Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1.1. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, I ein offenes Intervall, eine reguläre Kurve der Klasse C^2. Zeige:

(i) α hat genau dann konstante Krümmung κ, wenn sie Teil eines Kreises mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ ist, falls $\kappa \neq 0$, beziehungsweise Teil einer Geraden, falls $\kappa = 0$.

(ii) Sei $t_0 \in I$ und berühre ein Kreis K mit Radius $\frac{1}{|\kappa|}$ die Kurve α von zweiter Ordnung in t_0, d.h. es gilt $\operatorname{dist}(\alpha(t), K) = \mathrm{o}\left((t-t_0)^2\right)$. Dann ist die Absolutkrümmung von α in t_0 gleich $|\kappa|$.

Aufgabe 1.2. Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve der Klasse C^3. Gelte $\alpha'' \neq 0$, d.h. α ist eine Frenet-Kurve. Das zugehörige Frenet-3-Bein ist durch $v_1 = c'$, $v_2 = \frac{c''}{|c''|}$ und $v_3 = v_1 \times v_2$ gegeben. Weise nun die Frenet-Gleichungen nach, wobei $\tau := \langle v_2', v_3 \rangle$ die Torsion bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.3.

(i) Eine reguläre Kurve zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathbb{R}^n$ mit kleinstmöglicher Länge ist notwendig das Geradenstück von p nach q.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{S}^2$ und definiere

$$d(x,y) := \inf\left\{L(\alpha) : \alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^2,\ \alpha \text{ stückweise } C^1,\ \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\right\}.$$

Zeige, dass $d : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist. Nehme an die Erdoberfläche sei eine Kugel mit Radius $r = 6{,}371000785 \cdot 10^6$m. Bestimme den Abstand vom Konstanzer Münster ($47°39'48''$ nördlicher Breite, $9°10'34''$ östlicher Länge) zum Nordpol. (Punkte gibt es wie üblich nur für bewiesene Tatsachen.)

Aufgabe 1.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ das Bild einer stückweisen C^1-Kurve α.

(i) Ist Ω nicht konvex, so gibt es ein Gebiet Ω' gleichen Umfanges und größeren Flächeninhaltes. Sei daher Ω ab jetzt konvex.

(ii) Sei hier der Rand das Bild mehrerer stückweiser C^1-Kurven. Ist Ω nicht zusammenhängend, so gibt es ein Gebiet Ω' gleichen Umfanges und größeren Flächeninhaltes.

(iii) Sei $\alpha \notin C^1$. Dann gibt es ein Gebiet mit gleichem Umfang und größerem Flächeninhalt.

(iv) Sei $p \in \partial\Omega$. Dann gibt es $q \in \partial\Omega$, $q \neq p$, so dass die Gerade G durch p und q das Gebiet Ω in zwei Gebiete gleichen Flächeninhaltes teilt. Schneidet G den Rand $\partial\Omega$ nicht senkrecht, so gibt es ein Gebiet Ω' gleichen Umfanges und größeren Flächeninhaltes als Ω.

Hinweis: Spiegele einen Teil von Ω an der Flächeninhaltshalbierenden.

Abgabe: Bis Dienstag, 20.04.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 2

Aufgabe 2.1. Sei M eine kompakte, sternförmige Hyperfläche der Klasse C^2 im $\mathbb{R}^{n+1}$, d. h. es gibt ein $u \in C^2\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)$, ohne Einschränkung positiv homogen vom Grade 1 mit $u > 0$, so dass

$$M = \{(x \cdot u(x)) : x \in \mathbb{S}^n\}$$

gilt. Gib eine lokale Einbettung von M in den $\mathbb{R}^{n+1}$ an und berechne die induzierte Metrik g_{ij}, die zweite Fundamentalform h_{ij} und die Normale ν von M.

Aufgabe 2.2. Berechne die Umlaufzahlen folgender Kurven:

(i) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,
$t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

(ii) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,
$t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$.

Aufgabe 2.3.

(i) Sei $Y = \mathbb{R} \cup \{0'\}$. Definiere die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to Y$, $x \mapsto x$ und

$$f_2 : \mathbb{R} \to Y, x \mapsto \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0', & x = 0. \end{cases}$$

Bestimme die Finaltopologie von Y bezüglich $\{f_1, f_2\}$ und untersuche, ob Y hausdorffsch ist oder nicht.

(ii) Seien X, Y topologische Räume. Sei $A \subset X$ und sei Y hausdorffsch. Seien g_1, $g_2 \colon X \to Y$ stetig. Ist $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in A$, so folgt $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in \bar{A}$.

Aufgabe 2.4.

(i) Zeige, dass die Abbildung $p_1 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $x \to [x]$, eine zweiblättrige Überlagerung ist.

(ii) Gegeben die Überlagerung $p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto e^{ix}$, und eine stetige Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, sowie $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p_2(x_0) = \gamma(0)$.
Dann existiert eine Kurve $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ und $p_2 \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. $\tilde{\gamma}$ heißt der Lift von γ. Das folgende Diagramm kommutiert also

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p_2"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

(iii) Gegeben die Überlagerung $p_3 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $x \mapsto x^3$, und eine stetige Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, sowie $x_0 \in \mathbb{S}^1$ mit $p_3(x_0) = \gamma(0)$. Zeige wiederum die Existenz eines stetigen Lifts $\tilde{\gamma}$ von γ, diesmal bezüglich p_3. Man erhält nun die Kommutativität des folgenden Diagrammes:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "p_3"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

Abgabe: Bis Dienstag, 27.04.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 3

Aufgabe 3.1.

(i) Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine affin lineare Funktion, d. h. gelte $u(x) = \langle A, x\rangle + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$ sind. Es bezeichne $\mathcal{A}(\Omega)$ den Flächeninhalt von graph $u \cap (\Omega \times \mathbb{R})$. Zeige für ein geschickt gewähltes Rechteck R, dass

$$\mathcal{A}(R) = \int\limits_R \sqrt{1 + |Du|^2}\,\mathrm{dx}$$

gilt. Definiere daher $\mathrm{d}\mu := \sqrt{1 + |Du|^2}\,\mathrm{dx} \equiv \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{dx}$ und $\mathcal{A}(\Omega) := \int\limits_\Omega \mathrm{d}\mu$.

(ii) Gib $\mathrm{d}\mu$ für eine untere Hemisphäre

$$\mathbb{S}^n_{R,-} := \mathbb{S}^n_R \cap \left\{x^{n+1} < 0\right\} = \left\{\left(\hat{x}, x^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} : |\hat{x}|^2 + (x^{n+1})^2 = R^2,\ x^{n+1} < 0\right\}$$

an. Im Fall der Sphäre schreiben wir $\mathrm{d}\sigma \equiv \mathrm{d}\mu$.

Aufgabe 3.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, die sich als Graph schreiben lässt, $M = \operatorname{graph} u_{|\Omega}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, mit $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Definiere für eine nichtnegative, stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$$\int_M f\,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f(x, u(x))\,\sqrt{1 + |Du|^2}\,\mathrm{dx} \equiv \int_\Omega f(x, u(x))\,\mathrm{d}\mu.$$

Für eine stetige Funktion $f = f^+ + f^-$, wobei $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- = \min(f, 0)$, für die sowohl $\int\limits_M f^+\,\mathrm{d}\mu$, als auch $\int\limits_M (-f^-)\,\mathrm{d}\mu$ endlich ist, definieren wir $\int\limits_M f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M f^+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_M (-f^-)\,\mathrm{d}\mu$. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $M = \operatorname{graph} u_{|\Omega}$, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $D^2u > 0$. Zeige, dass

$$\int\limits_M K\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\nu(M)} \mathrm{d}\sigma$$

ist, wobei $\nu : M \to \mathbb{S}^n$ der nach unten gerichtete Normalenvektor an M ist und $\nu(M) := \{p \in \mathbb{S}^n : \nu(q) = p \text{ für ein } q \in M\}$.

Hinweis: Verwende die Transformationsregel für Integrale und benutze ν um den Diffeomorphismus zu konstruieren.

Aufgabe 3.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Sei $\varphi \in C^2_c(\Omega)$. Berechne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathcal{A}(\operatorname{graph}\,(u + t\varphi))_{|t=0} =: \delta\mathcal{A}[u]\langle\varphi\rangle.$$

Sei nun u ein kritischer Punkt des Oberflächenfunktionals, d.h. gelte $\delta\mathcal{A}[u]\langle\varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in C^2_c(\Omega)$. Dann heißt graph u Minimalfläche. Zeige, dass

$$H[\operatorname{graph}\,u] = 0$$

gilt.

Aufgabe 3.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und gelte $H[\operatorname{graph}\,u] = 0$. Zeige, dass für alle $\varphi \in C^2_c(\Omega)$

$$\mathcal{A}[u] \le \mathcal{A}[u + \varphi]$$

gilt.

Hinweis: Wende den Gaußschen Divergenzsatz auf eine geeignete Fortsetzung eines Normalenvektors an. Begründe auch, wieso der Divergenzsatz anwendbar ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 04.05.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 4

Aufgabe 4.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Zeige, dass die Vektorraumstruktur von T_xM nicht von der Wahl der Karte abhängt.

Aufgabe 4.2. Sei $Z = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass Z eine differenzierbare (C^∞) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Wir versehen nun Z mit dieser differenzierbaren Struktur.

(ii) Sei $u : Z \to \mathbb{R}_+$, $u \in C^2(Z)$. Sei M ein Graph über Z, d.h. es gilt

$$M = \{(u(x, y) \cdot x, y) : (x, y) \in Z\}.$$

Gib eine lokale Einbettung von M an und berechne die von der Einbettung induzierte Metrik, die äußere Normale, sowie die zweite Fundamentalform.

(iii) Sei nun u rotationssymmetrisch, gelte also $u(x, y) = u(y)$. Berechne nun die mittlere Krümmung H.

Aufgabe 4.3.

(i) Sei $N \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol. Wir definieren nun eine Abbildung

$$\varphi^N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,$$

indem wir einem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ den Schnittpunkt der N und x verbindenden Geraden mit der Ebene $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$ zuweisen. Analog definieren wir $\varphi^S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$, wobei nun S den Südpol bezeichnet. Zeige nun, dass φ^N und φ^S Karten eines Atlanten von $\mathbb{S}^n$ sind.

(ii) Gib eine weitere Auswahl an Karten an, mit welcher $\mathbb{S}^n$ zu einer Mannigfaltigkeit wird.

Aufgabe 4.4. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ eine m-dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass es einen Punkt $p \in M^m$ mit $h_{ij}(p) > 0$ gibt.

Zusatz: Bezeichnet $\operatorname{diam} M^m$ den Durchmesser von M^m in $\mathbb{R}^{m+1}$, so gibt es $p \in M^m$, so dass $h_{ij}(p) \geq \frac{1}{\operatorname{diam} M^m} g_{ij}$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 18.05.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 5

Aufgabe 5.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit mit lokaler Einbettung $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Seien mit üblicher Bezeichnungsweise $g_{ij}, h_{ij}, \nu, H, K, \sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{dx}$ gegeben.

Definiere $\tilde{X} = \mu \cdot X$, wobei $\mu > 0$ eine Konstante sei. Bestimme oben genannte Größen für die neue Einbettung mit Hilfe von μ und den entsprechenden Größen für X.

Aufgabe 5.2. Beweise Bemerkung 5.13. Verwende alternativ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{für } -1 < x \le 0, \\ (\cos x, \sin x) & \text{für } 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Aufgabe 5.3.

(i) Seien M, N, S differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$, sowie $g : N \to S$ differenzierbare Abbildungen. Zeige:
$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*.$$
(ii) Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von N. Zeige, dass TM eine Untermannigfaltigkeit von TN ist.

Aufgabe 5.4.

(i) Sei $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation als
$$x \sim y \iff \exists\, z \in \mathbb{Z}^n : x = y + z$$
definiert ist. Zeige, dass $\mathbb{T}^n$ versehen mit der Quotientenraumtopologie bezüglich der Projektion
$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n, \quad p(x) = [x],$$
kompakt ist. Gib einen Atlas für $\mathbb{T}^n$ an, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.

(ii) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \frac{1}{4}\}$. Zeige, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(iii) Weise nach, dass $\mathbb{T}^2$ und M diffeomorph sind.

Abgabe: Bis Dienstag, 25.05.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 6

Aufgabe 6.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass die Projektion

$$\pi : \operatorname{graph} u \to \Omega, \quad (x, u(x)) \mapsto x,$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 6.2. Sei $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass $\operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $m \in \mathbb{N}_+$, eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 6.3. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G versehen mit einer Gruppenstruktur, so dass die Multiplikation $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, sowie die Inversion $i : G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, differenzierbar sind, bezeichnet man als *Lie-Gruppe*.

Es bezeichne $O(n)$ den Raum der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass $O(n)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist, und dass die Gruppenoperationen differenzierbar sind. Gib des Weiteren $T_{\mathrm{Id}}O(n)$ an, wobei Id die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 6.4. Gib zwei nicht homöomorphe $\mathbb{R}$-Bündel über $\mathbb{S}^1$ an.

Abgabe: Bis Dienstag, 01.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 7

Aufgabe 7.1.

(i) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Definiere die Abbildung
$$\Delta : M \to M \times M, \quad x \mapsto (x, x).$$
Weise nach, dass $\Delta(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist.

(ii) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Zeige, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 7.2. Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten des dahinter angegebenen Raumes? Wenn eine der Mengen eine Untermannigfaltigkeit darstellt, welche maximale Differenzierbarkeit kann man für den Atlas erhalten? Punkte gibt es nur für bewiesene Antworten.

(i) $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$
(ii) $(0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$
(iii) $\partial([0,1]^n) \subset \mathbb{R}^n$
(iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\} \subset \mathbb{R}^2$
(v) $\{(\sin t, \sin 2t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Aufgabe 7.3. Zeige, dass das Vektorbündel $T\mathbb{S}^3$ trivial ist.

Aufgabe 7.4. Sei M eine differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeit und seien X, Y, Z drei C^2-Vektorfelder. Dann gilt die Jacobiidentität
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Abgabe: Bis Dienstag, 08.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 8

Aufgabe 8.1. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeige, dass $f_* : TM \to TN$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 8.2. Seien M, N differenzierbare C^∞-Mannigfaltigkeiten und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Seien X, Y zwei C^1-Vektorfelder auf M und definiere für $q \in N$ ein Vektorfeld auf N mittels

$$\hat{X}|_q = (f_* X)|_{f^{-1}(q)}.$$

Zeige, dass für $p \in M$

$$f_{*,p}[X, Y]|_p = \left[\hat{X}, \hat{Y}\right]\big|_{f(p)}$$

gilt.

Aufgabe 8.3. Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. N heißt orientierbar, wenn es eine Familie von Karten von N gibt, deren Definitionsbereiche N überdecken, so dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechsel stets positiv ist.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir sagen, dass M als Hyperfläche orientierbar ist, wenn es eine stetige Normale auf M gibt, d. h. es existiert eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für $p \in M$ der Vektor $\nu(p) \in (T_pM)^\perp$ ist und $|\nu(p)| = 1$ erfüllt.

Zeige, dass M genau dann orientierbar ist, wenn es als Hyperfläche orientierbar ist.

Aufgabe 8.4. Sei $f : B_1^m(0) \to \mathbb{R}^{m+k}$ eine differenzierbare C^∞-Einbettung, wobei $B_1^m(0)$ den offenen Einheitsball in $\mathbb{R}^m$ darstellt. Bezeichne weiterhin mit M die Untermannigfaltigkeit $f(B_1^m(0)) \subset \mathbb{R}^{m+k}$.

Zeige, dass es k glatte Abbildungen $N_i : B_1^m(0) \to \mathbb{R}^{m+k}$, $1 \le i \le k$, gibt, so dass für $p \in B_1^m(0)$ die Vektoren $N_i(p) \in (T_{f(p)}M)^\perp$ sind und

$$\langle N_i(p), N_j(p)\rangle = \delta_{ij},\ 1 \le i, j \le k,$$

erfüllen. Zeige, dass die Abbildung

$$F : B_1^m(0) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m+k}, \quad (x, y) \mapsto f(x) + y^i N_i(x)$$

ein Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0, 0)$ ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 15.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 9

Aufgabe 9.1. Sei M eine C^{k+1}-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $k \ge 1$. Seien X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^{k-1} respektive C^k auf M, wobei wir Y als Abbildung $Y : M \to \mathbb{R}^n$ auffassen. Definiere wie in Beispiel 8.2

$$\nabla_X Y(z) := P(z) dY(z)\langle X\rangle,$$

wobei $P(z) : \mathbb{R}^n \to T_z M$ die orthogonale Projektion ist, $z \in M$ beliebig sei und wir Y lokal fortsetzen zu einer Abbildung $Y : U \to \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von z des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass ∇ einen Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M definiert, den induzierten Zusammenhang.

Aufgabe 9.2. Versehe $\mathbb{S}^n$ mit dem induzierten Zusammenhang ∇.

(i) Sei X durch
$$X(p) := e_1 - \langle e_1, p\rangle\, p$$
definiert, wobei e_1 den Basisvektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet und $p \in S^n$ sei. Begründe, warum X ein Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ ist und berechne die Darstellung von X bezüglich der stereographischen Projektion.

(ii) Berechne die Christoffelymbole Γ^k_{ij} in lokalen Koordinaten bezüglich der stereographischen Projektion.

Aufgabe 9.3. Lies den Beweis von Bemerkung 9.5, also der Existenz einer untegeordneten Zerlegung der Eins auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit, nach.

Aufgabe 9.4. Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Bezeichne mit $F : W \to M$ den maximalen Fluss von X. Zeige, dass $\forall t \in \mathbb{R}$ $M_t := \{x \in M : (x,t) \in W\}$ offen in M ist und dass $F(t,\cdot) : M_t \to M_{-t}$ ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 22.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 10

Aufgabe 10.1. Sei M eine C^{k+1}-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, mit abzählbarer Basis.

(i) Sei g wie im Beweis von Theorem 9.4 definiert. Zeige, dass g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^k ist.

(ii) Zeige, dass ein Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M existiert.

Aufgabe 10.2. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und g eine Riemannsche Metrik auf N. Ist $f : M \to N$ eine Immersion, so ist durch

$$f^*g(X, Y) = g(f_*X, f_*Y),$$

wobei X, Y beliebige Vektorfelder auf M seien, eine Riemannsche Metrik auf M definiert.

Aufgabe 10.3. Sei M^n eine n-dimensionale, zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

(i) Sei g eine pseudo-Riemannsche Metrik auf M, $p \in M$ beliebig und $V_1, \ldots, V_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Sei $\varepsilon_j := g_p(V_j, V_j)$. Zeige, dass der Index von g mit der Anzahl der negativen Vorzeichen, welche in $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vorkommen, übereinstimmt.

(ii) Zeige, dass eine Metrik vom Index k, $1 \leq k \leq n$, genau dann existiert, wenn es ein k-dimensionales Unterbündel von TM gibt.

Aufgabe 10.4. Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und bezeichne mit R den Krümmungstensor. Berechne R bezüglich des Projektionszusammenhanges für

(1) $M = \mathbb{S}^n$,

(2) $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n-1$,

(3) $M = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

Abgabe: Bis Dienstag, 29.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 11

Aufgabe 11.1. Sei M eine C^{k+1}-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Seien X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^{k-1} respektive C^k auf M, wobei wir Y als Abbildung $Y : M \to \mathbb{R}^n$ auffassen. Definiere wie in Beispiel 8.2

$$\nabla_X Y(z) := P(z) dY(z)\langle X \rangle,$$

wobei $P(z) : \mathbb{R}^n \to T_z M$ die orthogonale Projektion ist, $z \in M$ beliebig sei und wir Y lokal fortsetzen zu einer Abbildung $Y : U \to \mathbb{R}^n$, U eine offene Umgebung von z des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass ∇ einen Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M definiert, den induzierten Zusammenhang.

Aufgabe 11.2. Versehe $\mathbb{S}^n$ mit dem induzierten Zusammenhang ∇.

(i) Sei X durch
$$X(p) := e_1 - \langle e_1, p \rangle \, p$$
definiert, wobei e_1 den Basisvektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet und $p \in S^n$ sei. Begründe, warum X ein Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ ist und berechne die Darstellung von X bezüglich der stereographischen Projektion.

(ii) Berechne die Christoffelymbole Γ^k_{ij} in lokalen Koordinaten bezüglich der stereographischen Projektion.

Aufgabe 11.3. Lies den Beweis von Bemerkung 9.5, also der Existenz einer untegeordneten Zerlegung der Eins auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit, nach.

Aufgabe 11.4. Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Bezeichne mit $F : W \to M$ den maximalen Fluss von X. Zeige, dass $\forall t \in \mathbb{R}$ $M_t := \{x \in M : (x, t) \in W\}$ offen in M ist und dass $F(t, \cdot) : M_t \to M_{-t}$ ein Diffeomorphismus ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 22.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2010
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 12

Aufgabe 12.1. Sei M eine C^{k+1}-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$, mit abzählbarer Basis.

(i) Sei g wie im Beweis von Theorem 9.4 definiert. Zeige, dass g eine Riemannsche Metrik der Klasse C^k ist.
(ii) Zeige, dass ein Zusammenhang der Klasse C^{k-1} auf M existiert.

Aufgabe 12.2. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und g eine Riemannsche Metrik auf N. Ist $f : M \to N$ eine Immersion, so ist durch

$$f^*g(X, Y) = g(f_*X, f_*Y),$$

wobei X, Y beliebige Vektorfelder auf M seien, eine Riemannsche Metrik auf M definiert.

Aufgabe 12.3. Sei M^n eine n-dimensionale, zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

(i) Sei g eine pseudo-Riemannsche Metrik auf M, $p \in M$ beliebig und $V_1, \ldots, V_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Sei $\varepsilon_j := g_p(V_j, V_j)$. Zeige, dass der Index von g mit der Anzahl der negativen Vorzeichen, welche in $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vorkommen, übereinstimmt.
(ii) Zeige, dass eine Metrik vom Index k, $1 \leq k \leq n$, genau dann existiert, wenn es ein k-dimensionales Unterbündel von TM gibt.

Aufgabe 12.4. Sei M eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und bezeichne mit R den Krümmungstensor. Berechne R bezüglich des Projektionszusammenhanges für

(1) $M = \mathbb{S}^n$,
(2) $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n-1$,
(3) $M = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

Abgabe: Bis Dienstag, 29.06.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 13

Aufgabe 13.1. Sei M eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, g die induzierte Metrik und ∇ der induzierte Zusammenhang. Zeige, dass ∇ der eindeutig bestimmte Levi-Civita Zusammenhang auf (M, g) ist.

Aufgabe 13.2. Seien (M, g), $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \to N$ eine Isometrie. Bezeichne mit ∇, $\tilde{\nabla}$ und R, $\tilde{R}$ jeweils den Riemannschen Zusammenhang bzw. die Riemannsche Krümmung auf M bzw. N.

(i) Zeige, dass für glatte Vektorfelder X, Y auf M
$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)$$
gilt.

(ii) Zeige, dass für glatte Vektorfelder X, Y, Z auf M
$$\varphi_*(R(X, Y)Z) = \tilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z$$
gilt.

Aufgabe 13.3. Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Berechne $\varphi^*\delta$, wobei δ die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^n$ bezeichne und vergleiche dies mit der Definition 2.1 aus dem Skript.

Aufgabe 13.4. Sei
$$\mathcal{H}^n_R = \{(t, x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 - |x|^2 = R^2,\, t > 0\}$$
und h die von $(\mathbb{R}^{n+1}, m)$ induzierte Metrik, wobei m die Minkowski-Metrik bezeichnet. Dann nennen wir $(\mathcal{H}^n_R, h)$ den hyperbolischen Raum. Ist B^n_R der Ball mit Radius R im $\mathbb{R}^n$ um den Ursprung, so definieren wir weiterhin die Inverse der hyperbolischen stereographischen Projektion:
$$\pi^{-1} : B^n_R \to \mathcal{H}^n_R, \quad \pi^{-1}(y) = (t, x) = \left(R\,\frac{R^2 + |y|^2}{R^2 - |y|^2}, \frac{2R^2 y}{R^2 - |y|^2}\right).$$
Zeige, dass
$$g_{ij}(y) := \left((\pi^{-1})^* h\right)_{ij}(y) = 4\frac{R^4}{(R^2 - |y|^2)^2}\delta_{ij}$$
gilt. (B^n_R, g) bezeichnet man als das Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Abgabe: Bis Dienstag, 06.07.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2010

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie I

Blatt 14

Aufgabe 14.1. Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und seien $\pi : M \times N \to M$ und $\sigma : M \times N \to N$ die jeweiligen Projektionen.

(i) Zeige, dass durch
$$\bar{g} = \pi^* g \oplus \sigma^* \tilde{g} \equiv \begin{pmatrix} \pi^* g & 0 \\ 0 & \sigma^* \tilde{g} \end{pmatrix}$$
eine Riemannsche Metrik auf $M \times N$ definiert ist.

(ii) Bezeichne mit $R, \tilde{R}, \bar{R}$ den Riemannschen Krümmungstensor auf M, N, sowie $M \times N$. Stelle nun $\bar{R}$ mittels R und $\tilde{R}$ dar.

Aufgabe 14.2. Sei $(\mathcal{H}^n_R, h)$ der hyperbolische Raum, wie in Aufgabe 11.4 definiert. Berechne den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl}, die Ricci-Krümmung R_{ij}, die Skalarkrümmung R und die Schnittkrümmungen $K(X, Y)$ im Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes.

Aufgabe 14.3. Sei (M, g) eine Einstein-Mannigfaltigkeit, d. h. es existiert eine Funktion $f \in C^\infty(M)$, so dass $R_{ij} = f g_{ij}$ gilt. Sei $\dim M \geq 3$. Zeige, dass
$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij}$$
gilt und dass R konstant ist.

Aufgabe 14.4. Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus, mit der Eigenschaft, dass für alle glatten Kurven $\gamma : [0, 1] \to M$
$$L_g(\gamma) = L_{\tilde{g}}(\varphi \circ \gamma)$$
gilt, wobei
$$L_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}\, \mathrm{ds}$$
ist. Ein Diffeomorphismus mit dieser Eigenschaft wird als Isometrie zwischen M und N bezeichnet. Zeige, dass
$$\varphi^* \tilde{g} = g$$
gilt.

Aufgabe 14.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $g = g(t)$ eine Familie von Riemannschen Metriken, welche glatt vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängt und die Ableitung wieder ein Tensor ist. Dies gilt z. B. für den Ricci-Fluss $\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}$. Nehme an, dass für $p \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Karte (φ, U) von M existiert, so dass
$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \Gamma^k_{ij}(p) = 0$$
gilt, wobei die Größen zur Zeit t_0 ausgewertet werden. Zeige, dass der Riemannsche Krümmungstensor R_{ijkl} in dem oben gewählten Koordinatensystem die Gleichung
$$\begin{aligned}\dot{R}_{ijkl} = &-\frac{1}{2}\left((\dot{g}_{jl})_{,ki} - (\dot{g}_{jk})_{,li} - (\dot{g}_{il})_{,kj} + (\dot{g}_{ik})_{,lj}\right) \\ &+ \frac{1}{2} g^{pq} \left(R_{ijkp}\, \dot{g}_{ql} + R_{ijpl}\, \dot{g}_{qk}\right)\end{aligned}$$
erfüllt, wobei die Größen an der Stelle p und zur Zeit t_0 ausgewertet werden.

Abgabe: Bis Dienstag, 13.07.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.