vi) $T\mathbb{S}^n$ ist für gerades $n > 0$ nichttrivial, da nach dem Satz vom Igel jedes stetige Tangentialfeld auf $\mathbb{S}^n$ eine Nullstelle besitzen muss.

$T\mathbb{S}^n$ ist für $n = 0$, 1, 3, 7 trivial. Für alle anderen n ist $T\mathbb{S}^n$ nichttrivial (nichttriviale algebraische Topologie, J. F. Adams).

Definition 6.11 (Tensoren)**.** Sei E ein normierter Vektorraum, $\dim E < \infty$, und E' der Dualraum von E, häufig auch mit E^* bezeichnet. Ein Tensor T der Stufe $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (manchmal wird $(r, s) = (0, 0)$ ausgeschlossen), auf E ist eine Multilinearform auf $(E')^r \times E^s$. Die Menge aller Tensoren einer Stufe (r, s) bilden einen endlich-dimensionalen Vektorraum $E^{(r,s)}$.

Ein $E^{(r,s)}$-Tensor heißt r-fach kontravariant und s-fach kovariant. Ein $E^{(r,0)}$-Tensor heißt kontravariant, ein $E^{(0,s)}$-Tensor heißt kovariant.

Wichtig wird später bei Tensoren insbesondere der Nachweis, dass die Auswertung nur von den Einträgen in einem Punkt und insbesondere nicht von den Ableitungen der Einträge abhängt.

Gelte ab jetzt stets $\dim E < \infty$.

Bemerkung 6.12.

(i) Es gilt $E' = E^{(0,1)}$.

(ii) Ist E normiert, so definiert $\|x'\| := \sup\limits_{\|x\| \le 1} |x'\langle x\rangle|$ eine Norm auf E'.

(iii) Auf $E^{(r,s)}$ definiert

$$\|T\| := \sup_{\substack{\|x'_j\| \le 1 \\ \|x_k\| \le 1}} |T\langle x'_1, \ldots, x'_r; x_1, \ldots, x_s\rangle|$$

eine Norm und damit auch eine Topologie auf $E^{(r,s)}$.

(iv) E ist kanonisch isomorph zu $E'' = E^{(1,0)}$ vermöge $x\langle x'\rangle := x'\langle x\rangle$ für $x \in E$, $x' \in E'$. Daher ist $E^{(1,r)}$ kanonisch isomorph zu $L^r(E, E)$, dem Raum der r-linearen Abbildungen $E^r \to E$: Seien $x_i \in E$. Dann ist nämlich $e \in E$ durch

$$T\langle \varphi; x_1, \ldots, x_r\rangle = e\langle \varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in E'$$

definiert.

Definition 6.13 (Transformation von Tensoren)**.** Sei $\varphi\colon E \to F$ ein linearer Vektorraumisomorphismus zwischen normierten endlichdimensionalen Vektorräumen. Definiere $\varphi' : F' \to E'$ durch $\varphi'(y') := y' \circ \varphi$. Definiere $\varphi_\#\colon E^{(r,s)} \to F^{(r,s)}$ für $T \in E^{(r,s)}$ durch

$$\varphi_\#(T)\langle f'_1, \ldots, f'_r; f_1, \ldots, f_s\rangle := T\left\langle \varphi'(f'_1), \ldots, \varphi'(f'_r); \varphi^{-1}(f_1), \ldots, \varphi^{-1}(f_s)\right\rangle.$$

$\varphi_\#(T)$ heißt “push-forward” von T.

Bemerkung 6.14.

(i) Dies ist (im sich aus der folgenden Rechnung erklärenden Sinne) konsistent mit der Identifikation $E = E^{(1,0)} = E''$: Für $x \in E$ ist $\varphi_\#(x)\langle f'\rangle = x\langle \varphi'(f')\rangle = x\langle f' \circ \varphi\rangle = (f' \circ \varphi)\langle x\rangle = f'\langle \varphi\langle x\rangle\rangle = \varphi(x)\langle f'\rangle$.

(ii) $\varphi_\#\colon E^{(r,s)} \to F^{(r,s)}$ ist linear.

(iii) Sind $\varphi\colon E \to F$ und $\psi\colon F \to G$ Vektorraumisomorphismen, so gilt $(\psi \circ \varphi)_\# = \psi_\# \circ \varphi_\#$, da $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$, $(\psi \circ \varphi)' = \varphi' \circ \psi'$ und aufgrund einer kleinen einfachen Rechnung.

(iv) **Differenzierbarkeit von $\varphi \mapsto \varphi_\#$:** Sei $T \in E^{(r,s)}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in L(F', E')$, $\psi_1, \ldots, \psi_s \in L(F, E)$. Dann ist die Abbildung

$$(T; \varphi_1, \ldots, \varphi_r; \psi_1, \ldots, \psi_s) \mapsto T(\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_r(\cdot); \psi_1(\cdot), \ldots, \psi_s(\cdot)) \in F^{(r,s)}$$

multilinear von $E^{(r,s)} \times L(F', E')^r \times L(F, E)^s$ nach $F^{(r,s)}$ und daher von der Klasse C^∞.

$\varphi \mapsto \varphi^{-1} \in C^\infty(\underbrace{\mathrm{Iso}(E,F)}_{\subset L(E,F)}, \underbrace{\mathrm{Iso}(F,E)}_{\subset L(F,E)})$. $\varphi \mapsto \varphi'$ ist linear und daher in $C^\infty(L(E,F), L(F', E'))$. Aufgrund der Kettenregel ist $(T, \varphi) \mapsto \varphi_\# T$ von der Klasse $C^\infty\left(E^{(r,s)} \times \mathrm{Iso}(E,F), F^{(r,s)}\right)$.

Somit ist $\varphi \mapsto \varphi_\#$ von der Klasse $C^\infty\left(\mathrm{Iso}(E,F), \mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}, F^{(r,s)}\right)\right)$.

Wegen $(\varphi \circ \psi)_\# = \varphi_\# \circ \psi_\#$ und $\mathrm{id}_\# = \mathrm{id}$ ist $\varphi_\#$ stets ein Isomorphismus und es gilt $(\varphi_\#)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_\#$.

Definition 6.15 (Tensorbündel über einem Vektorbündel)**.** Sei $p : X \to B$ ein Vektorbündel mit allgemeiner Faser E, $\dim E < \infty$, und Vektorbündelkarten (U, Φ), $\Phi\colon p^{-1}(U) \to U \times E$. Sei $(r,s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. (Erinnerung: Für $x \in B$ ist $p^{-1}(x)$ ein Vektorraum.) Auf

$$X^{(r,s)} := \bigcup_{x \in B} (p^{-1}(x))^{(r,s)}$$

definieren wir eine Vektorbündelstruktur durch die Projektion

$$p^{(r,s)} : X^{(r,s)} \to B,$$
$$p^{(r,s)}\left(\left(p^{-1}(x)\right)^{(r,s)}\right) := x$$

und den Vektorbündelatlas

$$\Phi_\#\colon \left(p^{(r,s)}\right)^{-1}(U) \to U \times E^{(r,s)},$$
$$\Phi_\#(x, T) \equiv \Phi_\#(T) := (x, \Phi_{x\#}(T)).$$

(Erinnerung: Für $v \in p^{-1}(x)$ ist $\Phi(v) = (x, \Phi_x(v))$, wobei $\Phi_x : p^{-1}(x) \to E$ ein Isomorphismus ist.)

Bemerkung 6.16.

(i) **Verträglichkeit der Karten:** Sei $(x, T) \in U \times E^{(r,s)}$. Es gilt

$$\Psi_\# \circ (\Phi_\#)^{-1}(x,T) = \left(x, \Psi_{x\#} \circ (\Phi_{x\#})^{-1}(T)\right) = \left(x, \Psi_{x\#} \circ \left(\Phi_x^{-1}\right)_\# (T)\right)$$
$$= \left(x, \left(\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right)_\# (T)\right).$$

Nach Definition eines Vektorbündels ist $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ stetig (bzw. $\in C^k$) von $U \cap V$ nach $\mathrm{Iso}(E)$. Nach Bemerkung 6.14 (iv) ist

$$(\varphi \mapsto \varphi_\#) \in C^\infty\left(\mathrm{Iso}(E), \mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}\right)\right).$$

Somit ist $x \mapsto \left(\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right)_\#$ stetig (bzw. C^k) von $U \cap V$ nach $\mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}\right)$. Nach Lemma 4.10 existiert daher genau eine Topologie auf $X^{(r,s)}$ zu dem festgelegten Atlas, so dass alle $\Phi_\#$ Homöomorphismen werden. Somit ist

$$p^{(r,s)}\colon X^{(r,s)} \to B$$

ein Vektorbündel von der Klasse C^k, falls $p\colon X \to B$ von der Klasse C^k ist.

(ii) **Spezialfall Tangentialbündel:** Das Tangentialbündel ist $p : TM \to M$. Die Schnitte von $p^{(r,s)}\colon (TM)^{(r,s)} \to M$ heißen Tensorfelder (oder kurz: Tensoren) auf M.

Insbesondere heißt das Bündel $p^{(0,1)}\colon (TM)^{(0,1)} \to M$ Kotangentialbündel auf M. Es wird mit T^*M bezeichnet. Die zugehörigen Schnitte heißen 1-Formen und werden häufig mit ω bezeichnet.

Weiterhin ist $p^{(1,0)}\colon (TM)^{(1,0)} \to M$ (bis auf Isomorphie) das Tangentialbündel.

7. Vektorfelder

Definition 7.1 (Derivation)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist $C^1(M) = C^1(M,\mathbb{R})$ ein Vektorraum und ein kommutativer Ring mit $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $f \in C^1(M)$. Definiere $vf := f_{*,p}(v)$. Entsprechend setzen wir für ein Vektorfeld X auf M

$$(Xf)(p) := vf,$$

falls $X(p) = (p,v)$ (was wir auch als „$X(p) = v$“ schreiben werden).

Die Operation $v\colon C^1(M) \to \mathbb{R}$ erfüllt

(i) $v(f+g) = v(f) + v(g)$,
(ii) $v(fg) = (vf)g(p) + f(p)vg$,
(iii) $v(\lambda f) = \lambda v(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine Abbildung $\delta : C^1(M) \to \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften heißt Derivation in p.

Bemerkung 7.2.

(i) Ist δ eine Derivation in p, so ist $\delta f = 0$ für alle f mit $f \equiv 0$ in einer Umgebung von p.

Beweis. Gelte $f \equiv 0$ in U. Wähle $g \in C^1(M)$ mit $g(p) = 2$ und $g = 1$ in $M \setminus U$. Dann gilt $f = fg$ und in p folgt $\delta f = \delta(fg) = \delta f 2 + 0$, also $\delta f = 0$. □

(ii) Jede Derivation in p läßt sich auf von $C^1(M)$ auf $C^1(U)$, U eine beliebige Umgebung von p, einschränken: Wähle (z. B. mit Hilfe einer Karte) Umgebungen V, W von p mit $\bar V \subset W \subset \bar W \subset U$ und $h \in C^1(M)$ mit $h = 1$ auf V und $h = 0$ auf $M \setminus \bar W$. Definiere für $f \in C^1(U)$

$$\delta(f) := \delta\big(\tilde f\big) \quad \text{mit } \tilde f = \begin{cases} hf & \text{in } U,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aufgrund des ersten Teiles der Bemerkung ist dies wohldefiniert.

Lemma 7.3. *Ist $f \in C^k(B_1(0))$, so gibt es Funktionen $f_i \in C^{k-1}(B_1(0))$ mit*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(x).$$

Beweis. Es gilt $f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) x^i\,dt$. Setze also $f_i(x) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\,dt$. □

Korollar 7.4. *Ist (U,φ) eine Karte von M mit $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(U) = B_1(0)$, so gibt es zu $f \in C^k(U)$ Funktionen $f_i \in C^{k-1}(U)$ mit $f - f(p) = \sum\limits_{i=1}^n \varphi^i f_i$.*

Beweis. Wir wenden Lemma 7.3 auf $f \circ \varphi^{-1}$ an und erhalten

$$f \circ \varphi^{-1} - f \circ \underbrace{\varphi^{-1}(0)}_{=p} = \sum_{i=1}^n x^i \tilde f_i.$$

Wende nun „$\circ\varphi$“ an und setze $f_i := \tilde f_i \circ \varphi$. □

Derivationen und Vektorfelder entsprechen einander:

Theorem 7.5. *Zu jeder Derivation δ in $p \in M$ gibt es genau ein $v \in T_pM$ mit $\delta f = vf$ für alle $f \in C^2(M)$.*

Beweis. Zunächst einmal verschwindet $\delta(c)$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, da $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1)$ auch $\delta(1) = 0$ impliziert. Daher folgt nach Korollar 7.4

$$\delta(f) = \underbrace{\delta(f(p))}_{=0} + \sum_{i=1}^{m} \Big(\delta\left(\varphi^i\right) f_i(p) + \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0} \delta(f_i) \Big).$$

Da $\varphi_{*,p} \colon T_pM \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus ist, gibt es genau ein $v \in T_pM$ mit $\varphi_{*,p}(v) = \big(\delta\left(\varphi^1\right), \ldots, \delta\left(\varphi^m\right)\big)$. Dies ist nach Definition äquivalent zu $v\varphi^i = \delta\varphi^i$ für $i = 1, \ldots, m$. Wir erhalten

$$vf = v\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi^i f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(v\varphi^i\right)}_{=\delta\varphi^i} f_i(p) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0}(vf_i) = \delta f. \qquad \square$$

Definition 7.6. Ein C^k-Vektorfeld V, $0 \le k \le \infty$, auf einer Mannigfaltigkeit der Klasse C^{k+1} ist eine Abbildung $M \to TM$ der Klasse C^k mit $V(p) \in T_pM \subset TM$.

Definition 7.7 (Lie-Produkt von Vektorfeldern)**.** Seien X, Y Vektorfelder der Klasse C^1 auf M. Sei $f \in C^2(M)$. Definiere

$$\sigma(f) := X(Yf) - Y(Xf).$$

Wir werden gleich nachrechnen, dass σ in jedem Punkt $p \in M$ eine Derivation (für C^2-Funktionen) definiert. Nach Theorem 7.5 existiert genau ein Vektorfeld Z mit $\sigma f = Zf$ für alle $f \in C^2(M)$. Wir definieren das Lieprodukt von X und Y durch $[X, Y] := Z$.

Bemerkung 7.8.

(i) σ ist eine Derivation: Die Linearität ist klar.
Produktregel:

$$\begin{aligned}\sigma(fg) &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf - YfXg - fYXg - YgXf - gYXf \\ &= f\sigma(g) + g\sigma(f).\end{aligned}$$

(ii) **Koordinatendarstellung von $[X, Y]$:** Sei (U, φ) eine Karte von M und sei (U, Φ) die zugehörige Bündelkarte von TM, d. h. gelte $\Phi(x, v) = (x, \varphi_{*,x}(v))$ für $v \in T_xM$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, $E_i(x) = (x, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, seien die entsprechenden Schnitte in $U \times \mathbb{R}^n$. Setze $X_i := \Phi^{-1} E_i$. Dann ist $X_i(x) = \big(x, (\varphi_{*,x})^{-1} e_i\big)$, $i = 1, \ldots, n$. $(X_1, \ldots, X_n)$ heißen die zur Karte (U, φ) gehörenden Standardbasisvektorfelder. Jedes Vektorfeld X besitzt dann in U eine Darstellung $X = \sum\limits_i \lambda^i X_i$ mit Funktionen λ^i. Für $f \in C^1(U)$ gilt

$$\begin{aligned}X_i f|_p &= f_* X_i|_p = f_*(\varphi_{*,p})^{-1} e_i = f_*\left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(p)} e_i = \left(f \circ \varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(p)} e_i \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right) \circ \varphi(p).\end{aligned}$$

Wegen $X_i f = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi$ werden die X_i oft auch als $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bezeichnet. Es folgt für $f\in C^2(U)$

$$\begin{aligned} X_jX_if &= X_j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\right)\circ\varphi && \text{wegen } \varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\right)\circ\varphi && \text{da partielle Ableitungen im } \mathbb{R}^n \text{ kommutieren}\\ &= X_iX_jf. \end{aligned}$$

Somit ist $[X_i,X_j]=0$ für die Standardbasisvektorfelder. Seien X, Y Vektorfelder, $f,\lambda\in C^2(M)$. Es folgt

$$\begin{aligned} [X,\lambda Y]f &= X(\lambda Yf)-\lambda YXf = X\lambda Yf+\lambda XYf-\lambda YXf\\ &= (X\lambda)Yf+\lambda[X,Y]f, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} [X,\lambda Y] &= (X\lambda)Y+\lambda[X,Y],\\ [\lambda X,Y] &= -[Y,\lambda X] = -(Y\lambda)X+\lambda[X,Y]. \end{aligned}$$

Seien jetzt X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^l auf U, $1\le l\le k-1$, $M\in C^k$. Dann besitzen X und Y Darstellungen

$$X=\sum_{i=1}^n a^iX_i \quad\text{und}\quad Y=\sum_{j=1}^n b^jX_j.$$

Es folgt aufgrund der obigen Rechenregeln

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \left[X,\sum b^jX_j\right] = \sum_j\left[X,b^jX_j\right]\\ &= \sum_j\left(\left(Xb^j\right)X_j+b^j[X,X_j]\right) = \sum_j Xb^jX_j+\sum_{j,\,k} b^j\left[a^kX_k,X_j\right]\\ &= \sum_j Xb^jX_j+\sum_{j,\,k}\left(b^j\left(-X_ja^k\right)X_k+b^ja^k\underbrace{[X_k,X_j]}_{=0}\right)\\ &= \sum_{j=1}^n\left(Xb^j-Ya^j\right)X_j. \end{aligned}$$

(iii) Hieraus folgt: Sind X, $Y\in C^l$, so ist $[X,Y]\in C^{l-1}$.

(iv) **Jacobi-Identität:** Sind X, Y, Z drei C^2-Vektorfelder auf M, dann gilt

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

(v) Ist M von der Klasse C^∞, so wird der $\mathbb{R}$-Vektorraum der C^∞-Vektorfelder auf M zu einer reellen Lie-Algebra mit dem Produkt $(X,Y)\mapsto[X,Y]$.

Allgemeiner ist eine Lie-Algebra ein Vektorraum V über einem Körper K mit einer Verknüpfung $[\cdot,\cdot]\colon V\times V\to V$, die Lie-Klammer heißt, und die folgenden Axiome erfüllt:

(a) Die Lie-klammer ist in beiden Argumenten linear, z. B. $[\lambda u+v,w]=\lambda[u,w]+[v,w]$ für alle $\lambda\in K$, $u,v,w\in V$,

(b) es gilt die Jacobi-Identität $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$ für alle $u,v,w\in V$,

(c) $[u,u]=0$ für alle $u\in V$.

Bemerkung 7.9 (Koordinatenschreibweise)**.**

(i) Für kovariante Tensoren, z. B. für 1-Formen ω, verwenden wir untere Indices: ω_i. Für kontravariante Tensoren, z. B. für Vektorfelder X, verwenden wir obere Indices: X^i. Für allgemeinere Tensoren in $TM^{(r,s)}$ benutzen wir r obere („kontravariante“) Indices und s untere („kovariante“) Indices.

(ii) Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien (U, φ) und (V, ψ) verschiedene Karten für M mit Koordinaten x^i bzw. y^i und $U \cap V \neq \emptyset$; genauer: ... mit Koordinaten (x^i) .... Sei $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Vektorfeld. Betrachte $y = y(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Dann gilt nach Lemma 5.4

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i \frac{\partial}{\partial y^j},$$

oder, mit etwas mehr Details,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}(p) &= \varphi^{-1}_{*,p}\langle e_i\rangle = \psi^{-1}_{*,p} \circ \psi_{*,p} \circ \varphi^{-1}_{*,p}\langle e_i\rangle \\
&\overset{\text{Lem. 5.4}}{=} \psi^{-1}_{*,p}\left\langle d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p))\langle e_i\rangle\right\rangle \\
&= \psi^{-1}_{*,p}\left\langle \frac{\partial\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p))}{\partial x^i}\right\rangle \\
&= \psi^{-1}_{*,p}\left\langle \frac{\partial\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)^j(\varphi(p))}{\partial x^i} e_j\right\rangle \\
&\overset{\text{def. } y}{=} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\psi^{-1}_{*,p}\langle e_j\rangle \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},
\end{aligned}$$

wobei wir $\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\varphi^{-1}\right)_* e_i$ und $\frac{\partial}{\partial y^j} = \left(\psi^{-1}\right)_* e_j$ für Basen e_k des $\mathbb{R}^m$ im Bild der Karte φ bzw. ψ benutzt haben. Wir schreiben dies auch als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(iii) Sei $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ in Koordinaten ein Vektorfeld auf M und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Wie in Bemerkung 5.11 seien φ und ψ Karten für M bzw. N. Definiere $\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, also f „in Karten“, und $y = \tilde{f}(x)$. Dann gilt

$$f_*(X) = f_*\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Im Spezialfall $f = \mathrm{id}$ werden also aus den Koordinaten X^i in der „φ-Karte“ die Koordinaten $X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ in der „ψ-Karte“. Wir erhalten dasselbe Ergebnis wie oben oder wie nach Definition 6.13, siehe auch weiter unten.

(iv) Sei X ein Vektor und ω eine 1-Form. Seien φ, ψ Kartenabbildungen. Bezeichne mit $dx^1, \ldots, dx^m$ eine zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis, d. h. gelte

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j.$$

(Alternativ: Definiere die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis $d\varphi^1 \equiv dx^1, \ldots, d\varphi^m \equiv dx^m$ durch $d\varphi^i(X) := X\varphi^i$. Hieraus folgt (mit Bemerkung 7.8 (ii) beim zweiten Gleichheitszeichen)

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\varphi^i = \frac{\partial(\varphi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \circ \varphi = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \circ \varphi = \delta^i_j.\Bigg)$$

Entsprechend zu den Basen $dx^1, \ldots$ bezüglich der φ-Karte definieren wir Basen $dy^1, \ldots$ bezüglich der ψ-Karte. Auch hier gilt wieder $dy^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \delta^i_j$. Mit Hilfe geeigneter Koeffizienten a^i_j können wir auch die dualen Basen ineinander

Transformieren: $dx^i = a^i_k dy^k$. Wir schreiben $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$, $d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ und bezeichnen die Inverse mit $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$. Die Wahl der Koeffizienten a^i_k ergibt sich dabei aus

$$\delta^i_j = dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = a^i_k dy^k \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l} = a^i_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.$$

Somit ist $a^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$ und es gilt die Transformationsregel $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$.

(v) Der Ausdruck ist $\omega(X)$ invariant, d. h. kartenunabhängig, definiert; in Karten gilt aufgrund der obigen Rechnung

$$\omega(X) = \omega_i dx^i X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_i X^j \delta^i_j = \omega_i X^i = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k X^j \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

(vi) Sei nun T ein $(1,1)$-Tensorfeld. (Für ein (r,s)-Tensorfeld verfährt man mit sämtlichen Einträgen entsprechend.) Wir schreiben in Koordinaten

$$T^j_i := T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right)$$

und erhalten aufgrund der obigen Überlegungen, die wir nach Definition 6.13 auf jedes Argument separat anwenden,

$$T = T^j_i \, dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = T^j_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

(vii) Sei wieder $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Wir beschreiben die Wirkung eines $(1,1)$-Tensors T auf einen Vektor X und einen Kovektor ω, d. h. auf ein Element das punktweise im Dualraum zu T_pM ist, in Koordinaten. Es gilt

$$\begin{aligned} T^i_j &:= T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right), \\ \left(T^k_l\right)\left((\omega_i), \left(X^j\right)\right) \equiv T\left((\omega_i), \left(X^j\right)\right) &= T\left\langle \omega_i dx^i, X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\ &= T^k_l \frac{\partial}{\partial x^k} \left\langle \omega_i dx^i \right\rangle dx^l \left\langle X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\ &= T^k_l \omega_k X^l. \end{aligned}$$

Der Deutlichkeit halber fügen wir nun Indices x bzw. y an um anzuzeigen bezüglich welcher Basen wir die Komponenten bestimmt haben.

Wir transformieren nun nach Definition 6.13 unter Verwendung von $\Phi = \varphi_{\text{Def. 6.13}} = d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$. Die Inverse ist durch $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$ gegeben, die Matrix der dualen Abbildung durch $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$.

$$\begin{aligned} \left(\Phi_\# {}^xT\right) \left\langle \left({}^y\omega_i\right), \left({}^yX^j\right)\right\rangle &= {}^xT \left\langle \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \cdot {}^y\omega_i\right), \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot {}^yX^j\right)\right\rangle \\ &= {}^xT^k_l \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \cdot {}^y\omega_i \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot {}^yX^j \\ &= {}^yT^i_j \cdot {}^y\omega_i \cdot {}^yX^j = {}^xT^k_l \cdot {}^x\omega_k \cdot {}^xX^l, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile auf zwei unterschiedliche Arten geklammert haben.

Bei einem Koordinatenwechsel transformieren sich die Koordinaten also gerade gemäß der Regel aus Definition 6.13.

(viii) Für die Lie-Klammer gilt in Koordinaten
$$[X,Y]^j = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^j - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} X^j.$$

Bemerkung 7.10 (Fluss eines Vektorfeldes)**.** Sei $X \in C^l$, $l \geq 1$, ein Vektorfeld. Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{\alpha} = X \circ \alpha$ mit
$$\dot{\alpha}\langle 1\rangle \equiv \dot{\alpha} = \alpha_{*,t}\langle 1\rangle, \tag{7.1}$$
wobei $\alpha\colon I \to M$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

Ist (U,φ) eine Karte von M mit $\alpha(I) \subset U$, so ist $\dot{\alpha} = X \circ \alpha$ äquivalent zu
$$\varphi_{*,\alpha(t)}\alpha_{*,t}\langle 1\rangle = \varphi_{*,\alpha(t)}X(\alpha(t)).$$
Wir formen beide Seiten um
$$\varphi_*\left(\left(X \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(t)))\right) = (\varphi \circ \alpha)_{*,t}\langle 1\rangle = (\varphi(\alpha(t)), (\varphi \circ \alpha)'(t)).$$
$\varphi_*(X \circ \varphi^{-1})$ ist ein Vektorfeld auf $\varphi(U)$ und daher von der Form $\varphi_* X \circ \varphi^{-1}(y) = (y, X_U(y))$. Daher ist (7.1) äquivalent zu $(\varphi\circ\alpha)'(t) = X_U(\varphi\circ\alpha(t))$. Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es daher lokal eine Lösung: Zu jedem $p_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung U_0 von p_0 und eine offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, sowie eine Abbildung $F \in C^l(U_0 \times I, M)$, so dass
$$\begin{aligned} F(p,0) &= p \quad \forall p \in U_0, \\ \dot{F} &= X \circ F, \quad \text{wobei } \dot{F}(p,t) = F_{*,(p,t)}\langle(0,1)\rangle \end{aligned}$$
ist, d. h. $t \mapsto F(p,t)$ ist eine Integralkurve von X mit Anfangspunkt p für $t = 0$. F heißt lokaler Fluss von X.

Lemma 7.11 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Seien $\alpha_1, \alpha_2\colon (a,b) \to M$ Integralkurven von X mit $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ für ein $t_0 \in (a,b)$. Dann gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.*

Beweis. Setze $c_0 := \sup\{c\colon \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\,\forall\, t_0 \leq t \leq c\}$. Falls $c_0 < b$ ist, folgt $\alpha_1(c_0) = \alpha_2(c_0)$, weil die Kurven α_i stetig sind und M Hausdorffsch ist. Sei (U,φ) eine Karte von M mit $\alpha_i(t) \in U$ für $c_0 - \varepsilon < t < c_0 + \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ für $i = 1, 2$. Dann gilt $(\varphi \circ \alpha_i)'(t) = X_U(\varphi \circ \alpha_i(t))$ für diese Werte von t und $\varphi \circ \alpha_1(c_0) = \varphi \circ \alpha_2(c_0)$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt $\varphi \circ \alpha_1(t) = \varphi \circ \alpha_2(t)$ für t nahe c_0. Widerspruch zur Definition von c_0. Die Behauptung folgt. □

Korollar 7.12. *Für jedes $p \in M$ gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales offenes Intervall I_p mit $0 \in I_p$, auf welchem die Integralkurve α mit $\alpha(0) = p$ definiert ist, nämlich die Vereinigung aller offenen Intervalle I mit $0 \in I$, so dass $\alpha\colon I \to M$ eine Integralkurve mit $\alpha(0) = p$ ist.*

Bemerkung 7.13 (Erinnerung: Lebesguesche Zahl)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, U_i offen. Dann existiert $\lambda > 0$, so dass für alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} A < \lambda$ ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$ existiert.

Theorem 7.14 (Existenzsatz für den maximalen Fluss)**.** *Sei $W := \bigcup\limits_{p\in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$ und für $p \in M$ sei $F(p,\cdot)\colon I_p \to M$ die maximale Integralkurve von $X \in C^l$, $l \geq 1$, mit $F(p,0) = p$. Dann ist W in $M \times \mathbb{R}$ offen und $F \in C^l(W,M)$. (F heißt maximaler Fluss von X.)*

Beweis. Sei $(\bar{p},\bar{t}) \in W$, ohne Einschränkung $\bar{t} > 0$. Nach Definition und Eindeutigkeitssatz folgt
$$F(F(p,s),t) = F(p,s+t), \tag{7.2}$$

da für festes (p,s) auf beiden Seiten die eindeutig bestimmte Integralkurve von X mit Anfangspunkt $F(p,s)$ für $t=0$ steht. Aufgrund des lokalen Existenzsatzes und aufgrund des Lemmas über die Lebesguesche Zahl, angewandt auf $\left[0,\bar t\right]$, gibt es eine Zahl $N\in\mathbb{N}$ und offene Umgebungen U_j von $F(\bar p,\frac{j}{N}\bar t)$, $j=0,\dots,N$, so dass F auf $U_j\times\left(\frac{-2}{N}\bar t,\frac{2}{N}\bar t\right)$ definiert und von der Klasse C^l ist. Wir schreiben $F_t(p)=F(p,t)$ und erhalten aus (7.2)

$$F_{\frac{\bar t}{N}}\left(F_{\frac{j-1}{N}\bar t}(\bar p)\right)=F_{\frac{j}{N}\bar t}(\bar p).$$

Wähle nun induktiv (absteigend) Umgebungen $U_j'\subset U_j$ von $F_{\frac{j}{N}\bar t}(\bar p)$ mit $U_N':=U_N$, $F_{\frac{\bar t}{N}}(U_{j-1}')\subset U_j'$, z. B. $U_{j-1}'=F_{-\frac{\bar t}{N}}(U_j')\cap U_{j-1}$. Für $p\in U_0'$ wollen wir $\alpha(p,t):=F_t(p)$ für $0\le t\le\frac{N+1}{N}\bar t$ definieren. Es gilt für $0\le t\le\frac{N+1}{N}\bar t$ und $0\le j\le N$ mit $\frac{j\bar t}{N}\le t<\frac{(j+1)\bar t}{N}$

$$\alpha(p,t)=F_{t-\frac{j\bar t}{N}}\Big(\underbrace{F_{\frac{\bar t}{N}}\Big(\dots\Big(F_{\frac{\bar t}{N}}(p)\Big)\dots\Big)}_{j\text{-mal iteriert}}\Big).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist $\alpha(p,t)$ eine Integralkurve von X mit $\alpha(p,0)=p$. Somit ist $F(t,p)$ für alle $p\in U_0'$ und $t\in\left[0,\frac{N+1}{N}\bar t\right]$ wohldefiniert und es gilt

$$F_t(p)=F_{t-\bar t}\Big(\underbrace{F_{\frac{\bar t}{N}}\Big(\dots\Big(F_{\frac{\bar t}{N}}(p)\dots\Big)\Big)}_{N\text{-mal}}\Big)$$

für $|\bar t-t|\le\frac{\bar t}{N}$ und $p\in U_0'$. Daher ist $U_0'\times\left(\bar t-\frac{\bar t}{N},\bar t+\frac{\bar t}{N}\right)\subset W$ und F ist dort von der Klasse C^l. $\square$

8. Zusammenhänge

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $k\ge 2$.

Seien $V^l(M)$ die Vektorfelder der Klasse C^l, $0\le l\le k-1$ auf M. Dann ist $V^l(M)$ ein $C^l(M)$-Modul. Es gilt nämlich für $V,W\in V^l(M)$ und $f,g\in C^l(M)$.

(i) $f(V+W)=fV+fW$,
(ii) $(f+g)V=fV+gV$,
(iii) $(fg)V=f(gV)$,
(iv) $1V=V$

und $C^l(M)$ ist ein Ring.

Definition 8.1 (Zusammenhang)**.** Ein Zusammenhang auf M (der Klasse C^l) ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla: V^l(M)\times V^{l+1}(M)&\to V^l(M),\\ (X,Y)&\mapsto\nabla_XY,\end{aligned}$$

mit

(i) $\nabla_X(Y_1+Y_2)=\nabla_XY_1+\nabla_XY_2$,
(ii) $\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_XY$,
(iii) $\nabla_{X_1+X_2}Y=\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y$ und
(iv) $\nabla_{gX}Y=g\nabla_XY$,

wobei $X,X_1,X_2\in V^l(M)$, $Y,Y_1,Y_2\in V^{l+1}(M)$, $f\in C^{l+1}(M)$ und $g\in C^l(M)$.

Beispiel 8.2.

(i) Ist TM trivial, dann existieren globale Basisfelder $X_1,\dots,X_m\in C^{k-1}$. Schreibe $Y\in V^l(M)$, $l\le k-1$, als $Y=\lambda^jX_j$ mit $\lambda^j\in C^l$. Definiere $\nabla_XY:=(X\lambda^j)X_j$. Es gilt insbesondere $\nabla_XX_j=0$.

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k. Für $x \in M$ sei $P(x) : \mathbb{R}^n \to T_xM$ die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum $T_xM := \{\alpha'(0) | \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\, \alpha(0) = x\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $P : M \to L(\mathbb{R}^n)$ von der Klasse C^{k-1}: Sei (U, φ) eine Karte von $\mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$. Dann gibt es Basisfelder $X_1, \ldots, X_n \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^n)$, so dass $X_1, \ldots, X_m$ tangential zu M sind. Nach Orthonormalisierung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $X_1, \ldots, X_n$ eine Orthogonalbasis ist. Dann gilt

$$P(x)Y = \sum_{j=1}^{m} \langle Y, X_j(x)\rangle_{\mathbb{R}^n} X_j(x).$$

Setze $\nabla_X Y(z) := P(z)\langle dY(z)\langle X(z)\rangle\rangle$, wobei wir das Vektorfeld $Y\colon M \to \mathbb{R}^n$ in eine Umgebung von M fortsetzen. Beachte, dass diese Definition nicht von der Fortsetzung abhängt (kleine Übung).

Bemerkung 8.3. Sei $M \in C^k$. Wir wollen die Zusammenhangsabbildung lokal in Karten darstellen. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Standardbasisvektorfeld zu einer Karte (U, φ), d. h. aufgrund bisheriger Überlegungen gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i} \circ \varphi$.

(i) $\nabla_X Y|_p$ hängt nur vom Wert $X(p)$ ab, d. h. $\nabla_X Y$ ist tensoriell in Bezug auf X: Dies ist äquivalent zu $\nabla_X Y|_p = 0$ falls $X(p) = 0$ gilt. Gelte also $X(p) = 0$. Wähle eine Karte (U, φ) um p sowie eine Umgebung V von p mit $\bar{V} \subset U$, und $g \in C^k(M)$ mit $g(p) = 1$ und $g = 0$ auf $M \setminus V$. Schreibe $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf U. Es gilt $g^2 X = \sum (g\lambda^i)\left(g \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Setze

$$\tilde{\lambda}^i = \begin{cases} g\lambda^i & \text{auf } U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \tilde{X}_i = \begin{cases} g\frac{\partial}{\partial x^i} & \text{auf } U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $g^2 X = \sum \tilde{\lambda}^i \tilde{X}_i$ auf M und $\tilde{\lambda}^i(p) = g\lambda^i(p) = 0$. Es folgt

$$\nabla_X Y|_p = g^2(p)\nabla_X Y|_p = \nabla_{g^2 X} Y|_p = \nabla_{\sum \tilde{\lambda}^i \tilde{X}_i} Y|_p = \sum \underbrace{\tilde{\lambda}^i(p)}_{=0} \nabla_{\tilde{X}_i} Y|_p = 0.$$

(ii) Analog zu Bemerkung 7.2 verschwindet $\nabla_X Y|_p$, falls Y in einer Umgebung von p verschwindet; somit hängt $\nabla_X Y|_p$ nur von den Werten von Y in einer beliebig kleinen Umgebung von p ab.

(iii) Sei $U \subset M$ offen und $p \in U$, so ist $\nabla_v Y|_p$ für $v \in T_pM$ und $Y \in V^{l+1}(U)$ wohldefiniert: Wähle nämlich Vektorfelder $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ auf M mit $\tilde{X}(p) = v$ und $\tilde{Y} = Y$ in einer Umgebung von p und setze $\nabla_v Y|_p := \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$.

(iv) Seien jetzt $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ Standardbasisvektorfelder auf U. Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen Γ^k_{ij}, die Christoffelsymbole des Zusammenhanges, so dass

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

in U gilt. Seien $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_i \lambda^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_i \lambda^i \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \mu^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\} \\
&= \sum_{i,j} \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k} \lambda^i \mu^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \sum_k \Bigg(\underbrace{X\mu^k}_{=d\mu^k\langle X\rangle} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \lambda^i \mu^j \Bigg) \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 8.4 (Vektorfelder längs Abbildungen)**.** Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Jede Abbildung $F : N \to TM$ ist von der Form $F(x) = (f(x), Y(x))$ mit $f = p \circ F$, $p : TM \to M$ und $Y(x) \in T_{f(x)}M$. Y heißt Vektorfeld längs f.

Ist Y ein Vektorfeld auf M und $f\colon N \to M$ eine Abbildung, so ist $Y \circ f$ ein Vektorfeld längs f.

Sei $X \in T_pN$, berechne $\nabla_{f_{*,p}\langle X\rangle} Y|_{f(p)}$. Da $f\colon N \to M$ ist, folgt $f_{*,p}\colon T_pN \to T_{f(p)}M$. Sei (U, φ) eine Karte von M mit $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$. Setze $f^i = \varphi^i \circ f$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f_{*,p}\langle X\rangle &= \left(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ f\right)_{*,p} \langle X\rangle = \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} \langle(\varphi \circ f)_{*,p}\langle X\rangle\rangle \\
&= \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} \left\langle \sum_i \left(\varphi^i \circ f\right)_{*,p} \langle X\rangle e_i \right\rangle \\
&= \sum_i \underbrace{\left(f^i\right)_{*,p} \langle X\rangle}_{=Xf^i|_p} \underbrace{\left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} e_i}_{=\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{f(p)}}
\end{aligned}$$

und somit folgt für ein Vektorfeld $Y = \mu^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ auf M (nach „Kettenregel")

$$\nabla_{f_{*,p}\langle X\rangle} Y|_{f(p)} = \big(\underbrace{f_{*,p}\langle X\rangle \mu^k|_{f(p)}}_{=X(\mu^k \circ f)|_p} + \Gamma^k_{ij} \left(Xf^i\right) \mu^j \big) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dabei hängt insbesondere der Ableitungsterm nur von $Y \circ f$ ab.

Definiere daher für $f\colon N \to M$ und beliebige Vektorfelder $Y(x) \in T_{f(x)}M$ mit $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \circ f$ mit Funktionen μ^j auf N und für Vektorfelder X auf N

$$\nabla^f_X Y := \left(X\mu^k + \Gamma^k_{ij} \circ f \cdot \left(Xf^i\right) \mu^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ f.$$

Im Spezialfall $f = \alpha\colon (a, b) \to M$, wenn f also eine Kurve ist und $X = \frac{d}{dt}$ ist, gilt

$$\nabla^\alpha_{\frac{d}{dt}} Y \equiv \nabla^\alpha Y = \left((\mu')^k + \Gamma^k_{ij} \circ \alpha \, (\alpha')^i \mu^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \alpha.$$

Man rechnet nach, dass dies die Eigenschaften eines Zusammenhanges erfüllt, wenn auch die Vektorfelder aus unterschiedlichen Räumen kommen.

Definition 8.5. Ein Vektorfeld Y heißt parallel längs einer Kurve α, wenn $\nabla^\alpha Y = 0$ gilt.

Bemerkung 8.6. Schreiben wir $Y = \mu^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, so ist Parallelität äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\mu' + \Gamma \circ \alpha \langle \alpha', \mu\rangle = 0.$$

Theorem 8.7. *Sei $\alpha\colon (a, b) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann bilden die parallelen Vektorfelder längs α einen m-dimensionalen Vektorraum: Zu $t_0 \in (a, b)$ und $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld Y längs α mit $Y(t_0) = v$.*

Beweis. Die Behauptung ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme innerhalb einer Kartenumgebung klar. Beachte, dass bei linearen Systemen Existenz und Eindeutigkeit folgt, sobald die Koeffizienten stetig sind. Ein Fortsetzungsargument liefert dann die Behauptung. □

Korollar 8.8. *Sei $\alpha\colon (a, b) \to M$ differenzierbar und seien $t_0, t \in (a, b)$. Definiere eine Abbildung $P_{t_0,t}\colon T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t)}M$ durch*

$$T_{\alpha(t_0)}M \ni v \mapsto Y(t) \in T_{\alpha(t)}M,$$

wobei Y das längs α parallele Vektorfeld mit $Y(t_0) = v$ ist. $P_{t_0,t}$ ist ein Vektorraumisomorphismus und es gilt $P^{-1}_{t_0,t} = P_{t,t_0}$.

Lemma 8.9. *Sei Y ein Vektorfeld längs α. Dann gilt*

$$\nabla^\alpha Y(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}(P_{t,t_0}Y(t) - Y(t_0)).$$

Beweis. Nach Theorem 8.7 existieren m linear unabhängige parallele Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_m$ längs α. Für diese gilt $P_{t,t_0}Y_j(t) = Y_j(t_0)$. Schreibe $Y(t) = \mu^j(t)Y_j(t)$. Es folgt $P_{t,t_0}Y(t) = \mu^j(t)Y_j(t_0)$ und

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}(P_{t,t_0}Y(t) - Y(t_0)) &= \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left(\mu^j(t) - \mu^j(t_0)\right)Y_j(t_0)\\ &= (\mu')^j(t_0)Y_j(t_0)\end{aligned}$$

und andererseits

$$\nabla^\alpha Y = \nabla^\alpha(\mu^j Y_j) = (\mu')^j Y_j + \mu^j \underbrace{\nabla^\alpha Y_j}_{=0},$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Parallelität der Vektorfelder Y_j gilt. $\square$

Definition 8.10 (Torsion und Krümmung)**.** Seien X, Y, Z lokal definierte Vektorfelder. Definiere die Torsion T und die Krümmung R durch

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

und

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Bemerkung 8.11. T und R sind Tensorfelder, d. h. $T(X,Y)|_p$ und $R(X,Y)Z|_p$ hängen für beliebiges $p \in M$ nur von den Werten $X(p)$, $Y(p)$ und $Z(p)$ ab.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$T(fX,Y) = fT(X,Y), \quad R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z, \quad \ldots$$

für eine beliebige Funktion f gilt.

Seien nämlich X und $\tilde{X}$ zwei verschiedene Vektorfelder mit $X(p) = \tilde{X}(p)$. $T(X,Y) = T\big(\tilde{X},Y\big)$ in p ist äquivalent zu $T\big(X-\tilde{X},Y\big) = 0$ oder $\sum\limits_{i=1}^n T\left(\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y\right) = 0$ für Funktionen λ^i mit $\lambda^i(p) = 0$.

Wegen $T(X,Y) = -T(Y,X)$ und $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ genügt es sogar, folgendes nachzuweisen:

(i) $T(fX,Y) = fT(X,Y)$,
(ii) $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z$,
(iii) $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$.

Dies gilt, denn es ist

(i)

$$\begin{aligned}T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y]\\ &= f\nabla_X Y - (Yf)X - f\nabla_Y X + (Yf)X - f[X,Y]\\ &\qquad \text{(nach Bemerkung 7.8)}\\ &= fT(X,Y).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z\\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{-(Yf)X+f[X,Y]}Z\\ &= fR(X,Y)Z - (Yf)\nabla_X Z + (Yf)\nabla_X Z\\ &= fR(X,Y)Z.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}R(X,Y)fZ &= \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)\\ &= \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Y + f\nabla_X Z)\\ &\quad - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z\\ &\quad - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z\\ &\quad - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= fR(X,Y)Z.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.12. Es ist

$$\begin{aligned}T|_p &: T_pM \times T_pM \to T_pM,\\ R|_p &: (T_pM)^3 \to T_pM \cong (T_pM)''.\end{aligned}$$

Aufgrund der Identifikation $T_pM \cong (T_pM)''$ können wir die Torsion T als $(1,2)$-Tensorfeld und den Krümmungstensor R als $(1,3)$-Tensorfeld auffassen: Sei $Z' \in (T_pM)'$. Dann ist $T(X,Y)\langle Z'\rangle = Z'\langle T(X,Y)\rangle$.

Bemerkung 8.13 (Koordinatendarstellung)**.**
Seien $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ Standardbasisvektorfelder zu einer Karte (U,φ). Dann definieren wir die Komponenten T^k_{ij} und ${R_{ij}}^l{}_k$ durch

$$T\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = T^k_{ij}\tfrac{\partial}{\partial x^k}$$

und

$$R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k} = {R_{ij}}^l{}_k\tfrac{\partial}{\partial x^l}.$$

Da T und R Tensoren sind, gilt für $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Z = Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}$

$$\begin{aligned}T(X,Y) &= T^k_{ij}X^iY^j\tfrac{\partial}{\partial x^k},\\ R(X,Y)Z &= {R_{ij}}^l{}_kX^iY^jZ^k\tfrac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

Wegen $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ folgt

$$\begin{aligned}T\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tfrac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^i} = \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k},\\ R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^m_{jk}\tfrac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^m_{ik}\tfrac{\partial}{\partial x^m}\right)\\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{jk}\tfrac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\tfrac{\partial}{\partial x^l} - \tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik}\tfrac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\tfrac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

Also gilt

$${R_{ij}}^l{}_k = \tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk} - \tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}.$$

9. Metriken und Levi-Civita Zusammenhänge

Der Einfachheit halber wollen wir ab jetzt unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit stets eine C^∞-Mannigfaltigkeit verstehen.

Definition 9.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine pseudo-Riemannsche Metrik auf M ist ein $(0,2)$-Tensorfeld g mit folgenden Eigenschaften

(i) $g|_x \equiv g_x$ ist für alle $x \in M$ symmetrisch,
(ii) g_x ist für alle $x \in M$ nicht entartet, d. h. aus $g_x(v,w) = 0$ für alle $w \in T_xM$ folgt $v = 0$.

g heißt Riemannsche Metrik, wenn zusätzlich $g_x(v,v) \geq 0$ für alle $v \in T_xM$ gilt. Damit werden alle Tangentialräume T_xM zu Euklidischen Vektorräumen.

Ist klar, welche Metrik wir betrachten, so schreiben wir

$$\langle v, w\rangle_x \equiv \langle v, w\rangle \equiv g_x(v,w)$$

für $v, w \in T_xM$.

Eine Mannigfaltigkeit M mit einer pseudo-Riemannschen Metrik g heißt pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g).

Ist die Metrik sogar Riemannsch, so heißt (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 9.2. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasis zu (U,φ). Setze

$$g_{ij} := \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle .$$

Für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ folgt

$$\langle X, Y\rangle = g_{ij} X^i Y^j.$$

(i) Die Symmetrie ist äquivalent zu $g_{ij} = g_{ji}$.
(ii) g ist genau dann nicht entartet, wenn $\operatorname{rang}(g_{ij}) = m$ gilt.
(iii) g ist genau dann Riemannsch, wenn $(g_{ij}) > 0$.

Beispiele 9.3.

(i) Für $\mathbb{R}^m$ mit dem Standardskalarprodukt gilt $\langle X, Y\rangle = X^iY^j\delta_{ij}$. Daher ist M mit Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.
(ii) Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei N eine Untermannigfaltigkeit. Dann wird N mit der auf TN eingeschränkten Metrik eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

 Dies gilt i. a. nicht für pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.
(iii) Minkowski-Raum: $\mathbb{R}^{m+1}$ mit $\langle X, Y\rangle = -X^0Y^0 + \sum\limits_{k=1}^{m} X^kY^K$, wobei $X = (X^0, X^1, \ldots, X^m)$ und $Y = (Y^0, Y^1, \ldots, Y^m)$. Es ist

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

 Man schreibt häufiger $\mathbb{L}^{m,1}$.

 Der Lichtkegel (ohne Ursprung) ist durch

$$K := \left\{ X : \left(X^0\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} (X^k)^2, X^0 \neq 0 \right\}$$

 definiert; Den Ursprung haben wir herausgenommen um eine Untermannigfaltigkeit zu erhalten. Dann ist die Einschränkung der Metrik auf K ausgeartet: Sei speziell $p = (1, 1, 0, \ldots, 0)$. Es ist (differenziere $\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = 0$)

$$T_pK = \left\{ X \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \langle p, X\rangle = p^0X^0 - \sum_{k=1}^{m} p^kX^k = 0 \right\}.$$

 Seien also $X, Y \in T_pK$, also mit $X^0 = X^1$ und $Y^0 = Y^1$. Dann ist

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=2}^{m} X^kY^k.$$

 Dies ist für $m \geq 1$ ausgeartet.

(iv) Ist g pseudoriemannsch, so definieren wir

$$\operatorname{ind} g_x := \max\{\dim V\colon\ V \subset T_xM \text{ ist ein Unterraum und } g_x|_{V\times V} \text{ ist negativ definit}\}.$$

$\operatorname{ind} g_x$ ist lokal konstant, da $x \mapsto \operatorname{ind} g_x$ oberhalbstetig ist, und daher auf jeder Zusammenhangskomponente konstant. Ist $\operatorname{ind} g = 1$, so heißt g Lorentz-Metrik.

Theorem 9.4. *Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Dann besitzt M eine Riemannsche Metrik der Klasse C^{k-1}.*

Bemerkung 9.5. Eine Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie ist parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung von M besitzt eine lokal endliche Verfeinerung, die M ebenfalls überdeckt. Zu dieser Verfeinerung gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Verfeinerung: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Überdeckungen. Dann heißt $\mathcal{A}$ Verfeinerung von $\mathcal{B}$, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $A \subset B$ existiert.

Lokal endlich: Eine Überdeckung $\mathcal{A}$ von M heißt lokal endlich, wenn für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert, so dass $U \cap A \neq \emptyset$ höchstens für endlich viele $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Untergeordnete Zerlegung der Eins: Sei $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von M. Dann heißt $(\lambda_A)_{A\in\mathcal{A}}$ eine der Überdeckung $\mathcal{A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, falls folgendes gilt:

(i) $\lambda_A \in C^k$ auf einer C^k-Mannigfaltigkeit,
(ii) $0 \le \lambda_A \le 1$,
(iii) $\operatorname{supp} \lambda_A \subset A$,
(iv) $\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} \lambda_A = 1$.

Beachte, dass die Summe lokal endlich ist, da die Überdeckung lokal endlich ist.

Lemma 9.6. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine Immersion. Sei g eine Riemannsche Metrik auf N. Dann ist f^*g, die zurückgezogene ("pull-back") Metrik, definiert durch*

$$f^*g(X,Y) := g(f_*X, f_*Y) \quad \textit{oder} \quad f^*g(X,Y)(p) = g(f_{*,p}X|_p, f_{*,p}Y|_p)$$

für Vektorfelder X, Y auf M eine Riemannsche Metrik auf M.

Beweis. Übung. □

Beweis von Theorem 9.4. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine Familie von Karten, die M überdecken. Betrachte (ohne Wechsel der Bezeichnung) eine Verfeinerung der Überdeckung durch die Mengen U_α, die eine lokal endliche Überdeckung ist. Sei λ_α eine der Überdeckung U_α untergeordnete Zerlegung der Eins.

Bezeichne δ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist $g_\alpha := \varphi_\alpha^*\delta$ nach Lemma 9.6 eine Metrik auf U_α. Man rechnet nun leicht nach, dass

$$g := \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot g_\alpha \quad \text{oder} \quad g(p)\langle X(p), Y(p)\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha(p) \cdot \delta\left((\varphi_\alpha)_{*,p}X(p), (\varphi_\alpha)_{*,p}Y(p)\right)$$

eine Riemannsche Metrik auf M definiert. □

Bemerkung 9.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $P_x\colon \mathbb{R}^n \to T_xM$ die orthogonale Projektion. (Erinnerung: Orthogonale Projektoren sind selbstadjungiert, d. h. es gilt $P_x^* = P_x$.) Definiere (siehe auch 8.2)

$$(\nabla_v X)(x) = P_x(dX(x)\langle v\rangle).$$

Dies ist ein Zusammenhang auf M (Übungsaufgabe). Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Seien X, Y (tangentiale) Vektorfelder auf M, die wir lokal in eine Umgebung von M fortsetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} v\langle X, Y\rangle &= \langle dX\langle v\rangle, \underbrace{Y}_{=PY}\rangle + \langle \underbrace{X}_{=PX}, dY\langle v\rangle\rangle \\ &= \langle \nabla_v X, Y\rangle + \langle X, \nabla_v Y\rangle, \end{aligned}$$

d. h. für $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ gilt die Produktregel.

Definition 9.8. Ein Zusammenhang ∇ auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt pseudo-Riemannscher Zusammenhang oder metrischer Zusammenhang, wenn die Ricci-Identität

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt.

Bemerkung 9.9. Die Ricci-Identität auf der Zielmannigfaltigkeit überträgt sich auf Vektorfelder längs Abbildungen.

Beweis. Sei $f\colon N \to M$ eine Abbildung und X, Y Vektorfelder längs f, Z ein Vektorfeld auf N. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasis bezüglich einer Karte (V, ψ) von M. Wir schreiben $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ f$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \circ f$ und erhalten nach Bemerkung 8.4

$$\nabla^f_Z X = \left(Z\lambda^i\right) \tfrac{\partial}{\partial x^i} \circ f + \lambda^i \left(\nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \circ f,$$

da $f_*\langle Z\rangle = Z^j \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$ bzw. $f_{*,p}\langle Z(p)\rangle = Z^j|_p \left.\frac{\partial f^l}{\partial y^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_{f(p)}$ ist und nach Definition der Christoffelsymbole. Für Y erhalten wir eine analoge Formel. Es folgt

$$\begin{aligned} Z\langle X, Y\rangle &= Z\left(\lambda^i \mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f\right) \\ &= \left(Z\lambda^i\right) \mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f + \lambda^i \left(Z\mu^j\right) \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f \\ &\quad + \lambda^i \mu^j \left(f_*\langle Z\rangle \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\right) \circ f \end{aligned}$$

(nach Kettenregel und Definition von $f_*\langle Z\rangle$)

$$\begin{aligned} &= \ldots + \ldots + \lambda^i \mu^j \left\langle \nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f + \lambda^i \mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f \\ &= \left\langle \nabla^f_Z X, Y\right\rangle + \left\langle X, \nabla^f_Z Y\right\rangle. \end{aligned}$$

□

Hiermit werden wir später sehen, dass α' für Geodätische konstante Länge hat.

Definition 9.10. Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein torsionsfreier Zusammenhang der die Ricci-Identität erfüllt heißt Levi-Civita Zusammenhang. Es gilt folglich

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
(ii) $Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$

für alle Vektorfelder X, Y, Z auf M.

Der mit Hilfe eines Levi-Civita Zusammenhanges definierte Krümmungstensor heißt Riemannscher Krümmungstensor.

Bemerkung 9.11. Der Projektionszusammenhang ist ein Levi-Civita Zusammenhang.

Beweisidee. Es fehlt noch der Nachweis, dass der Projektionszusammenhang torsionsfrei ist: $\Gamma^k_{ij} = 0$. Dazu stellen wir die Untermannigfaltigkeit lokal als graph u dar, so dass im Ursprung $Du = 0$ gilt. Nimmt man als Karte die orthogonale Projektion auf die entsprechenden Komponenten und benutzt $\frac{\partial}{\partial x^i} = (e_i, u_i)$, konstant in der

„Höhe" fortgesetzt, so erhält man im Ursprung $\nabla_Y X = P(dX\langle Y\rangle) = 0$ für diese Standardbasisvektorfelder. Somit folgt dort $\Gamma_{ij}^k = 0$ und, da die Torsion ein Tensor ist, überall $T = 0$. $\square$

Theorem 9.12. *Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf M einen eindeutig bestimmten Levi-Civita Zusammenhang.*

Beweis. **Eindeutigkeit:** Sei ∇ ein Zusammenhang mit (i) und (ii) aus Definition 9.10. Dann folgt

$$Z\langle X, Y\rangle \overset{\text{(ii)}}{=} \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &\overset{\text{(ii)}}{=} \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle, \end{aligned} \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} Y\langle Z, X\rangle &\overset{\text{(ii)}}{=} \langle\nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \langle\nabla_Z Y, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Als (9.1) + (9.2) − (9.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} &Z\langle X, Y\rangle + X\langle Y, Z\rangle - Y\langle Z, X\rangle \\ &= 2\langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\nabla_Z X, Y\rangle = &\tfrac{1}{2}\{Z\langle X, Y\rangle + X\langle Y, Z\rangle - Y\langle Z, X\rangle\} \\ &+ \tfrac{1}{2}\{-\langle Y, [X, Z]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle\}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Da $\langle\cdot, \cdot\rangle$ nicht ausgeartet ist, erhalten wir die Eindeutigkeit von ∇.

Existenz: Es genügt, ∇ mit (i) und (ii) auf einer Kartenumgebung U zu konstruieren. Seien nämlich ∇^U und ∇^V Zusammenhänge auf U bzw. V mit (i) und (ii), so gilt aufgrund des Eindeutigkeitsteiles $\nabla^U = \nabla^V$ auf $U \cap V$.

Sei (U, φ) eine Karte mit Standardbasis $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Auf U ist ∇ nach Bemerkung 8.3 durch die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k festgelegt. Diese waren über

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

definiert. Aus

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$$

erhalten wir

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle.$$

Aus (9.4) folgt mit $Z = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^l}$

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}\right) = g_{kl}\Gamma_{ij}^k.$$

Hieraus ist Γ_{ij}^k eindeutig berechenbar, da g_{kl} vollen Rang besitzt.

Definiere daher den Zusammenhang ∇ auf U wie folgt: Für Vektorfelder $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ setzen wir

$$\nabla_X Y = \left(X\mu^k + \Gamma_{ij}^k \lambda^i \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{9.5}$$

wobei $g_{kl}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}\right)$ und $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. Nach Definition ist klar, dass $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ gilt. Somit ist nach Bemerkung 8.13 ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang und (i) folgt.

Nach (9.5) genügt es nun, noch die Ricci-Identität (ii) für Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}&\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle\\ =& \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \tfrac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} - \tfrac{\partial}{\partial x^j} g_{il}\right)\\ =& \tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} = \tfrac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle.\end{aligned}$$

□

10. Krümmung

Lemma 10.1 (Symmetrieeigenschaften des (Riemannschen) Krümmungstensors)**.** *Der (Riemannsche) Krümmungstensor erfüllt* (10.1) *für alle Zusammenhänge, Gleichung* (10.2) *für torsionsfreie Zusammenhänge und* (10.3) *und* (10.4) *für Levi-Civita Zusammenhänge:*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \tag{10.1}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \quad \textit{(1. Bianchi-Identität)} \tag{10.2}$$

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = -\langle R(X,Y)U,Z\rangle, \tag{10.3}$$

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = \langle R(Z,U)X,Y\rangle. \tag{10.4}$$

Beweis. (10.1) folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors.

Da R ein Tensor ist, genügt es, (10.2) (wie alle Identitäten hier) für Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachzuweisen. Für diese verschwindet insbesondere die Lieklammer. Es gilt

$$\begin{aligned}0 \overset{!}{=}& R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k} + R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i} + R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^j}\\ =& \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tfrac{\partial}{\partial x^k} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\tfrac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^i}\\ &+ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tfrac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\tfrac{\partial}{\partial x^j} = 0,\end{aligned}$$

da wir aufgrund der Torsionsfreiheit, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}$, vertauschen dürfen.

Statt der Antisymmetrie in (10.3) können wir auch nachweisen, dass

$$\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt. Aus der Ricci-Identität erhalten wir

$$\begin{aligned}Y\langle Z,Z\rangle &= 2\langle \nabla_Y Z, Z\rangle,\\ XY\langle Z,Z\rangle &= 2(\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle),\\ \langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle &= \tfrac{1}{2}(XY\langle Z,Z\rangle - YX\langle Z,Z\rangle)\\ &= \tfrac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = \langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle.\end{aligned}$$

Dies war aber gerade die Behauptung.

Zu (10.4): Es gilt

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,U\rangle &\overset{(10.1)}{=} -\langle R(Y,X)Z,U\rangle \overset{(10.2)}{=} \langle R(X,Z)Y,U\rangle + \langle R(Z,Y)X,U\rangle,\\ \langle R(X,Y)Z,U\rangle &\overset{(10.3)}{=} -\langle R(X,Y)U,Z\rangle \overset{(10.2)}{=} \langle R(Y,U)X,Z\rangle + \langle R(U,X)Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

Aufsummieren liefert

$$\begin{aligned}2\langle R(X,Y)Z,U\rangle =& \langle R(X,Z)Y,U\rangle + \langle R(Z,Y)X,U\rangle\\ &+ \langle R(Y,U)X,Z\rangle + \langle R(U,X)Y,Z\rangle.\end{aligned}$$

Durch Umbenennen erhalten wir

$$\begin{aligned}2\langle R(Z,U)X,Y\rangle =& \langle R(Z,X)U,Y\rangle + \langle R(X,U)Z,Y\rangle \\ &+ \langle R(U,Y)Z,X\rangle + \langle R(Y,Z)U,X\rangle.\end{aligned}$$

Wie man durch Anwenden von (10.1) und (10.3) sieht, stimmen in beiden Gleichungen die Terme rechts überein. Die Behauptung folgt. □

Ab jetzt sei (M,g) stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Levi-Civita Zusammenhang.

Definiere

$$k(X,Y) := \langle R(X,Y)Y,X\rangle = \langle R(Y,X)X,Y\rangle = k(Y,X).$$

Wir möchten R mit Hilfe von k alleine ausdrücken. Es ist

$$\begin{aligned}R(X,Y+Z)(Y+Z) =& R(X,Y)Y + R(X,Y)Z + \underline{R(X,Z)Y} + R(X,Z)Z,\\ R(X+Z,Y)(X+Z) =& R(X,Y)X + R(X,Y)Z + \underline{R(Z,Y)X} + R(Z,Y)Z,\\ 0 =& R(X,Y)Z + \underline{R(Y,X)Z}.\end{aligned}$$

Nach Addition erhalten wir, da sich die unterstrichenen Terme aufgrund der 1. Bianchi-Identität gegenseitig aufheben

$$\begin{aligned}&R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z)\\ &= R(X,Y)Y - R(Y,X)X + 3R(X,Y)Z + R(X,Z)Z - R(Y,Z)Z,\\ 3R(X,Y)Z =& R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z) - R(X,Y)Y\\ &+ R(Y,X)X - R(X,Z)Z + R(Y,Z)Z. \qquad (10.5)\end{aligned}$$

Beachte, dass das zweite und das dritte Argument auf der rechten Seite jeweils übereinstimmen.

Definiere

$$\begin{aligned}q_Z(X,Y) :=& \langle R(X,Z)Z,Y\rangle \overset{(10.4)}{=} \langle R(Z,Y)X,Z\rangle \overset{(10.1),\,(10.3)}{=} \langle R(Y,Z)Z,X\rangle\\ =& q_Z(Y,X),\end{aligned}$$

wobei sich die Referenzen auf die Symmetrieen in Lemma 10.1 beziehen. Somit ist $q_Z(\cdot,\cdot)$ symmetrisch. Es gilt $q_Z(X,X) = k(X,Z)$. Aufgrund der Polarisationsformel ist

$$\begin{aligned}q_Z(X,Y) &= \tfrac{1}{2}(q_Z((X+Y),(X+Y)) - q_Z(X,X) - q_Z(Y,Y))\\ &= \tfrac{1}{2}(k(X+Y,Z) - k(X,Z) - k(Y,Z)).\end{aligned}$$

Nach (10.5) folgt

$$\begin{aligned}3\langle R(X,Y)Z,U\rangle =& q_{Y+Z}(X,U) - q_{X+Z}(Y,U) - q_Y(X,U)\\ &+ q_X(Y,U) - q_Z(X,U) + q_Z(Y,U).\end{aligned}$$

Wir können also $\langle R(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot\rangle$ mit Hilfe von $k(\cdot,\cdot)$ schreiben und erhalten insbesondere

Lemma 10.2. *Ist R ein $(1,3)$-Tensor mit den Symmetrien aus Lemma 10.1 und ist $k(X,Y) := \langle R(X,Y)Y,X\rangle$, so ist R durch k eindeutig festgelegt. Insbesondere sind $R \equiv 0$ und $k \equiv 0$ äquivalent.*

Um das Verhalten von $k(X_1, X_2)$ unter linearen Transformationen zu bestimmen setzen wir $Y_i = \sum_{j=1,2} c_{ij} X_j$ und erhalten

$$\begin{aligned}
k(Y_1, Y_2) &= \langle R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1\rangle \\
&= \langle R(c_{11}X_1 + c_{12}X_2, c_{21}X_1 + c_{22}X_2)c_{21}X_1 + c_{22}X_2, c_{11}X_1 + c_{12}X_2\rangle \\
&= c_{11}^2 c_{22}^2 \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle + c_{11}c_{22}c_{21}c_{12}\langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle \\
&\quad + c_{12}c_{21}c_{21}c_{12}\langle R(X_2, X_1)X_1, X_2\rangle + c_{12}c_{21}c_{22}c_{11}\langle R(X_2, X_1)X_2, X_1\rangle \\
&= (c_{11}^2 c_{22}^2 + c_{12}^2 c_{21}^2 - 2c_{11}c_{22}c_{12}c_{21})\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle \\
&= \det(c_{ij})^2 \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle.
\end{aligned}$$

Betrachte R_1 und k_1 mit

$$\begin{aligned}
\langle R_1(X, Y)Z, U\rangle &= \det \begin{pmatrix} \langle X, U\rangle & \langle X, Z\rangle \\ \langle Y, U\rangle & \langle Y, Z\rangle \end{pmatrix} \\
&= \langle X, U\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, U\rangle \\
&= \langle \underbrace{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y}_{=: R_1(X,Y)Z}, U\rangle, \\
k_1(X, Y) := \langle R_1(X, Y)Y, X\rangle &= \det \begin{pmatrix} \langle X, X\rangle & \langle X, Y\rangle \\ \langle Y, X\rangle & \langle Y, Y\rangle \end{pmatrix} \\
&= \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2.
\end{aligned}$$

Symmetrieeigenschaften von R_1: Nach Definition folgt direkt

$$R_1(X, Y)Z = -R_1(Y, X)Z, \quad \langle R_1(X, Y)Z, U\rangle = -\langle R_1(X, Y)U, Z\rangle$$

und aus der ausmultiplizierten Form $\langle R_1(X, Y)Z, U\rangle = \langle R_1(Z, U)X, Y\rangle$. Aus

$$R_1(X, Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$$

erhalten wir direkt die 1. Bianchi-Identität:

$$\begin{aligned}
R_1(X, Y)Z + R_1(Y, Z)X + R_1(Z, X)Y &= \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y \\
&\quad + \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z \\
&\quad + \langle X, Y\rangle Z - \langle Y, Z\rangle X = 0.
\end{aligned}$$

Somit erfüllt R_1 die Symmetrieeigenschaften aus Lemma 10.1. Weiterhin gilt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$k_1(X, Y) = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn X und Y linear abhängig sind.

Definition 10.3 (Schnittkrümmung)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere die Schnittkrümmung der von den linear unabhängigen Vektoren X, Y aufgespannten Ebene durch

$$K(X, Y) := \frac{k(X, Y)}{k_1(X, Y)} = \frac{\langle R(X, Y)Y, X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

Da sich k_1 und k unter linearen Transformationen gleich transformieren ist die Schnittkrümmung wohldefiniert und hängt nur vom von X und Y erzeugten zweidimensionalen Teilraum ab.

Lemma 10.4. *Hängt die Schnittkrümmung K in $p \in M$ nur von p und nicht vom durch X und Y bestimmten zweidimensionalen Vektorraum in T_pM ab, so gilt*

$$R(X, Y)Z = K \cdot R_1(X, Y)Z = K \cdot (\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

Beweis. Setze

$$R_2(X,Y)Z := R(X,Y)Z - K \cdot R_1(X,Y)Z.$$

Dann erfüllt R_2 die Symmetriebedingungen aus Lemma 10.1. Für das zugehörige k_2 gilt

$$k_2(X,Y) = \langle R_2(X,Y)Y, X\rangle = \langle R(X,Y)Y, X\rangle - K \cdot \underbrace{\langle R_1(X,Y)Y, X\rangle}_{=k_1(X,Y)} \equiv 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 10.2. □

Lemma 10.5. *Für eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ stimmen die Schnittkrümmung K und die Gaußsche Krümmung $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ überein.*

Beweis. Übung. □

Wir wollen die Symmetrien aus Lemma 10.1 auch noch in Koordinaten aufschreiben.

Bemerkung 10.6. Wir hatten

$${R_{ij}}^k{}_l \frac{\partial}{\partial x^k} := R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}$$

definiert. Setze

$$R_{ijkl} := g_{ka} {R_{ij}}^a{}_l.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -\,R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij},\\ 0 &= R_{ijkl} + R_{jlki} + R_{likj}, \end{aligned}$$

da wir in der ersten Zeile für die letzte Gleichheit noch in jedem Pärchen die Reihenfolge geändert haben. Die Bianchi-Identität gilt aufgrund der obigen Symmetrieeigenschaften auch für zyklische Permutationen von drei beliebigen Indices.

Definition 10.7 (Ricci- und Skalarkrümmung)**.**
Sei $p \in M$. Dann ist $X \mapsto R(X,U)V$ für feste $U, V \in T_pM$ ein Endomorphismus von T_pM. Wir definieren die Riccikrümmung Ric als Spur dieses Endomorphismusses

$$\operatorname{Ric}(U,V) := \operatorname{tr}(X \mapsto R(X,U)V).$$

Zur Darstellung in lokalen Koordinaten: Sei $X_1, \ldots, X_m$ eine Basis von T_pM. Sei $T : T_pM \to T_pM$ ein Endomorphismus. Dann gibt es eine Matrix T_i^j, so dass $TX_i = T_i^j X_j$ gilt. Nach Definition ist $\operatorname{tr} T = T_i^i$. Um dies auf den Riemannschen Krümmungstensor anwenden zu können, bilden wir das Skalarprodukt der T_i^j definierenden Gleichung mit X_k und erhalten

$$\langle TX_i, X_k\rangle = T_i^j \langle X_j, X_k\rangle = T_i^j g_{jk}.$$

Auch hier wollen wir wieder die Inverse der Metrik mit (g^{ij}) bezeichnen. Wir multiplizieren mit g^{ki} und erhalten

$$\langle TX_i, X_k\rangle g^{ik} = T_i^j g_{jk} g^{ki} = T_i^j \delta_j^i = T_i^i = \operatorname{tr} T.$$

Wir erhalten somit für den Riccitensor

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(U,V) &= g^{ik}\langle R(X_i,U)V, X_k\rangle = g^{ik}\langle R(U,X_i)X_k, V\rangle\\ &= g^{ik}\langle R(X_k,V)U, X_i\rangle = \operatorname{Ric}(V,U). \end{aligned}$$

Somit ist Ric symmetrisch und es gilt

$$\begin{aligned} R_{ij} &:= \operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle g^{kl}\\ &= \left\langle {R_{ki}}^m{}_j \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle g^{kl} = {R_{ki}}^m{}_j g_{ml} g^{kl}\\ &= {R_{ki}}^k{}_j = R_{kilj} g^{kl} = R_{ikjl} g^{kl}. \end{aligned}$$

Wir definieren die Skalarkrümmung R als
$$R := R_{ij}g^{ij}.$$

Bemerkung 10.8. Multipliziert man einen Tensor mit einem anderen, z. B. mit der Metrik oder ihrer Inversen, und verringert sich so nach Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention die Anzahl der „freien" Indices, d. h. der Indices, über die nicht summiert wird, so bezeichet man dies als Verjüngen oder Zusammenziehen.

Den Übergang von R_{ijkl} zu $R_{ij}{}^k{}_l$ bezeichnet man als Heben eines Indexes und die umgekehrte Operation als Senken eines Indexes.

Bemerkung 10.9. Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt das Universum als vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit pseudo-Riemannscher Metrik. Nach Diagonalisieren von g_{ij} sind drei Einträge der Form g_{ii} positiv und einer negativ.

Die Einsteinschen Feldgleichungen verknüpfen den (symmetrischen) physikalisch gegebenen Energie-Impuls Tensor T_{ij} mit der Geometrie der Mannigfaltigkeit
$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}Rg_{ij} = T_{ij}.$$
Eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist eine Mannigfaltigkeit, die diese Gleichungen erfüllt.

Bemerkung 10.10. Mit Hilfe des Ricciflusses
$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij}$$
hat Grigori Perelman 2002/03 u. a. die Poincarévermutung bewiesen:

Eine geschlossene zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit M mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^3$.

Entsprechende Aussagen für $n \geq 5$ wurden von Stephen Smale 1960 und für $n = 4$ von Michael Freedman 1982 mit anderen Methoden gezeigt.

Nach weiterer Vorbereitung wollen wir den folgenden Satz zeigen

Theorem 10.11 (Schur)**.** *Ist* $\dim M \geq 3$ *und hängt die Schnittkrümmung* K *nur vom Fußpunkt ab, so ist sie lokal konstant.*

Bemerkung 10.12.

(i) Wir wollen einen gegebenen Zusammenhang auf beliebige Tensorfelder ausdehnen. Sei zunächst ω eine 1-Form. Dann soll die folgende Form der Produktregel gelten
$$X(\omega(Y)) \overset{!}{=} (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$
Daher definieren wir
$$(\nabla_X\omega)(Y) := X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$
An der rechten Seite dieser Formel sieht man, dass $\nabla_X\omega$ (falls es ein Tensor ist) wieder eine 1-Form ist. Wir behaupten, dass $\nabla_X\omega$ dann selbst wieder ein Tensor ist: $(\nabla_X\omega)(Y+Z) = (\nabla_X\omega)(Y) + (\nabla_X\omega)(Z)$ ist klar. Direkt aus der Definition von $\nabla_X\omega$ erhalten wir, dass $\nabla_X\omega$ bezüglich X tensoriell ist, d. h. es gilt
$$\nabla_{fX}\omega = f\nabla_X\omega,$$
und dass $\nabla_X\omega$ bezüglich ω derivativ ist, d. h. es gilt
$$\nabla_X(f\omega) = (Xf)\omega + f\nabla_X\omega,$$
für jeweils alle Funktionen f.

Daher genügt es, für alle (glatten) Funktionen f
$$(\nabla_X\omega)(fY) = f\nabla_X\omega(Y)$$

zu zeigen. Dies gilt, da

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(fY) &= X(\omega(fY)) - \omega(\nabla_X(fY)) = X(f\omega(Y)) - \omega(\nabla_X(fY))\\ &= (Xf)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - \omega((Xf)Y + f\nabla_X Y)\\ &= fX(\omega(Y) - f\omega(\nabla_X Y)) = f(\nabla_X\omega)(Y).\end{aligned}$$

Allgemeiner seien $Y_1, \ldots, Y_p$ Vektorfelder, $\omega_1, \ldots, \omega_q$ 1-Formen und S ein (q,p)-Tensor. Dann definieren wir $\nabla_X S$ durch die Relation

$$\begin{aligned}&X(S(Y_1, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_q))\\ &= \nabla_X S(Y_1, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_q)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} S(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_q)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{q} S(Y_1, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \nabla_X\omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_q).\end{aligned}$$

Analog zu oben rechnet man nach, dass sich $\nabla_X S$ tensoriell bezüglich X und derivativ bezüglich S verhält.

(ii) Für den Levi-Civita Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gilt $\nabla g = 0$, denn es ist

$$(\nabla_Z g)(X,Y) = Z(g(X,Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0$$

aufgrund der Ricci-Identität.

(iii) Zur Koordinatendarstellung: Sei $\omega = \omega_i dx^i$ eine 1-Form auf U. Da sich $\nabla_X\omega$ in ω derivativ verhält, gilt

$$\nabla_X\omega = (X\omega_i)dx^i + \omega_i\nabla_X dx^i.$$

Somit genügt es, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i$ auszurechnen. Nach Definition ist

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

Wir wenden dies mit $\omega = dx^i$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \tfrac{\partial}{\partial x^j}\left(dx^i\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - dx^i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^j}(\delta^i_k) - dx^i\left(\Gamma^l_{jk}\tfrac{\partial}{\partial x^l}\right)\\ &= -\Gamma^l_{jk}\delta^i_l = -\Gamma^i_{jk}.\end{aligned}$$

Dies sind die Koeffizienten in einer Darstellung bezüglich der Basis dx^k. Somit erhalten wir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)dx^k = -\Gamma^i_{jk}dx^k.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\nabla_X\omega \equiv \nabla_{X^j\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\omega_i dx^i\right) &= X^j\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\omega_i\right)dx^i - X^j\omega_i\Gamma^i_{jk}dx^k\\ &= X^j\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\omega_k - \omega_i\Gamma^i_{jk}\right)dx^k.\end{aligned}$$

Da wir stets fordern, dass eine Produktregel gilt, erhalten wir Ableitungsregeln für allgemeine Tensoren, z. B. für $T = T^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}dx^j$

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(T^i_j\tfrac{\partial}{\partial x^i}dx^j\right) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}T^i_j\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i}dx^j + T^i_j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\tfrac{\partial}{\partial x^i}dx^j + T^i_j\tfrac{\partial}{\partial x^i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}dx^j\\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}T^i_j\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i}dx^j + T^i_j\Gamma^l_{ki}\tfrac{\partial}{\partial x^l}dx^j - T^i_j\tfrac{\partial}{\partial x^i}\cdot\Gamma^j_{kl}dx^l.\end{aligned}$$

Wir benutzen auch die Schreibweise $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = \nabla_i X$. Ist klar, dass es sich bei einer Größe wie T um einen Tensor handelt, so schreiben wir auch in Kurzform

$$\nabla_k T^i_j \equiv T^i_{j;k} = \tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{kj} \equiv T^i_{j,k} + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{kj}.$$

Komma und Strichpunkt haben hier dieselbe Bedeutung wie in $X_{,ij}$ und $X_{;ij}$ ganz am Anfang des Kurses. Mit Komma abgetrennte Indices bezeichnen partielle Ableitungen, mit Strichpunkt abgetrennte Indices bezeichnen kovariante Ableitungen, also unter Verwendung eines Zusammenhanges definierte Ableitungen.

Sei ω eine 1-Form. $\nabla_k \omega = \omega_{i;k} dx^i$ hat die Koordinaten $\omega_{i;k}$. Der Ausdruck ist tensoriell in k wenn wir ein Vektorfeld $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ auf $\omega_{i;k} X^k dx^i$ abbilden. In diesem Sinne erhalten wir durch kovariantes Ableiten aus einem $(0,1)$-Tensor einen $(0,2)$-Tensor und entsprechend aus einem (r,s)-Tensor einen $(r,s+1)$-Tensor.

(iv) In einem Koordinatensystem, in dem in einem Punkt p die Christoffelsymbole verschwinden, d. h. $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ gilt, stimmen kovariante und partielle Ableitungen überein, $T^i_{j;k} = T^i_{j,k}$. (Achtung: Dies gilt nur in einem Punkt. Ein nochmaliges Ableiten führt gerne zu Fehlern.)

(v) Für eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}^k$ schreiben wir $\nabla_i u = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} u = \frac{\partial}{\partial x^i} u$.

Das folgende Lemma charakterisiert, wann es genau Karten gibt, so dass die Christoffelsymbole in einem Punkt verschwinden. Wir werden es nicht beweisen, sondern später (Proposition 11.10) auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Geodätischen Koordinatensysteme konstruieren, in denen die Christoffelsymbole verschwinden. Das folgende Lemma funktioniert insbesondere auch für nicht metrische (= nicht Levi-Civita) Zusammenhänge.

Lemma 10.13. *Auf einer Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang verschwindet die Torsion in einem Punkt p genau dann, wenn es ein Koordinatensystem um p gibt, in dem die Christoffelsymbole in p verschwinden.*

Lemma 10.14 (2. Bianchi-Identität). *Für einen torsionsfreien Zusammenhang gilt*

$$\nabla_X R(Y,Z)U + \nabla_Y R(Z,X)U + \nabla_Z R(X,Y)U = 0.$$

(Wir schreiben $\nabla_X R(Y,Z)U \equiv (\nabla_X R)(Y,Z)U$.)

Beweis. ∇R ist ein Tensor. Daher genügt es, die Behauptung für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ und $U = \frac{\partial}{\partial x^l}$ zu zeigen. Wir benutzen bereits, dass wir ein Koodinatensystem wählen können, in dem die Christoffelsymbole in einem festen Punkt verschwinden (Lemma 11.10). Weiterhin benutzen wir, dass in diesem Punkt kovariante und partielle Ableitungen übereinstimmen. Terme, die quadratisch in den Christoffelsymbolen sind, verschwinden dabei. Wir benutzen die Koordinatendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors aus Bemerkung 8.13.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \tfrac{\partial}{\partial x^i} R_{jk}{}^n{}_l + \tfrac{\partial}{\partial x^j} R_{ki}{}^n{}_l + \tfrac{\partial}{\partial x^k} R_{ij}{}^n{}_l \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^i}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^n_{kl}}_{\boxed{1}} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^n_{jl}}_{\boxed{2}}\Big) + \tfrac{\partial}{\partial x^j}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^n_{il}}_{\boxed{3}} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^n_{kl}}_{\boxed{1}}\Big) + \tfrac{\partial}{\partial x^k}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^n_{jl}}_{\boxed{2}} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^n_{il}}_{\boxed{3}}\Big) = 0. \end{aligned}$$

□

Beweis von Theorem 10.11. Sei K die Schnittkrümmung. Nach Lemma 10.4 gilt

$$R(Y,Z)U = K \cdot (\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z)U &= \nabla_X(R(Y,Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U\\ &= (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z) + K(\underbrace{X\langle Z,U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{X\langle Y,U\rangle Z}_{\boxed{2}})\\ &\quad + K(\underbrace{\langle Z,U\rangle \nabla_X Y}_{\boxed{3}} - \underbrace{\langle Y,U\rangle \nabla_X Z}_{\boxed{4}})\\ &\quad - \underbrace{K(\langle Z,U\rangle \nabla_X Y}_{\boxed{3}} - \underbrace{\langle \nabla_X Y,U\rangle Z}_{\boxed{2}})\\ &\quad - K(\underbrace{\langle \nabla_X Z,U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{\langle Y,U\rangle \nabla_X Z}_{\boxed{4}})\\ &\quad - K(\underbrace{\langle Z,\nabla_X U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{\langle Y,\nabla_X U\rangle Z}_{\boxed{2}}).\end{aligned}$$

Dabei heben sich die Terme $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ aufgrund der Ricci-Identität gegenseitig auf. Also gilt

$$(\nabla_X R)(Y,Z)U = (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z).$$

Die 2. Bianchi-Identität liefert nun

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X R(Y,Z)U + \nabla_Y R(Z,X)U + \nabla_Z R(X,Y)U\\ &= (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z)\\ &\quad + (YK)(\langle X,U\rangle Z - \langle Z,U\rangle X)\\ &\quad + (ZK)(\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y).\end{aligned}$$

Da wir $\dim M \ge 3$ angenommen haben, können wir X, Y, Z in einem beliebigen Punkt als Orthonormalsystem wählen. Setze $U := Z$. Es folgt

$$0 = (XK)Y - (YK)X.$$

Da X und Y linear unabhängig sind, folgt bereits $XK = 0 = YK$. Somit ist K wie behauptet lokal konstant. □

Das folgende Lemma taucht häufig in geometrischen Rechnungen wie z. B. bei Flussgleichungen auf.

Bemerkung 10.15 (Vertauschen kovarianter Ableitungen)**.** Sei T ein $(1,1)$-Tensor. (Für allgemeinere Tensoren ist auf jeden einzelnen oberen bzw. unteren Index die hier hergeleitete Formel anzuwenden.) Sei $T = \left(T^i_j\right)$. Wir wollen wieder benutzen, dass wir ein Koordinatensystem wählen können, in dem Γ^i_{jk} in einem festen Punkt verschwindet. Dafür wollen wir in dieser Bemerkung die ad hoc Notation $\overset{p}{=}$

verwenden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\nabla_k T^i_j &\equiv T^i_{j;k} = T^i_{j,k} + T^m_j \Gamma^i_{km} - T^i_m \Gamma^m_{kj},\\
\nabla_l \nabla_k T^i_j &= \left(T^i_{j;k}\right)_{,l} + T^m_{j;k}\Gamma^i_{lm} - T^i_{m;k}\Gamma^m_{jl} - T^i_{j;m}\Gamma^m_{kl}\\
&\overset{p}{=} T^i_{j,kl} + T^m_j \Gamma^i_{km,l} - T^i_m \Gamma^m_{kj,l},\\
\nabla_k \nabla_l T^i_j &\overset{p}{=} T^i_{j,lk} + T^m_j \Gamma^i_{lm,k} - T^i_m \Gamma^m_{lj,k},\\
\nabla_k \nabla_l T^i_j - \nabla_l \nabla_k T^i_j &\overset{p}{=} T^m_j \left(\Gamma^i_{lm,k} - \Gamma^i_{km,l}\right) - T^i_m \left(\Gamma^m_{lj,k} - \Gamma^m_{kj,l}\right)\\
&\overset{p}{=} T^m_j R_{kl}{}^i{}_m - T^i_m R_{kl}{}^m{}_j,\\
\nabla_k \nabla_l T^i_j - \nabla_l \nabla_k T^i_j &\equiv T^i_{j;lk} - T^i_{j;kl} = T^m_j R_{kl}{}^i{}_m - T^i_m R_{kl}{}^m{}_j.
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile gilt wieder allgemein, d. h. in jedem Koordinatensystem, da nun beide Seiten wieder tensoriell sind. (Das Produkt zweier Tensoren ist wieder ein Tensor, algebraisch das Tensorprodukt $S \otimes T$.)

11. Geodätische

Wir orientieren uns an [9].

Sei (M^m, g) stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Metrik g und Riemannschem Zusammenhang ∇. Für Definition und erste Eigenschaften benötigt man die Riemannsche Metrik noch nicht.

Definition 11.1. Eine Geodätische in M ist eine Kurve γ, so dass

$$
\nabla^\gamma \left(\gamma_* \left\langle \tfrac{d}{dt} \right\rangle\right) \equiv \nabla^\gamma \dot\gamma \equiv \frac{D\dot\gamma(t)}{dt} = 0 \tag{11.1}
$$

für t im Definitionsbereich, einem Intervall, gilt.

Bemerkung 11.2.

(i) Es gilt
$$
\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|^2 \equiv \frac{d}{dt}\langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 2\left\langle \dot\gamma, \frac{D\dot\gamma}{dt}\right\rangle = 0
$$
für eine Geodätische γ. Daher ist $\|\dot\gamma\|$ lokal konstant. Die Bogenlänge einer Kurve ist durch
$$
s(t) = \int\limits_0^t \|\dot\gamma(\tau)\|\, d\tau
$$
gegeben. Somit ist $s = at + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Manchmal ist es nützlich, $\dot\gamma \neq 0$ vorauszusetzen.

(ii) Seien (U, φ) Koordinaten nahe $p \in M$. Dann lautet (11.1) in Koordinaten
$$
\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1, \ldots, \gamma^m)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, m
$$
mit $\gamma = (\gamma^i(t))$.

(iii) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, so besagt (11.1), dass $\frac{D\dot\gamma}{dt} = (\ddot\gamma)^T = 0$ ist, d. h. dass der tangentiale Anteil der zweiten partiellen Ableitung verschwindet oder dass die zweite partielle Ableitung orthogonal zu M ist.

(iv) Zu $p \in M$ gibt es eine Umgebung $p \in U \subset M$ und Konstanten $\delta, \varepsilon > 0$, so dass für alle $q \in U$ und alle $X \in T_qM$ mit $\|X\| < \varepsilon$ eine eindeutige Geodätische $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ mit $\gamma(0) = q$ und $\dot\gamma(0) = X$ existiert.

Beweis. Da (11.1) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist, besitzt es lokal eine eindeutige Lösung. □

(v) Sei $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$ eine Geodätische. Dann ist auch $\alpha(t) = \gamma(\mu t)$ für $\mu > 0$ eine Geodätische. Daher können wir durch Verkleinern von $\varepsilon > 0$ in (iv) (auf $\frac{1}{2}\varepsilon\delta$) auch annehmen, dass alle Geodätischen auf dem Intervall $(-2, 2)$ definiert sind.

(vi) Die Eigenschaft, Geodätische zu sein, ist eine lokale Eigenschaft.

(vii) Die Eigenschaft, Geodätische zu sein, ist unter lokalen Isometrien erhalten, da (11.1) nur vom induzierten Zusammenhang abhängt.

Beispiel 11.3.

(i) Im $\mathbb{R}^n$ vereinfacht sich (11.1) zu $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} = 0$. Daher sind affine Geraden $\gamma = at+b$ Geodätische und affine Geraden, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, sind Geodätische.

(ii) Sei $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Dann ist M lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$. Zwischen zwei verschiedenen Punkten auf M gibt es unendlich viele Geodätische, sie „winden sich" unterschiedlich oft um den Zylinder herum.

(iii) Eventuell: Wie bestimmt man den Abstand von zwei Punkten auf einer Würfeloberfläche? Antwort: Man vergleiche alle Geraden, die sich durch geeignetes Abrollen des Würfels auf $\mathbb{R}^2$ ergeben, die alle durch Abrollen entstandenen Bilder dieser beiden Punkte verbinden.

(iv) Sei $M = \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Dann sind die Geodätischen gerade die Großkreise: Großkreise sind (nach einer Rotation der Sphäre) durch

$$\gamma : t \mapsto (\cos(at), \sin(at), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad a > 0,$$

gegeben. Es gilt $\ddot{\gamma}(t) = -a^2\gamma(t)$. Daher sind die zweiten partiellen Ableitungen normal und diese Kurven sind Geodätische. Da es aber zu jedem Anfangspunkt und zu jeder Anfangsrichtung eine solche Kurve gibt, sind dies (aufgrund des lokalen Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen) bereits alle Geodätischen (die nicht mehr erweitert werden können).

(v) Sei $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Dann sind die Geodätischen gerade die Bilder von Geraden in $\mathbb{R}^2$. Bei rationaler Steigung erhalten wir periodische Geodätische, bei irrationaler Steigung ist das Bild der Geodätischen dicht in $\mathbb{R}^2$.

Definition 11.4. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $X \in T_pM$. Sei $\gamma : [0, 1] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. (Ist $\|X\|$ klein genug, so existiert solch eine Geodätische aufgrund des lokalen Existenzsatzes.) Wir definieren $\exp_p(X) := \gamma(1) \in M$.

Bemerkung 11.5.

(i) Sei $\gamma : [0, 1] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist $\gamma(t) = \exp_p(tX)$: Betrachte $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\alpha t)$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische. Es gilt $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = p$ und $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \alpha\dot{\gamma}(0) = \alpha X$. Somit ist $\exp_p(\alpha X) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(\alpha)$. Wir setzen $t := \alpha$ und erhalten die Behauptung.

(ii) Die Länge der Geodätischen $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ von p nach $\exp_p(X)$ ist

$$\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \|\dot{\gamma}(0)\| = \|X\|,$$

da $\|\dot{\gamma}\|$ konstant ist.

Proposition 11.6.

(i) *Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_p : T_pM \to M$, eingeschränkt auf $\{X \in T_pM : \|X\| < \varepsilon\}$, glatt ist.*

(ii) *Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Abbildung $\Phi : \Omega \to M$, $\Omega \subset TM$ geeignet, definiert durch*
$$\Phi(q, X) = (q, \exp_q X),$$
ein Diffeomorphismus von einer Umgebung W von $(p, 0) \in TM$ auf eine Umgebung von $(p, p) \in M \times M$.

Beweis.

(i) Dies folgt direkt aus dem lokalen Existenzsatz.

(ii) Zu einer Karte (U, φ) für M gibt es eine Karte $(T_U M, \varphi_*)$ für TM mit
$$\varphi_*\colon T_U M \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m,$$
$$\varphi_{*,q}\left(\sum_{i=1}^m a^i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q\right) = (\varphi(q), a^1(q), \ldots, a^m(q)).$$
Daher besitzt Φ in lokalen Koordinaten die Darstellung
$$\Phi\left(q^1, \ldots, q^m, X^1, \ldots, X^m\right) = \left(q^1, \ldots, q^m, \exp_q^1(X), \ldots, \exp_q^m(X)\right).$$
Wir wollen nun nachweisen, dass $\Phi_{*,(p,0)}$ regulär ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz über implizite Funktionen. Zunächst halten wir dazu $X = 0$ fest und variieren q. Da $\exp_q(0) = q$ für alle q gilt, folgt
$$\left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial q^i}(p, 0)\right)_{\substack{1 \le i \le m\\ 1 \le j \le 2m}} = \begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}.$$
Wir betrachten nun $q = p$ und $X = te_i = (0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$, da $T_pM \cong \mathbb{R}^m$. Dann gilt
$$\left.\frac{d}{dt} \exp_p(te_i)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\gamma(t)\right|_{t=0} = e_i,$$
da $\exp_p(te_i)$ eine Geodätische γ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = e_i$ ist. Folglich erhalten wir
$$\left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial X^i}(p, 0)\right)_{\substack{1 \le i \le m\\ 1 \le j \le 2m}} = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}.$$
Zusammengenommen erhalten wir also
$$\Phi_{*,(p,0)} = \begin{pmatrix}\mathrm{id} & 0\\ \mathrm{id} & \mathrm{id}\end{pmatrix}$$
und die Behauptung folgt.

□

Theorem 11.7. *Zu $p \in M$ gibt es eine Umgebung U von p und $\varepsilon > 0$, so dass folgendes gilt:*

(i) *Für je zwei Punkte $q, q' \in U$ gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische von q nach q' mit einer Länge kleiner als ε.*

(ii) *Diese Geodätische ist durch $t \mapsto \exp_q(tX)$, $0 \le t \le 1$, für ein $X \in T_qM$ mit $\|X\| < \varepsilon$ gegeben und hängt in glatter Weise von q und q' ab.*

(iii) *Für jedes $q \in U$ ist*
$$\exp_q : \{X \in T_qM : \|X\| < \varepsilon\} \to \exp_q\left(\{X \in T_qM : \|X\| < \varepsilon\}\right) \subset M$$
ein Diffeomorphismus.

Beweis.

(i) Sei (V, ψ) eine Karte um p. Sei W die Umgebung aus Proposition 11.6 von $(p, 0) \in TM$. Sei $\pi \colon TM \to M$ die Projektionsabbildung des Tangentialbündels. Indem wir gegebenenfalls W verkleinern, dürfen wir annehmen, dass $\overline{\pi(W)} \subset V$ gilt. Da die Metrik g stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U' \subset M$ von p, so dass

$$W' := \bigcup_{u \in U'} \{(u, X) : X \in T_u M, \, \|X\| < \varepsilon\} \subset W$$

gilt. Die Abbildung Φ von Proposition 11.6 ist ein Diffeomorphismus von W' auf $\Phi(W')$. $\Phi(W')$ ist eine offene Umgebung von (p, p) in $M \times M$. Somit enthält $\Phi(W')$ insbesondere auch eine Menge $U \times U$, wobei U eine geeignete offene Umgebung von p ist. Daher gibt es zu $(q, q') \in U \times U$ einen eindeutig bestimmten Punkt $(q, X) = \Phi^{-1}(q, q') \in W'$. Somit gilt $q' = \exp_q X$ für ein $X \in T_q M$ mit $\|X\| < \varepsilon$. Die Eindeutigkeit folgt nach Konstruktion, da Φ ein Diffeomorphismus ist.

(ii) Dies folgt direkt aus dem Beweis von Proposition 11.6.

(iii) Da Φ ein Diffeomorphismus von W' auf das Bild in $M \times M$ und in der ersten Komponente die Identität ist, ist auch $\exp_q(\cdot)$, die zweite Komponente von $\Phi(q, \cdot)$, ein Diffeomorphismus von $\{X \in T_q M : \|X\| < \varepsilon\}$ auf das Bild in M.

□

Bemerkung 11.8. Man kann U sogar **geodätisch konvex** wählen, d. h. jede Geodätische aus (i), die q und q' verbindet, liegt auch in U. Vergleiche dies mit Kugeln im $\mathbb{R}^m$.

Bemerkung 11.9. Mit Hilfe der Exponentialabbildung wollen wir besonders gute Koordinatensysteme konstruieren: Sei $p \in M$. Fixiere $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass $\exp_p$ ein Diffeomorphismus von $\{X \in T_p M : \|X\| < \varepsilon\}$ auf das Bild U ist. Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Dann gilt für $X = X^i e_i \in T_p M$, dass $\|X\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(X^i\right)^2$ ist. Wir definieren eine Karte φ durch

$$\varphi : \exp_p\left(X^i e_i\right) \mapsto \left(X^1, \ldots, X^m\right).$$

Wir erhalten eine surjektive Abbildung $\varphi : U \to B^m_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$.

Die so definierten Koordinaten heißen Normalkoordinaten.

Proposition 11.10. *In Normalkoordinaten um $p \in M$ gilt:*

(i) Geodätische durch p sind gerade Linien der Form $\gamma^i = b^i t$ mit $b^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.

(ii) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

(iii) $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ und $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$ für alle $i, j, k = 1, \ldots, m$.

Beweis.

(i) Geodätische durch p sind durch $t \mapsto \exp_p(tX)$ gegeben.

(ii) Dies folgt aus den Rechnungen in Proposition 11.6, da rechts unten in der Matrix die Identität steht.

(iii) Für $a \in \mathbb{R}^m$ ist $t \mapsto ta$ eine Geodätische in Koordinaten. Die Gleichung

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0$$

liefert dann $\Gamma^k_{ij}(0)a^ia^j = 0$. Da Γ^k_{ij} in i und j symmetrisch ist, folgt daraus $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$. Schließlich gilt im Ursprung

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 11.11. Proposition 11.10 und der Satz von Taylor liefern, dass in einem Normalkoordinatensystem

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O\left(|x|^2\right)$$

gilt. Damit ist die Metrik bis zur ersten Ordnung euklidisch. Dies läßt sich auch im allgemeinen nicht auf zweite Ordnung verbessern, da sonst der Riemannsche Krümmungstensor im Ursprung verschwinden würde.

Lemma 11.12. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist M ein metrischer Raum vermöge*

$$d(p,q) := \inf_\gamma L(\gamma),$$

wobei $p, q \in M$ sind und das Infimum über alle stückweisen C^1-Kurven mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ gebildet wird. $L(\gamma)$ bezeichnet dabei die Länge der Kurve γ:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'\| = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)}\,dt$$

und $\gamma' \equiv \dot\gamma$.

Beweis.

(i) $d(p,q) = d(q,p)$ ist klar.

(ii) $d(p,q) \geq 0$. Für $p \neq q$ verläßt eine beliebige Kurve γ, die p mit q verbindet in einer Karte (U, φ) eine Kugel $B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(\varphi(p))$. In $B_\varepsilon(0)$ gilt $g_{ij} \geq \delta \cdot \delta_{ij}$ für ein $\delta > 0$. Also folgt wie im $\mathbb{R}^m$, dass $L(\gamma) \geq \varepsilon \cdot \sqrt{\delta}$ ist.

(iii) Dreiecksungleichung: Seien $p, q, r \in M$ und sei $\varepsilon > 0$. Zeige, dass

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$$

gilt: Sei γ_1 eine Kurve von p nach r mit $L(\gamma_1) \leq d(p,r) + \varepsilon$ und sei γ_2 eine Kurve von r nach q mit $L(\gamma_2) \leq d(r,q) + \varepsilon$. Dann ist

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stückweise C^1-Kurve von p über r nach q und es gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \leq d(p,r) + \varepsilon + d(r,q) + \varepsilon.$$

Wir betrachten nun das Infimum über alle Kurven γ, die p mit q (nicht notwendigerweise über r) verbinden. Es folgt

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

□

Theorem 11.13. *Sei $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von p und ein $\varepsilon > 0$, so dass zu je zwei Punkten $q, q' \in U$ eine eindeutige Geodätische γ von q nach q' existiert, deren Länge kleiner als ε ist. Es gilt $L(\gamma) = d(q, q')$, wobei L die Länge bezeichnet und d die von der Riemannschen Metrik induzierte Distanzfunktion ist.*

Sei ω eine weitere stückweise glatte Kurve, die q und q' verbindet. Dann gilt $L(\omega) \geq L(\gamma)$ und die Ungleichung ist strikt ausser wenn ω eine Umparametrisierung von γ ist.

Beweis, Anfang. Aus Theorem 11.7 folgen die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage. Für den Rest des Beweises benötigen wir noch einige Lemmata. □

Lemma 11.14. *Sei W eine offene Umgebung von $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ und $F : W \to M$ eine glatte Abbildung. Dann sind $\frac{\partial F}{\partial u} \equiv F_* \frac{\partial}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ Tangentialvektoren an die Kurven $v =$ konstant und $u =$ konstant (dies ist nur im regulären Falle eine sinnvolle Aussage). Wenn wir mit $\frac{D}{\partial u}$ und $\frac{D}{\partial v}$ die kovarianten Ableitungen entlang dieser Kurven bezeichnen, gilt*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Beweis. Sei X ein Vektorfeld entlang $F(W)$ und gelte

$$X(u,v) = X^i(u,v)\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i(u,v)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{F(u,v)}$$

in Koordinaten. Dann ist nach Bemerkung 8.4

$$\frac{DX}{dv} = \left(\frac{\partial X^k}{\partial v} + \Gamma^k_{ij} X^i \frac{\partial F^j}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Insbesondere folgt also

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 F^k}{\partial u \partial v} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F^i}{\partial u}\frac{\partial F^j}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

□

Lemma 11.15. *Unter denselben Voraussetzungen wie eben gilt*

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right] = 0.$$

Beweis. Dies folgt aus einer Übungsaufgabe, da

$$\left[\tfrac{\partial F}{\partial u}, \tfrac{\partial F}{\partial v}\right] = \left[F_* \tfrac{\partial}{\partial u}, F_* \tfrac{\partial}{\partial v}\right] = F_* \left[\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial v}\right] = 0$$

gilt.

Alternativ: Sind $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ linear lokal unabhängig, so sind es Koordinatenvektorfelder in einem geeigneten Koordinatensystem, für die die Lieklammer verschwindet. Im allgemeinen Fall folgt dies direkt hieraus durch Approximation. □

Lemma 11.16 (Gaußlemma)**.** *Sei $p \in M$ und $\exp_p$ in $B_\varepsilon(0)$ ein Diffeomorphismus. Dann sind die Geodätischen durch p der Länge $< \varepsilon$ orthogonal zu den geodätischen Sphären*

$$S_r(p) := \{\exp_p X : \|X\| = r\},$$

falls $0 < r < \varepsilon$.

Beweis. Als diffeomorphes Bild von $\partial B_r(0) \subset T_pM \cong \mathbb{R}^m$ ist $S_r(p)$ eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M. Jede Kurve in $S_r(p)$ läßt sich in der Form $t \mapsto \exp_p(rX(t))$ darstellen, wobei $t \mapsto X(t)$ eine Kurve in $\{X \in T_pM : \|X\| = 1\}$ ist. Wir haben gesehen, dass jede Geodätische (ggf. nach Reparametrisierung) durch p von der Form $r \mapsto \exp_p(rX)$ für ein $X \in T_pM$ mit $\|X\| = 1$ ist.

Betrachte nun die Abbildung $F(r,t) := \exp_p(rX(t))$, wobei $t \mapsto X(t)$ eine Kurve in $\{X \in T_pM : \|X\| = 1\}$ ist. Dann ist $\frac{\partial F}{\partial t}$ ein Tangentialvektor an $S_r(p)$ und $\frac{\partial F}{\partial r}$ ist ein Tangentialvektor an eine Geodätische durch p. Somit genügt es, $\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0$ nachzuweisen: Zunächst einmal gilt $F(0,t) = p$ für alle t. Also ist $\frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{(0,t)} = 0$ und daher gilt auch $\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle\Big|_{(0,t)} = 0$. Nach Bemerkung 9.9

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle.$$

Auf der rechten Seite verschwindet der erste Term, denn $r \mapsto F(r,t)$ ist eine Geodätische. Nach Lemma 11.14 erhalten wir für den zweiten Term

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle = 0,$$

da $\frac{\partial F}{\partial r}$ der Tangentialvektor der Geodätischen $r \mapsto F(r,t)$ ist und damit eine konstante Norm hat. Somit ist $\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0$. Also ist $\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle$ konstant und da diese Funktion im Punkte $(0,t)$ verschwindet, verschwindet sie überall. Das Lemma folgt. □

Lemma 11.17. *Seien p, ε und U wie in Theorem 11.7. Sei $\omega : [a,b] \to U \setminus \{p\}$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann läßt sich ω eindeutig in der Form*

$$\omega(t) = \exp_p(r(t)X(t))$$

mit $0 < r(t) < \varepsilon$, $X(t) \in T_pM$ und $\|X(t)\| = 1$ schreiben. Es gilt

$$L(\omega) = \int_a^b \|\dot\omega(t)\|\,dt \geq |r(b) - r(a)|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn X konstant und r monoton ist.

Insbesondere ist daher der kürzeste Weg zwischen zwei konzentrischen geodätischen Sphären um q eine radiale Geodätische.

Beweis. Da $\exp_p$ ein Diffeomorphismus ist, ist die eindeutige Darstellbarkeit klar.

Definiere $F(r,t) := \exp_p(rX(t))$. Dann gilt $\omega(t) = F(r(t),t)$ und wir erhalten

$$\dot\omega(t) = \frac{\partial F}{\partial r}\dot r(t) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nach Lemma 11.16 sind $\frac{\partial F}{\partial r}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ orthogonal zueinander. Weiterhin ist $\left\|\frac{\partial F}{\partial r}\right\| = 1$, da dies für $r = 0$ gilt und da $\left\|\frac{\partial F}{\partial r}\right\|$ für Geodätische konstant ist. Somit gilt

$$\|\dot\omega(t)\|^2 = |\dot r(t)|^2 + \left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2 \geq |\dot r(t)|^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ und damit also $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$ ist. Hieraus folgt

$$\int_a^b \|\dot\omega(t)\|\,dt \geq \int_a^b |\dot r(t)|\,dt \geq |r(b) - r(a)|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn r monoton und X konstant ist. □

Beweis von Theorem 11.13, Ende. Sei ω ein stückweise glatter Weg von q nach $q' = \exp_q(rX)$ mit $0 < r < \varepsilon$, $X \in T_qM$ and $\|X\| = 1$. Dann gibt es zu jedem $\delta \in (0,r)$ eine Einschränkung der Kurve, die die geodätische Sphäre $S_\delta(q)$ mit der geodätischen Sphäre $S_r(q)$ verbindet. Wir betrachten eine solche Einschränkung, bei der sich die Kurve ausschließlich zwischen diesen beiden Sphären befindet. Nach Lemma 11.17 hat dieser Teil mindestens die Länge $r - \delta$. Mit $\delta \searrow 0$ erhalten wir

$L(\omega) \geq r = L(\gamma)$. Falls ω nicht bis auf Umparametrisierung mit der verbindenden Geodätischen γ übereinstimmt, erhalten wir eine strikte Ungleichung. □

Korollar 11.18. *Sei $\gamma : [0,T] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und nehme an, dass für jede andere Kurve ω, die $\gamma(0)$ mit $\gamma(T)$ verbindet, $L(\gamma) \leq L(\omega)$ gilt. Dann ist γ eine Geodätische.*

Beweis. Wähle einen beliebigen Punkte p im Bild von γ. In der Nähe von p minimiert γ die Länge. Da γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, liefert Theorem 11.13, dass γ in einer Umgebung von p eine Geodätische ist. Da p ein beliebiger Punkt auf dem Bild von γ ist, ist γ eine Geodätische. □

Bemerkung 11.19.

(i) Wir haben in Korollar 11.18 gesehen, dass eine längenminimierende Kurve zwischen zwei Punkten eine Geodätische ist. Im allgemeinen gibt es in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen zwei Punkten keine längenminimierende Kurve. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Seien $p = (-1,0)$ und $q = (1,0)$. Dann ist $d(p,q) = 2$, aber jede Kurve in M, die p mit q verbindet hat eine Länge strikt größer als 2, da sie den Ursprung nicht im Bild enthalten kann.

Die negative x^1-Achse ist eine Geodätische, die sich aber nicht fortsetzen läßt.

(ii) Im allgemeinen minimieren Geodätische die Länge nicht global, beispielsweise auf der Sphäre oder auf einem Zylinder.

Wir wollen uns damit beschäftigen, wann es zwischen zwei Punkten auf einer Mannigfaltigkeit stets eine kürzeste Geodätische gibt und wann eine Geodätische sich fortsetzen läßt.

Definition 11.20. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt **geodätisch vollständig**, wenn jede Geodätische $\gamma : [0,T] \to M$ sich zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Geodätischen fortsetzen läßt.

Theorem 11.21 (Hopf-Rinow)**.** *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) M ist geodätisch vollständig.
(ii) Für alle $p \in M$ ist $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert.
(iii) M mit induzierter Metrik d ist ein vollständiger metrischer Raum.

Ist M zusammenhängend, so impliziert jede dieser Aussagen

(iv) Zwei beliebige Punkte $p,q \in M$ lassen sich durch eine Geodätische γ verbinden, so dass $L(\gamma) = d(p,q)$ gilt.

Beweis.
(i) $\Longrightarrow$ (iv): Seien $p,q \in M$. Setze $r := d(p,q)$. Nach Theorem 11.13 gibt es ein $\delta > 0$, so dass jeder Punkt von $\partial B_\delta(p) := \{x \in M : d(p,x) = \delta\}$ mit p durch eine eindeutig bestimmte minimierende Geodätische verbunden werden kann. (Falls $r \leq \delta$ ist, liefert dieses Theorem bereits die Behauptung und wir sind fertig.) Die Funktion $d(q,\cdot)$ ist stetig. Da $\partial B_\delta(p)$ kompakt ist, gibt es einen Punkt $p_0 \in \partial B_\delta(p)$, so dass sie, eingeschränkt auf $\partial B_\delta(p)$, dort ihr Minimum annimmt. Sei $\gamma : t \mapsto \exp_p(tX)$, $\|X\| = 1$, $0 \leq t \leq \delta$, die Geodätische von p nach p_0.

Wir behaupten nun, dass

$$d(\gamma(t),q) = r - t \quad \text{für} \quad \delta \leq t \leq r \quad \text{gilt.} \tag{11.2}$$

Dies zeigt dann, dass p und q sich durch eine kürzeste Geodätische verbinden lassen. Also folgt aus (11.2), dass (i) $\Longrightarrow$ (iv). Die Behauptung (11.2) ist für $t = \delta$ wahr. („$\geq$“ gilt nach Dreiecksungleichung, für „$\leq$“ betrachte man eine Folge von Kurven, die zeigen, dass $d(p,q) = r$ gilt und benutzt, dass diese $\partial B_\delta(p)$ schneiden müssen.) Aufgrund der Stetigkeit ist sie auch für das Supremum t_0 aller der t's wahr, für die sie wahr ist. Nehme daher an, dass $t_0 < r$ gilt. Ähnlich wie oben finden wir ein $\delta' > 0$, so dass es von $\gamma(t_0)$ eine eindeutig bestimmte minimierende Geodätische zu einem beliebigen Punkt in $\partial B_{\delta'}(\gamma(t_0))$ gibt. (Analog zu oben nehmen wir an, dass $t_0 + \delta' \le r$ ist.) Sei $p_0' \in \partial B_{\delta'}(\gamma(t_0))$ ein Punkt, so dass $d(q,\cdot)$ das Minimum über $\partial B_{\delta'}(\gamma(t_0))$ in p_0' annimmt. Dann folgt (wie oben)

$$d(\gamma(t_0), q) = \delta' + d(p_0', q).$$

Dies impliziert wegen (11.2) und der Definition von t_0

$$d(p_0', q) = d(\gamma(t_0), q) - \delta' = (r - t_0) - \delta'.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung erhalten wir also

$$d(p, p_0') \ge d(p,q) - d(p_0', q) = r - [(r - t_0) - \delta'] = t_0 + \delta'.$$

Betrachte nun die „gebrochene“ Geodätische, die aus der Geodätischen von p nach $\gamma(t_0)$ und der längenminimierenden Geodätischen von $\gamma(t_0)$ nach p_0' besteht. Deren Länge ist gerade $t_0 + \delta'$. Somit ist sie eine längenminimierende Verbindung von p nach p_0' und daher aufgrund von Korollar 11.18 nicht nur eine gebrochene, sondern sogar eine (richtige) Geodätische. Sie stimmt also mit der oben definierten Geodätischen γ überein, also ist $\gamma(t_0 + \delta') = p_0'$. Somit erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von $t_0 < r$. Die Behauptung folgt.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist offensichtlich.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M. Dann ist x_n beschränkt, also gibt es $\Lambda > 0$, so dass $d(x_n, x_0) \le \Lambda$ ist. Aufgrund des obigen Beweises ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in A := \exp_{x_0}\{X \in T_{x_0}M : \|X\| \le \Lambda\}.$$

Die Menge A ist das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung und daher selber wieder kompakt. Also besitzt die Folge (x_n) einen Häufungspunkt in A und dieser Punkt gehört ebenfalls zu A. Also ist M als metrischer Raum vollständig.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $\gamma : [0, t_0) \to M$, $0 < t_0 < \infty$, eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, die sich nicht über t_0 hinaus fortsetzen läßt. Wähle $t_n \in [0, t_0)$ mit $t_n \uparrow t_0$, $n \in \mathbb{N}$, und setze $p_n := \gamma(t_n)$. Da $d(p_m, p_n) \le |t_m - t_n|$ gilt, ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M. Aufgrund der metrischen Vollständigkeit von M gibt es daher ein $q \in M$, so dass $p_n \to q$. Wir möchten nun nachweisen, dass sich γ so fortsetzen läßt, dass es q erreicht. Nach Theorem 11.13 gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so dass sich zwei beliebige Punkte in $B_\delta(q)$ mit einer eindeutig bestimmten Geodätischen der Länge kleiner als ε verbinden lassen. Auf p_m und p_n angewandt heißt das, dass es ein N gibt, so dass für alle $m, n \ge N$ auch $d(p_m, p_n) = |t_m - t_n|$ gilt. Wir fixieren nun n und lassen $m \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit von d erhalten wir $d(q, p_n) = t_0 - t_n$. Für $m > n \ge N$ gilt also

$$d(q, p_n) = t_0 - t_n = (t_0 - t_m) + (t_m - t_n) = d(q, p_m) + d(p_m, p_n).$$

Damit ist die gebrochene Geodätische von p_n nach p_m und weiter nach q längenminimierend und daher nach Korollar 11.18 eine glatte Geodätische. Man kann sie also verwenden um die Geodätische γ bis t_0 fortzusetzen. Der lokale Existenzsatz erlaubt uns nun, die Geodätische über t_0 hinaus fortzusetzen. □

Korollar 11.22. *Jede geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit ist geodätisch vollständig.*

Beweis. Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig. □

Bemerkung 11.23. Aussage (iv) in Theorem 11.21 ist zu den anderen Aussagen nicht äquivalent. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$ ist ein Gegenbeispiel.

Literatur

1. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
2. Manfredo P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course], vol. 55, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983, Translated from the English by Michael Grüter.
3. Claus Gerhardt, *Lecture notes*.
4. Sigmundur Gudmundsson, *An introduction to Gaussian geometry*, 2010, Lecture Notes, `http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/index.html`.
5. Sigmundur Gudmundsson, *An introduction to Riemannian geometry*, 2009, Lecture Notes, `http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/index.html`.
6. Wolfgang Kühnel, *Differentialgeometrie*, fourth ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course], Vieweg, Wiesbaden, 2008, Kurven—Flächen—Mannigfaltigkeiten. [Curves—surfaces—manifolds].
7. Oliver Schnürer, *Topologie*, 2007, Skript zur Vorlesung.
8. Friedrich Tomi, *Differentialgeometrie I*, 1997, Lecture Notes.
9. John Urbas, *Introduction to Differential Geometry*, 2004, Lecture Notes.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`