DIFFERENTIALGEOMETRIE I+II

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Skript zu einer Vorlesung Differentialgeometrie I an der Universität Konstanz.

Inhaltsverzeichnis

1. Isometrien des $\mathbb{R}^n$ 2
1.1. Klassifikation der Isometrien des $\mathbb{R}^n$ 2
2. Hyperflächen 3
2.1. Definitionen 3
2.2. Beziehungen 8
2.3. Tangentialraum 10
2.4. Differenzierbarkeit und Tangentialraum (abstrakter) 11
3. Geometrie und Kümmung von Hyperflächen 13
3.1. Normale und Metrik 13
3.2. Zweite Fundamentalform 18
3.3. Krümmungsfunktionen 23
3.4. Min-Max Charakterisierung der Hauptkrümmungen 28
3.5. Die Weingartenabbildung 29
3.6. Charakterisierung von Ebenen und Sphären 31
4. Minimalflächen 33
4.1. Der Flächeninhalt und Vorbereitungen 33
4.2. Erste Variation des Flächeninhaltes 36
4.3. Beispiele 38
5. Kurzeinführung Mittlerer Krümmungsfluss 41
5.1. Die Flussgleichung 41
5.2. Mittlerer Krümmungsfluss als geometrische Evolutionsgleichung 42
5.3. Graphische Krümmungsflüsse 43
6. Kurven im $\mathbb{R}^n$ 45
6.1. Kurven, Bogenlänge und Umparametrisierung 45
6.2. Die isoperimetrische Ungleichung 47
7. Krümmung von Kurven 49
7.1. Definition der Krümmung von Kurven in der Ebene 49
7.2. Krümmung von Raumkurven 52
7.3. Längenvergleich und der Satz von Fenchel 58
8. Die Distanzfunktion 61
8.1. Tubenumgebungen 61
8.2. Hauptkrümmungen und die Distanzfunktion 64
9. Die Gaußkrümmung integrieren 67
9.1. Lokale Rechnung 67
9.2. Globale Situation 69

Date: 7. April 2025.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Vielen Dank an Hakar Raji und Florian Schilbert für Korrekturen und an Elisabeth Greiler für das Tippen einiger Abschnitte.

10. Mittlerer Krümmungsfluss 71
10.1. Die Flussgleichung 71
10.2. Mittlerer Krümmungsfluss als geometrische Evolutionsgleichung ⋆ 72
10.3. Graphische Krümmungsflüsse 74
10.4. Der mittlere Krümmungsfluss als negativer Gradientenfluss 76
10.5. Einige Evolutionsgleichungen 77
10.6. Die isoperimetrische Ungleichung 78
10.7. Translatierende und homothetische Lösungen 79
10.8. Niveauflächenfluss 80
11. Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten 82
11.1. Flüsse in Tangentialrichtung 82
11.2. Tangentialgradient 83
11.3. Gradientenflüsse auf Mannigfaltigkeiten 85
11.4. Globale Konvexität 87
12. Geodätische 88
12.1. Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten 88
12.2. Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung 91
12.3. Geodätische als Objekte der inneren Geometrie von Hyperflächen 93
12.4. Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung 94
Anhang A. Lineare Algebra in kovarianter Notation 97
A.1. Vektoren und Endomorphismen 97
A.2. Basen und der Dualraum 98
A.3. Bilinearformen 98
Anhang B. Extremaleigenschaften der Eigenwerte 100
B.1. Analysisnaher Diagonalisierbarkeitsbeweis 100
B.2. Min-Max-Charakterisierung der Eigenwerte 101
B.3. Charakterisierung positiver Definitheit 103
Literatur 103

In der Differentialgeometrie geht es um Mannigfaltigkeiten und deren Krümmung. Wir orientieren uns an [7, 13], benutzen aber auch [15].

1. Isometrien des $\mathbb{R}^n$

1.1. Klassifikation der Isometrien des $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1.1. Eine Abbildung $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ zwischen zwei metrischen Räumen (X_i, d_i) heißt Isometrie, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt und f surjektiv ist.

Lemma 1.1.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge der Isometrien $f\colon (X, d) \to (X, d)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.*

Beweis. Isometrien sind injektiv, also auch bijektiv und daher invertierbar mit bijektiver Inversen. Seien f, g Isometrien. Dann folgt aus $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ auch $d(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. Daher ist f^{-1} ebenfalls eine Isometrie. Es gilt

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(g(x), g(y)) = d(x, y),$$

jeweils für alle $x, y \in X$. Die Bijektivität von f und g überträgt sich auf die Komposition $f \circ g$. Die Identität $x \mapsto x$ ist das neutrale Element. □

Theorem 1.1.3. *Die Isometrien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik sind genau die Abbildungen der Form*

$$f(x) = Ax + b$$

mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Gelte $f(x) = Ax + b$. Dann rechnet man direkt nach, dass es sich um eine Isometrie handelt.

„$\Longrightarrow$“: Sei f eine beliebige Isometrie. Durch Addition eines konstanten Vektors in $\mathbb{R}^n$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f(0) = 0$ gilt. Wir erhalten

$$|f(x)| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = |x|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da f eine Isometrie ist, gilt $|f(x)-f(y)| = |x-y|$. Aufgrund der Polarisationsformel (oder durch direktes Ausmultiplizieren der quadrierten Normen) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\langle f(x), f(y)\rangle &= |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Somit erhält f auch das Skalarprodukt. Sei $(e_i)_{1\le i\le n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir erhalten $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Dies besagt, dass auch $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ eine Orthonormalbasis ist. Daher gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i f(e_i).$$

Somit ist f eine lineare Abbildung. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine lineare Abbildung, die eine Orthonormalbasis auf eine andere Orthonormalbasis abbildet, durch eine orthogonale Matrix dargestellt wird. (Die Surjektivität von f haben wir hier nicht benutzt.) □

Definition 1.1.4.

(i) Die Isometrien $f(x) = Sx + b$, $S \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißen (Euklidische) oder starre Bewegungen.

(ii) Die Isometrie $f(x) = Sx + b$ heißt orientierungserhaltend oder eigentliche Bewegung, falls $\det S = 1$ für die orthogonale Matrix S gilt und sonst orientierungsumkehrend.

Definition 1.1.5. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\sphericalangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|} \in [0, \pi]$$

der Winkel zwischen x und y.

2. Hyperflächen

2.1. **Definitionen.** Hyperflächen lassen sich auf verschiedene Arten beschreiben. Wir geben einige solche Definitionen und beschreiben, wie diese Konzepte zusammenhängen. Häufig werden wir uns dabei auf Hyperflächen beschränken.

Definition 2.1.1 (Untermannigfaltigkeit)**.** Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt C^r-**Untermannigfaltigkeit**, falls es für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ von x und einen C^r-Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

gibt. Das Paar (U, φ) heißt **Karte**, U heißt **Kartenumgebung**, φ heißt **Kartenabbildung**.

(ii) Eine Teilmenge $M \in \mathbb{R}^{n+k}$ heißt C^0-Untermannigfaltigkeit, falls dieselbe Bedingung für einen Homöomorphismus φ erfüllt ist.
(iii) Die Untermannigfaltigkeit M hat die Dimension n und die Kodimension k. Daher schreiben wir auch M^n, um die Dimension von M zu betonen.
(iv) Eine Untermannigfaltigkeit M heißt **geschlossen**, falls M kompakt ist.

Bemerkung 2.1.2.
(i) In den nachfolgenden Definitionen von Niveaufläche, Graph, Immersion und Einbettung, heißt n die Dimension und k die Kodimension des entsprechenden Objektes.
(ii) **Hyperflächen** haben die Dimension n und die Kodimension 1; **Kurven** haben die Dimension 1 und **Flächen** haben die Dimension 2.
(iii) Sonst definiert man geschlossene Untermannigfaltigkeiten als kompakte Untermannigfaltigkeiten ohne Rand. Hier haben wir jedoch eine Definition gewählt, die Ränder von vornherein ausschließt.
(iv) Abstrakte Mannigfaltigkeiten werden wir nicht mehr in dieser Vorlesung behandeln.

Definition 2.1.3 (Niveaufläche)**.** Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und sei $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen. Sei $f \in C^r\left(U, \mathbb{R}^k\right)$. Dann heißt $f^{-1}(\{0\})$ eine **(reguläre)** (Null-)**Niveaufläche** der Klasse C^r der Funktion f, falls $\operatorname{rang} Df(x) = k$ für alle $x \in f^{-1}(\{0\})$ gilt.

Definition 2.1.4 (Graph)**.** Seien $n, k, r \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $u \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^k\right)$. Dann heißt

$$\operatorname{graph} u = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} : x \in \Omega \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

ein **Graph** der Klasse C^r.

Definition 2.1.5 (Immersion, Einbettung)**.** Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und sei $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei weiterhin $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Eine Abbildung $X \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+k}\right)$ heißt **Immersion**, falls $DX(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ für alle $x \in \Omega$ injektiv ist.
(ii) Eine Abbildung $X \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+k}\right)$ heißt **Einbettung**, falls X eine Immersion und die Abbildung

$$\Omega \ni x \mapsto X(x) \in X(\Omega)$$

ein Homöomorphismus ist, wobei wir $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$ mit der Unterraumtopologie betrachten.
(iii) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit und sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Einbettung mit $\operatorname{im} X \subset M^n$. Sei $p \in \operatorname{im} X$. Dann heißt X **lokale Parametrisierung** von M^n um den Punkt p.

Bemerkung 2.1.6. Die Bedingung, dass $DX(x)$ injektiv ist, ist äquivalent zur Bedingung, dass $\operatorname{rang} DX(x) = n$ gilt.

Der Fall einer Kodimension ($k = 1$) ist besonders wichtig.

Definition 2.1.7 (Hyperfläche)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

(i) Eine Immersion $X \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ heißt (parametrisierte, immersierte oder reguläre) **Hyperfläche**.
(ii) Eine immersierte Hyperfläche X, die gleichzeitig eine Einbettung ist, heißt **eingebettete Hyperfläche**.

(iii) Wir sprechen auch beim Bild $X(\Omega)$ von einer immersierten oder eingebetteten Hyperfläche.

Beispiele 2.1.8. In den nachfolgenden Beispielen überlassen wir es dem Leser, die in den entsprechenden Definitionen geforderten Eigenschaften nachzurechnen.

(i) **Sphäre als Graph:** Die untere Hemisphäre vom Radius $R > 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung ist der Graph der Funktion

$$\mathbb{R}^n \supset B_R(0) \ni x \mapsto u(x) = -\sqrt{R^2 - |x|^2} \in \mathbb{R}.$$

(ii) **Sphäre als Untermannigfaltigkeit:** Die Sphäre $\partial B_1(0) \equiv \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$: Sei $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Dann gilt

$$|x_0|^2 \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \left(x_0^i\right)^2 = 1,$$

wobei wir $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{n+1}\right)$ schreiben, d. h. $\left(x_0^i\right)_{1 \le i \le n+1}$ sind die Koordinaten von $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_{n+1}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit gibt es i_0, $1 \le i_0 \le n+1$, mit $x_0^i \neq 0$. Wir nehmen nun ohne Einschränkung $x_0^i > 0$ an. Definiere

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x^{i_0} > 0 \text{ und } \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+1} \left(x^i\right)^2 < 1 \right\}.$$

und die Diffeomorphismen $\varphi \colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{i_0-1} \\ x^{i_0+1} \\ \vdots \\ x^{n+1} \\ x^{i_0} - \sqrt{1 - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+1} \left(x^i\right)^2} \end{pmatrix}.$$

(iii) **Sphäre als Niveaufläche:** Definiere

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto |x|^2 - 1. \end{aligned}$$

Überpfüfe, dass man mit f zeigen kann, dass $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine reguläre Niveaufläche ist. Zeige weiterhin, dass wir dazu auch

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto |x| - 1 \end{aligned}$$

hätten benutzen können.

(iv) **Sphäre als Einbettung:** Wir stellen die Sphäre $\partial B_1(0) \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}$, d. h. die Sphäre ohne Südpol $-e_{n+1}$ als Einbettung dar. Dazu definieren

wir

$$\begin{aligned} X\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^{n+1}, \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{1+|x|^2} \\ \dfrac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist eine Variante der Umkehrabbildung der stereographischen Projektion.

Um zu zeigen, dass X eine Immersion ist, differenzieren wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x^i}(x) &= \frac{1}{1+|x|^2}\begin{pmatrix} 2e_i \\ -2x_i \end{pmatrix} - \frac{1}{(1+|x|^2)^2}\begin{pmatrix} 4xx_i \\ \left(1-|x|^2\right)2x_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2e_i}{1+|x|^2} - \dfrac{4xx_i}{(1+|x|^2)^2} \\ \dfrac{-4x_i}{(1+|x|^2)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist nicht sofort klar, dass $DX(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ den Rang n hat. Für den Beweis empfehlen wir einen der folgenden Ansätze. Später werden wir sehen, dass diese Ansätze die Metrik und die Normale benutzen.

- Wir definieren $g_{ij}(x) := (DX)^T(x)DX(x)$, $1 \le i,j \le n$, und erhalten

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}(x), \frac{\partial X}{\partial x^j}(x) \right\rangle \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(1+|x|^2)^2} - \frac{16x_ix_j}{(1+|x|^2)^3} + \frac{16|x|^2x_ix_j}{(1+|x|^2)^4} + \frac{16x_ix_j}{(1+|x|^2)^4} \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(1+|x|^2)^2}. \end{aligned}$$

  Nun sehen wir, dass die Matrix $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ den Rang n hat. Somit hat auch $DX(x)$ den Rang n.
- Wir definieren $Q \equiv Q(x) := 1+|x|^2$ und $M \equiv M(x) := 1-|x|^2$ und betrachten dann die Matrix

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial X}{\partial x^n}(x) & \frac{X(x)}{Q} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{Q^2}\begin{pmatrix} 2Q-4x_1x_1 & -4x_1x_2 & \cdots & -4x_1x_n & 2x_1 \\ -4x_2x_1 & 2Q-4x_2x_2 & \cdots & -4x_2x_n & 2x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -4x_nx_1 & -4x_nx_2 & \cdots & 2Q-4x_nx_n & 2x_n \\ -2x_1Q-2x_1M & -2x_2Q-2x_2M & \cdots & -2x_nQ-2x_nM & M \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Nun wenden wir Zeilen- und Spaltenoperationen an, die nichts daran ändern, ob die Matrix singulär oder regulär ist: Wir addieren das $2x_1$-fache der letzten Spalte zur ersten Spalte, das $2x_2$-fache der letzten Spalte zu zweiten Spalte, ... und das $2x_n$-fache der letzten Spalte zur n-ten Spalte, lassen die unwichtigen Faktoren Q und 2 weg und

erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 2x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x_n \\ -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n & M \end{pmatrix}.$$

Schließlich addieren wir das x_1-fache der ersten Zeile und das x_2-fache der zweiten Zeile ... und das x_n-fache der n-ten Zeile zur letzten Zeile und erhalten eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge 1 und $M + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ sind. Dies ist eine reguläre Matrix. Daher schließen wir wiederum, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial X}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

den Rang n hat.

(v) **Zylinder als Niveaufläche:** Seien $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r, s \geq 1$. Dann ist die (Null-)Niveaufläche von

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto |x|^2 - 1 \end{aligned}$$

ein Zylinder.

(vi) **Helix:** Betrachte $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $u(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. Dann ist $\operatorname{graph} u$ eine Helix.

(vii) **Eine Spirale:** Die Kurve $\mathbb{R} \ni t \mapsto (1 + e^t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung.

(viii) **Keine Einbettung:** Die Kurve $\gamma\colon (-\infty, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, t)^T & t < 0, \\ (\cos t, \sin t)^T & t \geq 0 \end{cases}$$

ist eine injektive Immersion, jedoch keine Einbettung.

(ix) **Rotationsflächen:** Sei $\alpha\colon (a, b) \to \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\right\}$ eine reguläre Kurve (= eindimensionale Immersion) in der „rechten“ Halbebene der $x^1 - x^3$-Ebene. Schreibe

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Durch Rotation um die x^3-Achse erhalten wir eine immersierte Hyperfläche

$$X\colon (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$X(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

2.2. **Beziehungen.** Lokal betrachtet sind Untermannigfaltigkeiten, Niveauflächen, Graphen, Immersionen und Einbettungen sehr ähnlich.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{immersiert}} \arrow[rr, "(F)", "\text{loc}"'] & & \boxed{\text{Graph}} \arrow[ll, bend right, "(G)", "\text{loc}"'] \arrow[rr, bend right, "(B)"'] \arrow[dl, "(C)"'] \arrow[d, "(A)"] & & \boxed{\text{Niveaufläche}} \\
\boxed{\text{eingebettet}} \arrow[u, "(E)"] & & \boxed{\text{Untermannigfaltigkeit}} \arrow[ll, "(D)", "\text{loc}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.2.1.

(A) Ein Graph ist auch eine Untermannigfaltigkeit.
(B) Ein Graph der Klasse C^r, $r \geq 1$, ist eine reguläre Niveaufläche.
(C) Ein Graph der Klasse C^r, $r \geq 1$, ist das Bild einer Einbettung.
(D) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^r-Untermannigfaltigkeit, $r \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $x \in M$, eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ von x, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Einbettung $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $X(\Omega) = M \cap U$. Somit gibt es eine lokale Parametrisierung von M um x.
(E) Eine Einbettung ist eine Immersion.
(F) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^r-Immersion, $r \geq 1$, und sei $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$ von x_0, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $u \in C^r\left(U, \mathbb{R}^k\right)$ und eine orthogonale Transformation $R \in O(n+k)$ mit $R(X(\Omega_0)) = \operatorname{graph} u$.
(G) Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $f \in C^r\left(U, \mathbb{R}^k\right)$, $r \geq 1$, und sei $f^{-1}(\{0\})$ eine reguläre Niveaufläche der Dimension n. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in f^{-1}(\{0\})$ eine Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $u \in C^r\left(\Omega, \mathbb{R}^k\right)$ und eine orthogonale Transformation $R \in O(n+k)$ mit $R\left(f^{-1}(\{0\}) \cap U_0\right) = \operatorname{graph} u$.

Beweis.

(A) Seien $n, k, r \in \mathbb{N}$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei $u \in \mathbb{C}^r\left(\Omega, \mathbb{R}^k\right)$ und sei

$$M = \operatorname{graph} u = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} : x \in \Omega \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

Dann wählen wir zu jedem $x \in M$ die offene Umgebung $\Omega \times \mathbb{R}^k$ und den Diffeomorphismus oder Homöomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi \colon \Omega \times \mathbb{R}^k &\to \Omega \times \mathbb{R}^k, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y - u(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht, dass $(x, y) \in M$ äquivalent zu $\varphi(x, y) \in \Omega \times \{0\}$ ist.

(B) Sei $M = \operatorname{graph} u$ wie oben. Dann erfüllt die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon \Omega \times \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}^k, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto y - u(x) \end{aligned}$$

$f^{-1}(\{0\}) = M$. Die Ableitung bezüglich des zweiten Argumentes ist durch $D_y f(x, y) = \mathbb{1}$ für alle $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^k$ gegeben. Somit sehen wir, dass $\operatorname{rang} Df(x, y) \geq k$ gilt. Andererseits ist klar, dass $\operatorname{rang} Df \leq k$ gilt, da f eine Abbildung mit Bild in $\mathbb{R}^k$ ist.

(C) Sei wiederum $M = \operatorname{graph} u$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Einbettung mit $X(\Omega) = M$.

(D) Sei M eine Untermannigfaltigkeit und sei $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ein Diffeomorphismus wie in der Definition einer Untermannigfaltigkeit. Setze $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \colon (x, 0) \in \varphi(U)\}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R}^{n+k}, \\ x &\mapsto \varphi^{-1}(x, 0) \end{aligned}$$

eine Einbettung mit $X(\Omega) = M \cap U$.

(E) Dies ist nach Definition klar.

(F) Da X eine Immersion ist, ist $\operatorname{im} DX(x_0)$ ein n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Somit gibt es eine orthogonale Transformation $R \in O(n+k)$ mit

$$R\left(DX(x_0)\left\langle \mathbb{R}^n \right\rangle\right) = D(R \circ X)(x_0)\left\langle \mathbb{R}^n \right\rangle = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

wobei wir spitze Klammern verwenden, um die Linearität in diesem Argument anzudeuten. Seien $\pi_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x$, und $\pi_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto y$, die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Dann ist $\Phi := \pi_1 \circ R \circ X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^r-Funktion, $r \geq 1$, deren Differential $D\Phi(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus ist. Somit folgt aus dem Satz von der inversen Funktion, dass es eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$ von x_0 derart gibt, dass $\Phi|_{\Omega_0}\colon \Omega_0 \to \Phi(\Omega_0)$ ein Diffeomorphismus ist. Definiere die offene Menge $U := \Phi(\Omega_0) \subset \mathbb{R}^n$ und

$$u := \pi_2 \circ R \circ X \circ (\Phi|_{\Omega_0})^{-1}\colon U \to \mathbb{R}^k.$$

Wir müssen also noch $R(X(\Omega_0)) = \operatorname{graph} u$ zeigen. Betrachte einen beliebigen Punkt $x \in \Omega_0$. Nun folgt direkt aus den Definitionen von Φ und u, dass $R(X(x)) = (\Phi(x), u(\Phi(x)))$ gilt. Da die Abbildung $\Phi|_{\Omega_0}\colon \Omega_0 \to \Phi(\Omega_0)$ ein Diffeomorphismus ist, liefert dies den Beweis, dass eine Immersion – bis auf eine orthogonale Transformation – lokal graphisch ist.

(G) Der Kern von $Df(x_0)$ ist eine n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^{n+k}$. Somit gibt es eine orthogonale Transformation $T \in O(n+k)$ mit

$$\ker((Df)(x_0) \circ T) = \ker D(f \circ T)\left(T^{-1}(x_0)\right) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

Sei $R = T^{-1}$ und $(y_1, z_1) = R(x_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Dann ist die Ableitung bezüglich das Argumentes aus $\mathbb{R}^k$, $D_2(f \circ T)(y_1, z_1)$, invertierbar und aus dem Satz von der impliziten Funktion folgt, dass es eine offene Umgebung $\Omega_y \times \Omega_z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ von (y_1, z_1) und eine C^r-Funktion $u\colon \Omega_y \to \Omega_z \subset \mathbb{R}^k$ mit $u(y_1) = z_1$ und

$$\left((f \circ T)^{-1}(\{0\})\right) \cap (\Omega_y \times \Omega_z) = \operatorname{graph} u \equiv \{(y, u(y))\colon y \in \Omega_y\}$$

gilt. Insbesondere erhalten wir $(f \circ T)(y, u(y)) = 0$ für alle $y \in \Omega_y$. Diese Gleichheit benötigen wir zwar für den Beweis nicht, wir werden sie aber in Bemerkung 2.2.2 benutzen. Wir definieren $U_0 := T(\Omega_y \times \Omega_z)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{graph} u &= \left((f \circ T)^{-1}(\{0\})\right) \cap (\Omega_y \times \Omega_z) \\ &= T^{-1} \circ f^{-1}(\{0\}) \cap RT(\Omega_y \times \Omega_z) \\ &= R\left(f^{-1}(\{0\}) \cap U_0\right) \end{aligned}$$

wie oben behauptet. $\square$

Bemerkung 2.2.2. Die Behauptungen aus Proposition 2.2.1 können wir noch verschärfen.

(F) Es gilt $Du(\Phi(x_0)) = 0$.

(G) In y_1 verschwindet die Ableitung von u.

- Nehmen wir zusätzlich $k = 1$ an, d. h. dass die Kodimension eins ist. Dann können wir durch eine zusätzliche orthogonale Transformation in der Definitionsmenge von u in (F) und (G) erreichen, dass die Hessische D^2u in dem x_0 entsprechenden Punkt diagonal ist.
- Ebensolche Beziehungen zwischen Graphen, Niveauflächen, Untermannigfaltigkeiten, Einbettungen und Immersionen gibt es, wenn die betrachteten Objekte zusätzlich von der Zeit abhängen.

Beweis.

(F) Differenzieren wir die Definition von u, so erhalten wir

$$\begin{aligned} Du(\Phi(x_0))\langle y\rangle &= \pi_2 \circ R \circ DX\left((\Phi|_{\Omega_0})^{-1}(\Phi(x_0))\right)\left\langle D(\Phi|_{\Omega_0})^{-1}(\Phi(x_0))\langle y\rangle\right\rangle \\ &= \pi_2 \circ R \circ DX(x_0)\left\langle D(\Phi|_{\Omega_0})^{-1}(\Phi(x_0))\langle y\rangle\right\rangle \end{aligned}$$

für $y \in \mathbb{R}^n$. Wir haben R so gewählt, dass Du verschwindet.

(G) Für alle $y \in \Omega_y$ gilt $(f \circ T)(y, u(y)) = 0$. Dies differenzieren wir und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= D(f \circ T)(y_1, u(y_1))\langle z, Du(y_1)\langle z\rangle\rangle \\ &= D_1(f \circ T)(y_1, u(y_1))\langle z\rangle + D_2(f \circ T)(y_1, u(y_1))\langle Du(y_1)\langle z\rangle\rangle \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{R}^n$. Wir haben T so gewählt, dass $D_1(f \circ T)$ im Punkt $(y_1, u(y_1)) = (y_1, z_1)$ verschwindet und $D_2(f \circ T)$ invertierbar ist. Somit erhalten wir $Du(y_1) = 0$.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Sei $y_0 \in \Omega$. Wir möchten eine Rotation $R \in O(n)$ finden, so dass $D^2(u \circ R)\left(R^{-1}(y_0)\right)$ diagonal ist. Die Bilinearform $D^2u(y_0) = (u_{ij}(y_0))_{1\le i,j\le n}$ ist symmetrisch. Somit gibt es $R = \left(R^i_j\right)_{1\le i,j\le n} \in O(n)$, so dass $\left(u_{ij}(y_0)R^i_k R^j_l\right)_{1\le k,l\le n}$ diagonal ist, wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzt haben. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$(u \circ R)_k(y) = u_i(R(y))R^i_k$$

und

$$(u \circ R)_{kl}(y) = u_{ij}(R(y))R^i_k R^j_l.$$

Dies liefert unsere Behauptung.

- Diesen Beweis überlassen wir dem Leser. □

2.3. **Tangentialraum.** Unsere unterschiedlichen Herangehensweisen bei der Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten im Euklidischen erfordern verschiedene Definitionen für Tangentialvektoren.

Definition 2.3.1 (Tangentialvektor)**.**

(i) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^r-Untermannigfaltigkeit und sei (U, φ) eine zugehörige Karte. Dann heißt ein Vektor $T \in \mathbb{R}^{n+k}$ ein **Tangentialvektor** oder tangential an M im Punkt $x_0 \in M \cap U$, falls $D\varphi(x_0)\langle T\rangle \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ gilt. Wir schreiben $T \in T_{x_0}M$ und nennen $T_{x_0}M$ den **Tangentialraum** in x_0 an M.

(ii) Eine Funktion $T\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $T(x) \in T_xM$ für alle $x \in M$ heißt ein **tangentiales Vektorfeld**.

(iii) Sei $M := f^{-1}(\{0\}) \subset U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Niveaufläche. Dann heißt $T \in \mathbb{R}^{n+k}$ im Punkt $x_0 \in M$ tangential zu M, falls $Df(x_0)\langle T\rangle = 0$ gilt. Die Menge aller Tangentialvektoren in $x_0 \in M$ heißt Tangentialraum. Eine Abbildung $T\colon M \to \mathbb{R}^{n+k}$ heißt tangentiales Vektorfeld an M, falls $T(x)$ in jedem Punkt $x \in M$ tangential zu M ist.

(iv) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion. Dann heißt $T \in \mathbb{R}^{n+k}$ tangential zu X im Punkt $z_0 \in \Omega$, falls $T \in \operatorname{im} DX(z_0)$ gilt. Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt $z_0 \in \Omega$ heißt Tangentialraum. Eine Abbildung $T\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ heißt tangentiales Vektorfeld an X, falls $T(z)$ in jedem Punkt $z \in \Omega$ tangential zu X ist.

Bemerkung 2.3.2.

(i) Der Tangentialraum ist in allen diesen Definitionen stets ein Unterraum.

(ii) In der Definition eines Tangentialvektors für eine Untermannigfaltigkeit ist die Bedingung $D\varphi(x_0)\langle T\rangle \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ äquivalent zu $0 = \pi_2 \circ D\varphi(x_0)\langle T\rangle$, wobei $\pi_2\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die zweite Komponente ist.

Bemerkung 2.3.3. Angenommen, φ, f und X beschreiben lokal dieselbe Untermannigfaltigkeit, Niveaufläche oder Hyperfläche in dem Sinn, dass $x_0 \in \operatorname{im} X$, $f(x_0) = 0$ und $\pi_2 \circ \varphi(x_0) = 0$ für $x_0 \in U$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ äquivalent sind. Wir möchten nun unsere verschiedenen Definitionen eines Tangentialvektors vergleichen.

(i) **Niveaufläche und Immersion:** Es folgt $f \circ X(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und somit $\operatorname{im} DX(x) \subset \ker Df|_{X(x)}$. Da $\dim \operatorname{im} DX(x) = n = \dim \ker Df|_{X(x)}$ gilt, stimmen unsere Definitionen eines Tangentialvektors überein.

(ii) **Untermannigfaltigkeit und Immersion:** Wir differenzieren $\pi_2 \circ \varphi \circ X = 0$ und erhalten

$$\pi_2 \circ D\varphi(X(x))\langle DX(x)\langle\cdot\rangle\rangle = 0.$$

Hieraus schließen wir, dass $\operatorname{im} DX(x) \subset \ker \pi_2 \circ D\varphi(X(x))$ gilt. Wiederum sind beide Mengen n-dimensionale Unterräume. Somit stimmen sie überein.

(iii) Wir möchten aber darauf hinweisen, dass tangentiale Vektorfelder für Untermannigfaltigkeiten und Niveauflächen auf $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, jedoch für Immersionen auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind.

(iv) Die Vektoren $\frac{\partial X}{\partial x^i}(x_0)$ bilden eine Basis von $T_{x_0}M$.

2.4. **Differenzierbarkeit und Tangentialraum (abstrakter).** In diesem Kapitel behandeln wir zwei Konzepte für Untermannigfaltigkeiten, die wir später ganz analog für abstrakte Mannigfaltigkeiten verwenden werden.

Da Untermannigfaltigkeiten nicht linear zu sein brauchen, ist es nicht klar, wie man Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten differenzieren kann.

Definition 2.4.1 (Differenzierbare Funktionen)**.** Seien $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ und $N^n \subset \mathbb{R}^{n+l}$ zwei C^r-Untermannigfaltigkeiten mit $n, m, k, l \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Vorbereitung: Seien $\pi_m^{m+k}\colon \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^m$ und $\pi_n^{n+l}\colon \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^n$ die Projektionen auf die jeweils ersten m bzw. n Komponenten. Für Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N wollen wir in dieser Definition Abbildungen $\Phi\colon M \cap U \to \pi_m^{m+k}(\varphi(M \cap U)) \subset \mathbb{R}^m$ und $\Psi\colon N \cap V \to \pi_n^{n+l}(\psi(N \cap V)) \subset \mathbb{R}^n$ benutzen, die durch

$$\Phi(x) := \pi_m^{m+k} \circ \varphi(x) \quad \text{und} \quad \Psi(y) := \pi_n^{n+l} \circ \psi(y)$$

für $x \in M \cap U$ und $y \in N \cap V$ definiert sind. Es gelten also $\varphi(x) = (\Phi(x), 0)$ und $\psi(y) = (\Psi(y), 0)$ für alle $x \in M \cap U$ und alle $y \in N \cap V$.

(ii) Eine Funktion $f\colon M \to N$ heißt von der Klasse C^r, falls es für jedes $x \in M$ eine Karte (U, φ) von M mit $x \in U$ und eine Karte (V, ψ) von N mit $f(U \cap M) \subset V$ gibt, so dass für die zugehörigen oben definierten Abbildungen Φ und Ψ die Verkettung

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}\colon \Phi(U \cap M) \to \mathbb{R}^n$$

von der Klasse C^r ist. In dieser Situation, schreiben wir $f \in C^r(M, N)$ oder $f \in C^r$.

(iii) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt **Diffeomorphismus**, falls f von der Klasse C^1 ist und eine Inverse von der Klasse C^1 besitzt.

(iv) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt ein C^r-Diffeomorphism, falls f von der Klasse C^r ist und f ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung 2.4.2.

(i) Im Falle, dass $M \subset \mathbb{R}^m$ offen ist und $N = \mathbb{R}^n$ gilt, können wir die Inklusionsabbildungen $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^m$ und $\psi = \mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verwenden und erhalten wieder die klassische Definition von Differenzierbarkeit.

(ii) Jede Funktion $f \in C^r(M, N)$ mit $r \geq 1$ ist als Funktion zwischen den topologischen Räumen M und N mit der induzierten Topologie stetig: Die Funktionen φ und ψ^{-1} sind differenzierbar. Hieraus folgt, dass die zugehörigen Funktionen Φ und Ψ^{-1} stetig sind. Somit ist auch

$$f = \Psi^{-1} \circ \Psi \circ f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi$$

stetig.

(iii) Unsere Definition 2.4.1 hätten wir auch im Falle $r = 0$ verwenden können. Diese Definition ist jedoch äquivalent zur Stetigkeit von f zwischen M und N als topologischen Räumen. Dies folgt wie in (ii).

(iv) Da f stetig ist, gibt es solche Karten: Sei $x \in M$. Dann fixieren wir eine Karte (V, ψ) für N mit $f(x) \in V$. Da V offen ist, finden wir $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Nun betrachten wir eine Karte (U, φ) für M mit $x \in U$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$ und

$$f(B_\delta(x) \cap M) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V.$$

Somit sind $(B_\delta(x), \varphi|_{B_\delta(x)})$ und (V, ψ) Karten mit der Eigenschaft, dass $f(B_\delta(x) \cap M) \subset V$, wie in Definition 2.4.1 gefordert, gilt.

(v) Seien (U, φ), $\big(\tilde{U}, \tilde{\varphi}\big)$, (V, ψ) und $\big(\tilde{V}, \tilde{\psi}\big)$ Karten von M, M, N und N, mit $f(U) \subset V$ und $f\big(\tilde{U}\big) \subset \tilde{V}$. Dann folgt

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(y) = \big(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}\big) \circ \big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big) \circ \big(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}\big)(y)$$

für alle $y \in \tilde{\varphi}\big(U \cap \tilde{U}\big)$. Als Kompositionen von Diffeomorphismen sind

$$\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}\colon \tilde{\varphi}\big(U \cap \tilde{U}\big) \to \varphi\big(U \cap \tilde{U}\big)$$

und

$$\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}\colon \psi\big(V \cap \tilde{V}\big) \to \tilde{\psi}\big(V \cap \tilde{V}\big),$$

wiederum Diffeomorphismen. Ebenso als Einschränkungen auch

$$\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1}\colon \tilde{\Phi}\left(\tilde{U} \cap U\right) \to \Phi\left(\tilde{U} \cap U\right)$$

und

$$\Psi \circ \tilde{\Psi}^{-1}\colon \tilde{\Psi}\left(\tilde{V} \cap V\right) \to \Psi\left(\tilde{V} \cap V\right).$$

Somit hängt die Definition der Differenzierbarkeit nicht von der speziellen Kartenwahl ab.

Die folgende Definition liefert für immersierte Flächen X wieder $\operatorname{im} DX$ (kleine Übung oder Folgerung aus der Bemerkung weiter unten).

Definition 2.4.3 (Tangentialraum)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$. Dann heißt $T \in \mathbb{R}^{n+k}$ Tangentialvektor in $p \in M$, falls es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = T$ gibt. Die Menge aller Tangentialvektoren in p bezeichnen wir mit T_pM. Man schreibt auch (p, T) für den Tangentialvektor.

Bemerkung 2.4.4. Definition 2.4.3 liefert dasselbe Ergebnis wie Definition 2.3.1.

Beweis.

(i) Sei zunächst T ein Tangentialvektor in $x_0 \in M$ gemäß Definition 2.4.3. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = V$. Sei (U, φ) eine Karte mit $x_0 \in U$. Falls nötig verkleinern wir $\varepsilon > 0$ so, dass $\operatorname{im}\gamma \subset U$ gilt. Wegen $\gamma(t) \in M$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ erhalten wir

$$\varphi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und somit nach Kettenregel

$$D\varphi(\gamma(0))\langle\gamma'(0)\rangle \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

wie behauptet.

(ii) Ist umgekehrt $T \in T_{x_0}M$ ein Tangentialvektor wie in Definition 2.3.1. Dann gilt in der dortigen Notation $D\varphi(x_0)\langle T\rangle \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Wir definieren nun die Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+k}$ durch

$$\gamma(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + t \cdot D\varphi(x_0)\langle T\rangle),$$

wobei wir $\varepsilon > 0$ klein genug wählen, so dass $\varphi(x_0) + t \cdot D\varphi(x_0\langle T\rangle \in \varphi(U)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt. Dann ist γ wohldefiniert. Wegen $\varphi(x_0), D\varphi(x_0)\langle T\rangle \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ ist $\varphi(x_0) + t \cdot D\varphi(x_0)\langle T\rangle \in \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \varphi(U \cap M)$. Somit gilt $\gamma(t) \in M$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es ist klar, dass $\gamma(0) = x_0$ gilt. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\gamma'(0) &= \frac{d}{dt}\gamma(t)\bigg|_{t=0} \\
&= D\varphi^{-1}(\varphi(x_0))\langle D\varphi(x_0)\langle T\rangle\rangle \\
&= D\left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)(x_0)\langle T\rangle \\
&= D(\operatorname{id}|_U)(x_0)\langle T\rangle \\
&= T.
\end{aligned}$$

Daher gibt es eine Kurve γ mit Bild in M, die belegt, dass T ein Tangentialvektor in x_0 an M ist. □

3. Geometrie und Kümmung von Hyperflächen

3.1. Normale und Metrik.

Definition 3.1.1 (Normale)**.** Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Eine (Einheits-)**Normale** an X ist eine stetige Abbildung $\nu\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

(i) $|\nu(x)| = 1$ und
(ii) $\left\langle \nu(x), \frac{\partial X}{\partial x^i}(x)\right\rangle = 0$

für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \le i \le n$.

Bemerkung 3.1.2.

(i) Ist ν eine Normale an X, so ist auch $-\nu$ eine Normale an X. Ist Ω zusammenhängend, so ist ν eindeutig bestimmt, wenn wir $\nu(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$ vorgeben.

(ii) Wegen $|\nu(x)| = 1$ für alle $x \in \Omega$, schreiben wir auch $\nu\colon \Omega \to \mathbb{S}^n$.

(iii) Die Normale des Graphen einer Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge ist, ist als Normale der Immersion $X(x) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ u(x) \end{smallmatrix}\right)$ definiert. Wir vereinbaren hier die Konvention, dass wir stets die nach unten weisende Normale verwenden, d. h. die Normale ν mit $\langle \nu(x), e_{n+1} \rangle < 0$ für alle $x \in \Omega$.

(iv) Für eine Niveauhyperfläche oder Untermannigfaltigkeit M der Kodimension eins ist eine Normale eine stetige Funktion $\nu\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass, wenn M lokal gleich $X(\Omega)$ für eine Immersion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist, $x \mapsto \nu(X(x))$ eine Normale für diese Immersion ist.

Für eine Niveaufläche existiert stets eine Normale, siehe Bemerkung 3.1.3. Ein Möbiusband ist ein Beispiel für eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension eins, die keine Normale besitzt.

(v) Eine glatte geschlossene zusammenhängende Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt eine Normale [10] und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten [8]. Genau eine dieser Zusammenhangskomponenten ist unbeschränkt. In dieser Situation werden wir der Konvention folgen, dass wir stets die nach außen weisende Normale verwenden, d. h. die Normale, so dass für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, $X(x) + \varepsilon\nu(x)$ für alle $x \in M$ zur unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ gehört.

(vi) Lokal um einen Punkt $x_0 \in \Omega$ existiert stets eine stetige Normale. Dazu benutze man Gram-Schmidt-Orthonormalisierung. Für eine Immersion erhält man auch stets eine globale Normale indem man ν so wählt, dass

$$\det\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(x), \nu(x)\right) > 0$$

für alle $x \in \Omega$ gilt.

(vii) Der Vektor $\nu(x)$ heißt (Einheits-)Normale an X im Punkt x. Wir werden auch sagen, dass $\nu(x)$ eine (Einheits-)Normale an X im Punkt $X(x)$ ist.

(viii) Ein Vektor $T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann an $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ in $x_0 \in \Omega$ tangential, wenn $\langle T, \nu(x_0) \rangle = 0$ gilt. Den Beweis lassen wir als Übung.

Bemerkung 3.1.3.

(i) Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1. Dann ist die nach unten weisende Normale von $\operatorname{graph} u$ durch

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \begin{pmatrix} \nabla u(x) \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(ii) Sei $f^{-1}(\{0\})$ eine n-dimensionale Niveaufläche in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$\nu(x) = \pm \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$$

eine Normale an $f^{-1}(\{0\})$.

(iii) Sei $f^{-1}(\{0\})$ eine n-dimensionale Niveaufläche in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt für jede Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(\{0\})$

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Beweis.

(i) Für $X(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$ gilt

$$\frac{\partial X}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} e_i \\ \frac{\partial u}{\partial x^i} \end{pmatrix},$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

(ii) Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Parametrisierung von $f^{-1}(\{0\})$. Dann gilt $f(X(x)) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Mit der Kettenregel erhalten wir daraus

$$0 = Df(X(x)) \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}(x) \right\rangle = \left\langle \nabla f(X(x)), \frac{\partial X}{\partial x^i}(x) \right\rangle.$$

Klar ist, dass ν die Länge 1 hat.

(iii) Übung. □

Bei einer Immersion ist jedem Punkt ein Skalarprodukt zugeordnet. Historisch bedingt wird das Metrik genannt.

Definition 3.1.4 (Metrik)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion. Dann ist die **(induzierte) Metrik** von X eine stetige Abbildung $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Komponenten $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$, die durch

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}(x), \frac{\partial X}{\partial x^j}(x) \right\rangle$$

definiert ist.

Lemma 3.1.5. *Die Metrik einer immersierten Hyperfläche $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ ist*

(i) symmetrisch, d. h. es gilt

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$$

für alle $1 \le i, j \le n$ und alle $x \in \Omega$, und

(ii) positiv definit, d. h. es gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\xi^i\xi^j > 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq 0$ und alle $x \in \Omega$.

Beweis.

(i) Die Symmetrie folgt direkt aus der Symmetrie des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^{n+k}$.

(ii) Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq 0$ und $x \in \Omega$. Nach Definition von g erhalten wir

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\xi^i\xi^j = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x^i}(x)\xi^i, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x^j}(x)\xi^j \right\rangle.$$

Da X eine Immersion ist, hat $DX(x)$ Rang n und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x^i}(x)\xi^i \neq 0.$$

Da das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+k}$ positiv definit ist, erhalten wir unsere Behauptung. □

Da g_{ij} positiv definit ist, können wir eine Inverse definieren.

Definition 3.1.6. Sei $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine nicht-degenerierte Bilinearform. Dann heißt die Bilinearform $(g^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ Inverse von $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, falls

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$$

für all $1 \leq i, k \leq n$ gilt.

Notation 3.1.7.

(i) Wir benutzen Indices für partielle Ableitungen, also beispielsweise

$$u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad X_i = \frac{\partial X}{\partial x^i}.$$

(ii) Kleine lateinische Indices laufen von 1 bis n und beziehen sich auf Größen auf der n-dimensionalen Hyperfläche.

(iii) Kleine griechische Indices laufen von 1 bis $n+1$ und beziehen sich auf Größen im umgebenden Euklidischen Raum.

(iv) Wir benutzen die Einsteinsche Summenkonvention. Dies bedeutet, dass wir in einem Term, in dem ein Buchstabe einmal als oberer und einmal als unterer Index ohne explizites Summenzeichen auftaucht, im Falle von lateinischen Indices von 1 bis n und im Falle griechischer Indices von 1 bis $n+1$ summieren.

(v) Wir benutzen Koordinaten $x = (x^i)_{1\leq i\leq n}$ und $y = (y^\alpha)_{1\leq \alpha\leq n+1}$ mit oberen Indices für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{n+1}$, so wie wir dies weiter oben bereits gemacht haben.

Bemerkung 3.1.8.

(i) Das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ nennen wir auch Euklidische Metrik und bezeichnen es mit

$$(\delta_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq n+1}.$$

Für seine Inverse schreiben wir $(\delta^{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq n+1}$.

Auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir diese Skalarprodukt mit $(\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ und seine Inverse mit $\left(\delta^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

(ii) $\star$ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Ist $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion, so erhalten wir analog zur Definition 3.1.4 eine Metrik $\bar{g} = (\bar{g}_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha\beta\leq n+1}$, die durch

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(x) = \langle \psi_\alpha(x), \psi_\beta(x)\rangle$$

gegeben ist. Sie heißt Euklidische Metric in der ψ-Parametrisierung oder in den zu ψ assoziierten Koordinaten. Hier werden wir jedoch in dieser Situation nur starre Bewegungen ψ, also Hintereinanderausführungen von orthogonalen Abbildungen und Translationen, benutzen. Daher erhalten wir stets $\bar{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

(iii) Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann setzen wir $u^i := \delta^{ij}u_j$. Wir erhalten $Du = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ und $\nabla u = \left(u^i\right)_{1\leq i\leq n}$. Den Gradienten ∇u werden wir als Spalte notieren,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \dots \\ u^n \end{pmatrix},$$

während die Ableitung Du einer Zeile entspricht:

$$Du = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

Größen mit oberen Indices heißen kontravariant, während Größen mit unteren Indices kovariant heißen. Die Metrik ist zweifach kovariant. Daher sagen wir auch, dass die Metrik ein $(0,2)$-Tensor ist.

(iv) Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass die Linksinverse einer regulären quadratischen Matrix mit ihrer Rechtsinversen übereinstimmt. Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i.$$

(v) In der Literatur werden kovariante Ableitungen mit $X_{;ij}$ oder, falls klar ist, dass es sich um eine kovariante Ableitung handelt, mit X_{ij} bezeichnet. Dann benutzt man $X_{,ij}$ statt X_{ij} um zu betonen, dass es sich um eine partielle Ableitung handelt.

Beispiel 3.1.9. Unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention wird die Definition der induzierten Metrik zu

$$g_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta.$$

Wir werden sehen, dass wir mit Hilfe der Metrik die Länge einer Kurve auf einer Immersion messen können. Erinnerung:

Definition 3.1.10 (Länge)**.** Sei $I = [a, b]$ ein Interval und sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist die **Länge** von α, $L(\alpha)$, durch

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

definiert, wobei das Integral als Summe von Integralen über die Intervalle der Partition von I, so dass α dort differenzierbar ist, definiert ist.

Lemma 3.1.11. *Sei $I = [a, b]$ ein Interval, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei $\gamma\colon I \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve und sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion.*

(i) Dann gilt

$$L(X \circ \gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\, (\gamma^i)'(t)\, (\gamma^j)'(t)}\, dt. \tag{3.1.1}$$

(ii) Die Metrik ist die eindeutig bestimmte symmetrische stetige Abbildung

$$g\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

so dass (3.1.1) *für jede Kurve γ gilt.*

Beweis.

(i) Eine direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} |(X \circ \gamma)'|^2(t) &= \left| X_i(\gamma(t)) \left(\gamma^i\right)'(t) \right|^2 \\ &= \left(\gamma^i\right)'(t) X_i^\alpha(\gamma(t)) \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta(\gamma(t)) \left(\gamma^j\right)'(t) \\ &= \left(\gamma^i\right)'(t) g_{ij}(\gamma(t)) \left(\gamma^j\right)'(t). \end{aligned}$$

Hieraus folgt (3.1.1).

(ii) Benutzen wir kurze Kurven γ und die Stetigkeit der Metrik g_{ij}, so erhalten wir für jede symmetrische stetige Abbildung $\tilde{g}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, die (3.1.1) erfüllt, wenn wir g_{ij} durch $\tilde{g}_{ij}$ ersetzen, dass die Werte der entsprechenden Quadratwurzeln übereinstimmen. Eine symmetrische Bilinearform über $\mathbb{R}$ ist jedoch eindeutig durch die assoziierte quadratische Form bestimmt. Hieraus folgt die behauptete Eindeutigkeit. □

3.2. **Zweite Fundamentalform.** Mit der zweiten Fundamentalform messen wir, wie gekrümmt eine Hyperfläche ist.

Bei einer immersierten Hyperfläche $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ nehmen wir nachfolgend stets stillschweigend an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ gilt.

Definition 3.2.1 (Zweite Fundamentalform)**.** Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche mit Normale ν. Dann ist die **zweite Fundamentalform** $A\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ durch

$$h_{ij}(x) = -\left\langle X_{ij}(x), \nu(x)\right\rangle$$

definiert.

Bemerkung 3.2.2.

(i) Die zweite Fundamentalform mit A und ihre Komponenten mit h_{ij} zu bezeichnen, ist eine historisch gewachsene Konvention.

(ii) Die zweite Fundamentalform ist symmetrisch:

$$h_{ij} = h_{ji}.$$

(iii) Später werden wir die Indices der zweiten Fundamentalform mit Hilfe der Metrik heben und senken. Dann gelten beispielsweise

$$h_i^j = h_{ik}g^{kj} \quad \text{und} \quad h_{ij} = h_i^k g_{kj},$$

wobei wir bei h_j^i aufgrund der Symmetrieeigenschaften nicht auf die Reihenfolge achten müssen.

Definition 3.2.3 (Hauptkrümmungen)**.**

(i) Eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert der symmetrischen Bilinearform

$$(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$$

bezüglich einer anderen symmetrischen Bilinearform $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$, falls es einen Eigenvektor $\xi = \left(\xi^i\right)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq 0$ gibt, so dass

$$h_{ij}\xi^j = \lambda \cdot g_{ij}\xi^j$$

für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(ii) Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche mit Metrik $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und zweiter Fundamentalform $(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ zu einer fest gewählten Normalen $\nu\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dann sind die **Hauptkrümmungen** $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $(h_{ij})_{i,j}$ bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$, wobei wir die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit gegebenenfalls mehrfach aufführen.

Bemerkung 3.2.4. $\star$

(i) Sobald wir zukünftig von den Hauptkrümmungen einer Immersion sprechen werden, so wollen wir stillschweigend annehmen, dass wir eine feste Normale gewählt haben und damit das Vorzeichen der zweiten Fundamentalform festgelegt ist.

(ii) Die Hauptkrümmungen in einem festen Punkt hängen nur vom Verhalten der Hyperfläche in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Daher können und werden wir die Hauptkrümmungen von Hyperflächen wie in Proposition 2.2.1 mit Hilfe lokaler Parametrisierungen berechnen.

(iii) Die Hauptkrümmungen sind nur bis auf Permutationen eindeutig bestimmt, da sie als Eigenwerte definiert sind.

Das folgende Lemma beschreibt, was wir meinen, wenn wir sagen, dass die Hauptkrümmungen geometrisch sind.

Lemma 3.2.5. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche mit Metrik $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und zweiter Fundamentalform $(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ bezüglich der Normalen ν. Sei $\hat\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\psi = \left(\psi^k\right)_{1\le k\le n} : \hat\Omega \to \Omega$ ein Diffeomorphismus. Sei $R = \left(R^\alpha_\beta\right)_{1\le\alpha,\beta\le n+1} \in O(n+1)$ eine orthogonale Matrix und sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Define $\hat X\colon \hat\Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch*

$$\hat X(x) = RX(\psi(x)) + a.$$

Dann stimmen die Hauptkrümmungen von $\hat X$ bezüglich der Normalen $\hat\nu = R\nu \circ \psi$ in $x \in \hat\Omega$ und X in $\psi(x)$ und ihre Vielfachheiten überein.

Beweis. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}
\hat X^\alpha_i(x) &= R^\alpha_\beta X^\beta_k(\psi(x))\psi^k_i(x),\\
\hat X^\alpha_{ij}(x) &= R^\alpha_\beta X^\beta_{kl}(\psi(x))\psi^k_i(x)\psi^l_j(x) + R^\alpha_\beta X^\beta_k(\psi(x))\psi^k_{ij}(x).
\end{aligned}$$

Da R orthogonal ist, folgt $R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\varepsilon = \delta_{\beta\varepsilon}$. Somit erhalten wir, dass $\hat\nu = R\nu \circ \psi$ eine Normale an $\hat X$ ist; es gelten nämlich

$$\begin{aligned}
\left\langle R\nu(\psi(x)), \hat X_i(x)\right\rangle &= \nu^\alpha(\psi(x)) R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\zeta X^\zeta_k(\psi(x))\psi^k_i(x)\\
&= \nu^\alpha(\psi(x))\delta_{\alpha\zeta} X^\zeta_k(\psi(qx))\psi^k_i(x)\\
&= \langle \nu, X_k\rangle(\psi(x))\psi^k_i(x) = 0
\end{aligned}$$

und

$$\langle R\nu, R\nu\rangle = \langle \nu,\nu\rangle = 1.$$

Für die Metrik $(\hat g_{ij})_{i,j}$ und die zweite Fundamentalform $\left(\hat h_{ij}\right)_{i,j}$ von $\hat X$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\hat g_{ij}(x) &= \left\langle \hat X_i(x), \hat X_j(x)\right\rangle\\
&= \psi^k_i(x) X^\alpha_k(\psi(x)) R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\varepsilon X^\varepsilon_l(\psi(x))\psi^l_j(x)\\
&= \psi^k_i(x) X^\alpha_k(\psi(x))\delta_{\alpha\varepsilon} X^\varepsilon_l(\psi(x))\psi^l_j(x)\\
&= \psi^k_i(x) g_{kl}(\psi(x))\psi^l_j(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\hat h_{ij}(x) &= -\left\langle \hat X_{ij}(x), \hat\nu(x)\right\rangle\\
&= -\nu^\alpha(\psi(x)) R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\varepsilon X^\varepsilon_{kl}(\psi(x))\psi^k_i(x)\psi^l_j(x)\\
&\quad -\nu^\alpha(\psi(x)) R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\varepsilon X^\varepsilon_k(\psi(x))\psi^k_{ij}(x)\\
&= -\nu^\alpha(\psi(x))\delta_{\alpha\varepsilon} X^\varepsilon_{kl}(\psi(x))\psi^k_i(x)\psi^l_j(x) - \nu^\alpha(\psi(x))\delta_{\alpha\varepsilon} X^\varepsilon_k(\psi(x))\psi^k_{ij}(x)\\
&= -\langle \nu, X_{kl}\rangle(\psi(x))\psi^k_i(x)\psi^l_j(x) - \langle \nu, X_k\rangle(\psi(x))\psi^k_{ij}(x)\\
&= h_{kl}(\psi(x))\psi^k_i(x)\psi^l_j(x) + 0.
\end{aligned}$$

Da ψ ein Diffeomorphism ist, ist $\left(\psi^k_i(x)\right)_{1\le i,k\le n}$ für beliebige $x \in \hat\Omega$ invertierbar und unsere Behauptung folgt aus dem nachfolgenden Lemma 3.2.7. □

Um später direkt darauf verweisen zu können, notieren wir ein Resultat aus dem Beweis von Lemma 3.2.5 nochmals separat.

Lemma 3.2.6. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche C^2 mit Metrik $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und zweiter Fundamentalform $(h_{ij})_{1\le i,j\le n}$ bezüglich der Normalen ν. Sei $\hat\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\psi\colon \hat\Omega \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, $R \in O(n+1)$ und sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Definiere $\hat X := \hat\Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch $\hat X(x) := R \circ X \circ \psi(x) + a$. Dann erfüllen die Metrik $(\hat g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und die zweite Fundamentalform $\left(\hat h_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ von $\hat X$*

$$\hat g_{ij}(x) = \psi_i^k(x) g_{kl}(\psi(x)) \psi_j^l(x)$$

und

$$\hat h_{ij}(x) = \psi_i^k(x) h_{kl}(\psi(x)) \psi_j^l(x)$$

für beliebige $x \in \hat\Omega$ und $1 \le i,j \le n$.

Lemma 3.2.7. *Seien $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und $(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ symmetrische Bilinearformen. Sei $\left(d_j^i\right)_{1\le i,j\le n}$ invertierbar. Dann stimmen die Eigenwerte von $(a_{ij})_{i,j}$ bezüglich $(b_{ij})_{i,j}$ und diejenigen von*

$$(\tilde a_{kl})_{1\le k,l\le n} \equiv \left(d_k^i a_{ij} d_l^j\right)_{1\le k,l\le n}$$

bezüglich $\left(\tilde b_{kl}\right)_{1\le k,l\le n} \equiv \left(d_k^i b_{ij} d_l^j\right)_{1\le k,l\le n}$ und ihre Vielfachheiten überein.

Beweis.

(i) Sei $\left(D_j^i\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Inverse von $\left(d_j^i\right)_{1\le i,j\le n}$. Somit gelten $d_k^i D_j^k = \delta_j^i$ und $d_i^k D_k^j = \delta_i^j$ für alle $1 \le i,j \le n$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $(a_{ij})_{i,j}$ bezüglich $(b_{ij})_{i,j}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor

$$a_{ij}\xi^j = \lambda b_{ij}\xi^j.$$

Wir erhalten

$$d_k^i a_{ij} d_l^j D_r^l \xi^r = \lambda d_k^i b_{ij} d_l^j D_r^l \xi^r.$$

Somit ist $\left(D_r^l \xi^r\right)_l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von $(\tilde a_{kl})_{k,l}$ bezüglich $\left(\tilde b_{kl}\right)_{k,l}$.

(ii) Gilt umgekehrt

$$\tilde a_{kl}\zeta^l = \lambda \tilde b_{kl}\zeta^l,$$

so multiplizieren wir das mit D_r^k und benutzen die Definitionen von $\tilde a_{ij}$ und $\tilde b_{ij}$ und $D_r^k d_k^i = \delta_r^i$ um hieraus für $\xi^j = d_l^j \zeta^l$ auf

$$a_{rj}\xi^j = D_r^k d_k^i a_{ij} d_l^j \zeta^l = D_r^k \tilde a_{kl}\zeta^l = \lambda D_r^k \tilde b_{kl}\zeta^l = \lambda D_r^k d_k^i b_{ij} d_l^j \zeta^l = \lambda b_{rj}\xi^j$$

zu schließen. Hieraus folgt die Behauptung. □

Lemma 3.2.8. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Dann gibt es, mit Vielfachheiten gezählt, in jedem Punkt genau n Hauptkrümmungen.*

Beweis. Die Metrik $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ist positiv definit und symmetrisch. Somit gibt es eine invertierbare Matrix $\left(d_j^i\right)_{1\le i,j\le n}$ mit $d_k^i g_{ij} d_l^j = \delta_{kl}$ für alle $1 \le k,l \le n$. Gemäß Lemma 3.2.7 genügt es zu zeigen, dass $\left(d_k^i h_{ij} d_l^j\right)_{k,l}$ bezüglich $(\delta_{kl})_{k,l}$ genau n Eigenwerte besitzt. Wenn wir die definierende Gleichung mit δ^{rk} multiplizieren, so sehen wir, dass sie zu

$$\delta^{rk} d_k^i h_{ij} d_l^j \xi^l = \lambda \delta^{rk}\delta_{kl}\xi^l = \lambda \xi^r$$

äquivalent ist. Nun ist aber $\left(\delta^{rk} d_k^i h_{ij} d_l^j\right)_{1\le r,l\le n}$ eine symmetrische Matrix. Daher folgt unsere Behauptung nun aus dem Resultat aus der Linearen Algebra, dass sich solche Matrizen vermöge orthogonaler Matrizen diagonalisieren lassen. □

Lemma 3.2.9. *Eigenvektoren von $(h_{ij})_{i,j}$ bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$ zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise bezüglich des Skalarproduktes $(g_{ij})_{i,j}$ orthogonal zueinander.*

Beweis. Angenommen, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sind verschieden und es gilt

$$h_{ij}\xi^j = \lambda g_{ij}\xi^j \quad \text{und} \quad h_{ij}\zeta^j = \mu g_{ij}\zeta^j.$$

Aufgrund der Symmetrie der Metrik und der zweiten Fundamentalform, erhalten wir daraus

$$\mu\xi^i g_{ij}\zeta^j = \xi^i h_{ij}\zeta^j = \lambda\xi^i g_{ij}\zeta^j.$$

Dies liefert die Behauptung. □

Bemerkung 3.2.10. Orthogonalität bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$ hängt wie folgt mit Orthogonalität bezüglich der Euklidischen Metrik zusammen: Aufgrund der Definition der induzierten Metrik sind die Vektoren $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ genau dann bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$ orthogonal zueinander, wenn $DX\langle\xi\rangle$ und $DX\langle\zeta\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der Euklidischen Metrik orthogonal zueinander sind.

Wie in der Linearen Algebra folgt hieraus

Korollar 3.2.11. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche und sei $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es genau n bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$ paarweise orthogonale Eigenvektoren von $(h_{ij})_{i,j}$ bezüglich $(g_{ij})_{i,j}$.*

Wenn wir die Eigenvektoren normalisieren und linear auf die Standardbasis abbilden, so erhalten wir

Lemma 3.2.12. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche. Sei $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es $R \in GL(n)$, so dass im Punkt $R^{-1}(x_0)$ die Metrik $(g_{ij})_{i,j}$ von $X \circ R$ zu $g_{ij} = \delta_{ij}$ wird und die zweite Fundamentalform diagonal ist.*

Alternativ zeigt man dies mit einem min-max-Ansatz. Siehe dazu Kapitel 3.4 sowie das Kapitel über Extremaleigenschaften der Eigenwerte aus [12] bzw. Kapitel B.

Lemma 3.2.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $u \in C^2(\Omega)$. Dann sind die Komponenten der Metrik und der zweiten Fundamentalform der Immersion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$ durch*

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + u_i(x)u_j(x), \\ g^{ij}(x) &= \delta^{ij} - \frac{u^i(x)u^j(x)}{1 + |\nabla u(x)|^2} \end{aligned}$$

und

$$h_{ij}(x) = \frac{u_{ij}(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}}$$

gegeben.

Beweis. Im Beweis lassen wir der Übersichtlichkeit halber das Argument x weg.

Unter Benutzung der nach unten weisenden Normalen aus Bemerkung 3.1.3 liefert eine direkte Rechnung

$$\begin{aligned} X_i &= \begin{pmatrix} e_i \\ u_i \end{pmatrix}, \\ X_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 \\ u_{ij} \end{pmatrix}, \\ g_{ij} &= \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} + u_i u_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\langle X_{ij}, \nu\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ u_{ij} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla u \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \end{aligned}$$

Eine weitere direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} g_{ij}g^{jk} &= (\delta_{ij} + u_i u_j)\left(\delta^{jk} - \frac{u^j u^k}{1+|\nabla u|^2}\right) \\ &= \delta_i^k + u_i u^k - \frac{u_i u^k}{1+|\nabla u|^2} - \frac{u_i u^k |\nabla u|^2}{1+|\nabla u|^2} = \delta_i^k \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Bemerkung 3.2.14. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval mit $0 \in I$ und sei $u \in C^2(I)$. Ein Ellipsoid können wir in der Form

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x - x_0, A(x - x_0)\rangle = 1\right\}$$

darstellen, wobei A eine symmetrische positiv definite Matrix ist. Dies erfordert fünf reelle Parameter. Daher können wir nicht erwarten, dass es ein *eindeutig* bestimmtes Ellipsoid gibt, so dass eine das Ellipsoid lokal als Graphen darstellende Funktion v die Bedingungen $u(0) = v(0)$, $Du(0) = Dv(0)$ und $D^2u(0) = D^2v(0)$ erfüllt.

Genauso können wir nicht erwarten, dass sich eine C^2-Hyperfläche mit nichtnegativen Hauptkrümmungen lokal optimal durch ein eindeutig bestimmtes Ellipsoid approximieren lässt.

Benutzen wir jedoch Kreise für die Approximation, so hängen deren Radien und die Hauptkrümmungen zusammen. Nach Korollar 3.2.11 finden wir paarweise orthogonale Eigenvektoren $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi_i = \left(\xi_i^k\right)_{1\le k\le n}$ der zweiten Fundamentalform $(h_{ij})_{i,j}$ bezüglich der induzierten Metrik $(g_{ij})_{i,j}$, die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gehören, wobei $\lambda_i = \frac{h_{kl}\xi_i^k\xi_i^l}{g_{kl}\xi_i^k\xi_i^l}$ gilt. Im nachfolgenden Lemma 3.2.15, werden wir sehen, dass das Bild von X in den durch ν und $DX\langle\xi_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, aufgespannten 2-dimensionalen Ebenen lokal optimal durch Kreise vom Radius $\frac{1}{\lambda_i}$ oder, im Falle $\lambda_i = 0$, durch Geraden approximiert wird.

Lemma 3.2.15. *Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Sei λ eine Hauptkrümmung im Punkt $x_0 \in \Omega$ und sei ξ ein Eigenvektor der zweiten Fundamentalform bezüglich der Metrik zum Eigenwert λ. Dann wird das Bild von X in der durch $\nu(x_0)$ und $DX(x_0)\langle\xi\rangle$ aufgespannten Ebene lokal um $X(x_0)$ optimal durch einen Kreis vom Radius $\frac{1}{|\lambda|}$ in dem Sinne approximiert, dass in einer lokalen graphischen Darstellung diejenigen Funktionen, die das Bild von X und den Kreis darstellen, im betrachteten Punkt bis zur zweiten Ableitung übereinstimmen. Je nach Vorzeichen von λ liegt der Mittelpunkt des Kreises in Richtung $-\nu$ oder $+\nu$. Im Falle $\lambda = 0$ gilt diese Aussage für eine Geraden statt für einen Kreis.*

Beweis. Gemäß Lemma 3.2.5 können wir auf die Immersion X eine Bewegung anwenden und daher ohne Einschränkung $X(x_0) = 0$, $\nu(x_0) = -e_{n+1}$ und auch $DX(x_0)\langle\xi\rangle = e_1$ annehmen. Dann gibt es gemäß Proposition 2.2.1 eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ des Ursprungs, so dass sich X is lokal um $X(x_0)$ herum als Graph eine C^2-Funktion $u \colon U \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = 0$, $Du(0) = 0$ und diagonaler Hessischer darstellen läßt. Nach Lemma 3.2.13 erhalten wir weiterhin $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ und $u_{11}(0) = \lambda$. Dann ist $x^1 \mapsto u(x^1, 0, \dots, 0)$ die Funktion, deren Graph lokal mit dem Bild von X in der von $\nu(x_0)$ und $DX(x_0)\langle\xi\rangle$ aufgespannten Ebene übereinstimmt. Im Falle $\lambda = 0$

ist die Behauptung klar. Wir nehmen nun an, dass $\lambda > 0$ gilt und überlassen den analogen Fall $\lambda < 0$ dem Leser als Übung.

Wir definieren $r := \frac{1}{\lambda}$ und $\mathcal{C}\colon (-r, r) \to \mathbb{R}$ durch $\mathcal{C}(x) := r - \sqrt{r^2 - |x|^2}$. Dann ist $\operatorname{graph}\mathcal{C}$ ein Halbkreis vom Radius r und es gelten $\mathcal{C}(0) = 0$, $\mathcal{C}_x(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-|x|^2}}$, $\mathcal{C}_x(0) = 0$ und

$$\mathcal{C}_{xx}(0) = \frac{1}{\sqrt{r^2}} = \frac{1}{r} = \lambda = u_{11}(0)$$

wie behauptet. □

3.3. **Krümmungsfunktionen.** Symmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen sind wohldefiniert. Sie heißen **Krümmungsfunktionen**. Wir definieren

Definition 3.3.1. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Dann definieren wir die **mittlere Krümmung** $H\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) := \lambda_1(x) + \ldots + \lambda_n(x)$$

und die **Gaußkrümmung** $K\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$K(x) := \lambda_1(x) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(x).$$

Die (quadrierte) Norm der zweiten Fundamentalform definieren wir durch

$$|A|^2 := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Schließlich definieren wir die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmung für $1 \le k \le n$ durch

$$S_k((\lambda_i)_{1\le i\le n}) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_n}.$$

Bemerkung 3.3.2.

(i) Es gelten $H = S_1$ und $K = S_n$.
(ii) Wählt man $-\nu$ statt ν als Normale, so ändert sich das Vorzeichen von h_{ij} und H, das von $|A|^2$, S_2, S_4, … bleibt unverändert.

Lemma 3.3.3. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Dann gelten für die mittlere Krümmung H und die Gaußkrümmung K*

$$H = g^{ij}h_{ij} \quad \textit{und} \quad K = \frac{\det((h_{ij})_{i,j})}{\det((g_{ij})_{i,j})} \equiv \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}.$$

Beweis.

(i) Ohne Einschränkung dürfen wir $0 \in \Omega$ annehmen und die Behauptung nur im Punkt $x = 0$ beweisen.
(ii) Sei $R \in GL(n)$. Dann definieren wir $\hat{X} := X \circ R$ und bezeichnen die Metrik, die zweite Fundamentalform, die Hauptkrümmungen, die mittlere Krümmung und die Gaußkrümmung von $\hat{X}$ mit $(\hat{g}_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $\left(\hat{h}_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, $\left(\hat{\lambda}_i\right)_{1\le i\le n}$, $\hat{H}$ bzw. $\hat{K}$.
(iii) Nach Lemma 3.2.12 gibt es $R \in GL(n)$, so dass $\hat{g}_{ij}(0) = \delta_{ij}$ gilt und $\left(\hat{h}_{ij}(0)\right)_{1\le i,j\le n}$ diagonal ist.
(iv) Daher erhalten wir im Ursprung

$$\hat{g}^{ij}\hat{h}_{ij} = \hat{\lambda}_1 + \ldots + \hat{\lambda}_n = \hat{H} \quad \text{und} \quad \frac{\det \hat{h}_{ij}}{\det \hat{g}_{ij}} = \hat{\lambda}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{\lambda}_n = \hat{K}.$$

(v) In Lemma 3.2.5 haben wir bereits gezeigt, dass die Hauptkrümmungen von $\hat{X}$ und X im Ursprung übereinstimmen. Daher erhalten wir
$$\hat{H}(0) = H(0) \quad \text{und} \quad \hat{K}(0) = K(0).$$

(vi) Weiterhin gelten nach Lemma 3.2.6
$$\hat{g}_{ij}(x) = R_i^k g_{kl}(Rx) R_j^l \quad \text{und} \quad \hat{h}_{ij}(x) = R_i^k h_{kl}(Rx) R_j^l.$$
Nun ist es eine Übung in Linearer Algebra, zu zeigen, dass
$$\hat{g}^{ij}\hat{h}_{ij} = g^{ij}h_{ij} \quad \text{und} \quad \frac{\det \hat{h}_{ij}}{\det \hat{g}_{ij}} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}$$
gelten.

(vii) Somit erhalten wir aus den vorherigen Resultaten im Ursprung
$$H = \hat{H} = \hat{g}^{ij}\hat{h}_{ij} = g^{ij}h_{ij}$$
und, ganz analog dazu,
$$K = \hat{K} = \frac{\det \hat{h}_{ij}}{\det \hat{g}_{ij}} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}.$$
Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 3.3.4. Es gilt
$$|A|^2 = h_{ij} g^{jk} h_{kl} g^{li}$$
und die weiteren elementarsymmetrischen Funktionen lassen sich als Summen von Unterdeterminanten darstellen.

Beweis. Übung. □

Lemma 3.3.5. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Sei $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\psi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus. Sei $R \in O(n+1)$ eine orthogonale Matrix und sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Definiere $\hat{X}\colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch*
$$\hat{X}(x) = RX(\psi(x)) + a.$$
Dann erhalten wir für die mittlere Krümmung und für die Gaußkrümmung H, $\hat{H}$, K und $\hat{K}$ von X beziehungsweise $\hat{X}$
$$H \circ \psi = \hat{H} \quad \text{und} \quad K \circ \psi = \hat{K}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 3.2.5 oder, alternativ, aus Lemma 3.2.6 in Kombination mit Lemma 3.3.3. □

Lemma 3.3.6. *Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 und sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit*
$$X(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$$
die zugehörige Immersion. Dann gelten für die mittlere Krümmung und für die Gaußkrümmung von X
$$H = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right)$$
und
$$K = \frac{\det(u_{ij})}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n+2}{2}}}.$$
Weiterhin gilt
$$\det(g_{ij}) = 1 + |\nabla u|^2.$$

Beweis. Unter Verwendung von Lemma 3.2.13 und Lemma 3.3.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} H &= g^{ij} h_{ij} \\ &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|\nabla u|^2}\right) \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \\ &= \frac{\Delta u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{u_{ij} u^i u^j}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}} \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K &= \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} \\ &= \frac{\det(u_{ij})}{(1+|\nabla u|^2)^{n/2}} \cdot \frac{1}{1+|\nabla u|^2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir bereits unsere letzte Behauptung verwendet. Sie folgt aus der Beobachtung, dass $g_{ij}\xi^j = 1 \cdot \delta_{ij}\xi^j$ für alle Vektoren ξ orthogonal zu ∇u, d. h. Vektoren ξ mit $u_i \xi^i = 0$, gilt und dass weiterhin

$$g_{ij} u^j = \delta_{ij} u^j + u_i u_j u^j = \left(1 + |\nabla u|^2\right) \delta_{ij} u^j$$

gilt. □

Lemma 3.3.7 (Skalierungsverhalten)**.** *Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^1- oder C^2-Hyperfläche, je nachdem, wie dies für die entsprechenden Größen nötig ist. Sei $\mu > 0$. Definiere $\hat{X} := \mu \cdot X$. Dann skalieren die geometrischen Größen ν, g_{ij}, g^{ij}, h_{ij}, λ_i, H und K von X und $\hat{\nu}$, $\hat{g}_{ij}$, $\hat{g}^{ij}$, $\hat{h}_{ij}$, $\hat{\lambda}_i$, $\hat{H}$ und $\hat{K}$ von $\hat{X}$ wie folgt:*

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(x) &= \nu(x), \\ \hat{g}_{ij}(x) &= \mu^2 \cdot g_{ij}(x), \\ \hat{g}^{ij}(x) &= \frac{1}{\mu^2} g^{ij}(x), \\ \hat{h}_{ij}(x) &= \mu \cdot h_{ij}(x), \\ \hat{\lambda}_i(x) &= \frac{1}{\mu} \lambda_i(x), \\ \hat{H}(x) &= \frac{1}{\mu} H(x) \end{aligned}$$

und

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{\mu^n} K(x),$$

wobei wir die Hauptkrümmungen nach ihrer Größe ordnen.

Beweis.

(i) Aus $\hat{X}_i = \mu X_i$ schließen wir, dass $\hat{\nu}$ und $\hat{g}_{ij}$ sich wie behauptet verhalten. Das Skalierungsverhalten der Inversen der Metrik folgt aus dem der Metrik. Analog folgt aus $\hat{X}_{ij} = \mu X_{ij}$ das Skalierungsverhalten der zweiten Fundamentalform.

(ii) Für das Skalierungsverhalten der Hauptkrümmungen benutzen wir die definierende Gleichung $h_{ij}(x)\xi^j = \lambda(x)g_{ij}(x)\xi^j$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und erhalten

$$\hat{h}_{ij}\xi^j = \mu \cdot h_{ij}(x)\xi^j = \mu \cdot \lambda(x) \cdot g_{ij}(x)\xi^j = \frac{\lambda(x)}{\mu}\hat{g}_{ij}(x)\xi^j.$$

Daraus folgt das Skalierungsverhalten der Hauptkrümmungen.

(iii) Schließlich folgt das Skalierungsverhalten der mittleren Krümmung und der Gaußkrümmung aus dem der zweiten Fundamentalform und der Inversen der Metrik oder, alternativ, aus dem der Hauptkrümmungen. □

Als Vorbereitung für später zeigen wir

Lemma 3.3.8. *Die Ableitungen der Abbildung*

$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

sind wie folgt:

$$r_i(x) = \frac{x_i}{|x|}, \quad r_{ij}(x) = \frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right).$$

Beweis. Differenziere

$$r(x) = |x| = \left(x^k \delta_{kl} x^l\right)^{1/2}.$$ □

Beispiele 3.3.9.

(i) **Ebene:** Sei $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \mapsto Ax$, wobei $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ eine Matrix mit $\operatorname{rang} A = n$ ist, eine Einbettung einer Hyperebene. Dann gilt $X_{ij} \equiv 0$. Daher erhalten wir $h_{ij} = 0$, $\lambda_i = 0$ für alle $1 \le i, j \le n$, $H = 0$ und $K = 0$.

(ii) **Sphären:** Sei $R > 0$ und sei $u\colon B_R(0) \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = -\sqrt{R^2 - |x|^2}$. Dann ist $\operatorname{graph} u$ die untere Hemissphäre mit Radius R um den Ursprung. Mit direkter Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \frac{-x_i}{u(x)}, \\ u_{ij}(x) &= \frac{-\delta_{ij}}{u(x)} - \frac{x_i x_j}{u^3(x)}, \\ g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{u^2(x)} = |u(x)| u_{ij}(x), \\ h_{ij}(x) &= \frac{u_{ij}(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{u_{ij}(x)}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{u^2}}} = \frac{u_{ij}(x)}{\frac{1}{|u(x)|}\sqrt{R^2}} \\ &= \frac{|u(x)| u_{ij}(x)}{R} = \frac{1}{R} g_{ij}(x) \end{aligned}$$

und schließen, dass die Sphäre vom Radius R die Hauptkrümmungen $\lambda_i = \frac{1}{R}$, $1 \le i \le n$, besitzt. Es folgen $H = \frac{n}{R}$ und $K = \frac{1}{R^n}$.

Alternativ wäre es hier möglich gewesen, die Rechnungen für $R = 1$ durchzuführen und dann das Skalierungsverhalten, siehe Lemma 3.3.7, zu verwenden.

(iii) **Zylinder:** Sei $B_1^k(0)$ die k-dimensionale offene Kugel in $\mathbb{R}^k$, $1 \le k < n$, und sei $u\colon B_1^k(0) \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = -\sqrt{1 - |x|^2}$. Dann beschreibt $\operatorname{graph} u$ den unteren Teil eines Zylinders. Wir benutzen nun die Indices x^i und y^j um die zugehörigen partiellen Ableitungen zu bezeichnen und erhalten

$$u_{x^i}(x, y) = \frac{-x_i}{u(x, y)},$$

$$
\begin{aligned}
u_{y^i}(x,y) &= 0,\\
u_{x^ix^j}(x,y) &= -\frac{\delta_{ij}}{u(x)} - \frac{x_ix_j}{u^3(x)},\\
g_{ij}(x,y) &= \begin{pmatrix} \left(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{u^2(x,y)}\right)_{1\le i,j\le k} & (0)\\ (0) & (\delta_{kl})_{1\le k,l\le n-k}\end{pmatrix},\\
h_{ij}(x,y) &= \frac{1}{|u(x,y)|\sqrt{1+\frac{|x|^2}{u^2(x,y)}}} \begin{pmatrix} \left(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{u^2(x,y)}\right)_{1\le i,j\le k} & (0)\\ (0) & (0)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \left(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{u^2(x,y)}\right)_{1\le i,j\le k} & (0)\\ (0) & (0)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $\lambda_i = 1$, $1 \le i \le k$, und $\lambda_j = 0$, $k+1 \le j \le n$, als Hauptkrümmungen.

Skalieren wir nun diesen Zylinder mit einem Faktor $R > 0$, betrachten also einen Zylinder mit Radius R, so erhalten wir gemäß Lemma 3.3.7 die Hauptkrümmungen $\frac{1}{R}$ mit Vielfachheit k und 0 mit Vielfachheit $n-k$. Daraus folgen $H = \frac{k}{R}$ und $K = 0$.

(iv) **Kegel:** Wir betrachten rotationssymmetrische Kegel, die als $\operatorname{graph} u$ für eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = a|x|$ und $a \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Wir erhalten dafür

$$
\begin{aligned}
u_i(x) &= a\frac{x_i}{|x|},\\
u_{ij}(x) &= a\frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{|x|^2}\right),\\
g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + a^2\frac{x_ix_j}{|x|^2},\\
h_{ij}(x) &= \frac{a}{|x|\sqrt{1+a^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{|x|^2}\right)
\end{aligned}
$$

und sehen, dass die Hauptkrümmungen durch $\lambda_1 = 0$, zur radialen Richtung parallel zu x, und $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{a}{|x|\sqrt{1+a^2}}$, zu Richtungen orthogonal zu x, gegeben sind. Insbesondere sehen wir, dass die Hauptkrümmungen eines Kegels umgekehrt proportional zur Distanz zum Ursprung sind.

(v) **Rotationssymmetrische Graphen:** Sei

$$
X(x) = \begin{pmatrix} x\\ u(x)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x\\ \varphi(|x|)\end{pmatrix},
$$

$x \in \Omega$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \rho < |x| < R\}$, $0 \le \rho < R \le \infty$, mit $\varphi \in C^2$. Setze $r := |x|$. Es gilt für $r > 0$

$$
\begin{aligned}
u_i(x) &= \varphi'(r)\frac{x_i}{|x|},\\
u_{ij}(x) &= \varphi'(r)\frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{|x|^2}\right) + \varphi''(r)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|},\\
|\nabla u|^2 &= (\varphi'(r))^2,\\
g_{ij} &= \delta_{ij} + u_iu_j = \delta_{ij} + (\varphi'(r))^2\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|},\\
h_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'(r))^2}}\left(\frac{\varphi'(r)}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{|x|^2}\right) + \varphi''(r)\frac{x_ix_j}{|x|^2}\right).
\end{aligned}
$$

Eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren von g_{ij} und h_{ij} bezüglich δ_{ij} ist außerhalb des Ursprungs durch $\frac{x}{|x|}$ oder x und eine Basis von $\langle x\rangle^\perp$ gegeben. Für die Eigenwerte bezüglich der Euklidischen Metrik gilt

	x	$\langle x\rangle^\perp$
g_{ij}	$1+(\varphi'(r))^2$	1
h_{ij}	$\dfrac{\varphi''(r)}{\sqrt{1+(\varphi'(r))^2}}$	$\dfrac{\varphi'(r)}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+(\varphi'(r))^2}}$

Als Hauptkrümmungen erhalten wir somit einmal

$$\frac{\varphi''(r)}{(1+(\varphi'(r))^2)^{3/2}}$$

und $(n-1)$-mal den Wert

$$\frac{\varphi'(r)}{r\sqrt{1+(\varphi'(r))^2}}.$$

Wir beenden den Abschnitt mit einer Definition, die die Hauptkrümmungen benutzt.

Definition 3.3.10 (Konvexität)**.** Eine Hyperfläche heißt (lokal) konvex, falls $h_{ij} \succcurlyeq 0$ gilt und strikt (lokal) konvex, falls $h_{ij} \succ 0$ gilt.

Bemerkung 3.3.11.

(i) Lokale Konvexität bzw. strikte lokale Konvexität sind äquivalent zu $\lambda_i \geq 0$ bzw. $\lambda_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(ii) Die Kurve $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (x, x^4)$ ist lokal konvex, aber nicht strikt lokal konvex, da die Krümmung im Ursprung verschwindet.

Dies scheint nicht zur Tatsache zu passen, dass die Menge $K := \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \colon y \geq x^4\}$ in dem Sinne strikt konvex ist, dass für alle $p, q \in K$ und alle $\lambda \in (0,1)$ der Punkt $\lambda p + (1-\lambda)q$ im Inneren von K liegt, die obige Definition ist jedoch in der Differentialgeometrie geeigneter.

3.4. **Min-Max Charakterisierung der Hauptkrümmungen.** Grundlagen aus der Linearen Algebra zu diesem Kapitel finden sich in Kapitel B.

Lemma 3.4.1 (Min-Max Charakterisierung der Hauptkrümmungen)**.** *Sei X eine n-dimensionale C^2-Hyperfläche mit Metrik $g = (g_{ij})$ und zweiter Fundamentalform $A = (h_{ij})$. Dann gilt für die angeordneten Hauptkrümmungen λ_i mit $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$*

$$\lambda_i = \min_{\substack{V\subset\mathbb{R}^n\\ \dim V = i}} \max_{0\neq\xi\in V} \frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j} \equiv \min_{\substack{V\subset\mathbb{R}^n\\ \dim V = i}} \max_{0\neq\xi\in V} \frac{A(\xi,\xi)}{g(\xi,\xi)}.$$

Insbesondere folgt $\lambda_1 = \min\limits_{0\neq\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}$ und $\lambda_n = \max\limits_{0\neq\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{h_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}$.

Beweis. Übung. □

Korollar 3.4.2. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale C^2-Hyperfläche mit nach ihrer Größe sortierten Hauptkrümmungen $\lambda_1(x) \leq \ldots \leq \lambda_n(x)$ in $x \in \Omega$. Dann ist $\Omega \ni x \mapsto \lambda_i(x)$ für jedes $1 \leq i \leq n$ stetig.*

Beweis. Übung. □

3.5. **Die Weingartenabbildung.** Das folgende Lemma ist eigentlich ein Resultat der Linearen Algebra.

Lemma 3.5.1. *Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt und $B(\cdot,\cdot)$ mit Matrixdarstellung (b_{ij}) eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$B(v,w) = g(v,Sw) \quad \textit{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Ist B symmetrisch, so ist S bezüglich $g(\cdot,\cdot)$ selbstadjungiert, d. h. es gilt

$$g(Sv,w) = g(v,Sw) \quad \textit{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $\left(g^{ij}\right)$ die inverse Matrix zu (g_{ij}), d. h. gelte $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ für alle $1 \le i,k \le n$. Wir definieren $S = \left(S^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ durch $S^j_l := g^{jk}b_{kl}$ für $j,l = 1,\dots,n$.

Wir rechnen die behauptete Gleichheit für Elemente der Standardbasis nach. Es gilt $Se_l = S^j_l e_j$ und daher folgt

$$g(e_i, Se_l) = g_{ij}S^j_l = g_{ij}g^{jk}b_{kl} = \delta^k_i b_{kl} = b_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S ist einfach einzusehen. Ist B symmetrisch, so folgt

$$g(Sv,w) = g(w,Sv) = B(w,v) = B(v,w) = g(v,Sw).$$

Somit ist S selbstadjungiert. □

Definition 3.5.2. Sei $X \in C^2\left(\Omega,\mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Hyperfläche mit Normale ν längs X. Sei $g = (g_{ij})$ die Metrik und sei $A = (h_{ij})$ die zweite Fundamentalform von X. Dann heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $S(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$A(x)\langle v,w\rangle = g(x)\langle v,Sw\rangle \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n$$

Weingartenabbildung von X. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = S^i_k(x)e_i \quad \text{mit} \quad S^i_k(x) = g^{ij}(x)h_{jk}(x).$$

Die Weingartenabbildung $S(x)$ ist für alle $x \in \Omega$ bezüglich $g(x)$ selbstadjungiert.

Bemerkung 3.5.3. Im Allgemeinen ist $\{e_1,\dots,e_n\}$ keine Orthogonalbasis bezüglich der Metrik $g(x)$ und die Matrix von S bezüglich der Standardbasis ist nicht symmetrisch.

Bemerkung 3.5.4 (Heben und Senken von Indices)**.** Für die Weingartenabbildung S ist die Matrixschreibweise $S = \left(h^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ mit $h^i_j = g^{ik}h_{kj}$ üblich. Man sagt, ein Index sei mit Hilfe der Metrik gehoben. Umgekehrt gilt $h_{ij} = h^k_i g_{kj} = h_{li}g^{lk}g_{kj} = h_{li}\delta^l_j = h_{ij}$, wobei die Reihenfolge der Indices bei h_{ij}, g_{ij} und g^{ij} keine Rolle spielt, da diese symmetrisch sind. Auch bei anderen Größen (genauer: Tensoren) kann man Indices mit Hilfe der Metrik und ihrer Inversen heben und senken.

Beispiele für das Heben und Senken von Indices mit dem später noch zu definierenden Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl} sind

$$R_{ijkl}g^{km} = R_{ij}{}^m{}_l \quad \text{oder} \quad R_{ij}{}^m{}_l g_{mk} = R_{ijkl}.$$

Das Senken von Indices ist aus der linearen Algebra bekannt; vergleiche dazu auch Anhang A. Für einen Endomorphismus A und eine Bilinearform B definiert $B(\cdot,A\cdot)$ eine Bilinearform. Wir bezeichnen auch die zugehörigen Matrizen mit denselben Buchstaben: $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ und $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Beachte dabei zunächst, dass die Indices beim Endomorphismus oben und unten stehen, da er aus einem Vektor $x = (x^j)_{1\le j\le n}$ (mit oben stehendem Index j) wieder einen Vektor $a^i_j x^j$ (mit oben stehendem Index i) macht. Bei der Bilinearform stehen die Indices dagegen unten, da sie aus einem Vektor eine Form $b_{ij}x^j$ macht. Dabei ist eine Form ein Element aus dem Dualraum, also ein Objekt mit unten stehendem Index, das, auf

einen weiteren Vektor angewandt, eine Zahl, d. h. eine Körperelement, liefert. In Koordinaten wird aus $B(\cdot, A\cdot)$ also $b_{ij}a^j_k$ bzw. aus $B(y, Ax)$ der Ausdruck $y^i b_{ij} a^j_k x^k$. (Beachte, dass bei g_{ij} und g^{ij} keine Mehrdeutigkeiten auftreten. $g^i_j = \delta^i_j$ ist unüblich.)

Theorem 3.5.5 (Weingartengleichung)**.** *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ regulär mit zweiter Fundamentalform $A = (h_{ij})$ und Weingartenabbildung $S = \left(h^i_j\right)$ bezüglich der Normalen ν. Dann gilt*

$$D\nu = dX \cdot S \quad \textit{und} \quad A(v, w) = \langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$$

bzw. in Koordinaten

$$\nu_i \equiv \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = h^k_i X_k \quad \textit{oder} \quad \nu^\alpha_i = h^k_i X^\alpha_k \quad \textit{und} \quad h_{ij} = \langle \nu_i, X_j\rangle = \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j.$$

⋆ Zur Wiederholung nochmals zur Einsteinschen Summenkonvention: Dabei haben wir die Komponenten der Vektoren ν und X, beide im $\mathbb{R}^{n+1}$, mit griechischen Indices und die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\delta_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Die Einsteinsche Summenkonvention erfordert hier also eine Summation über mehrfache griechische Indices von 1 bis $n+1$, während mehrfache lateinische Indices von 1 bis n summiert werden. Es ist üblich, lateinische Indices für Größen im Definitionsgebiet und griechische Indices für Größen im Zielraum zu verwenden. Ausgeschrieben mit Summenzeichen bedeutet also die letzte Gleichheit

$$h_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j.$$

In dieser Notation wird $g = (DX)^T DX$ zu

$$g_{ij} = X^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j$$

und aus $0 = \langle dX\langle V\rangle, \nu\rangle$ für alle $V \in \mathbb{R}^n$ wird

$$0 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X^\beta_i V^i.$$

Diese Formel gilt auch ohne V^i. Die Definition der zweiten Fundamentalform wird zu

$$h_{ij} := -X^\alpha_{,ij} \delta_{\alpha\beta} \nu^\beta$$

und die Transformationsformel für die Metrik zu $\hat{X} = X \circ \varphi$ wird zu

$$\hat{g}_{ij} = g_{kl} \varphi^k_i \varphi^l_j.$$

Beide Schreibweisen haben Vorteile; so erleichtern weniger Indices die Übersicht, wird es jedoch komplizierter, gibt es in Indexnotation weniger mögliche Missverständnisse und die Indexnotation ist bei Rechnungen meist einfacher zu handhaben. Es ist ratsam, beide Notationen zu beherrschen.

Beweis. Aus $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ folgt $0 = \frac{\partial}{\partial x^i}\langle \nu, \nu\rangle = 2\langle \nu, \nu_i\rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \nu_j, X_k\rangle &= \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{\langle \nu, X_k\rangle}_{=0} - \langle \nu, X_{,jk}\rangle = h_{jk} = A(e_j, e_k) \\ &= g(Se_j, e_k) = \langle dX \cdot Se_j, dXe_k\rangle.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\langle D\nu\langle v\rangle, \nu\rangle = 0$, aus der zweiten $\langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle = \langle dX \cdot S\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Die erste Behauptung folgt, da die erste dieser beiden Gleichungen gerade das Skalarprodukt der behaupteten Gleichheit mit ν und die zweite das Skalarprodukt mit $dX\langle w\rangle$ liefert, die Gleichung also beim Test mit einer Basis stimmt.

Zur zweiten Behauptung: Es gilt aufgrund der ersten Behauptung

$$A(v,w) = g(Sv,w) = \langle dX \cdot Sv, dX\langle w\rangle\rangle = \langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle.$$

Daraus liest man auch direkt die Formeln in Koordinaten ab.

Wir leiten sie noch einmal unabhängig davon in Koordinatenschreibweise her: Es gilt $1 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta}\nu^\beta$. Differenzieren nach x^i liefert $0 = 2\nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta}\nu^\beta$. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^{n+1}$ lässt sich in der Form $a^k X_k + b\nu$ darstellen. Also gibt es Funktionen a_i^k und b_i mit $\nu_i = a_i^k X_k + b_i\nu$. Wir setzen dies in die obige Gleichung ein und erhalten $0 = \nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta}\nu^\beta = a_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta}\nu^\beta + b_i \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta}\nu^\beta = 0 + b_i$. Also gilt $\nu_i = a_i^k X_k$. Wir differenzieren $0 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\alpha$, $j = 1,\dots,n$, setzen die Gleichung für ν_i ein und erhalten

$$0 = \nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta + \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_{,ji}^\beta = a_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta - h_{ij} = a_i^k g_{kj} - h_{ij}.$$

Wir multiplizieren dies mit g^{jl} und erhalten $a_i^l = a_i^k \delta_k^l = a_i^k g_{kj} g^{jl} = h_{ij} g^{jl} = h_i^l$. Somit gilt $\nu_i = h_i^l X_l$ oder $\nu_i^\alpha = h_i^l X_l^\alpha$.

Weiterhin gilt

$$\nu_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = h_i^k X_k^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta = h_{il} g^{lk} g_{kj} = h_{il}\delta_j^l = h_{ij}. \qquad \square$$

3.6. **Charakterisierung von Ebenen und Sphären.**

Theorem 3.6.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ regulär mit Normale ν und zweiter Fundamentalform A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ liegt in einer Hyperebene,
(ii) $A \equiv 0$ und
(iii) ν ist konstant.

Beweis.

- „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Liegt $X(\Omega)$ in einer affinen Hyperebene $p + E$, so bilden die Vektoren $X_1, \dots, X_n$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Basis von E und ν ist ein Normalenvektor von E. Da auch $X_{,ij}$ in E liegt, folgt $h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = 0$.
- „(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Aus $A = (h_{ij}) \equiv 0$ folgt $S = \left(h_j^i\right) = 0$. Somit ist $D\nu = DX \cdot S = 0$ aufgrund der Weingartengleichung. Da Ω zusammenhängend ist, ist ν konstant.
- „(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Ist ν konstant, so folgt $D\langle X, \nu\rangle = \langle DX, \nu\rangle + \langle X, D\nu\rangle = 0$. Somit ist $\langle X, \nu\rangle$ konstant. Da ν konstant ist, besagt dies, dass $X(x)$ in einer Hyperebene liegt. $\square$

Theorem 3.6.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ regulär und $R > 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ liegt in einer Sphäre vom Radius R und
(ii) $A = \pm\frac{1}{R} g$ bzw. $S = \pm\frac{1}{R}\mathbb{1}$ oder, in Koordinaten, $h_{ij} = \pm\frac{1}{R} g_{ij}$ bzw. $h_j^i = \pm\frac{1}{R}\delta_j^i$.

Weiterhin ist die Existenz eines $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass in jedem Punkt $x \in \Omega$ der Vektor $X(x) - p$ ein Vielfaches von $\nu(x)$ ist, äquivalent zur Tatsache, dass $X(\Omega)$ in einer Sphäre von nicht spezifiziertem Radius um p liegt.

Beweis.

- „(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Sei $m \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Definiere $f(x) := \frac{1}{2}|X(x) - m|^2$. Dann gilt

$$f_i = \langle X - m, X_i\rangle \quad \text{und} \quad f_{,ij} = \langle X - m, X_{,ij}\rangle + g_{ij}.$$

Sei nun m der Mittelpunkt der Sphäre und $X(\Omega)$ in der Sphäre enthalten. Dann ist f konstant. Wir schließen also, dass $X - m \perp \operatorname{im} dX$ gilt. Somit ist $X - m$ ein Vielfaches von ν. (Dies zeigt die Richtung „$\Longleftarrow$“ für die letzte Behauptung.) Da die Sphäre den Radius R hat, gilt $|X - m| = R$ und wegen $|\nu| = 1$ folgt $X - m = \pm R\nu$. Somit erhalten wir

$$0 = f_{,ij} = \langle \pm R\nu, X_{,ij} \rangle + g_{ij} = \mp R h_{ij} + g_{ij}.$$

- „(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Wir nehmen an, dass $h^i_j = \mp \frac{1}{R}\delta^k_j$ gilt. Nun Setzen wir $\rho := X \pm R\nu$. Dann folgt nach Voraussetzung mit Hilfe der Weingartengleichung

$$\rho_j = X_j \pm R\nu_j = X_j \pm R h^k_j X_k = X_j \pm R\left(\mp \frac{1}{R}\delta^k_j\right) X_k = 0.$$

  Also ist $\rho \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstant und aus $X = \rho \mp R\nu$ folgt, dass $\operatorname{im} X$ in einer Sphäre vom Radius R um ρ enthalten ist.
- „$\Longleftarrow$“: Siehe oben.
- „$\Longrightarrow$“: Gelte $X(x) - p = r(x)\nu(x)$. Sei ohne Einschränkung $p = 0$, gelte also $X(x) = r(x)\nu(x)$ für alle $x \in \Omega$. Setze $f := |X - r_0\nu|^2$ für $r_0 := r(q)$ für ein festes $q \in \Omega$. Dann gilt $f(q) = 0$ und es gilt überall

$$f_i = 2\langle X_i - r_0\nu_i, X - r_0\nu \rangle = 2\langle X_i - r_0 h^k_i X_k, (r(x) - r_0)\nu \rangle = 0.$$

  Somit ist f konstant und es gilt $f(q) = 0$. Daraus erhalten wir $f \equiv 0$ und damit die Behauptung. □

Theorem 3.6.2 gilt auch, wenn wir R dort nicht global als konstant voraussetzen. Dies behandeln wir im Rest dieses Abschnittes.

Definition 3.6.3. Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche.

(i) Ein Punkt $x \in \Omega$ bzw. $X(x)$ heißt Nabelpunkt oder umbilischer Punkt, falls dort alle Hauptkrümmungen übereinstimmen, also

$$A(\cdot,\cdot) = \lambda g(\cdot,\cdot) \quad \text{oder} \quad h_{ij} = \lambda g_{ij} \quad \forall\, 1 \le i, j \le n$$

für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Eine Hyperfläche heißt (total) umbilisch, falls sie in jedem Punkt umbilisch ist, d. h., falls es eine Funktion $\lambda \colon \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$A(\cdot,\cdot) = \lambda g(\cdot,\cdot) \quad \text{oder} \quad h_{ij} = \lambda g_{ij} \quad \forall\, 1 \le i, j \le n$$

gilt.

Der Beweis des folgenden Theorems wird recht kurz, wenn wir sogenannte kovariante Ableitungen benutzen. Diese werden wir später behandeln. Wir geben diesen kurzen Beweis an, aber auch eine etwas technischere Variante, die zu unseren aktuellen Vorkenntnissen passt.

Theorem 3.6.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine total umbilische C^3-Hyperfläche und sei $n \ge 2$. Dann ist das Bild von X in einer Hyperebene oder in einer n-dimensionalen Sphäre enthalten.*

Beweis. Wir folgen [1]. Gelte

$$h_{ij}(x) = \lambda(x) g_{ij}(x)$$

für $x \in \Omega$. Wir unterdrücken ab jetzt das Argument x und zeigen zunächst, dass λ lokal konstant ist. Es gilt nach Codazzi

$$H_{;k} = g^{ij} h_{ij;k} = g^{ij} h_{ik;j} = g^{ij}(\lambda g_{ik})_{;j}$$

$$= g^{ij}\lambda_{;j}g_{ik} = \lambda_{;j}\delta^j_k = \lambda_{;k}.$$

Andererseits gilt

$$H_{;k} = \left(g^{ij}h_{ij}\right)_{;k} = \left(g^{ij}\lambda g_{ij}\right)_{;k} = n\lambda_{;k}.$$

Somit ist λ konstant und das Resultat folgt aus Theorem 3.6.2 im Falle $\lambda \neq 0$ und für $\lambda = 0$ aus Theorem 3.6.1. □

Beweis ohne kovariante Ableitungen. Wie oben folgt $H_k = n\lambda_k$. Hier können wir einfach „$;k$“ durch die entsprechenden partiellen Ableitungen ersetzen.

Für die andere Variante, H_k zu berechnen, halten wir zunächst fest, dass nach Voraussetzung aus $h_{ij} = \lambda g_{ij}$ für die Weingartenabbildung $h^j_i = \lambda\delta^j_i$ folgt. Weiterhin können wir $\langle X_{ij}, X_k\rangle$ allein durch Ableitungen der Metrik ausdrücken. Es gelten

$$\begin{aligned} g_{ik,j} &= \langle X_{ij}, X_k\rangle + \langle X_i, X_{kj}\rangle, \\ g_{jk,i} &= \langle X_{ji}, X_k\rangle + \langle X_j, X_{ki}\rangle, \\ -g_{ij,k} &= -\langle X_{ik}, X_j\rangle - \langle X_i, X_{jk}\rangle \end{aligned}$$

und somit folgt durch Addition

$$2\langle X_{ij}, X_k\rangle = g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}.$$

Damit berechnen wir nun H_k. Es gilt

$$\begin{aligned} H_k &= \left(g^{ij}h_{ij}\right)_k \\ &= g^{ij}{}_{,k}h_{ij} + g^{ij}h_{ij,k} \\ &= -g^{ia}g^{bj}g_{ab,k}h_{ij} + g^{ij}h_{ij,k} - g^{ij}h_{ik,j} + g^{ij}h_{ik,j} \\ &= -\lambda g^{ia}g^{bj}g_{ab,k}g_{ij} - g^{ij}\langle X_{ij}, \nu\rangle_k + g^{ij}\langle X_{ik}, \nu\rangle_j + g^{ij}(\lambda g_{ik})_j \\ &= -\lambda\delta^a_j g^{bj}g_{ab,k} \\ &\quad - g^{ij}\langle X_{ijk}, \nu\rangle - g^{ij}\langle X_{ij}, \nu_k\rangle + g^{ij}\langle X_{ikj}, \nu\rangle + g^{ij}\langle X_{ik}, \nu_j\rangle \\ &\quad + \lambda g^{ij}g_{ik,j} + g^{ij}g_{ik}\lambda_j \\ &= -\lambda g^{ab}g_{ab,k} - g^{ij}\langle X_{ij}, h^l_k X_l\rangle + g^{ij}\langle X_{ik}, h^l_j X_l\rangle + \lambda g^{ij}g_{ik,j} + \delta^j_k\lambda_j \\ &= -\lambda g^{ab}g_{ab,k} - \lambda g^{ij}\langle X_{ij}, \delta^l_k X_l\rangle + \lambda g^{ij}\langle X_{ik}, \delta^l_j X_l\rangle + \lambda g^{ij}g_{ik,j} + \lambda_k \\ &= -\lambda g^{ab}g_{ab,k} - \lambda g^{ij}\langle X_{ij}, X_k\rangle + \lambda g^{ij}\langle X_{ik}, X_j\rangle + \lambda g^{ij}g_{ik,j} + \lambda_k \\ &= -\lambda g^{ab}g_{ab,k} + \lambda g^{ij}g_{ik,j} + \lambda_k \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda g^{ij}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) + \frac{1}{2}\lambda g^{ij}(g_{ij,k} + g_{kj,i} - g_{ik,j}) \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

Somit haben wir auch hier $n\lambda_k = H_k = \lambda_k$ gezeigt. Daher ist λ auch hier konstant und die Behauptung folgt wieder aus Theorem 3.6.2 im Falle $\lambda \neq 0$ und für $\lambda = 0$ aus Theorem 3.6.1. □

4. Minimalflächen

4.1. **Der Flächeninhalt und Vorbereitungen.**

Bemerkung 4.1.1. Um den Flächeninhalt zu definieren, leiten wir zunächst einen Ausdruck für den Flächeninhalt von Parallelogrammen her. Seien $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

beliebig. Dann hat das von ihnen aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= |u| \cdot \underbrace{\left| v - \left\langle v, \frac{u}{|u|} \right\rangle \frac{u}{|u|} \right|}_{=\text{Höhe}} \\ &= \sqrt{\left\langle v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u, v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u \right\rangle} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - 2\langle u, v\rangle^2 + \langle u, v\rangle^2} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - \langle u, v\rangle^2}.\end{aligned}$$

Damit das Flächenelement nach Integration für affin lineare Funktionen auf rechteckigen Gebieten den für Parallelogramme bekannten Wert ergibt, setzen wir für $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned}d\mathcal{A} \equiv d\mathcal{A}_g &:= \mathcal{A}(X_1, X_2)\, dx^1 dx^2 = \sqrt{|X_1|^2|X_2|^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}\, dx \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx.\end{aligned}$$

$\star$ Man kann zeigen, dass der vermöge $\int\limits_\Omega d\mathcal{A}$ definierte Flächeninhalt für injektive Immersionen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit dem zweidimensionalen Hausdorffmaß $\mathcal{H}^2(\operatorname{im} X)$ übereinstimmt. Entsprechendes gilt in n Dimensionen.

Definition 4.1.2. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion. Dann definieren wir den Flächeninhalt von X als

$$\mathcal{A}(X) := \int\limits_\Omega \sqrt{\det(g_{ij})} =: \mathcal{A}_g(\Omega).$$

Für eine messbare Teilmenge $E \subset \Omega$ definieren wir

$$\mathcal{A}(E) := \int\limits_E \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Beispiel 4.1.3. Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega$, ein Graph. Dann gilt $\det(g_{ij}) = \det(\delta_{ij} + u_i u_j) = 1 + |Du|^2$. Somit erhalten wir

$$\mathcal{A}(X) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}.$$

Definition 4.1.4 (Integration auf Hyperflächen)**.** Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Hyperfläche und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\int\limits_\Omega f\, d\mathcal{A}_g := \int\limits_\Omega f(x)\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx,$$

falls das rechte Integral als Riemann- oder Lebesgueintegral existiert.

$$d\mathcal{A}_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx \equiv d\mu$$

heißt das induzierte Flächenelement.

Lemma 4.1.5. *Die Integration auf Hyperflächen ist unabhängig von der Parametrisierung. Insbesondere ist damit der Flächeninhalt einer Hyperfläche unabhängig von der Parametrisierung definiert.*

Beweis. Sei $\hat{X} = X \circ \varphi$ für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$. Dann folgt aus dem Transformationssatz für Integrale mit $x = \varphi(y)$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sowie

$$\hat{g}_{ij}(y) = g_{kl} \circ \varphi(y)\varphi_i^k(y)\varphi_j^l(y),$$

dass

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{\Omega}} f \circ \varphi(y)\, dA_{\hat{g}}(y) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} f \circ \varphi(y) \sqrt{\det\left(\hat{g}_{ij}\right)(y)}\, dy \\
&= \int_{\Omega} f(x) \sqrt{\det\left((g_{kl})(x)\varphi_i^k(\varphi^{-1}(x))\varphi_j^l(\varphi^{-1}(x))\right)} \cdot \frac{1}{|\det d\varphi(\varphi^{-1}(x))|}\, dx \\
&= \int_{\Omega} f(x) \sqrt{\det(g_{ij})(x)}\, dx = \int_{\Omega} f\, d\mathcal{A}_g.
\end{aligned}$$

Indem wir die konstante Funktion mit dem Wert 1 integrieren, sehen wir, dass der Flächeninhalt ebenfalls unabhängig von der Parametrisierung ist. □

Definition 4.1.6. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche. Wir definieren den mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}$ durch $\vec{H} := -H\nu$.

Wir bemerken, dass $\vec{H}$ unabhängig von der Wahl der Normalen ν definiert ist, da sich bei der Wahl von $-\nu$ statt ν auch das Vorzeichen von h_{ij} ändert. Bei einer Sphäre zeigt er nach innen.

Wir wiederholen ein Lemma aus der linearen Algebra, beweisen es hier aber nur im zweidimensionalen Fall, den wir sehr explizit und daher einfach behandeln können. Im Anhang zu meinem Skript über voll nichtlineare partielle Differentialgleichungen befindet sich ein Beweis in beliebigen Dimensionen.

Lemma 4.1.7.

(i) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(a_{kl}) = \det(a_{kl}) a^{ji},$$

falls (a_{ij}) invertierbar ist und $\left(a^{ij}\right)$ die Inverse ist, d. h. wenn $a^{ij}a_{jk} = \delta_k^i$ gilt.

(ii) Sei $(a_{ij}(t))$ differenzierbar von t abhängig mit inverser Matrix $\left(a^{ij}(t)\right)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} a^{ij} = -a^{ik} a^{lj} \frac{d}{dt} a_{kl}.$$

Die Determinante ist ein Polynom in ihren Einträgen und daher auch im Falle nicht invertierbarer Matrizen differenzierbar.

Beweis.

(i) Wir zeigen die erste Behauptung nur für (2×2)-Matrizen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(a_{ij})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\det(a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} a^{11} & a^{21} \\ a^{12} & a^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Differenziert man $\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, so erhält man gerade die behaupteten Einträge.

(ii) Die Inverse lässt sich bis auf die Determinante als Faktor als Polynom in den Einträgen der Matrix darstellen. Daraus folgt die Differenzierbarkeit der Inversen und es bleibt, die behauptete Formel nachzuweisen. Gelte allgemein $AB = BA = \mathbb{1}$. Dann erhält man durch Differenzieren $\dot{A}B + A\dot{B} = 0$, also $A\dot{B} = -\dot{A}B$ oder $\dot{B} = -B\dot{A}B$. Wegen $B = A^{-1}$ folgt die Behauptung. □

4.2. **Erste Variation des Flächeninhaltes.**

Theorem 4.2.1 (Erste Variation des Flächeninhaltes)**.**
Sei $X\colon \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^{n+1}$ von der Klasse C^2.

(i) Sei $X(\cdot, 0)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ regulär,
(ii) $\mathcal{A}(X(\cdot, 0)) < \infty$ und
(iii) gebe es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$, so dass $X(x,t)$ für $x \in \Omega \setminus K$ von t unabhängig ist.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $X(\cdot, t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ regulär ist. Mit $\Phi := \frac{\partial X}{\partial t}$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t)) = -\int_\Omega \left\langle \vec{H}, \Phi \right\rangle d\mathcal{A}_g$$

für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Φ oder X heißt Variation von $X(\cdot, 0)$.

Beweis. Da für $t = 0$

$$\inf_{x\in K} \inf_{v \in \mathbb{S}^n} |dX(x,t)\langle v\rangle| > 0$$

ist, gilt dies aus Stetigkeitsgründen auch noch für kleine $\varepsilon > 0$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (Details: Übung).

Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t)) &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\det(g_{ij})g^{ij}\dot{g}_{ij}\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}g^{ij}\cdot 2\left\langle \dot{X}_{,i}, X_j\right\rangle \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx = \int_\Omega g^{ij}\left\langle \dot{X}_{,i}, X_j\right\rangle dA_g.\end{aligned}$$

Schreibe nun $\dot{X}(x,t) = \varphi(x,t)\nu(x,t) + \psi^k(x,t)X_k(x,t)$ für C^1-Funktionen φ und ψ^k mit räumlich kompaktem Träger in Ω. Wir erhalten

$$\dot{X}_{,i} = \varphi_i\nu + \varphi h_i^k X_k + \psi_i^k X_k + \psi^k X_{,ki}$$

und hieraus mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot,t)) &= \int_\Omega g^{ij}\left\langle \varphi h_i^k X_k + \psi_i^k X_k + \psi^k X_{,ki}, X_j\right\rangle d\mathcal{A}_g \\ &= \int_\Omega g^{ij}\varphi h_i^k g_{kj} + g^{ij}\psi_i^k g_{kj} + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g \\ &= \int_\Omega \varphi H + \psi_i^i + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g \\ &= \int_\Omega -\left\langle \Phi, \vec{H}\right\rangle + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, d\mathcal{A}_g + \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\psi^i\right)\sqrt{\det(g_{kl})}\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega -\left\langle \Phi, \vec{H} \right\rangle + \psi^k g^{ij} \langle X_{,ki}, X_j \rangle \, d\mathcal{A}_g \\
&\qquad - \int_\Omega \psi^i \frac{\det(g_{kl})}{2\sqrt{\det(g_{kl})}} \cdot g^{kl} \cdot 2 \langle X_{,ki}, X_l \rangle \, dx \\
&= - \int_\Omega \left\langle \Phi, \vec{H} \right\rangle \, d\mathcal{A}_g
\end{aligned}
$$

wie behauptet. □

Korollar 4.2.2. *Sei $Y \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Sei X eine Variation von Y, d. h. wie in Theorem 4.2.1 mit $X(\cdot, 0) = Y$. Dann sind die Aussagen*

(i) $H(X(\cdot, 0)) = 0$ und
(ii) $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot, t))\big|_{t=0} = 0$ für alle solchen Variationen X

äquivalent.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Klar nach Theorem 4.2.1.

„$\Longleftarrow$“: Nehme an, das $H \not\equiv 0$ gilt. Wähle längs $X(\cdot, 0)$ ein C^2-Vektorfeld $V \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit kompaktem Träger und $\left\langle \vec{H}, V \right\rangle \geq 0$, aber so, dass nicht überall Gleichheit gilt. Setze $X(x, t) := Y(x) + tV$. Dann ist die erste Variation $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(X(\cdot, t))\big|_{t=0}$ negativ. Widerspruch. □

Wir wollen $X_{,ij}$ als Linearkombination des Normalenvektors ν und der Tangentialvektoren X_i darstellen. Es gilt das folgende

Lemma 4.2.3. *Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Hyperfläche. Dann ist*

$$X_{,ij} = \Gamma^k_{ij} X_k - h_{ij}\nu$$

mit $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$. Setzt man

$$X_{;ij} := X_{,ij} - \Gamma^k_{ij} X_k,$$

so gilt die Gaußsche Formel

$$X_{;ij} = -h_{ij}\nu.$$

Die Größe $X_{;ij}$ wird uns noch als zweite kovariante Ableitung begegnen. Die Ausdrücke Γ^k_{ij} nennt man Christoffelsymbole.

Beweis. Die Gaußsche Formel folgt aus der ersten Behauptung direkt nach Definition.

Es ist klar, dass sich $X_{,ij}$ als eine solche Linearkombination darstellen lässt. Der Faktor vor ν stimmt aufgrund unserer Definition $h_{ij} := -\langle X_{,ij}, \nu \rangle$. Sei also X_l ein beliebiger Tangentialvektor. Wir müssen daher noch nachweisen, dass das Skalarprodukt der Gleichung mit X_l auf beiden Seiten denselben Wert ergibt. Es gilt nach Definition von Γ^k_{ij}

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - 2\Gamma^k_{ij} \langle X_k, X_l \rangle \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - 2\tfrac{1}{2} g^{kr}(g_{ir,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r}) g_{kl} \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - \langle X_{,ij}, X_l \rangle - \langle X_i, X_{,lj} \rangle - \langle X_{,ji}, X_l \rangle - \langle X_j, X_{,li} \rangle \\
&\qquad + \langle X_{,il}, X_j \rangle + \langle X_i, X_{,jl} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

da partielle Ableitungen symmetrisch sind. □

Definition 4.2.4. Wir nennen eine Hyperfläche mit $H = 0$ oder, äquivalent dazu, $\vec{H} = 0$, eine Minimalfläche.

Bemerkung 4.2.5. Aufgrund der Normalform für Hyperflächen gibt es für jeden Punkt auf einer Minimalfläche ein κ, so dass sich die Minimalfläche über ihrer Tangentialebene nach geeigneter Drehung lokal als $\operatorname{graph} u$ mit

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\kappa x^2 - \frac{1}{2}\kappa y^2 + o\left(|(x,y)|^2\right)$$

darstellen lässt. Somit ist jeder Punkt einer Minimalfläche ein Sattelpunkt.

Bemerkung 4.2.6. Die Bezeichnung Minimalfläche ist leicht irreführend, weil wir gesehen haben, dass die erste Variation des Flächeninhalts einer Minimalfläche verschwindet. Dies besagt natürlich nicht, dass eine Minimalfläche ein (lokales) Minimum des Flächeninhalts ist.

Wir können die Minimalflächengleichung $H = 0$ oder $\vec{H} = 0$ mit Hilfe des folgenden Operators kurz darstellen.

Definition 4.2.7 (Laplace-Beltrami Operator)**.** Sei $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ eine Metrik auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit inverser Metrik $\left(g^{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$. (In einer solchen Situation, in der wir gar nicht mehr auf die Immersion eingehen, von der die Metrik herkommt, werden wir später auch von einer Riemannschen Metrik sprechen.) Dann definieren wir den Laplace-Beltrami Operator $\Delta_g \colon C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ durch

$$\Delta_g u := \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}u\right).$$

Lemma 4.2.8. *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Hyperfläche mit Metrik g und Normalenvektor ν. Dann gilt*

$$\Delta_g X = \vec{H} = g^{ij}X_{;ij},$$

wobei wir $\Delta_g X$ komponentenweise berechnen.

Beweis. Wir berechnen mit Lemma 4.2.3

$$\begin{aligned}
\Delta_g X &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\cdot g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}X\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{1}{2}\frac{\det(g_{kl})}{\sqrt{\det(g_{kl})}}2g^{kl}\langle X_{,ki}, X_l\rangle g^{ij}X_j\\
&\qquad - g^{ik}g^{lj}(\langle X_{,ki}, X_l\rangle + \langle X_k, X_{,li}\rangle)X_j + g^{ij}X_{,ij}\\
&= \underline{g^{kl}\langle X_{,ki}, X_l\rangle g^{ij}X_j} - g^{ik}g^{lj}\langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j - \underline{g^{ik}g^{lj}\langle X_k, X_{,li}\rangle X_j}\\
&\qquad + g^{ij}\left(-h_{ij}\nu + \Gamma^k_{ij}X_k\right)\\
&= -H\nu - g^{ik}g^{lj}\langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j + \tfrac{1}{2}g^{ij}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})X_k\\
&= \vec{H} - g^{ik}g^{lj}\langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}g^{ij}g^{kl}\Big(\langle X_{,ij}, X_l\rangle + \underline{\langle X_i, X_{,lj}\rangle} + \langle X_{,ji}, X_l\rangle + \underline{\langle X_j, X_{,li}\rangle}\\
&\qquad\qquad - \underline{\langle X_{,il}, X_j\rangle} - \underline{\langle X_i, X_{,jl}\rangle}\Big)X_k\\
&= \vec{H} = -H\nu = -g^{ij}h_{ij}\nu = g^{ij}X_{;ij}.
\end{aligned}$$

□

4.3. **Beispiele.**

Beispiele 4.3.1 (Helikoid, Katenoid und Scherkfläche)**.** Das Helikoid, parametrisiert durch

$$\mathbb{R}^2 \ni (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)^T,$$

das Katenoid, parametrisiert durch

$$\mathbb{R}^2 \ni (r,\varphi) \mapsto (\cosh r \cdot \cos\varphi, \cosh r \cdot \sin\varphi, r)^T$$

und die Scherkfläche, als Graph von

$$(0,\pi)^2 \ni (x,y) \mapsto \log\sin x - \log\sin y$$

dargestellt, sind Minimalflächen.

Beweis. Wir werden mit unterschiedlichen Methoden nachrechnen, dass die angebebenen Flächen Minimalflächen sind.

(i) **Helikoid:** Wir erhalten

$$\begin{aligned}
X_r &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T,\\
X_{,rr} &= 0,\\
X_\varphi &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1)^T,\\
X_{,\varphi\varphi} &= (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, 0)^T,\\
g_{rr} &= 1,\\
g_{r\varphi} &= 0,\\
g_{\varphi\varphi} &= 1+r^2,\\
\det g_{ij} &= 1+r^2,\\
\vec{H} &= \Delta_g X\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{1+r^2}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}X\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{1+r^2}\cdot 1\cdot X_r\right) + \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2}X_\varphi\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{1+r^2}X_{,\varphi\varphi}\\
&= \frac{r}{1+r^2}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix}-r\cos\varphi\\ -r\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Somit ist das Helikoid eine Minimalfläche.

(ii) **Katenoid:** Wir erinnern zunächst an

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\\
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d^2}{dx^2}\sinh x
\end{aligned}$$

und

$$1+\sinh^2 x = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \cosh^2 x.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
X &= (\cosh r\cdot\cos\varphi, \cosh r\cdot\sin\varphi, r)^T,\\
X_r &= (\sinh r\cos\varphi, \sinh r\sin\varphi, 1)^T,\\
X_{,rr} &= (\cosh r\cos\varphi, \cosh r\sin\varphi, 0)^T,\\
X_\varphi &= (-\cosh r\sin\varphi, \cosh r\cos\varphi, 0)^T,\\
X_{,\varphi\varphi} &= (-\cosh r\cos\varphi, -\cosh r\sin\varphi, 0)^T,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_{,r\varphi} &= (-\sinh r \sin\varphi, \sinh r \cos\varphi, 0)^T, \\
g &= \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\varphi} \\ g_{r\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sinh^2 r & 0 \\ 0 & \cosh^2 r \end{pmatrix} = \cosh^2 r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\nu &= \frac{1}{\text{Normierung}} \begin{pmatrix} \sinh r \cos\varphi \\ \sinh r \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cosh r \sin\varphi \\ \cosh r \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{Normierung}} \begin{pmatrix} -\cosh r \cos\varphi \\ -\cosh r \sin\varphi \\ \sinh r \cosh r \end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh r} \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ \sinh r \end{pmatrix}, \\
A &= \begin{pmatrix} h_{rr} & h_{r\varphi} \\ h_{r\varphi} & h_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $H = 0$ und das Katenoid ist eine Minimalfläche.

Da die Metrik ein Vielfaches der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist, sagt man, dass das Katenoid konform parametrisiert sei.

(iii) **Scherkfläche:** Es gilt

$$
\begin{aligned}
u &= \log\sin x - \log\sin y, \\
u_x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\
u_y &= -\frac{\cos y}{\sin y}, \\
u_{xx} &= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \\
u_{xy} &= 0, \\
u_{yy} &= \frac{1}{\sin^2 y}, \\
\Delta u - \frac{u_{ij}u^i u^j}{1+|\nabla u|^2} &= u_{xx} + u_{yy} - \frac{u_{xx}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 + 2u_{xy}u_x u_y}{1+u_x^2+u_y^2} \\
&= \frac{u_{xx}\left(1+u_y^2\right) + u_{yy}\left(1+u_x^2\right)}{1+u_x^2+u_y^2}, \\
u_{xx}\left(1+u_y^2\right) &= -\frac{1}{\sin^2 x}\left(1+\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x \sin^2 y}.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Symmetrie erhalten wir $\Delta u - \frac{u_{ij}u^i u^j}{1+|\nabla u|^2} = 0$ und somit $H = 0$. Somit ist auch die Scherkfläche eine Minimalfläche. □

Bemerkung 4.3.2.

(i) Minimalflächen gehören zu den differentialgeometrischen Themen, die schon seit sehr langer Zeit untersucht werden. Leonhard Euler beschreibt 1744 als erste Minimalfläche nach der Ebene das Katenoid, Jean Baptiste Meusnier 1776 das Helikoid und Heinrich Scherk beschreibt 1834 die nach ihm benannte Fläche.

(ii) Mit Hilfe von Funktionentheorie kann man Minimalflächen darstellen: Weierstraßdarstellung.

(iii) Helikoid und Katenoid lassen sich ineinander deformieren: Ein Filmchen dazu gibt es auf Wikipedia [16].

(iv) Stellt man Kopien der Scherkfläche auf die schwarzen Felder eines unendlichen Schachbrettes, so erhält man eine Fläche, die sich periodisch wiederholt und nirgends aufhört. Solche Hyperflächen werden wir später als vollständig bezeichnen.

(v) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Suchen wir nun eine Hyperfläche, die über Ω als $\operatorname{graph} u$ gegeben ist, die Minimalfläche ist und über $\partial\Omega$ mit $\operatorname{graph}\varphi$ übereinstimmt, so müssen wir dazu die folgende partielle Differentialgleichung mit Randwerten lösen:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dies ist für beliebige glatte Funktionen φ möglich, falls $\partial\Omega$ überall nichtnegative mittlere Krümmung hat, jedoch komplizierter.

5. Kurzeinführung Mittlerer Krümmungsfluss

Wir beschränken uns hier auf den Fall von Hyperflächen im Euklidischen.

Statt vom mittleren Krümmungsfluss sollte man - in unserem Fall - genauer vom Fluss von Hyperflächen entlang ihrer mittleren Krümmung reden.

5.1. Die Flussgleichung.

Wir setzen hier den Startzeitpunkt stets auf $t = 0$. Die Definitionen und Resultat lassen sich aber direkt auf andere Startzeitpunkte übertragen.

Definition 5.1.1 (Lokale Definition)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $T > 0$. Dann erfüllt die Abbildung $X\colon \Omega\times[0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss (lokal), falls $X(\cdot,t)$ für alle $t \in [0,T)$ eine immersierte C^2-Hyperfläche ist, X nach t differenzierbar ist und für alle $(x,t) \in \Omega \times [0,T)$ die Gleichung

$$\dot{X} = -H\nu$$

erfüllt ist.

Später ersetzt man in der folgenden Definition die Untermannigfaltigkeit durch eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

Definition 5.1.2 (Globale Definition)**.** Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $T > 0$. Dann erfüllt $X\colon M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine lokale Parametrisierung $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ von M um p gibt, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} X_\Phi := X \circ (\Phi \times \mathrm{id})\colon \Omega \times [0,T) &\to \mathbb{R}^{n+1}, \\ (x,t) &\mapsto X(\Phi(x),t) \end{aligned}$$

den mittleren Krümmungsfluss lokal erfüllt. Wir sagen auch, dass dann die Familie $(M_t)_{t\in[0,T)}$ mit $M_t = X(M,t)$ den mittleren Krümmungsfluss erfüllt.

Beispiel 5.1.3 (Sphären)**.** Sei $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $R > 0$. Dann ist $X\colon M \times \left[0, \frac{R^2}{2n}\right) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(p,t) := p \cdot \sqrt{R^2 - 2nt}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses.

Auf diese Lösung kommt man, indem man den Ansatz $X(p,t) := p \cdot f(t)$ macht. Hieraus erhält man $\lambda_i(t) = \frac{1}{f(t)}$, $H = \frac{n}{f(t)}$, $\dot{X} = p\dot{f}(t)$ und $\nu(p,t) = p$. Also sollte

$$p\dot{f}(t) = \dot{X} \overset{!}{=} -H\nu = -\frac{n}{f(t)}p$$

gelten. Dies ist für $\dot{f}(t) = -\frac{n}{f(t)}$ der Fall und die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung mit Anfangswert $f(0) = R$ ist durch $f(t) = \sqrt{R^2 - 2nt}$ gegeben.

Wir lassen es als Übung, die Definition des mittleren Krümmungsflusses auch formal zu überprüfen.

Bemerkung 5.1.4.

(i) Minimalflächen sind stationäre (= zeitunabhängige) Lösungen des mittleren Krümmungsflusses. Zylinder der Form $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ schrumpfen ähnlich wie Sphären. Sie konvergieren in endlicher Zeit gegen $\{0_{\mathbb{R}^{k+1}}\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Die grim reaper Lösung ist als Graph von $u(x,t) = -\log\cos x + t$, $(x,t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$, gegeben. Weitere explizite Beispiele sind die Haarnadel- oder Büroklammerlösung (haar pin, paper clip). Details: Übung.

(ii) Für weitere Lösungen muss man - soweit ich weiß - zumindest eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen (siehe beispielsweise meine Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen). Sind die Lösungen nicht symmetrisch, muss man eine quasilineare partielle Differentialgleichung lösen (siehe beispielsweise meine Vorlesung über den Graphischen mittleren Kümmungsfluss).

(iii) Beim mittleren Krümmungsfluss untersucht man häufig die Existenz von Lösungen und ihr Verhalten. Klassische Resultate von etwa 1985-1995 sind: Konvexe Hyperflächen konvergieren gegen runde Punkte, d. h. gegen einen Punkt und nach geeignetem Reskalieren gegen eine runde Sphäre (G. Huisken, [6]). Eingebettete $\mathbb{S}^1$-en bleiben eingebettet, werden in endlicher Zeit konvex und konvergieren dann auch gegen einen runden Punkt (M. Gage, R. Hamilton; M. Grayson [3, 4]). Graphische Hyperflächen über $\mathbb{R}^n$ existieren für alle Zeit und konvergieren nach Reskalieren gegen homothetisch expandierende Lösungen, wenn sie anfangs asymptotisch zu einem Kegel sind (K. Ecker, G. Huisken, [2]).

(iv) Ein großes Ziel ist es, mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses alle (kompakten) Hyperflächen in geeigneter Weise zu klassifizieren. Der mittlere Krümmungsfluss wird auch hier in der Arbeitsgruppe untersucht.

5.2. **Mittlerer Krümmungsfluss als geometrische Evolutionsgleichung.** Der mittlere Krümmungsfluss ist eine geometrische Evolutionsgleichung, d. h. das Bild $M_t := X(M,t)$ hängt nicht von der konkreten Parametrisierung ab und ist unter Euklidischen Bewegungen des umgebenden Raumes invariant. Da es häufig nur auf das Bild M_t ankommt, kann man auch Lösungen von $\langle \frac{d}{dt}X, \nu\rangle = -H$ untersuchen. Diese sind nicht eindeutig bestimmt, da man sie mit Hilfe von Diffeomorphismen wie im folgenden Theorem angegeben abändern kann.

Theorem 5.2.1. *Sei $X\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Lösung des mittleren Krümmungsflusses $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ oder eine Lösung, deren Normalengeschwindigkeit gerade die mittlere Krümmung ist: $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$. Sei $R \in O(n+1)$ eine orthogonale Abbildung und $\psi\colon \hat{\Omega} \times [0,T) \to \Omega$ glatt, so dass $\psi(\cdot,t)\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ für alle $t \in [0,T)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist die Normalengeschwindigkeit von $\hat{X}(x,t) := RX(\psi(x,t),t)$, in Koordinaten $\hat{X}^\alpha(x,t) = R^\alpha_\beta X^\beta(\psi(x,t),t)$, gerade die mittlere Krümmung:*

$$\left\langle \frac{d}{dt}\hat{X}, \hat{\nu}\right\rangle = -\hat{H}.$$

Weiterhin gilt $\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$.

Den Diffeomorphismus ψ kann man verwenden, um die Hyperflächen anders zu parametrisieren. Man kann zeigen, dass dies gerade einer anderen Wahl einer Parametrisierung in der globalen Definition entspricht. Daher kann man nicht mehr erwarten, dass die Tangentialgeschwindigkeit verschwindet, wenn wir ψ verwenden. Die Bilder von X und $X \circ \psi$ stimmen aber überein. Daher passiert in beiden Fällen geometrisch das Gleiche.

Da sämtliche Rechnungen im Beweis lokal sind, gilt dies auch, wenn die Mengen Ω und $\hat{\Omega}$ von der Zeit abhängen.

Beweis. Größen zu $\hat{X}$ bezeichnen wir mit $\hat{\nu}$, $\hat{H}$, $\hat{g}_{ij}$, ...

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{X}^\alpha &= R^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial t} X^\beta + R^\alpha_\beta X^\beta_k \dot{\psi}^k,\\ \hat{X}^\alpha_i &= R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_i,\\ \hat{X}^\alpha_{,ij} &= R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_{ij} + R^\alpha_\beta X^\beta_{,kl}\psi^k_i\psi^l_j.\end{aligned}$$

Wählen wir $\hat{\nu}^\alpha = R^\alpha_\beta \nu^\beta$, also $\hat{\nu} = R\nu$, so ist dies eine Normale an die Fläche $\hat{X}$, da $\langle R\nu, R\nu\rangle = \langle \nu, \nu\rangle = 1$ und $\left\langle R\nu, \left(R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_i\right)_\alpha\right\rangle = \langle \nu, X_k\rangle \psi^k_i = 0$ für alle $1 \le i \le n$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}\hat{X}, \hat{\nu}\right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} X^\alpha R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta + \dot{\psi}^i X^\alpha_i R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta\\ &= -H\nu^\alpha \delta_{\alpha\delta}\nu^\delta + \dot{\psi}^i X^\alpha_i \delta_{\alpha\delta}\nu^\delta\\ &= -H + 0.\end{aligned}$$

$\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ haben wir bereits in Lemma 3.3.5 gesehen. Um beide Teile des Beweises beieinander zu haben, wiederholen wir dies hier nochmals. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ij} &= \hat{X}^\alpha_i \delta_{\alpha\beta}\hat{X}^\beta_j = \psi^k_i X^\gamma_k R^\alpha_\gamma \delta_{\alpha\beta} R^\beta_\delta X^\delta_l \psi^l_j = \psi^k_i X^\gamma_k \delta_{\gamma\delta} X^\delta_l \psi^l_j = \psi^k_i g_{kl}\psi^l_j,\\ \hat{h}_{ij} &= -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\psi^k_{ij} X^\beta_k R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta - \psi^k_i \psi^l_j X^\beta_{,kl} R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta\\ &= -\psi^k_{ij} X^\beta_k \delta_{\beta\delta}\nu^\delta + \psi^k_i \left(-X^\beta_{,kl}\delta_{\beta\delta}\nu^\delta\right)\psi^l_j = 0 + \psi^k_i h_{kl}\psi^l_j.\end{aligned}$$

ψ ist ein Diffeomorphismus. Also ist $\left(\psi^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ eine invertierbare Matrix und die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij} und von $\hat{h}_{ij}$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ stimmen überein: Sei nämlich ξ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d. h. gelte

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

und $\xi \neq 0$. Dann folgt für $\hat{\xi}^i := \Psi^i_k \xi^k$ mit $\Psi(\cdot,t) := (\psi(\cdot,t))^{-1}$

$$\lambda \hat{g}_{kl}\hat{\xi}^l = \lambda \psi^i_k g_{ij}\psi^j_l \Psi^l_m \xi^m = \lambda \psi^i_k g_{ij}\xi^m = \psi^i_k h_{ij}\xi^j = \psi^i_k h_{ij}\psi^j_l \Psi^l_m \xi^m = \hat{h}_{kl}\hat{\xi}^l.$$

Andersherum argumentiert man analog. Somit folgt $\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ und damit die Behauptung. □

Übung 5.2.2. Finde Lösungen von $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$ und $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ für den Fall, dass M_0 ein Zylinder ist, dass also $M_0 = \left(R\cdot\mathbb{S}^k\right)\times\mathbb{R}^{n-k}$ für ein $R > 0$ gilt und überprüfe die Definition des mittleren Krümmungsflusses explizit.

5.3. **Graphische Krümmungsflüsse.**

Bemerkung 5.3.1.

(i) Die Resultate dieses Abschnittes gelten mit Modifikationen bei den Definitionsmengen auch für Graphen, die nicht über ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

(ii) Sei in diesem Abschnitt F eine beliebige Normalengeschwindigkeit, also z. B. $F = H$, $F = K$ oder $F = |A|^2$. Es sind aber auch Funktionen möglich, die beispielsweise zusätzlich von $X(x,t)$ oder ν abhängen.

(iii) Naiv könnte man denken, dass wir durch Betrachten der $(n+1)$-sten Komponente von $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ die Evolutionsgleichung $\dot{u} = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ erhielten. Dabei haben wir jedoch nicht berücksichtigt, dass sich dabei auch der Punkt x zeitlich ändern kann. Vergleiche dies auch mit einer Ebene, die sich mit konstanter Normalengeschwindigkeit bewegt.

(iv) Bei der Umkehrung kann man nicht erwarten, die Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt}X = -F\nu$$

zu erhalten, da Diffeomorphismen wie in Theorem 10.2.1 den Tangentialanteil von $\frac{d}{dt}X$ ändern können.

Lemma 5.3.2. *Sei $(M_t)_{0\le t<T}$ eine Lösung von $\frac{d}{dt}X = -F\nu$. Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte oder $C^{2;1}$-Funktion mit*

$$M_t = \operatorname{graph} u(\cdot, t)$$

für alle $t \in [0,T)$. Dann erfüllt u die Gleichung

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot F,$$

im Falle von $F = H$ also

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right),$$

in $\mathbb{R}^n \times [0,T)$.

Umgekehrt sei u eine Lösung von $\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot F$. Dann gilt $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu \right\rangle = -F$ für $X(x,t) = (x, u(x,t))^T$, jedoch im allgemeinen nicht $\frac{d}{dt}H = -F\nu$.

Im Falle $F = H, K$ oder $|A|^2$ handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung.

Beweis. Sei X auf $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ definiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ mit ξ. Wir bezeichnen weiterhin die orthogonale Projektion von $X(\xi,t)$ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$ mit $x(\xi,t)$. Dann gilt

$$X(\xi,t) = (x(\xi,t), u(x(\xi,t),t))^T.$$

Aus der Evolutionsgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}X = \left(\dot{x}, u_i\dot{x}^i + \dot{u}\right)^T = -F\nu = F\frac{(-u^1,\dots,-u^n,1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Dabei benutzen wir $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Durch Komponentenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{x}^i &= \frac{-Fu^i}{\sqrt{1+|Du|^2}},\\
\dot{u} &= \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}} - u_i\dot{x}^i = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{F|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F.
\end{aligned}$$

Bis hier gelten die Rechnungen auch für andere Normalengeschwindigkeiten als H. Die Formel für H im graphischen Fall haben wir bereits oben in Lemma 3.3.6 hergeleitet. Somit folgt die Behauptung.

Zur Umkehrung der Aussage: Definiere $X(x,t) = (x, u(x,t))^T$ für eine Funktion u mit $\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X &= \left(0, \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F\right)^T,\\
\nu &= \frac{(\nabla u, -1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}},\\
\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu \right\rangle &= -F.
\end{aligned}$$

Ist $Du \neq 0$, so kann $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ nicht gelten. □

Eine bessere Umkehrung betrachten wir später.

6. Kurven im $\mathbb{R}^n$

6.1. Kurven, Bogenlänge und Umparametrisierung.

Definition 6.1.1.

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\alpha \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \equiv \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, heißt parametrisierte Kurve der Klasse C^k im $\mathbb{R}^n$.

(ii) Eine C^1-Kurve α heißt regulär, falls $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

(iii) Eine C^k-Kurve $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt C^k-geschlossen, falls

$$\alpha^{(l)}(a) = \alpha^{(l)}(b)$$

für alle $0 \leq l \leq k$ gilt.

(iv) Eine Kurve α heißt stückweise von der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq N$, mit $I = [a_0, a_N]$, $a_i \leq a_{i+1}$ für alle $0 \leq i < N$ und $\alpha|_{[a_i, a_{i+1}]} \in C^k$ für alle $0 \leq i \leq N - 1$ gibt.

(v) Ist $\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-geschlossene Kurve, so stellen wir die Kurve auch als Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{R}^n, \\ e^{i\varphi} &\mapsto \alpha(\varphi) \end{aligned}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ dar.

(vi) Ist $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^1-Kurve, so heißt

$$T(t) := \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$$

(normierter) Tangentialvektor in $t \in I$ an die Kurve α.

Definition 6.1.2 (Bogenlänge)**.** Sei $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

die Bogenlänge der Kurve α, wobei die Integration jeweils einzeln über Intervalle, auf denen α von der Klasse C^1 ist, ausgeführt wird.

Definition 6.1.3. Seien $\alpha_i\colon I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, parametrisierte C^1-Kurven. Dann heißt α_2 Umparametrisierung von α_1, falls es eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I_2$ (also einen Diffeomorphismus) gibt, so dass

$$\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$$

gilt.

φ heißt Parametertransformation. Sie heißt richtungstreu, falls $\varphi' > 0$ gilt und richtungsumkehrend, wenn $\varphi' < 0$ gilt.

Zur Umparametrisierung von Kurven der Klasse C^k verwenden wir Parametertransformationen der Klasse C^k.

Lemma 6.1.4. *Auf der Menge aller parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$ ist $\sim$ mit $\alpha \sim \beta$, falls β eine Umparametrisierung von α ist, eine Äquivalenzrelation.*

Beweisidee. Beachte dazu insbesondere, dass die Inverse einer Parametertranformation wieder eine Parametertransformation ist und dass die Verknüpfung von zwei Parametertransformationen (bei geeigneten Definitionsbereichen) ebenfalls eine Parametertransformation ist. □

Lemma 6.1.5. *Sei α_2 eine Umparametrisierung von α_1, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.*

(i) Dann gilt $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

(ii) Der normierte Tangentialvektor $\frac{\alpha_i'}{|\alpha_i'|}$ ist bei einer orientierungserhaltenden Parametertransformation invariant, d. h. es gilt

$$\frac{\alpha_2'}{|\alpha_2'|} = \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1'|} \circ \varphi.$$

(iii) Ist α_1 regulär, so auch α_2.

Beweis.

(i) Sei α_i auf $I_i = [a_i, b_i]$ definiert. Dann erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale

$$L(\alpha_2) = \int_{a_2}^{b_2} |\alpha_2'(t)|\, dt = \int_{a_2}^{b_2} |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_{a_1}^{b_1} |\alpha_1'(\tau)|\, d\tau = L(\alpha_1).$$

Ist $\varphi' < 0$, so wird der Faktor $\frac{|\varphi'|}{\varphi'} = -1$ aufgrund der Integraltransformation durch Vertauschen der Integrationsgrenzen wieder kompensiert.

(ii) Es gilt

$$\frac{\alpha_2'(t)}{|\alpha_2'(t)|} = \frac{\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))}{\left|\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))\right|} = \frac{\alpha_1'(\varphi(t))}{|\alpha_1'(\varphi(t))} \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

(iii) Dies folgt ebenfalls aus der Kettenregel $\alpha_2'(t) = \alpha_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. □

Definition 6.1.6. Eine C^1-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls $|\alpha'(t)| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung 6.1.7. Ist $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt $L(\alpha) = b - a$.

Theorem 6.1.8. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^k-Kurve, $k \geq 1$. Dann gibt es eine (orientierungserhaltende) Parametertransformation $\varphi \in C^k(J, I)$, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Definiere die Bogenlängenfunktion $\sigma\colon I \to \mathbb{R}$ für ein $t_0 \in I$ durch

$$\sigma(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau$$

und setze $J := \sigma(I)$. Wegen $\sigma'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ ist $\sigma \in C^k(I, J)$ invertierbar. Setze $\varphi(s) := \sigma^{-1}(s)$. Wir erhalten aus $\varphi(\sigma(\tau)) = \tau$ zunächst $\varphi'(\sigma(\tau))\sigma'(\tau) = 1$ und $\varphi'(s) = \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))}$. Somit gilt

$$\left|\frac{d}{ds}\alpha(\varphi(s))\right| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1$$

und wir erhalten die Behauptung.

Es ist üblich, s als Parameter für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve zu verwenden. □

Bemerkung 6.1.9. Sind α_i, $i = 1, 2$, beide nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\alpha_2(t) = \alpha_1(\varphi(t))$, dann folgt

$$1 = |\alpha_2'(t)| = |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|$$

und daher ist $\varphi(t) = t_0 \pm t$. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist also bis auf eine Isometrie von $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

6.2. **Die isoperimetrische Ungleichung.**

Theorem 6.2.1 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei ∂G das Bild einer nach der Bogenlänge parametrisierten stückweisen C^1-Kurve $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = \alpha(L)$, so dass $\alpha|_{[0,L)}$ injektiv ist. Sei $\mathcal{A} := |G|$ der Flächeninhalt von G und L die (Bogen-)Länge von α. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \leq \frac{1}{4\pi} L^2$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn G ein Ball ist.

Lemma 6.2.2. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und sei ∂G das Bild einer stückweisen C^1-Kurve $\alpha : [0, a] \to \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha|_{[0,a)}$ injektiv und gelte $\alpha(0) = \alpha(a)$. Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$. Dann gilt $|G| = \int\limits_0^a x(t)y'(t)\, dt$.*

Beweis. Sei ν die äußere Normale an G. Nehme an, dass G links der Kurve liegt und dass diese nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann sind $T = \alpha' = (x', y')^T$ und $\nu = (y', -x')^T$. Nach dem Divergenzsatz gilt

$$2|G| = \int\limits_G 2 = \int\limits_G \operatorname{div}(x, y)^T = \int\limits_{\partial G} \left\langle \nu, (x, y)^T \right\rangle = \int\limits_0^a (xy' - yx')(s)\, ds.$$

Da α eine geschlossene Kurve ist, sehen wir mit partieller Integration, dass beide Summanden denselben Beitrag liefern. Aufgrund der Integraltranformationsformel gilt die Behauptung auch, wenn α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist. □

Beweis von 6.2.1. Sei wiederum $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$. Nach Translation gelte ohne Einschränkung $\operatorname{im} x = [-r, r]$ für ein $r > 0$. Gelte weiterhin ohne Einschränkung $x(0) = r$ und $x(t_0) = -r$ für ein $t_0 \in (0, L)$. Definiere

$$\overline{y}(t) := \begin{cases} -\sqrt{r^2 - x^2(t)}, & t \leq t_0, \\ +\sqrt{r^2 - x^2(t)}, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Dann ist $\beta : t \mapsto (x(t), \overline{y}(t))^T$ eine nicht notwendigerweise injektive Parametrisierung des Kreises $\partial B_r(0)$. Außerdem braucht $\overline{y}$ bei $\overline{y} = 0$ nicht mehr stückweise von der Klasse C^1 zu sein; es braucht keine Partition von $[0, L]$ in endlich viele Intervalle zu geben, auf denen β jeweils von der Klasse C^1 ist. Fehlende Injektivität und Regularität sind jedoch beides technische Probleme, die wir in der folgenden Bemerkung 6.2.3 behandeln werden. Treten diese technischen Probleme nicht auf, so gilt

$$\mathcal{A} + \pi r^2 = \int\limits_0^L xy' - \bar{y}x'\, dt = \int\limits_0^L \left\langle \begin{pmatrix} x \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$\leq \int\limits_0^L \underbrace{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}_{=r,\ \text{da } (x,\bar{y}) \in \partial B_r(0)} \cdot \underbrace{\sqrt{x'^2 + y'^2}}_{=|\alpha'|=1}\, dt = Lr. \tag{6.2.1}$$

Somit ist

$$2\sqrt{\mathcal{A}} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \mathcal{A} + \pi r^2 \leq Lr \tag{6.2.2}$$

und die isoperimetrische Ungleichung folgt.

Gilt überall Gleichheit, so folgt aus der ersten Ungleichung in (6.2.2) $\mathcal{A} = \pi r^2$. Der Radius r hängt damit insbesondere nicht von der Richtung ab, in die wir die Kurve projizieren. Aus (6.2.1) folgt $(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)(x'^2 + y'^2)$, also auch (direktes Ausmultiplizieren oder: drehe einen Vektor um 90° und benutze die

Orthogonalität) $(xx' + \bar{y}y')^2 = 0$. Aus dieser Gleichung folgen die ersten beiden Gleichheitszeichen in

$$\frac{x}{y'} = -\frac{\bar{y}}{x'} = \pm\frac{\sqrt{x^2+\bar{y}^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \pm r.$$

(Falls $y' = 0$ ist, folgt $x = 0$ und die nächste Gleichung gilt trotzdem.) Also gilt $x = \pm ry'$. Da r unabhängig von Drehungen des Koordinatensystems ist, folgt ebenso $y = \pm rx'$. Also ist $x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2$. Die Kurve α durchläuft also einen Kreis. □

Bemerkung 6.2.3. ⋆ Man überlege sich als Übung, dass die Zusatzterme, die wir einführen, wenn wir β regulär und injektiv machen, für $\varepsilon \downarrow 0$ verschwinden.

Zur Regularität: Sei $\varepsilon > 0$. Wir arbeiten mit einem vergrößerten Kreis mit Radius $r + \varepsilon$ und definieren $\tilde{\beta}\colon [-1, L+2] \to \mathbb{R}^2$ und vermöge $\tilde{\beta}(t) = \big(\tilde{x}(t), \tilde{\bar{y}}(t)\big)$ auch $\tilde{x}$ und $\tilde{\bar{y}}$. Auf den Intervallen $[-1, 0]$, $[t_0, t_0 + 1]$ und $[L + 1, L + 2]$ machen wir Hilfskonstruktionen, die im Grenzwert $\varepsilon \downarrow 0$ keinen Einfluss auf die Rechnungen haben. Auf $[0, t_0]$ und $[t_0 + 1, L + 1]$ arbeiten wir mit dem Radius $r + \varepsilon$ statt r, um die Regularität zu sichern.

Da diese Definitionen etwas technischer sind, beschreiben wir unsere Konstruktion zunächst in Worten:

- Statt mit $\partial B_r(0)$ arbeiten wir mit $\partial B_{r+\varepsilon}(0)$.
- Auf $[-1, 0]$ verbindet $\tilde{\beta}$ die Punkte $(r + \varepsilon, 0)$ und $\Big(r, -\sqrt{(r+\varepsilon)^2 - r^2}\Big) = \big(r, -\sqrt{2\varepsilon r + \varepsilon^2}\big)$ auf $\partial B_{r+\varepsilon}(0)$. Dazu normieren wir die Konvexkombination auf Abstand $r + \varepsilon$ zum Ursprung.
- Auf $[0, t_0]$ nutzen wir, bis auf ε, die bisherige Konstruktion und gelangen auf dem unteren Halbkreis nach $\big(-r, -\sqrt{2\varepsilon r + \varepsilon^2}\big)$.
- Auf $[t_0, t_0 + 1]$ gelangen wir auf $\partial B_{r+\varepsilon}(0)$ analog zu oben vom Punkt $\big(-r, -\sqrt{2\varepsilon r + \varepsilon^2}\big)$ nach $\big(-r, +\sqrt{2\varepsilon r + \varepsilon^2}\big)$.
- Auf $[t_0 + 1, L + 1]$ folgen wir analog zu oben wieder der bisherigen Konstruktion von $[t_0, L]$ mit einem zusätzlichen ε.
- Auf $[L + 1, L + 2]$ verbinden wir analog zum Vorgehen auf dem Intervall $[-1, 0]$ den Punkt $\big(r, +\sqrt{2\varepsilon r + \varepsilon^2}\big)$ mit $(r + \varepsilon, 0)$.

In Formeln definieren wir

$$\tilde{\beta}(t) := \begin{cases} (r+\varepsilon)\frac{-t(r+\varepsilon,0)+(1+t)\left(r,-\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)}{\left\|-t(r+\varepsilon,0)+(1+t)\left(r,-\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)\right\|}, & -1 \le t \le 0, \\ \left(x(t), -\sqrt{(r+\varepsilon)^2 - x^2(t)}\right), & 0 \le t \le t_0, \\ (r+\varepsilon)\frac{(1+t_0-t)\left(-r,-\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)+(t-t_0)\left(-r,+\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)}{\left\|(1+t_0-t)\left(-r,-\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)+(t-t_0)\left(-r,+\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)\right\|}, & t_0 \le t \le t_0+1, \\ \left(x(t-1), +\sqrt{(r+\varepsilon)^2 - x^2(t-1)}\right), & t_0+1 \le t \le L+1, \\ (r+\varepsilon)\frac{(2+L-t)\left(r,\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)+(t-L-1)(0,0)}{\left\|(2+L-t)\left(r,\sqrt{2\varepsilon r+\varepsilon^2}\right)+(t-L-1)(0,0)\right\|}, & L+1 \le t \le L+2. \end{cases}$$

Da wir für festes $\varepsilon > 0$ nur gleichmäßig nach unten durch eine positive Konstante beschränkte Werte in die Wurzeln einsetzen, ist die Regularität klar.

Zur Injektivität: Sei wiederum $\varepsilon > 0$. Unabhängig von der obigen Konstruktion zur Regularität nennen wir unsere Startkurve wieder β. Wir nehmen an, dass $\beta(t) \in \partial B_r(0) \cap \{x^2 \le 0\}$ für $t \in [0, t_0]$ und $\beta(t) \in \partial B_r(0) \cap \{x^2 \ge 0\}$ für $t \in [t_0, L]$ gelten. Injektivität erzeugen wir nun, indem wir die Kurve leicht nach außen deformieren. Dazu definieren wir

$$\tilde{\beta}(t) := \begin{cases} \left(1 + \varepsilon\frac{t}{t_0}\right)\beta(t), & 0 \le t \le t_0, \\ \left(1 + \varepsilon\left(1 - \frac{t-t_0}{L-t_0}\right)\right)\beta(t), & t_0 \le t \le L. \end{cases}$$

Die Injektivität ist nun leicht einzusehen.

Zur Gleichheit: Differenzierbarkeit und Injektivität braucht man nur für Lemma 6.2.2. Im Beweis haben wir die Variante mit $\overline{y}x'$ verwendet. Hierfür reicht ein stetiges $\overline{y}$. Durch Approximation $\varepsilon \downarrow 0$ in der Flächenformel erhalten wir diese mit $\overline{y}$. Die Diskussion der Gleichheit gilt also unverändert.

7. Krümmung von Kurven

Sei $I \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall.

7.1. Definition der Krümmung von Kurven in der Ebene.

Bemerkung 7.1.1. Wir setzen

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Es gilt $J^2 = -\mathbb{1}$ und $\langle Jv, w\rangle = \det(v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Identifizieren wir einen Vektor $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $z := a + ib \subset \mathbb{C}$, so ist bezüglich dieser Identifizierung $Jz = iz$.

Beweis. Einfaches direktes Nachrechnen. □

Definition 7.1.2.

(i) Sei $\alpha \in C^k\left(I, \mathbb{R}^2\right)$, $k \geq 1$, regulär. Definiere den Tangentialvektor von α durch $\tau(t) := \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ und die (Einheits-)Normale ν an α durch $\nu(t) := J\tau(t)$.

(ii) Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und damit automatisch regulär. Dann definieren wir die (orientierte) Krümmung $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ von α durch

$$\kappa(s) := \langle \alpha''(s), \nu(s)\rangle.$$

(iii) Ist α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir die Krümmung von α durch

$$\kappa_\alpha := \kappa_{\alpha\circ\varphi} \circ \varphi^{-1},$$

wobei φ eine orientierungserhaltende C^2-Parametertransformation ist, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Bemerkung 7.1.3.

(i) Es gilt $\nu \in C^{k-1}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$.

(ii) Der Vektor ν senkrecht auf τ: $\langle \tau(t), \nu(t)\rangle = 0$.

(iii) Die Vektoren $\tau(t), \nu(t)$ bilden ein positiv orientiertes (normiertes) 2-Bein längs α, d. h. es gelten $|\tau(t)| = 1$, $|\nu(t)| = 1$ und $\det(\tau(t), \nu(t)) = 1$. Weiterhin ist $\tau(t)$ ein positives Vielfaches von $\alpha'(t)$. Diese Eigenschaften definieren $\tau(t), \nu(t)$ bereits eindeutig.

(iv) Den Beweis, dass die Krümmung einer nicht nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve wohldefiniert ist, lassen wir als Übungsaufgabe.

Lemma 7.1.4. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Dann gilt*

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Ist α ein Graph, also von der Form $\alpha(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$ mit $u \in C^2(I, \mathbb{R})$, so gilt

$$\kappa(x) = \frac{u''(x)}{\left(1 + (u'(x))^2\right)^{3/2}}.$$

Beweis. Sei $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\varphi' > 0$. Wir leiten zunächst Formeln für die Ableitungen von φ her:

$$\begin{aligned}
1 &= |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'|_{\varphi(s)}| \cdot \varphi'(s), \\
\varphi'(s) &= \frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|}, \\
\varphi''(s) &= -\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|} \cdot 2 \cdot \langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle \\
&= -\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|^4} \langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s)) \rangle, \\
\kappa_\alpha(t) &= \langle (\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s))', J\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle|_{s=\varphi^{-1}(t)} \\
&= \langle \alpha''(\varphi(s)) \cdot (\varphi'(s))^2 + \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s), J\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \rangle|_{s=\varphi^{-1}(t)} \\
&= \left\langle \alpha''(t) \cdot \left(\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right)^2 - \frac{\langle \tau_\alpha(t), \alpha''(t) \rangle \tau_\alpha(t)}{|\alpha'(t)|^2}, J\alpha'(t) \cdot \varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\alpha'(t)|^2} \langle \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), \tau_\alpha(t) \rangle \tau_\alpha(t), J\tau_\alpha(t) \rangle \\
&= \frac{\det(\tau_\alpha(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.
\end{aligned}$$

Im graphischen Fall erhalten wir aus $\alpha(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$ für die Ableitungen $\alpha'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix}$ und $\alpha''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ u''(x) \end{pmatrix}$. Mit $|\alpha'(x)| = \sqrt{1 + (u'(x))^2}$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 7.1.5. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $s_0 \in \overset{\circ}{I} = \operatorname{int} I$. Definiere die beiden Halbebenen

$$E^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x - \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle > 0\right\}$$

und

$$E^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x - \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle < 0\right\}.$$

Setze $h(s) := \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle$. Dann sind $h(s) > 0$ und $\alpha(s) \in E^+$ sowie $h(s) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$ jeweils äquivalent. Es gilt $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), \nu(s_0) \rangle = 0$ und $h''(s_0) = \langle \alpha''(s_0), \nu(s_0) \rangle = \kappa(s_0)$. Nach Taylor erhalten wir $h(s) = \frac{1}{2}\kappa(s_0)(s - s_0)^2 + o(|s - s_0|^2)$. Somit erhalten wir im Falle $\kappa(s_0) > 0$, dass $\alpha(s) \in E^+$ für $s \neq s_0$ nahe bei s_0 gilt (Linkskurve). Eine entsprechende Aussage gilt für $\kappa(s_0) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$.

Lemma 7.1.6. *Sei $F(x) = Sx + a$ mit $S \in O(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$ eine starre Bewegung. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Setze $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$. Dann gelten*

$$\tilde{\tau} = S\tau, \quad \tilde{\nu} = \det S \cdot S\nu, \quad \textit{und} \quad \tilde{\kappa} = \det S \cdot \kappa.$$

Beweis. Wegen $|\tilde{\alpha}'| = |S\alpha'| = |\alpha'| = 1$ ist $\tilde{\alpha}$ ebenfalls nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt $\tilde{\tau} = \frac{S\alpha'}{|\tilde{\alpha}'|} = S\alpha' = S\tau$. Weiterhin gilt $\langle \tilde{\alpha}', S\nu \rangle = \langle S\alpha', S\nu \rangle = \langle \alpha', \nu \rangle = 0$, $|S\nu| = |\nu| = 1$ sowie $\det(\tilde{\alpha}', S\nu) = \det(S\alpha', S\nu) = \det S \cdot \det(\alpha', \nu) = \det S$. Somit ist $\tilde{\nu} = \det S \cdot S\nu$ die gesuchte Normale längs $F \circ \alpha$. Schließlich gilt

$$\tilde{\kappa} = \langle \tilde{\alpha}'', \tilde{\nu} \rangle = \det S \cdot \langle S\alpha'', S\nu \rangle = \det S \cdot \kappa.$$ □

Das nachfolgende Lemma erklärt die geometrische Bedeutung der Krümmung einer Kurve.

Lemma 7.1.7 (Schmiegekreis). *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ regulär, ohne Einschränkung nach Lemma 7.1.6 und Umparametrisierung (Satz über implizite Funktionen) lokal sogar von der Form $\alpha(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$. Sei $x_0 \in \operatorname{int} I$.*

(i) Ist $\kappa(x_0) = 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu der Geraden $\beta(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x_0) + (x - x_0) \cdot u'(x_0)) \end{pmatrix}$, d. h. es gilt $|\alpha(x) - \beta(x)| = o(|x - x_0|^2)$ oder $|u(x) - (u(x_0) + (x - x_0) \cdot u'(x_0))| = o(|x - x_0|^2)$.

(ii) Ist $\kappa(x_0) \neq 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu einem Kreis β mit Mittelpunkt $\left(x_0, u(x_0)\right) + \frac{1}{\kappa(x_0)} \frac{1}{\sqrt{1+|u'|^2}} \begin{pmatrix} -u' \\ 1 \end{pmatrix}(x_0)$ und Radius $\frac{1}{|\kappa(x_0)|}$, d. h. es gelten in Graphendarstellung

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}$$

mit

$$h(x) = -\operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \sqrt{\frac{1}{\kappa(x_0)^2} - \left| x - x_0 + \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \right|^2} + u(x_0) + \frac{1}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}}$$

und

$$|\alpha(x) - \beta(x)| = o(|x - x_0|^2)$$

oder

$$|u(x) - h(x)| = o(|x - x_0|^2).$$

Sind $\alpha \circ \varphi$ und $\beta \circ \psi$ nach orientierungserhaltenden Parametertransformationen φ bzw. ψ nach der Bogenlänge parametrisiert und ist $\varphi(s_0) = x_0 = \psi(s_0)$, so gilt ebenfalls $|\alpha \circ \varphi(s) - \beta \circ \psi(s)| = o(|s - s_0|^2)$.

Beweis.

(i) Folgt direkt nach Taylor.

(ii) Es gilt mit $\kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{3/2}}$

$$\begin{aligned} h(x_0) &= \underbrace{-\frac{\operatorname{sign} \kappa(x_0)}{|\kappa(x_0)|}}_{=\frac{-1}{\kappa(x_0)}} \sqrt{1 - \frac{(u'(x_0))^2}{1 + (u'(x_0))^2}} + u(x_0) + \frac{1}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \\ &= u(x_0), \end{aligned}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \frac{-2}{\sqrt{\cdots}} \left(x - x_0 + \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))}} \right),$$

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{\sqrt{\cdots}} \cdot \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \\ &= \underbrace{|\kappa(x_0)| \cdot \operatorname{sign}(\kappa(x_0))}_{=\kappa(x_0)} \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2} \cdot \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \\ &= u'(x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h''(x_0) &= \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{(\sqrt{\cdots})^3} \cdot \left(\frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \right)^2 + \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{\sqrt{\cdots}} \\
&= \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \cdot |\kappa(x_0)|^3 \cdot \left(1+(u'(x_0))^2\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2}} \right)^2 \\
&\qquad + \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \cdot |\kappa(x_0)| \cdot \sqrt{1+(u'(x_0))^2} \\
&= \kappa(x_0) \cdot \left(1+(u'(x_0))^2\right)^{3/2} = u''(x_0).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun ebenfalls nach Taylor.

Wir halten fest, dass $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, $\alpha'(x_0) = \beta'(x_0)$ und $\alpha''(x_0) = \beta''(x_0)$ gelten.

Es gilt $1 = |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s) = |\beta'(\psi(s))| \cdot \psi'(s)$ und daher insbesondere $\varphi'(s_0) = \psi'(s_0)$. Nochmaliges Differenzieren liefert

$$0 = \frac{\langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s)) \rangle}{|\alpha'(\varphi(s))|} (\varphi'(s))^2 + |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi''(s).$$

Da aber $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, $\alpha'(x_0) = \beta'(x_0) \neq 0$ und $\alpha''(x_0) = \beta''(x_0)$ gelten, folgt auch $\varphi''(s_0) = \psi''(s_0)$. Somit folgt auch die letzte Behauptung mit Taylor. □

Lemma 7.1.8. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten für $\tau = \alpha'$ und $\nu = J\tau$ die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\tau' &= \kappa\nu, \\
\nu' &= -\kappa\tau
\end{aligned}$$

oder

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus $\langle \tau(s), \tau(s) \rangle = 1$ folgt durch Differenzieren $0 = 2\langle \tau(s), \tau'(s) \rangle$. Damit und nach Definition der Krümmung ($\kappa(s) = \langle \alpha''(s), \nu \rangle$) sowie $\tau(s) = \alpha'(s)$ folgt die erste Gleichheit. Differenzieren von $0 = \langle \tau, \nu \rangle$ liefert $\kappa = \langle \tau', \nu \rangle = -\langle \tau, \nu' \rangle$. Aus $|\nu| = 1$ folgt wie oben, dass $\langle \nu', \nu \rangle = 0$ gilt. Die Behauptung folgt. □

7.2. **Krümmung von Raumkurven.** Wir erinnern daran, dass in $\mathbb{R}^2$ für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve α stets $|\alpha''| = |\tau'| = |\kappa|$ gilt. Dies motiviert

Definition 7.2.1. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die Krümmung $\kappa(s) \in [0, \infty)$ von α im Punkt s durch

$$\kappa(s) := |\alpha''(s)|.$$

Beispiele 7.2.2.

(i) Die Kurve $\alpha(s) = r\left(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\right)$, $r > 0$, ist ein nach der Bogenlänge parametrisierter Kreis. Es gilt

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

für alle s.

(ii) Eine Gerade $\alpha(s) = x_0 + s \cdot e$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ hat überall die Krümmung Null.

(iii) Seien $r, a \in \mathbb{R}$ und $L > 0$ noch zu wählen. Dann ist die Schraubenlinie

$$\alpha(t) = \left(r\cos\frac{t}{L}, r\sin\frac{t}{L}, a\frac{t}{L} \right)$$

wegen $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2+a^2}\frac{1}{L}$ genau für $L = \sqrt{r^2+a^2}$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Somit ist

$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2+a^2}$$

für alle t.

Definition 7.2.3. Sei $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Eine Familie $(v_i)_{1\le i\le n}$ von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ heißt ein längs α begleitendes n-Bein, falls

$$v_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad \text{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$$

für alle $1 \le i, j \le n$ und alle $t \in I$ gelten.

Man vergleiche das folgende Resultat mit dem Satz der Linearen Algebra, dass jede differenzierbare Familie $A(t)$ orthogonaler Matrizen mit $A(0) = \mathbb{1}$ eine schiefsymmetrische Ableitung $\dot{A}(0)$ besitzt.

Lemma 7.2.4. *Seien $v_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le n$, und $t_0 \in I$ beliebig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) $\langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in I$ und alle $1 \le i, j \le n$.
(ii) Es gibt eine t-abhängige Matrix $A = (a_{ij}) \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $A = -A^T$, also $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ für alle $1 \le i, j \le n$, und es gilt

$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \text{für} \quad 1 \le i \le n \quad \text{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0)\rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Da die Vektoren v_i eine Orthonormalbasis bilden, lässt sich jeder Vektor (und damit insbesondere auch v_i') hiermit darstellen. Es gilt $v_i' = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j\rangle$. Wir erhalten

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i\rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle'}_{=0} - \langle v_j, v_i'\rangle = -a_{ij}.$$

„(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Definiere $g_{ij} := \langle v_i, v_j\rangle$. Dann gelten $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$\begin{aligned} g_{ij}' &= \langle v_i', v_j\rangle + \langle v_i, v_j'\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, v_j \right\rangle + \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} g_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk} g_{ik}. \end{aligned}$$

Damit lösen die Funktionen $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ein lineares System von n^2 gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da a_{ij} schiefsymmetrisch ist, löst δ_{ij} dieses System ebenfalls,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk}\delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta_{ij}'.$$

Der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert nun $g_{ij}(t) = \delta_{ij}$. □

Definition 7.2.5. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa(s) \ne 0$ für alle $s \in I$. Dann heißt α Frenetkurve. T, N, B mit

$T, N, B\colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ heißt Frenet-Dreibein zu α und ist durch

$$T := \alpha' \quad \text{(Tangentenvektor)},$$

$$N := \frac{\alpha''}{|\alpha''|} \quad \text{(Hauptnormalenvektor)}$$

und

$$B := T \times N \equiv \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2N^3 - T^2N^1 \\ T^3N^1 - T^1N^3 \\ T^1N^2 - T^2N^1 \end{pmatrix} \quad \text{(Binormalenvektor)}$$

definiert. Dabei heißt „$\times$“: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der angegebenen Definition Kreuzprodukt. Wir definieren die Torsion von α, $\tau\colon I \to \mathbb{R}$, durch

$$\tau(s) := \langle N'(s), B(s) \rangle.$$

Lemma 7.2.6 (Frenetgleichungen)**.** *Sei $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine (nach der Bogenlänge parametrisierte) Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Lemma 7.2.4 wissen wir, dass die Matrix schiefsymmetrisch sein muss. Nun gilt $T = \alpha'$ und $T' = \alpha'' = \kappa N$ nach Definition von κ und N. Weiterhin nach Definition gilt $\tau = \langle N', B \rangle$. Somit ist die Matrix eindeutig bestimmt. □

Theorem 7.2.7. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*

(i) Ist $\kappa \equiv 0$, so ist $\alpha(I)$ Teilmenge einer Geraden.
(ii) Ist $\alpha \in C^3$ und eine Frenetkurve mit $\tau \equiv 0$, so liegt $\alpha(I)$ in einer Ebene.

Beweis.

(i) Aus $\kappa \equiv 0$ erhalten wir $\alpha'' \equiv 0$. Integrieren liefert $\alpha(s) = p + sv$ für $p, v \in \mathbb{R}^3$.
(ii) Nach Annahme und den Frenetgleichungen erhalten wir $B' \equiv 0$. Also gilt $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mit $\alpha' = T \perp B$ erhalten wir $\langle \alpha(s), b \rangle' = \langle \alpha'(s), b \rangle \equiv 0$. Somit ist $\langle \alpha(s), b \rangle$ konstant und wir schließen $\alpha(I) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, b \rangle = a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. □

Theorem 7.2.8. *Seien $k \in C^1(I)$ mit $k > 0$ und $\omega \in C^0(I)$ gegeben. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ mit Krümmung $\kappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Bis auf eine orientierungserhaltende Euklidische Bewegung ist α eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei T, N, B eine C^1-Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

mit gegebenen Anfangswerten $T(s_0) = e_1$, $N(s_0) = e_2$ und $B(s_0) = e_3$. Diese existiert nach Picard-Lindelöf, da T, N, B auch global beschränkt bleibt. Nach Lemma 7.2.4 bilden diese Vektoren für jedes s eine Orthonormalbasis. Setze $\alpha(s) :=$

$\int\limits_{s_0}^{s} T(\sigma)\,d\sigma$. Dann ist $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$, da $T \in C^1$ ist und ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir erhalten $\alpha' = T$ und $\alpha'' = T' = kN$. Damit folgt $k = \kappa$ und N ist die Hauptnormale an α. Wegen $k, N \in C^1$ erhalten wir $\alpha \in C^3$. Es gilt $\det(T, N, B) = 1$. Zunächst ist dies für $s = s_0$ klar und folgt dann allgemein aufgrund der Stetigkeit und dass die drei Vektoren stets eine Orthonormalbasis bilden. Somit ist B der Binormalenvektor an die Kurve α. Wegen $\tau = \langle N', B\rangle = \omega$ ist die Torsion wie angegeben.

Zur Eindeutigkeit: Nach einer Euklidischen Bewegung dürfen wir annehmen, siehe auch Lemma 7.2.12, dass eine beliebige Lösung β mit $\tilde{T}$, $\tilde{N}$ und $\tilde{B}$ in s_0

$$T = \tilde{T}, \quad N = \tilde{N}, \quad \text{und} \quad B = \tilde{B}$$

erfüllt. Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt dann überall $(T, N, B) = \left(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\right)$. Nach Integration sehen wir, dass $\beta(s) - \alpha(s) = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ konstant ist. Somit stimmen α und β bis auf eine Euklidische Bewegung überein. □

Definition 7.2.9. ⋆ Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ regulär. Sei $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi \colon J \to \mathbb{R}^3$ eine richtungstreue Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Definiere

(i) die Krümmung $\kappa(t) := \tilde{\kappa}(\varphi^{-1}(t))$ von α.
(ii) das Frenetdreibein bestehend aus $T(t) := \tilde{T}(\varphi^{-1}(t))$, $N(t) := \tilde{N}(\varphi^{-1}(t))$ und $B(t) := \tilde{B}(\varphi^{-1}(t))$ für $\kappa \neq 0$.
(iii) die Torsion $\tau(t) := \tilde{\tau} \circ \varphi^{-1}(t)$ für $\alpha \in C^3$ und $\kappa \neq 0$.

Lemma 7.2.10. ⋆ *T, N, B, κ und τ sind wohldefiniert und es gilt für beliebige richtungstreue („+“) oder richtungsumkehrende („−“) Umparametrisierungen $\beta = \alpha \circ \varphi$ von α*

$$\begin{aligned} &T_\beta = \pm\, T_\alpha \circ \varphi, \quad N_\beta = N_\alpha \circ \varphi, \quad B_\beta = \pm B_\alpha \circ \varphi, \\ &\kappa_\beta = \kappa_\alpha \circ \varphi \quad \textit{und} \quad \tau_\beta = \tau_\alpha \circ \varphi. \end{aligned}$$

Beweis. Jede reguläre C^1-Kurve lässt sich nach Theorem 6.1.8 nach der Bogenlänge parametrisieren. Daher können wir die Definition 7.2.9 verwenden.

Seien nun $\varphi_i \colon J_i \to I$ zwei orientierungserhaltende Parametertransformationen, so dass $\alpha_i := \alpha \circ \varphi_i$ jeweils nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Dann sind $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ und $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ jeweils von der Form $s \mapsto s + s_0$, bei nicht orientierungserhaltenden Transformationen auch von der Form $s \mapsto \pm s + s_0$. Die Größen aus Definition 7.2.9 sind wohldefiniert, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} T(t) &\overset{\text{def.}}{=} (\alpha \circ \varphi_1)'|_{\varphi_1^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'|_{\varphi_1^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_2)'|_{\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}(t)} \cdot \underbrace{\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)'}_{=\pm 1}|_{\varphi_1^{-1}(t)} \quad \text{(Produktregel)} \\ &= \pm\,(\alpha \circ \varphi_2)'|_{\varphi_2^{-1}(t)} \end{aligned}$$

und analoge Rechnungen funktionieren auch für die anderen Größen.

Sei nun $\beta = \alpha \circ \varphi$ beliebig. Mit zwei orientierungserhaltenden Transformationen φ_α und φ_β können wir annehmen, dass $\beta \circ \varphi_\beta$ und $\alpha \circ \varphi_\alpha$ nach der Bogenlänge

parametrisiert sind. Ähnlich wie bei der obigen Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}
T_\beta(t) &= (\beta \circ \varphi_\beta)'|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\
&= \left(\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta\right)'|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\
&= (\alpha \circ \varphi_\alpha)|_{\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}(t)} \cdot \underbrace{\left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta\right)'}_{=\pm 1}|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\
&= \pm\, T_\alpha|_{\varphi(t)},
\end{aligned}$$

da $\beta \circ \varphi_\beta$ und $\alpha \circ \varphi_\alpha$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Wegen $\beta \circ \varphi_\beta = (\alpha \circ \varphi_\alpha) \circ (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta)$ ist der Term in der letzten Klammer wieder von der Form $s \mapsto \pm s + s_0$.

Argumentation für die anderen Größen: Übung. □

Lemma 7.2.11. ⋆ *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Kurve. Dann gelten für Krümmung, Frenet-Dreibein (im Falle $\kappa \neq 0$) und Torsion (im Falle $\kappa \neq 0$ und $\alpha \in C^3$)*

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}{|\alpha'|^2} = \frac{\sqrt{|\alpha''|^2 - \langle \alpha'', T\rangle^2}}{|\alpha'|^2}, \\
T &= \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad N = \frac{\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T}{|\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha'||\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}
\end{aligned}$$

und

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha'|^2 \cdot |\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

Beweis. Sei φ eine richtungserhaltende Parametertransformation, so dass $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\varphi \circ \varphi^{-1}(t)\right)' = \varphi'|_{\varphi^{-1}(t)} \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(t), \\
\varphi'(s) &= \frac{1}{(\varphi^{-1})'(\varphi(s))}, \\
1 &= |\tilde{\alpha}'(s)| = |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s), \\
|\alpha'(t)| &= \left(\varphi^{-1}\right)'(t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\left(\tilde{\alpha} \circ \varphi^{-1}\right)'(t)}{\left(\varphi^{-1}\right)'(t)} = \tilde{\alpha}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) = T(t).$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) &= \frac{\left(\tilde{T} \circ \varphi^{-1}\right)'(t)}{\left(\varphi^{-1}\right)'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\left(\frac{d}{dt}\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\right) \\
&= \frac{\alpha''(t)}{|\alpha'(t)|^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\left(|\alpha'(t)|^2\right)^{-3/2} \cdot 2 \cdot \langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle \\
&= \frac{\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)}{|\alpha'(t)|^2}.
\end{aligned}$$

Die Frenetgleichungen liefern, dass

$$\tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) = \tilde{\kappa}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot \tilde{N}\left(\varphi^{-1}(t)\right) = \kappa(t)N(t)$$

gilt und somit erhalten wir aus der Länge des Vektors

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\sqrt{|\alpha''(t)|^2 - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle^2}}{|\alpha'(t)|^2}$$

und

$$N(t) = \frac{\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)}{|\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}.$$

Wegen $0 = \alpha'(t) \times \alpha'(t)$ erhalten wir direkt aus der Definition des Binormalenvektors

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}.$$

Nach Definition der Torsion erhalten wir

$$\tau(t) = \left\langle \tilde{N}'(\varphi^{-1}(t)), \tilde{B}(\varphi^{-1}(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{\left(\tilde{N} \circ \varphi^{-1}\right)(t)}{(\varphi^{-1})'(t)}, \tilde{T}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \times \tilde{N}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \right\rangle.$$

Aus $T(t) = \tilde{T}\left(\varphi^{-1}(t)\right)$ folgt mit der Kettenregel und den Frenetformeln

$$T'(t) = \tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot |\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|\kappa(t)N(t).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{1}{|\alpha'(t)|} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)}{|\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}, T(t) \times N(t) \right\rangle \\
&= \frac{\langle \alpha'''(t), T(t) \times N(t)\rangle}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|} \\
&= \frac{\langle \alpha''', \alpha' \times \alpha''\rangle}{|\alpha'(t)|^2 \cdot |\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|^2}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus $\langle a \times b, c\rangle = \det(a, b, c)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und

$$|a \times b|^2 = |a|^2 \cdot \left| b - \left\langle b, \tfrac{a}{|a|} \right\rangle \tfrac{a}{|a|} \right|^2,$$

ebenfalls für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ (Übung). □

Lemma 7.2.12. ⋆ *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ regulär und $F(x) := Sx + a$ eine Euklidische Bewegung mit $S \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$ ebenfalls regulär und es gilt*

(i) $\tilde{\kappa} = \kappa$,
(ii) $\tilde{T} = ST$, $\tilde{N} = SN$, $\tilde{B} = \det S \cdot SB$,
(iii) $\tilde{\tau} = \det S \cdot \tau$,

wobei α für Aussagen über N und τ sogar eine C^3-Frenetkurve sei.

Beweis. Es genügt, das Lemma für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven zu zeigen. Sei also α ohne Einschränkung nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt

$$(F \circ \alpha)' = S\alpha', \quad \text{und} \quad (F \circ \alpha)'' = S\alpha''.$$

Mit $S \in O(3)$ und $\kappa = |\alpha''|$ erhalten wir $\tilde{\kappa} = \kappa$ und $\tilde{T} = ST$. Somit ist $\tilde{\alpha}$ eine Frenetkurve, wenn α eine solche ist. Wir erhalten $\tilde{N} = SN$. Somit gilt $\tilde{B} = \pm SB$ und wegen $\det(T, N, B) = 1 \overset{!}{=} \det\left(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\right)$ erhalten wir aus mit dem Determinantenmultiplikationssatz $\tilde{B} = \det S \cdot SB$. Schließlich folgt nach Definition $\tilde{\tau} = \left\langle \tilde{N}', \tilde{B} \right\rangle = \det S \langle SN', SB\rangle = \det S \cdot \tau$. □

Beispiel 7.2.13 (Lokale Graphendarstellung einer Kurve)**.** ⋆ Sei $\beta \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine Frenetkurve, ohne Einschränkung $0 \in I$. Nach einer orientierungserhaltenden Isometrie des $\mathbb{R}^3$ dürfen wir $T(0) = e_1$, $N(0) = e_2$ und $B(0) = e_3$ sowie $\beta(0) = 0$ annehmen.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es ein $\delta > 0$ und eine Funktion $u\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$ mit $u(0) = 0$, so dass $\alpha\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix}$ eine Umparametrisierung von β ist (Details: Übung). Es gilt

$$\alpha'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ u''(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ u'''(x) \end{pmatrix}.$$

Aus $T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|u'(x)|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \end{pmatrix}$ erhalten wir $u'(0) = 0$. Für die Krümmung erhalten wir

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{|u''|^2 - \frac{\langle u', u''\rangle^2}{1+|u'|^2}}}{1+|u'|^2} = \frac{\sqrt{(1+|u'|^2)\,|u''|^2 - \langle u', u''\rangle^2}}{(1+|u'|^2)^{3/2}}.$$

Im Punkt $x = 0$ erhalten wir $\kappa(0) = |u''(0)|$ und

$$e_2 = N(0) = \frac{\alpha''(0)}{|\alpha''(0)|} = \frac{1}{\kappa(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ u''(0) \end{pmatrix}.$$

Wir differenzieren die Formel für $\kappa(x)$ und erhalten

$$\kappa'(0) = \frac{\langle u''(0), u'''(0)\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\kappa(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ u'''(0) \end{pmatrix}, e_2 \right\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Als Torsion erhalten wir

$$\tau(0) = \frac{\det\left(e_1, \kappa(0)e_2, \begin{pmatrix} 0 \\ u'''(0) \end{pmatrix}\right)}{\kappa(0)^2} = \frac{\left\langle u'''(0), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle}{\kappa(0)} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ u'''(0) \end{pmatrix}, e_3 \right\rangle}{\kappa(0)}.$$

Sei nun $\alpha \in C^3$ eine Frenetkurve. Aus der Taylordarstellung erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = xe_1 + \frac{1}{2}x^2\kappa(0)e_2 + \frac{1}{6}x^3\left(\kappa'(0)e_2 + \tau(0)\kappa(0)e_3\right) + o\left(|x|^3\right).$$

7.3. **Längenvergleich und der Satz von Fenchel.** Die folgenden beiden Theoreme sind für den Beweis der Fenchelschen Ungleichung nötig.

Definition 7.3.1. Ein Großkreis ist der Schnitt einer Ebene durch den Ursprung mit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Beachte: Durch zwei verschiedene nicht antipodale Punkte auf $\mathbb{S}^2$ gibt es genau einen Großkreis.

Theorem 7.3.2. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ stückweise von der Klasse C^1. Dann gilt*

$$L(\gamma) \geq \sphericalangle(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Bei Gleichheit durchläuft γ einen Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ohne Richtungsumkehr.

Beweis. In Polarkoordinaten erhalten wir die Sphäre $\mathbb{S}^2$ als

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \equiv X(\vartheta,\varphi)\colon \vartheta \in [0,\pi], \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da $(r,\vartheta,\varphi) \mapsto r \cdot X(\vartheta,\varphi)$ für $r > 0$, $0 < \vartheta < \pi$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, gibt es zu jeder C^1-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine C^1-Kurve $w : I \to (0,\pi)\times\mathbb{R}$ mit $X \circ w = \alpha$, falls $(0,0,\pm 1) \notin \operatorname{im}\alpha$ ist: Beachte dazu dass r, der Abstand zum Ursprung, nicht auftaucht, da dieser stets konstant gleich eins ist. Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen existiert solch eine Abbildung w zunächst nur lokal. Da aber w bis auf Addition von Vielfachen von 2π in der zweiten Komponente

wohldefiniert ist, können wir dies korrigieren und erhalten die gesuchte Funktion. Schreibe $w(x) \equiv (\vartheta(x), \varphi(x))$.

Sei ohne Einschränkung $\gamma(a) = (0,0,-1)$, der Südpol. Gelte $\gamma(b) = X(\vartheta_b, \varphi_b)$ und sei dabei ohne Einschränkung $\vartheta_b < \pi$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $3\varepsilon < \pi - \vartheta_b$. Da γ jede horizontale Ebene zwischen $\{x^3 = -1\}$ und $\{x^3 = \gamma^3(b)\}$ schneidet, und deren Schnitte mit $\mathbb{S}^2$ zu konstantem ϑ in der Parametrisierung gehören, existieren

$$a_\varepsilon := \sup\{t \in [a,b] \colon \vartheta(t) \geq \pi - \varepsilon\}$$

sowie

$$b_\varepsilon := \inf\{t \in [a_\varepsilon, b] \colon \vartheta(t) \leq \vartheta_b + \varepsilon\}.$$

Beachte die Monotonie von $\varepsilon \mapsto a_\varepsilon, b_\varepsilon$. Anschaulich ist dann $\gamma_\varepsilon := \gamma|_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]}$ eine stückweise C^1-Kurve, die eine Ebene etwas oberhalb von $\gamma(a)$ mit einer Ebene etwas unterhalb von $\gamma(b)$ verbindet. Da $(0,0,\pm 1) \notin \operatorname{im} \gamma_\varepsilon$ gilt, gibt es stückweise C^1-Funktionen $\vartheta_\varepsilon \colon [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \to [\vartheta_b + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ und $\varphi_\varepsilon \colon [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma_\varepsilon(t) = X(\vartheta_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t))$ für alle $t \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$. $\varepsilon > 0$ ist nötig, weil die Parametrisierung auf der x^3-Achse kein Diffeomorphismus ist und somit die Regularität von ϑ_ε und φ_ε nicht klar wäre. Setze

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon \colon [a_\varepsilon, b_\varepsilon] &\to \mathbb{S}^2, \\ \beta_\varepsilon(t) &:= X(\vartheta_\varepsilon(t), 0). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma_\varepsilon) &= \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left| \frac{d}{dt} X(\vartheta_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t)) \right| dt = \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta_\varepsilon(t)}{dt} + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dt} \right| dt \\ &\geq \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta_\varepsilon(t)}{dt} \right| dt = \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left| \frac{d}{dt} X(\vartheta_\varepsilon(t), 0) \right| dt = L(\beta_\varepsilon), \end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial X}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial X}{\partial \varphi}$$

für alle $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ gilt. Wir haben also zwei Kurven, γ_ε und β_ε, die beide die Kreise $\operatorname{im} X(\pi - \varepsilon, \cdot)$ und $\operatorname{im} X(\vartheta_b + \varepsilon, \cdot)$ miteinander verbinden. Die obige Abschätzung liefert, dass $L(\gamma_\varepsilon) \geq L(\beta_\varepsilon)$ mit Gleichheit genau dann, wenn γ_ε bereits auf einem Großkreis durch den Südpol $(0,0,-1)$ verläuft.

Sei $[a,b] \ni t \mapsto \vartheta(t) \in [0,\pi]$ monoton, ohne Einschränkung wachsend. Dann gilt

$$L(X \circ \vartheta) = \int_a^b \left| \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \right| dt = \int_a^b \frac{d\vartheta}{dt}\, dt = \vartheta(b) - \vartheta(a).$$

Andererseits ist für beliebiges $\varphi_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle(X(\vartheta(b), \varphi_0), X(\vartheta(a), \varphi_0)) &= \arccos\langle X(\vartheta(b), \varphi_0), X(\vartheta(a), \varphi_0)\rangle \\ &= \arccos(\sin\vartheta(a) \cdot \sin\vartheta(b) + \cos\vartheta(a) \cdot \cos\vartheta(b)) \\ &= \arccos(\cos(\vartheta(b) - \vartheta(a))) \\ &= |\vartheta(b) - \vartheta(a)| = \vartheta(b) - \vartheta(a). \end{aligned}$$

Auf β_ε angewandt erhalten wir

$$L(\gamma_\varepsilon) \geq L(\beta_\varepsilon) \geq (\pi - \varepsilon) - (\vartheta_b + \varepsilon) = \sphericalangle(\beta_\varepsilon(a_\varepsilon), \beta_\varepsilon(b_\varepsilon))$$

mit Gleichheit genau dann, wenn γ_ε mit monotonem ϑ_ε auf einem Großkreis durch den Südpol verläuft. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. Beachte dabei, dass Gleichheit nur für $a_\varepsilon \to a$ und $b_\varepsilon \to b$ für $\varepsilon \searrow 0$ gelten kann oder falls γ auf $[a, a+\zeta]$ oder $[b-\zeta, b]$ für ein $\zeta > 0$ konstant ist. □

Lemma 7.3.3. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve mit $L(\gamma) \le 2\pi$. Dann liegt γ komplett in einer Halbspäre, d. h. in einer Menge der Form $\{x \in \mathbb{S}^2 \colon \langle x, e\rangle \ge 0\}$ für ein $e \in \mathbb{S}^2$. Ist $L(\gamma) < 2\pi$, so gibt es ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle \gamma(t), e\rangle > 0$ für alle $t \in [a,b]$, γ liegt also sogar im Inneren der Halbsphäre.*

Beweis. Wähle $\tau \in [a,b]$ mit $L(\gamma|_{[a,\tau]}) = L(\gamma|_{[\tau,b]}) = L(\gamma)/2$. Setze $p := \gamma(a)$ und $q := \gamma(\tau)$. Ist $\sphericalangle(p,q) = \pi$, so gilt $L(\gamma) \ge 2\pi$, also nach Voraussetzung $L(\gamma) = 2\pi$. Nach Theorem 7.3.2 liegen daher die Bilder von $\gamma|_{[a,\tau]}$ und $\gamma|_{[\tau,b]}$ auf Großkreisen. Als e kann man eine der Normalen wählen, die zu den Ebenen gehören, auf denen die Großkreise liegen.

Sei daher ab jetzt $\sphericalangle(p,q) < \pi$. Sei ohne Einschränkung $p \ne q$. Sei e der Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens von p nach q, $e = \frac{p+q}{|p+q|}$. Nach einer Drehung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $e = e_3$ gilt. Dann ist $p = \big(p^1, p^2, p^3\big)$ mit $p^3 > 0$ und $q = \big(q^1, q^2, q^3\big) = \big(-p^1, -p^2, p^3\big)$.

Nun gilt entweder $\langle \gamma(t), e_3\rangle > 0$ für alle $t \in [a,\tau]$ oder es gibt ein $t_0 \in (a,\tau)$ mit $\langle \gamma(t_0), e_3\rangle = 0$. Im zweiten Fall definieren wir $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $S(x^1, x^2, x^3) := (x^1, x^2, -x^3)$ und

$$\tilde\gamma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a, t_0], \\ S\gamma(t) & \text{für } t \in [t_0, \tau]. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde\gamma$ eine stückweise C^1-Kurve mit $\tilde\gamma(a) = p$ und $\tilde\gamma(\tau) = S(q) = -p$. Nach Theorem 7.3.2 erhalten wir

$$L(\gamma) = 2L(\gamma|_{[a,\tau]}) = 2L(\tilde\gamma) \ge 2\pi.$$

Wir erhalten $L(\gamma) = 2\pi$ sowie $L(\tilde\gamma) = \pi$ und nochmals nach Theorem 7.3.2 durchläuft $\tilde\gamma$ einen halben Großkreis von p nach $S(q) = -p$. Also ist $\langle \tilde\gamma(t), e_3\rangle \ge 0$ für $t \in [a, t_0]$ und $\langle \tilde\gamma(t), e_3\rangle \le 0$ für $t \in [t_0, \tau]$. Also gilt $\langle \gamma(t), e_3\rangle \ge 0$ für alle $t \in [a,\tau]$. Eine analoge Aussage erhalten wir für $t \in [\tau, b]$. Insgesamt folgt also $\langle \gamma(t), e_3\rangle \ge 0$ für alle $t \in [a,b]$. Falls nicht $\langle \gamma(t), e_3\rangle > 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt, so folgt aus den obigen Überlegungen, dass Gleichheit maximal in zwei Punkten gilt und dass in diesem Fall $\operatorname{im}\gamma$ in der Nähe dieser Punkte aus jeweils zwei Bögen auf möglicherweise unterschiedlichen Großkreisen besteht. Sind diese beiden Punkte antipodal, so können wir nach Umparametrisierung (über $[a,b]$ hinaus) wie im Fall $\sphericalangle(p,q) = \pi$ argumentieren. Sonst ersetzen wir e durch einen geeigneten Vektor in der Nähe. □

Theorem 7.3.4 (Fenchel)**.** *Sei $\alpha\colon [0,L] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2-geschlossen. Dann gilt*

$$\int_0^L \kappa(s)\, ds \ge 2\pi$$

mit Gleichheit genau dann wenn α eine ebene einfach geschlossene Kurve ist, die ein konvexes Gebiet berandet. (Die Aussage, dass α ein konvexes Gebiet berandet, werden wir hier nicht beweisen.)

Der Integralausdruck heißt Totalkrümmung der Kurve α.

Eine Kurve heißt einfach geschlossen, wenn α geschlossen ist und $\alpha|_{[0,L)}$ eine injektive Abbildung ist.

Beweis. Sei $\alpha\colon [0,L] \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-geschlossene Kurve mit $|\alpha'| \equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,L] &\to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ s &\mapsto \alpha'(s) \end{aligned}$$

eine C^1-geschlossene Kurve. Sei $e \in \mathbb{S}^2$. Es gilt

$$\int_0^L \langle \gamma(s), e\rangle \, ds = \int_0^L \frac{d}{ds}\langle \alpha(s), e\rangle \, ds = \langle \alpha(L), e\rangle - \langle \alpha(0), e\rangle = 0.$$

Somit gibt es keinen Vektor $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle \gamma(s), e\rangle > 0$ für alle $s \in [0,L]$. Nach Lemma 7.3.3 gilt daher $L(\gamma) \geq 2\pi$. Wir erhalten also für die Krümmung κ der Kurve α

$$\int_0^L \kappa(s) \, ds = \int_0^L |\alpha''(s)| \, ds = \int_0^L |\gamma'(s)| \, ds = L(\gamma) \geq 2\pi.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Lediglich die Aussagen für den Fall, dass die Totalkrümmung gleich 2π ist, sind noch zu zeigen. Nach Lemma 7.3.3 gibt es dann ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle \gamma(s), e\rangle \geq 0$ für alle $s \in [0,L]$. Aus $\int_0^L \langle \gamma(s), e\rangle \, ds = 0$ folgt daher $\langle \gamma(s), e\rangle \equiv 0$ für alle $s \in [0,L]$. Also ist $\frac{d}{ds}\langle \alpha(s), e\rangle = \langle \gamma(s), e\rangle = 0$ und $\operatorname{im} \alpha$ liegt in einer Ebene $\{x\colon \langle x, e\rangle = c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen nun noch, dass $\alpha|_{[0,L)}$ injektiv ist. Falls nicht, so gibt es ohne Einschränkung ein $\tau \in (0,L)$ mit $\alpha(0) = \alpha(\tau)$. Wir behaupten, dass $L(\gamma|_{[0,\tau]}) > \pi$ gilt. Wäre dem nicht so, so könnten wir ein $\sigma \in (0,\tau)$ mit $L(\gamma|_{[0,\sigma]}) = L(\gamma|_{[\sigma,\tau]}) \leq \pi/2$ wählen. Wir setzen $e := \gamma(\sigma)$ und erhalten nach Theorem 7.3.2 $\langle \gamma(s), e\rangle \geq 0$ für alle $s \in [0,\tau]$. Andererseits ist

$$\int_0^\tau \langle \gamma(s), e\rangle \, ds = \langle \alpha(\tau), e\rangle - \langle \alpha(0), e\rangle = 0.$$

Somit ist $\langle \gamma(s), e\rangle \equiv 0$. Dies liefert für $s = \sigma$ einen Widerspruch. Wir schließen, dass

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0,\tau]}) + L(\gamma|_{[\tau,L]}) > \pi + \pi = 2\pi$$

ist. Dies widerspricht der Annahme $L(\gamma) = 2\pi$. Daher ist $\alpha|_{[0,L)}$ wie behauptet injektiv. □

Der Satz von Fenchel besagt, dass eine C^2-geschlossene Kurve mindestens die Totalkrümmung 2π besitzt. In [9] verallgemeinert J. Milnor diesen Satz und zeigt, dass eine C^2-geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit $\int_a^b \kappa(s) \, ds \leq 4\pi$ „unverknotet“ ist.

8. Die Distanzfunktion

8.1. **Tubenumgebungen.** Häufig ist es nützlich, eine Menge als Niveaufläche einer speziellen Funktion darzustellen, der signierten Distanzfunktion. Beispielsweise impliziert nichtnegative mittlere Krümmung bei geeigneter Vorzeichenwahl $-\Delta d \geq 0$. Dies kann man beispielsweise bei der Konstruktion von Barrieren nutzen.

Bemerkung 8.1.1 (Generalvoraussetzung)**.** In diesem Kapitel wollen wir stets annehmen, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen, beschränkt und $\partial\Omega$ von der Klasse C^k mit $k \geq 2$ ist.

Definiere die (signierte) Distanzfunktion $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$d(y) := \operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) - \operatorname{dist}(y, \Omega),$$

so dass d in Ω positiv ist. In Ω gilt dann $d(y) = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$ sowie überall $|d(y)| = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Definiere eine ε-Umgebung des Randes durch

$$(\partial\Omega)_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^n : |d(y)| < \varepsilon\}.$$

Lemma 8.1.2. *Gelte Bemerkung 8.1.1. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass d in $(\partial\Omega)_\varepsilon$ von der Klasse C^k ist.*

Solch eine Umgebung $(\partial\Omega)_\varepsilon$ heißt Tubenumgebung von $\partial\Omega$.

Beweis. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann dürfen wir nach einer Rotation und Verschiebung des Koordinatensystems ohne Einschränkung annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und dass es $\omega\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ in C^k mit $D\omega(0) = 0$ und

$$\Omega \cap B_r(0) = \{(\hat{x}, x^n) : x^n > \omega(\hat{x})\} \cap B_r(0)$$

für ein $r > 0$ gibt. Sei $\rho > 0$, so dass für alle $\hat{x} \in B_\rho^{n-1}(0)$ auch $(\hat{x}, \omega(\hat{x})) \in B_r(0)$ gilt. Dann ist die äußere Normale an Ω für $\hat{x} \in B_\rho(0)$ durch

$$\nu(\hat{x}, \omega(\hat{x})) = \frac{(D\omega(\hat{x}), -1)}{\sqrt{1 + |D\omega(\hat{x})|^2}}$$

gegeben. Setze ν durch $\nu(\hat{x}, x^n) := \nu(\hat{x}, \omega(\hat{x}))$ nach $\mathbb{R}^n$ fort.

Definiere die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$\Phi(\hat{x}, t) = (\hat{x}, \omega(\hat{x})) - t\nu(\hat{x}, \omega(\hat{x})),$$

wobei wir die Formel für ν auch für $x \notin B_\rho(0)$ verwenden. Natürlich interessieren wir uns nur dort für die Abbildung Φ, wo $\operatorname{graph}\omega$ mit $\partial\Omega$ übereinstimmt. Wir können diese Abbildung auch auf ganz $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ durch $\Psi(x, t) := x - t\nu(x)$ definieren. Wir haben sie oben lediglich mit Hilfe von ω lokal in einer Karte dargestellt.

Wir behaupten, dass Φ nahe $(0, 0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(\hat{x}, t) &= (e_i, \omega_i) - t\nu_i - t\nu_n\omega_i, \\
\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(\hat{x}, t)\bigg|_{(\hat{x},t)=0} &= (e_i, 0), \\
\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\hat{x}, t)\bigg|_{(\hat{x},t)=0} &= -\nu(0, 0) = e_n,
\end{aligned}$$

also

$$D\Phi(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist Φ und daher auch Ψ nach dem Satz von der inversen Funktion ein lokaler Diffeomorphismus, vergleiche dazu Kapitel 2.4. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte mit Umgebungen, ohne Einschränkung in Produktform, in denen Ψ (bzw. Φ) ein Diffeomorphismus ist, deren Projektionen auf die nicht-t-Komponenten bereits $\partial\Omega$ überdecken. Somit ist Ψ auf $\partial\Omega \times (-\delta, \delta)$ für ein $\delta > 0$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir behaupten, dass (ggf. nach Verkleinerung von $\delta > 0$) Ψ sogar ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Wäre dem nicht so, so wäre die Injektivität verletzt, es gäbe also zu jedem $k \in \mathbb{N}$ auch $(x_k, t_k) \neq (y_k, \tau_k) \in \partial\Omega \times \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ mit

$\Psi(x_k, t_k) = \Psi(y_k, \tau_k)$. Nach Übergang zu einer nicht umbenannten Teilfolge dürfen wir $x_k \to x \in \partial\Omega$ annehmen. Wegen $|x_k - \Psi(x_k, t_k)| < \frac{1}{k}$ und $|y_k - \Psi(y_k, \tau_k)| < \frac{1}{k}$ folgt auch $y_k \to x$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Ψ (bzw. Φ) in einer geeigneten Umgebung von $(x, 0)$ für einen beliebigen Punkte $x \in \partial\Omega$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Nehme also ab jetzt an, dass $\Psi\colon \partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Nachfolgend wollen wir $x \in \partial\Omega$ und $y \in \mathbb{R}^n$ nutzen. Wir behaupten, dass für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\{y \in \mathbb{R}^n \colon d(y) = t\} = \Psi(\partial\Omega, t) \tag{8.1.1}$$

gilt. Für $t = 0$ ist dies offensichtlich. Sei also $y \in \Psi(\partial\Omega, t)$ für ein t mit $0 < |t| < \varepsilon$. Da $|\nu| = 1$ ist, folgt $|d(y)| \leq |t|$. Wäre $|d(y)| < |t|$, so gäbe es aufgrund der Kompaktheit ein $x \in \partial\Omega$ mit $|x - y| = |d(y)| < |t|$. Wir behaupten, dass $\frac{x-y}{|x-y|} = \pm\nu(x)$ gilt. Sei $\alpha\colon (-\delta, \delta) \to \partial\Omega$ eine C^1-Kurve mit $\alpha(0) = x$. Dann ist $|y - \alpha(\tau)|^2$ nach Definition von d, x und α für $\tau = 0$ minimal. Es gilt also

$$0 = 2\langle y - \alpha(0), -\alpha'(0)\rangle = -2\langle y - x, \alpha'(0)\rangle.$$

Da also $y - x$ zu einem beliebigen Tangentialvektor α' in x senkrecht steht, folgt die Behauptung. Somit ist aber für ein geeignetes Vorzeichen

$$\Psi(x, \pm|x - y|) = y \in \Psi(\partial\Omega, t).$$

Dies ist jedoch nicht möglich, da $|x - y| < |t|$ gilt und da Ψ auf $\partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein Diffeomorphismus ist. Somit folgt „$\supset$“ in (8.1.1).

Die umgekehrte Inklusion funktioniert analog. Für $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|d(y)| < \varepsilon$ und $d(y) \neq 0$ finden wir wie oben einen nächsten Punkt $x \in \partial\Omega$ mit Normalenvektor $\pm\frac{x-y}{|x-y|}$. Dann gilt $\Psi(x, d(y)) = y$, da das Vorzeichen vor t in der Definition von Ψ geeignet gewählt ist bzw. da nach Definition der äußeren Normalen $x + t\nu(x) \notin \Omega$ für $x \in \partial\Omega$ und kleine $t > 0$ gilt. Es folgt (8.1.1).

Damit ist $d(y) = \pi_n \Psi^{-1}(y)$, wobei π_n die Projektion auf die n-te bzw. t-Komponente bezeichnet.

Ist $\partial\Omega \in C^k$, so ist $\nu \in C^{k-1}$, $\Psi \in C^{k-1}$ und daher auch $d \in C^{k-1}$.

Da d bis auf das Vorzeichen die Abstandsfunktion zu einer Menge ist, folgt $|\nabla d| \leq 1$. Sei $x \in \partial\Omega$ und $\nu = \nu(x)$. Nun gilt $d(x - t\nu) = \pi_n \Psi^{-1}(x - t\nu) = \pi_n(x, t) = t$. Da also bereits $\frac{d}{dt} d(x - t\nu) = 1 = \langle \nabla d(x - t\nu), -\nu\rangle$ gilt, verschwindet die zu ν orthogonale Komponente von ∇d und es gilt $\nabla d(x - t\nu) = -\nu(x)$. Wegen $\nu \in C^{k-1}$ folgt also auch $d \in C^k$ und es gilt $\nabla d(y) = -\nu\left(\pi_1\left(\Psi^{-1}(y)\right)\right)$, wobei $\pi_1\colon \partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial\Omega$ die Projektion auf die erste Komponente ist. □

Bemerkung 8.1.3. Im Beweis des Lemmas haben wir noch folgendes gezeigt:

(i) $\Psi\colon \partial\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $(x, t) \mapsto x - t\nu(x)$ ist ein C^{k-1} Diffeomorphismus auf sein Bild, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.
(ii) In $(\partial\Omega)_\varepsilon$ gilt $|\nabla d| = 1$.
(iii) $\nabla d(\Psi(x, t)) = -\nu(x)$, $x \in \partial\Omega$.
(iv) Zu $y \in (\partial\Omega)_\varepsilon$ gibt es stets einen eindeutig bestimmten Punkt $x = \pi(y) \in \partial\Omega$, der $|\pi(y) - y|$ minimiert. Es gilt also $d(y) = |\pi(y) - y|$ für $y \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$.
(v) Daraus folgt auch $\overline{B_{d(y)}(y)} \cap \partial\Omega = \{\pi(y)\}$ für $y \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$.
(vi) Es gilt $\pi(\Psi(x, t)) = x$ für $x \in \partial\Omega$ und $|t| < \varepsilon$.
(vii) Es gilt $d(\Psi(x, t)) = t$ für $x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $|t| < \varepsilon$.

Um die zweiten Ableitungen der Distanzfunktion mit der Geometrie des Randes in Verbindung zu bringen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Lemma 8.1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen mit $f = g$ auf $\partial\Omega$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $\xi \in T_{x_0}\partial\Omega$, d. h. sei ξ im Punkte x_0 ein Tangentialvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\langle \nabla(f-g)(x_0), \xi\rangle \equiv D(f-g)(x_0)\langle\xi\rangle = 0.$$

Beweis. Nach einer Rotation und Translation des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und dass lokal in der Nähe des Ursprungs

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n)\colon x^n > \omega(\hat{x})\}$$

für eine C^1-Funktion $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\omega(0) = 0$ und $D\omega(0) = 0$ gilt. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $\xi = e_1$ gilt. Gelte zusätzlich ohne Einschränkung $g \equiv 0$, denn sonst können wir das Lemma für $f - g$ und 0 statt f und g zeigen.

Definiere $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch $\alpha(t) = (te_1, \omega(te_1))$. Dann ist $\alpha'(0) = e_1 = \xi$ und es gilt $f \circ \alpha \equiv 0$, falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass α in einer Umgebung des Ursprungs bleibt, in der $\partial\Omega$ als $\operatorname{graph}\omega$ dargestellt ist. Nach Kettenregel erhalten wir daraus

$$Df(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für $t = 0$ erhalten wir die Behauptung. □

8.2. **Hauptkrümmungen und die Distanzfunktion.** Wir erinnern an die Definition der Hauptkrümmungen in einer speziellen Situation.

Bemerkung 8.2.1. ⋆ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2. Sei $0 \in \partial\Omega$ und gelte in der Nähe des Ursprungs

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n)\colon x^n > \omega(\hat{x})\}$$

für eine C^2-Funktion ω mit $D\omega(0) = 0$. Dann stimmen die $n-1$ Hauptkrümmungen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ von $\partial\Omega$ in 0 mit den Eigenwerten von $D^2\omega(0)$ überein. Ist die obige geometrische Situation nicht gegeben, so stellt man sie zunächst durch eine Rotation und eine Translation her.

Aus dem folgenden Lemma ergibt sich nochmals, dass die Hauptkrümmungen des Randes nicht von der nötigen Translation und Rotation abhängen, da die Eigenwerte von D^2d unter diesen Operationen invariant sind.

Lemma 8.2.2. *Gelte Bemerkung 8.1.1. Sei $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die signierte Distanzfunktion zu $\partial\Omega$. Dann sind die Eigenwerte von $-D^2d$ in einem Randpunkt durch die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ und 0 gegeben.*

Beweis. Es gilt $|Dd| \le 1$. Im Beweis von Lemma 8.1.2 haben wir bereits gesehen, dass in $(\partial\Omega)_\varepsilon$ sogar $|Dd| = 1$ gilt. Wir differenzieren das Quadrat dieser Gleichung und erhalten $0 = D^2d\langle Dd, \cdot\rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} d_{ij}d_j$. Damit ist der Normalenvektor $\nu = -\nabla d$ ein Eigenvektor von D^2d zum Eigenwert 0.

Für den Vergleich der Eigenwerte mit den anderen Hauptkrümmungen wählen wir ein Koordinatensystem wie in Bemerkung 8.2.1. Zusätzlich dürfen wir nach einer weiteren Rotation annehmen, dass $D^2\omega(0)$ diagonal ist. (Eigentlich benötigen wir dies erst im nachfolgenden Lemma 8.2.3.) Um die zweiten Ableitungen von d zu bestimmen, benutzen wir, dass $\nabla d = -\nu$ auf $\partial\Omega$ gilt. Es ist $-\nu = \frac{(-D\omega,1)^T}{\sqrt{1+|D\omega|^2}}$ auf $\partial\Omega$. Wenden wir Lemma 8.1.4 komponentenweise an, so sehen wir, dass $D^2d\langle\xi,\cdot\rangle = -D\tilde{\nu}\langle\xi\rangle$ für beliebige Tangentialvektoren $\xi \in T_0\partial\Omega$ gilt, wobei wir für $\tilde{\nu}$ eine beliebige C^1-Fortsetzung von ν wählen dürfen. Setze

$$-\tilde{\nu}(\hat{x}, x^n) := \frac{(-D\omega(\hat{x}), 1)^T}{\sqrt{1 + |D\omega|^2(\hat{x})}}.$$

Wir erhalten

$$D(-\tilde{\nu})(0) = \begin{pmatrix} (-\omega_{ij})(0) & (0) \\ (0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt.

Wir bemerken, dass sich die 0-Einträge von $D(-\tilde{\nu})$ bei einer anderen Fortsetzung von ν ändern können. □

Lemma 8.2.3. *Gelte Bemerkung 8.1.1. Sei $0 \in \partial\Omega$. Sei $D^2d(0)$ in einem Koordinatensystem wie im Beweis von Lemma 8.2.2 diagonal,*

$$-D^2d(0) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(0), \dots, \lambda_{n-1}(0), 0\}.$$

Sei $(\partial\Omega)_\varepsilon$ eine Tubenumgebung des Randes. Dann gilt für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$D^2d(te_n) = \operatorname{diag}\left\{\frac{-\lambda_1(0)}{1 - t\lambda_1(0)}, \dots, \frac{-\lambda_{n-1}(0)}{1 - t\lambda_{n-1}(0)}, 0\right\}.$$

Allgemein gilt somit für $y \in (\partial\Omega)_\varepsilon$, dass $D^2d(y)$ die Eigenwerte

$$\frac{-\lambda_1(\pi(y))}{1 - d(y)\lambda_1(\pi(y))}, \dots, \frac{-\lambda_{n-1}(\pi(y))}{1 - d(y)\lambda_{n-1}(\pi(y))}, 0$$

besitzt, wobei $\pi(y)$ die Projektion auf den nächsten Punkt in $\partial\Omega$ ist und $\lambda_i(\pi(y))$, $1 \le i \le n-1$, die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ in $\pi(y)$ sind.

Das folgende Argument haben wir von G. Bellettini gelernt.

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma 8.1.2, siehe Bemerkung 8.1.3, folgt, dass π in $(\partial\Omega)_\varepsilon$ wohldefiniert ist.

Sei zunächst $k \ge 3$. Aus $|\nabla d|^2 = 1$ erhalten wir

$$0 = \sum_{l=1}^n d_{il} d_l \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{l=1}^n d_{ilj} d_l + \sum_{l=1}^n d_{il} d_{lj}.$$

Setze $D(t) := (d_{ij}(x - t\nu(x)))_{1 \le i,j \le n}$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \dot{D}(t) &= \left(\sum_{l=1}^n - \underbrace{d_{ijl}(x - t\nu(x))}_{=d_{ilj}(x - t\nu(x))} \underbrace{\nu^l(x)}_{\substack{=-d_l(x) \\ =-d_l(x - t\nu(x))}} \right)_{i,j} \\ &= -\left(\sum_{l=1}^n d_{il} d_{lj}(x - t\nu(x)) \right)_{i,j} = -D^2(t). \end{aligned}$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{f}(t) = -f^2(t)$ mit $f(0) = a$ wird durch $f(t) = \frac{a}{1+ta}$ gelöst. Somit erfüllen die Einträge der Diagonalmatrix die Differentialgleichung mit dem gewünschten Anfangswert für $t = 0$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Lipschitz stetiger rechter Seite folgt die erste Behauptung für $k \ge 3$.

Durch Approximation erhält man die Behauptung auch für $k \ge 2$. Einige Details dazu sind nachfolgend aufgeführt.

Da die Eigenwerte von D^2d sich unter einer Rotation oder Translation des Koordinatensystems nicht ändern, folgt die allgemeine Behauptung aus der Behauptung im diagonalen Fall. Beachte, dass $d(x - t\nu(x)) = t$ gilt. Setze $y = x - t\nu(x)$ und spezialisiere auf den Fall $x = 0$. □

Korollar 8.2.4. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\varepsilon < \min \frac{1}{|\lambda_i|}.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die Menge, in der eine approximierende Funktion Ψ_ε von Ψ ein Diffeomorphismus ist, sich im Grenzwert nicht verkleinert.

Lemma 8.2.5. $\star$ *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf $\operatorname{im}\varphi$. Sei $K \Subset \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass jede C^1-Abbildung $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\Omega)} < \varepsilon$ einen Diffeomorphismus $\psi\colon K \to \psi(K)$ liefert.*

Beweis. Sei K ohne Einschränkung kompakt. Für $\varepsilon > 0$ klein genug folgt $\det d\psi \neq 0$ in K. Somit ist ψ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir müssen also noch nachweisen, dass ψ auch injektiv ist. Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es ein $\delta > 0$ (Lebesguezahl), so dass für jedes $x \in K$ die Abbildung $\psi|_{B_\delta(x)}$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Seien also $x_0 \neq y_0 \in K$ mit $\psi(x_0) = \psi(x_0)$. Dann gilt $|x_0 - y_0| \geq \delta$. Die Menge

$$(\varphi \times \varphi)\{(x, y) \in K \times K\colon |x - y| \geq \delta\}$$

ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst wieder kompakt. Dabei haben wir $(\varphi \times \varphi)(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ verwendet. Da φ injektiv ist, hat diese Menge einen positiven Abstand $\zeta > 0$ zur Diagonalen $\{(x, x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$. Somit folgt $|\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| \geq \zeta > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= |\psi(x_0) - \psi(y_0)| \\
&= |(\psi(x_0) - \varphi(x_0)) + (\varphi(x_0) - \varphi(y_0)) + (\varphi(y_0) - \psi(y_0))| \\
&\geq |\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| - |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| - |\varphi(y_0) - \psi(y_0)| \\
&\geq \zeta - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, so erhalten wir einen Widerspruch. □

Bemerkung 8.2.6. $\star$ Approximieren wir den Rand in C^2, so erhalten wir für die zugehörigen Diffeomorphismen $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ in C^1. Sei x aus $\partial\Omega$ beliebig und $y = x - t\nu(x)$ für ein kleines t. Dann ist $x = \pi_1\Psi^{-1}(y)$ und wir erhalten

$$\nabla d(y) = \nabla d(x - t\nu(x)) = \nu(x) = \nu\left(\pi_1\Psi^{-1}(y)\right).$$

Die Rechnung

$$\begin{aligned}
&|\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)| \\
\leq\, &|\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi_\varepsilon(x)| + |\varphi \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)| \\
\leq\, &\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{C^0} + |\varphi \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)|
\end{aligned}$$

zeigt, dass $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ und $\psi_\varepsilon \to \psi$ in C^0 auch $\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon \to \varphi \circ \psi$ impliziert. Auf Kompakta ist das Stetigkeitsmodul von φ (die Wahl von δ in Abhängigkeit von ε in der üblichen Stetigkeitsdefinition) gleichmäßig beschränkt. Daher konvergiert der zweite Term auch lokal gleichmäßig in x gegen Null. Analog zeigt man, dass auch C^1-Konvergenz unter Verkettungen erhalten ist, wobei man noch die Stetigkeit der Multiplikation benötigt.

Wegen $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ in C^1 folgt $\pi_2 \circ \Psi_\varepsilon^{-1} = d_\varepsilon \to d$ in C^1. Wir gehen nun analog zum Beweis von Lemma 8.1.2 vor. Aus

$$\nabla d_\varepsilon = \nu_\varepsilon \circ \pi_1 \circ \Psi_\varepsilon^{-1} \to \nu \circ \pi_1 \circ \Psi^{-1} = \nabla d \quad \text{in } C^1$$

erhalten wir lokal auch $d_\varepsilon \to d$ in C^2.

Korollar 8.2.7. *Gelte Bemerkung 8.1.1. Dann gilt für y in einer Tubenumgebung $(\partial\Omega)_\varepsilon \cap \Omega$*

$$-\Delta d(y) \geq H(\pi(y)),$$

wobei $\pi\colon (\partial\Omega)_\varepsilon \to \partial\Omega$ die Projektion auf den nächsten Randpunkt ist.

In $(\partial\Omega)_\varepsilon \cap \complement\Omega$ gilt die umgekehrte Ungleichung.

Beweis. Die Aussage gilt für $y \in \partial\Omega$ mit Gleichheit und folgt allgemein aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_i(\pi(y))}{1-t\lambda_i(\pi(y))}\right) = \left(\frac{\lambda_i(\pi(y))}{1-t\lambda_i(\pi(y))}\right)^2 \geq 0,$$

da wir stets $t \geq 0$ betrachten. Für $t \leq 0$ erhalten wir die umgekehrte Ungleichung. □

9. Die Gausskrümmung integrieren

Im nächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses die isoperimetrische Ungleichung für konvexe Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$ beweisen. Dabei benötigen wir eine untere Abschätzung an $\int\limits_M K$. Diese behandeln wir nun.

9.1. **Lokale Rechnung.**

Lemma 9.1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ lokal strikt konvex im Sinne von $D^2u \succ 0$ und $x \mapsto Du(x)$ ein Diffeomorphismus auf $Du(\Omega)$. Sei $M = \operatorname{graph} u \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt*

$$\int\limits_M K\, d\mu = |\nu(M)|,$$

wobei K die Gaußkrümmung von M bezeichnet.

Bemerkung 9.1.2.

(i) Die Abbildung $x \mapsto Du(x)$ ist für lokal strikt konvexe Funktionen u lokal stets ein Diffeomorphismus (Details: Übung). Global ist dies für konvexe Mengen Ω ebenfalls richtig, so dass diese Voraussetzung in Anwendungen häufig automatisch erfüllt ist.

(ii) Lemma 9.1.1 überträgt sich auch direkt auf den konvexen Fall. Betrachte dazu $u + \varepsilon|x|^2$ und betrachte $\varepsilon \downarrow 0$. Integrieren wir nur über $B_r(0)$, so folgt Konvergenz für $\varepsilon \downarrow 0$. Lasse dann $r \to \infty$.

Beweis von Lemma 9.1.1. Wir stellen die beiden Seiten der behaupteten Gleichheit zunächst in geeigneter Form dar: Es gilt für die linke Seite

$$\int\limits_M K\, d\mu = \int\limits_\Omega \frac{\det D^2u}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}} \cdot \left(1+|\nabla u|^2\right)^{1/2}\, dx.$$

Die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1+|y|^2}} \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus (kleine Übung). Somit ist auch

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}} \in B_1$$

ein Diffeomorphismus auf das Bild. Gleichzeitig stimmen $\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ und die ersten n Komponenten von ν überein. Sind die ersten n Komponenten von ν gleich $z \in B_1 \subset \mathbb{R}^n$, so erhalten wir

$$\nu = \left(z, -\sqrt{1-|z|^2}\right)^T \equiv (z, -f(z))^T.$$

Mit f stellen wir dabei die untere Hemisphäre graphisch dar. Somit erhalten wir für den Ausdruck auf der rechten Seite der behaupteten Gleichheit

$$|\nu(M)| = \int\limits_{\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}(\Omega)} \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dz = \int\limits_{\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz,$$

da

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{1-|z|^2}, \\ f_i &= \frac{-z_i}{\sqrt{1-|z|^2}} \end{aligned}$$

und

$$1+|\nabla f|^2 = 1+\frac{|z|^2}{1-|z|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Wir möchten nun die Transformationsformel für Integrale benutzen. Definiere dazu

$$\varphi(x) = \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}} \equiv z.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi^i_j \equiv \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{u^i}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \frac{u^i_j}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{u^i u_{jk} u^k}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}^3}\cdot u_{jk}\left(\delta^{ki}\left(1+|\nabla u|^2\right)-u^i u^k\right), \\ \det D\varphi &= \left(1+|\nabla u|^2\right)^{-\frac{3n}{2}}\cdot \det D^2 u \cdot \det\left(\delta^{ki}\left(1+|\nabla u|^2\right)-u^i u^k\right) \\ &= \left(1+|\nabla u|^2\right)^{-\frac{3n}{2}}\cdot \det D^2 u \cdot \left(1+|\nabla u|^2\right)^{n-1} \\ &= \left(1+|\nabla u|^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\cdot \det D^2 u = K > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(x)|^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\nabla u|^2}{1+|\nabla u|^2}}} = \sqrt{1+|\nabla u|^2}. \end{aligned}$$

Mit $z=\varphi(x)$ und $\frac{dz}{dx}=\varphi'$ erhalten wir nach Integraltransformationsformel

$$\int_\Omega \det D\varphi \cdot h(\varphi(x))\,dx = \int_{\varphi(\Omega)} h(z)\,dz.$$

Wenden wir dies auf $h(z)=\frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}$ an, so erhalten wir

$$\int_\Omega K\cdot\sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx = \int_{\varphi(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\,dz$$

wie behauptet. □

Häufig ist die genaue Schranke beim nächsten Resultat gar nicht wichtig.

Korollar 9.1.3. *Sei $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$ lokal strikt konvex und $M := \operatorname{graph} u$. Dann gilt*

$$\int_M K\,d\mu \le \frac{1}{2}|\mathbb{S}^n|.$$

Beweis. Da $\mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge ist, ist $\nu\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ ein Diffeomorphismus auf eine Teilmenge der offenen unteren Hemisphäre. □

Korollar 9.1.4. *Sei $u\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Dann gibt es keine positive untere Schranke $\varepsilon>0$ für die Hauptkrümmungen von $M=\operatorname{graph} u$, d. h. es gibt kein $\varepsilon>0$ mit $\lambda_i((x,u(x)))\ge\varepsilon>0$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und alle $1\le i\le n$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe doch solch eine Funktion u. u oder $-u$ (bei Wahl der oberen Normalen) ist eine strikt konvexe Funktion. Sei ohne Einschränkung u strikt konvex. Dann gilt $K[u] \geq \varepsilon^n > 0$. Es folgt

$$\frac{1}{2}|\mathbb{S}^n| \geq \int_M K\, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^n\, dx.$$

Widerspruch. □

Korollar 9.1.5. *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ lokal strikt konvex. Dann ist $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oder $K \in L^1(\operatorname{graph} u)$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis von Korollar 9.1.4. □

9.2. **Globale Situation.** Für das nächste Korollar benötigen wir noch die Surjektivität von ν bei geschlossenen C^1-Untermannigfaltigkeiten.

Lemma 9.2.1. *Sei $\emptyset \neq M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene C^1-Untermannigfaltigkeit. Dann ist*

$$\nu\colon M^n \to \mathbb{S}^n$$

surjektiv.

Für eine kompakte immersierte C^1-Hyperfläche gilt dieses Resultat im Allgemeinen nicht mehr. Die Figur „∞“ ist ein Gegenbeispiel dafür.

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass M zusammenhängend ist. Sonst betrachten wir eine Zusammenhangskomponente von M. Es ist bekannt, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Ist M homöomorph zur Sphäre, so benutzt man dafür den Abbildungsgrad, siehe z. B. [11], sonst Differentialtopologie [8, 10]. Da M beschränkt ist, ist genau eine dieser beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ unbeschränkt. Seien Z_1 und Z_2 diese beiden Zusammenhangskomponenten, Z_2 sei unbeschränkt. Dann gilt auch $\partial Z_1 = \partial Z_2 = M$.

(Ein Blick auf die gehörnte Sphäre von W. Alexander, die homöomorph zu $\mathbb{S}^2$ ist, mag verdeutlichen, dass solch ein Resultat nichttrivial ist. Im Komplement dieser Sphäre gibt es nicht kontrahierbare $\mathbb{S}^1$-en.)

Wir möchten nun eine Normale auswählen, die überall in einem noch zu definierenden Sinne in die unbeschränkte Komponente weist: Hätte Z_1 einen C^2-Rand, könnten wir den negativen Gradienten der signierten Distanzfunktion wählen. Nun wählen wir in jedem Punkt $x \in M$ die Normale $\nu(x)$, die $x + t\nu(x) \in Z_2$ für kleine $t > 0$ erfüllt. An einer lokalen Graphendarstellung über einem zusammenhängenden Gebiet sieht man, dass die zusammenhängenden Mengen ober- und unterhalb des Graphen jeweils Teilmengen von Z_1 oder Z_2 sein müssen. Weiterhin liegt Z_1 oberhalb von M und Z_2 unterhalb von M oder umgekehrt, da sonst nicht $\partial Z_1 = \partial Z_2 = M$ gelten kann. Somit sieht man, dass das Vorzeichen der Normalen wohldefiniert (es gibt also immer eine solche Vorzeichenwahl) und die Normale stetig ist.

Anschaulich gesprochen fixiert man nun ein $p \in \mathbb{S}^n$ und verschiebt eine Hyperebene mit Normale p von Unendlich her kommend in Richtung $-p$, bis sie in einem Punkt M berührt. Dort hat M dann die Normale p.

Formal setzt man dies wie folgt um: Sei $p \in \mathbb{S}^n$ fest. Betrachte die stetige Funktion Φ mit

$$M \ni x \mapsto \langle x, p\rangle \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert $x_0 \in M$, so dass Φ in x_0 maximal ist. Aufgrund der Maximalität folgt $\langle x, p\rangle \leq \langle x_0, p\rangle$ bzw. $\langle x - x_0, p\rangle \leq 0$ für alle $x \in M$.

Sei $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = x_0$. Aufgrund der Maximalität von Φ in x_0 gilt $\Phi(\gamma(t)) \le \Phi(x_0)$ für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ mit Gleichheit für $t = 0$. Es folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\Phi(\gamma(t))\bigg|_{t=0} = \langle \dot\gamma(0), p\rangle.$$

Somit steht jeder Tangentialvektor an M in x_0 senkrecht auf p. Also gilt $\nu(x_0) = \pm p$. Für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$\langle x_0 + \lambda p, p\rangle > \langle x_0, p\rangle.$$

Somit liegt keiner der Punkte $x_0 + \lambda p$, $\lambda > 0$, auf M und daher weist p in Richtung der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$. Daher folgt $\nu(x_0) = +p$. Da $p \in \mathbb{S}^n$ beliebig war, ist ν surjektiv. □

Die nächste Folgerung gilt auch ohne die strikte Konvexitätsannahme, falls die Mannigfaltigkeit topologisch eine Sphäre ist. Dies folgt aus dem Satz von Gauß-Bonnet.

Korollar 9.2.2. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine zusammenhängende lokal strikt konvexe geschlossene n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$\int_M K = |\mathbb{S}^n| = (n+1)\omega_{n+1}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis dieses Satzes unter der zusätzlichen Annahme, dass M der Rand einer konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist. Diese Annahme ist nicht nötig, wir werden dies jedoch erst in Abschnitt 11.4 zeigen.

Nach Lemma 9.2.1 ist $\nu\colon M \to \mathbb{S}^n$ surjektiv. Die lokale Injektivität der Normalen ν folgt mit Hilfe der Normalform für Hyperflächen aus der strikten Konvexität. Da M der Rand einer konvexen Menge C ist, liefert eine einfache geometrische Überlegung die Injektivität von $\nu\colon M \to \mathbb{S}^n$. (Betrachte dabei die Tangentialebenen in zwei Punkten mit gleicher Normalen.) Lokal in Graphendarstellung ist Du ein Diffeomorphismus. Sogar $\nu\colon M \to \mathbb{S}^n$ ist ein Diffeomorphismus. Wir bemerken zunächst, dass sich Lemma 9.1.1 auch auf messbare Teilmengen von Ω bzw. M, da sind es genau die Bilder messbarer Teilmengen von Ω, anwenden läßt. (Alternativ kann man M bis auf eine n-dimensionale Nullmenge, die noch formal zu definieren wären, zerlegen und sich überlegen, dass diese Nullmengen auf beiden Seiten der behaupteten Gleichheit keinen Beitrag liefern.) Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ mit $p \in U$, so dass Lemma 9.1.1 auf $M \cap U$ anwendbar ist. Aufgrund der Kompaktheit von M überdecken endlich viele davon bereits M:

$$M = \bigcup_{i=1}^N U_i.$$

Wir setzen nun $M_i := U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$, $1 \le i \le N$, und erhalten eine endliche disjunkte Überdeckung von M durch messbare Mengen in dem Sinne, dass Lemma 9.1.1 anwendbar ist, $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$. Wenden wir nun Lemma 9.1.1 auf jede dieser Mengen an, so erhalten wir

$$\int_M K\,d\mu = \sum_{i=1}^N \int_{M_i} K\,d\mu = \sum_{i=1}^N |\nu(M_i)| = \left|\nu\left(\bigcup_{i=1}^N M_i\right)\right| = |\nu(M)| = |\mathbb{S}^n|,$$

da die Mengen M_i paarweise disjunkt sind und ν injektiv ist.

Die zweite Gleichheit in der Behauptung ist aus Analysis II bekannt. □

10. Mittlerer Krümmungsfluss

Man kann den mittleren Krümmungsfluss für Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Kodimension in anderen Mannigfaltigkeiten untersuchen, wir beschränken uns hier jedoch auf den Fall von Hyperflächen im Euklidischen.

Statt vom mittleren Krümmungsfluss sollte man - in unserem Fall - genauer vom Fluss von Hyperflächen entlang ihrer mittleren Krümmung reden.

10.1. **Die Flussgleichung.** Üblicherweise betrachtet man beim mittleren Krümmungsfluss Abbildungen $X\colon M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$, wobei M eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist. Da wir solche aber noch nicht kennen, umgehen wir dieses Problem mit Hilfe einer lokalen Definition.

Wir setzen hier den Startzeitpunkt stets auf $t = 0$. Die Definitionen und Resultat lassen sich aber direkt auf andere Startzeitpunkte übertragen.

Definition 10.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $T > 0$. Dann erfüllt die Abbildung $X\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss (lokal), falls $X(\cdot,t)$ für alle $t \in [0,T)$ eine immersierte C^2-Hyperfläche ist, X nach t differenzierbar ist und für alle $(x,t) \in \Omega \times [0,T)$ die Gleichung

$$\dot{X} = -H\nu$$

erfüllt ist.

Später ersetzt man in der folgenden Definition die Untermannigfaltigkeit durch eine abstrakte Mannigfaltigkeit. In beiden Fällen benutzt man eine Karte, um mit $X \circ \big((\varphi^{-1} \circ \iota) \times \mathrm{id}\big)$ eine auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ definierte Abbildung zu erhalten.

Definition 10.1.2. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $T > 0$. Dann erfüllt $X\colon M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ den mittleren Krümmungsfluss, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U,φ) mit $p \in U$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} X \circ \big((\varphi^{-1} \circ \iota) \times \mathrm{id}\big) : \pi_1(\varphi(U \cap M)) \times [0,T) &\to \mathbb{R}^{n+1}, \\ (x,t) &\mapsto X(\varphi^{-1}(x,0),t) \end{aligned}$$

den mittleren Krümmungsfluss lokal erfüllt, wobei $\pi_1\colon \mathbb{R}^{n+k} \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ die Projektion $(x,y) \mapsto x$ und $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^{n+k}$ die Inklusion $x \mapsto (x,0)$ ist.

Wir sagen auch, dass dann die Familie $(M_t)_{t\in[0,T)}$ mit $M_t = X(M,t)$ den mittleren Krümmungsfluss erfüllt.

Bemerkung 10.1.3.

(i) In der Praxis lässt man π_1 und ι auch weg und schreibt $X \circ \big(\varphi^{-1} \times \mathrm{id}\big)$ oder sogar $X \circ \varphi^{-1}$.

(ii) Mit $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ hätten wir den Definitionsbereich auch anders darstellen können.

Die Definition des mittleren Krümmungsflusses ist im folgenden Sinne von der Wahl der Karte unabhängig.

Lemma 10.1.4. *Seien (U,φ) und (V,ψ) zwei Karten einer C^2-Untermannigfaltigkeit M. Seien (U,φ) und (V,ψ) C^2-verträglich, d. h. sei $\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ ein C^2-Diffeomorphismus. Sei $X \circ \big((\varphi^{-1} \circ \iota) \times \mathrm{id}\big)$ eine lokale Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Dann erfüllt $X \circ \big((\psi^{-1} \circ \iota) \times \mathrm{id}\big) : \pi_1(\psi(V \cap U \cap M)) \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ebenfalls lokal den mittleren Krümmungsfluss.*

Beweis. Übung. Von der Rechnung her entspricht dies fast Theorem 10.2.1. □

Beispiel 10.1.5 (Sphären)**.** Sei $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $R > 0$. Dann ist $X\colon M \times \left[0, \frac{R^2}{2n}\right) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(p,t) := p \cdot \sqrt{R^2 - 2nt}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses.

Auf diese Lösung kommt man, indem man den Ansatz $X(p,t) := p \cdot f(t)$ macht. Hieraus erhält man $\lambda_i(t) = \frac{1}{f(t)}$, $H = \frac{n}{f(t)}$, $\dot{X} = p\dot{f}(t)$ und $\nu(p,t) = p$. Also sollte

$$p\dot{f}(t) = \dot{X} \overset{!}{=} -H\nu = -\frac{n}{f(t)}p$$

gelten. Dies ist für $\dot{f}(t) = -\frac{n}{f(t)}$ der Fall und die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung mit Anfangswert $f(0) = R$ ist durch $f(t) = \sqrt{R^2 - 2nt}$ gegeben.

Wir lassen es als Übung, die Definition des mittleren Krümmungsflusses auch formal zu überprüfen.

Bemerkung 10.1.6.

(i) Minimalflächen sind stationäre (= zeitunabhängige) Lösungen des mittleren Krümmungsflusses. Zylinder der Form $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ schrumpfen ähnlich wie Sphären. Sie konvergieren in endlicher Zeit gegen $\{0_{\mathbb{R}^{k+1}}\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Die grim reaper Lösung ist als Graph von $u(x,t) = -\log\cos x + t$, $(x,t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$, gegeben. Weitere explizite Beispiele sind die Haarnadel- oder Büroklammerlösung (haar pin, paper clip). Details: Übung.

(ii) Für weitere Lösungen muss man - soweit ich weiß - zumindest eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen (siehe beispielsweise meine Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen). Sind die Lösungen nicht symmetrisch, muss man eine quasilineare partielle Differentialgleichung lösen (siehe beispielsweise meine Vorlesung über den Graphischen mittleren Kümmungsfluss).

(iii) Beim mittleren Krümmungsfluss untersucht man häufig die Existenz von Lösungen und ihr Verhalten. Klassische Resultate von etwa 1985-1995 sind: Konvexe Hyperflächen konvergieren gegen runde Punkte, d. h. gegen einen Punkt und nach geeignetem Reskalieren gegen eine runde Sphäre (G. Huisken, [6]). Eingebettete $\mathbb{S}^1$-en bleiben eingebettet, werden in endlicher Zeit konvex und konvergieren dann auch gegen einen runden Punkt (M. Gage, R. Hamilton; M. Grayson [3, 4]). Graphische Hyperflächen existieren für alle Zeit und konvergieren gegen homothetisch expandierende Lösungen, wenn sie anfangs asymptotisch zu einem Kegel sind (K. Ecker, G. Huisken, [2]).

(iv) Ein großes Ziel ist es, mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses alle (kompakten) Hyperflächen in geeigneter Weise zu klassifizieren. Der mittlere Krümmungsfluss wird auch hier in der Arbeitsgruppe untersucht.

10.2. Mittlerer Krümmungsfluss als geometrische Evolutionsgleichung $\star$.

Der mittlere Krümmungsfluss ist eine geometrische Evolutionsgleichung, d. h. das Bild $M_t := X(M,t)$ hängt nicht von der konkreten Parametrisierung ab und ist unter Euklidischen Bewegungen des umgebenden Raumes invariant. Da es häufig nur auf das Bild M_t ankommt, kann man auch Lösungen von $\langle \frac{d}{dt}X, \nu\rangle = -H$ untersuchen. Diese sind nicht eindeutig bestimmt, da man sie mit Hilfe von Diffeomorphismen wie im folgenden Theorem angegeben abändern kann.

Theorem 10.2.1. *Sei $X\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Lösung des mittleren Krümmungsflusses $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ oder eine Lösung, deren Normalengeschwindigkeit gerade die mittlere Krümmung ist: $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$. Sei $R \in O(n+1)$ eine orthogonale Abbildung und $\psi\colon \hat{\Omega} \times [0,T) \to \Omega$ glatt, so dass $\psi(\cdot,t)\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ für alle $t \in [0,T)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist die Normalengeschwindigkeit von*

$\hat{X}(x,t) := RX(\psi(x,t),t)$, in Koordinaten $\hat{X}^\alpha(x,t) = R^\alpha_\beta X^\beta(\psi(x,t),t)$, gerade die mittlere Krümmung:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\hat{X}, \hat{\nu} \right\rangle = -\hat{H}.$$

Weiterhin gilt $\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$.

Den Diffeomorphismus ψ kann man verwenden, um die Hyperflächen anders zu parametrisieren. Dies entspricht gerade der Wahl einer anderen Karte in der globalen Definition. Daher kann man nicht mehr erwarten, dass die Tangentialgeschwindigkeit verschwindet, wenn wir ψ verwenden. Die Bilder von X und $X \circ \psi$ stimmen aber überein. Daher passiert in beiden Fällen geometrisch das Gleiche.

Da sämtliche Rechnungen im Beweis lokal sind, gilt dies auch, wenn die Mengen Ω und $\hat{\Omega}$ von der Zeit abhängen.

Beweis. Größen zu $\hat{X}$ bezeichnen wir mit $\hat{\nu}$, $\hat{H}$, $\hat{g}_{ij}$, ...

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{X}^\alpha &= R^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial t} X^\beta + R^\alpha_\beta X^\beta_k \dot{\psi}^k, \\
\hat{X}^\alpha_i &= R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_i, \\
\hat{X}^\alpha_{,ij} &= R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_{ij} + R^\alpha_\beta X^\beta_{,kl} \psi^k_i \psi^l_j.
\end{aligned}$$

Wählen wir $\hat{\nu}^\alpha = R^\alpha_\beta \nu^\beta$, also $\hat{\nu} = R\nu$, so ist dies eine Normale an die Fläche $\hat{X}$, da $\langle R\nu, R\nu\rangle = \langle \nu, \nu\rangle = 1$ und $\left\langle R\nu, \left(R^\alpha_\beta X^\beta_k \psi^k_i\right)_\alpha \right\rangle = \langle \nu, X_k\rangle \psi^k_i = 0$ für alle $1 \le i \le n$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\hat{X}, \hat{\nu} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} X^\alpha R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta + \dot{\psi}^i X^\alpha_i R^\beta_\alpha \delta_{\beta\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta \\
&= -H\nu^\alpha \delta_{\alpha\delta}\nu^\delta + \dot{\psi}^i X^\alpha_i \delta_{\alpha\delta}\nu^\delta \\
&= -H + 0.
\end{aligned}$$

$\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ haben wir bereits in Lemma 3.3.5 gesehen. Um beide Teile des Beweises beieinander zu haben, wiederholen wir dies hier nochmals. Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{ij} &= \hat{X}^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} \hat{X}^\beta_j = \psi^k_i X^\gamma_k R^\alpha_\gamma \delta_{\alpha\beta} R^\beta_\delta X^\delta_l \psi^l_j = \psi^k_i X^\gamma_k \delta_{\gamma\delta} X^\delta_l \psi^l_j = \psi^k_i g_{kl} \psi^l_j, \\
\hat{h}_{ij} &= -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu} \right\rangle = -\psi^k_{ij} X^\beta_k R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta - \psi^k_i \psi^l_j X^\beta_{,kl} R^\alpha_\beta \delta_{\alpha\gamma} R^\gamma_\delta \nu^\delta \\
&= -\psi^k_{ij} X^\beta_k \delta_{\beta\delta}\nu^\delta + \psi^k_i \left(-X^\beta_{,kl}\delta_{\beta\delta}\nu^\delta\right)\psi^l_j = 0 + \psi^k_i h_{kl} \psi^l_j.
\end{aligned}$$

ψ ist ein Diffeomorphismus. Also ist $\left(\psi^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ eine invertierbare Matrix und die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij} und von $\hat{h}_{ij}$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ stimmen überein: Sei nämlich ξ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d. h. gelte

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

und $\xi \neq 0$. Dann folgt für $\hat{\xi}^i := \Psi^i_k \xi^k$ mit $\Psi(\cdot,t) := (\psi(\cdot,t))^{-1}$

$$\lambda \hat{g}_{kl}\hat{\xi}^l = \lambda \psi^i_k g_{ij} \psi^j_l \Psi^l_m \xi^m = \lambda \psi^i_k g_{ij}\xi^m = \psi^i_k h_{ij}\xi^j = \psi^i_k h_{ij}\psi^j_l \Psi^l_m \xi^m = \hat{h}_{kl}\hat{\xi}^l.$$

Andersherum argumentiert man analog. Somit folgt $\hat{H}(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ und damit die Behauptung. □

Übung 10.2.2. Finde Lösungen von $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$ und $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ für den Fall, dass M_0 ein Zylinder ist, dass also $M_0 = \left(R \cdot \mathbb{S}^k\right) \times \mathbb{R}^{n-k}$ für ein $R > 0$ gilt und überprüfe die Definition des mittleren Krümmungsflusses explizit.

10.3. **Graphische Krümmungsflüsse.**

Bemerkung 10.3.1. $\star$

(i) Die Resultate dieses Abschnittes gelten mit Modifikationen bei den Definitionsmengen auch für Graphen, die nicht über ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

(ii) Sei in diesem Abschnitt F eine beliebige Normalengeschwindigkeit, also z. B. $F = H$, $F = K$ oder $F = |A|^2$. Es sind aber auch Funktionen möglich, die beispielsweise zusätzlich von $X(x,t)$ oder ν abhängen.

(iii) Naiv könnte man denken, dass wir durch Betrachten der $(n+1)$-sten Komponente von $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ die Evolutionsgleichung $\dot{u} = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ erhielten. Dabei haben wir jedoch nicht berücksichtigt, dass sich dabei auch der Punkt x zeitlich ändern kann. Vergleiche dies auch mit einer Ebene, die sich mit konstanter Normalengeschwindigkeit bewegt.

(iv) Bei der Umkehrung kann man nicht erwarten, die Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt}X = -F\nu$$

zu erhalten, da Diffeomorphismen wie in Theorem 10.2.1 den Tangentialanteil von $\frac{d}{dt}X$ ändern können.

Lemma 10.3.2. $\star$ *Sei $(M_t)_{0\le t<T}$ eine Lösung von $\frac{d}{dt}X = -F\nu$. Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte oder $C^{2;1}$-Funktion mit*

$$M_t = \operatorname{graph} u(\cdot,t)$$

für alle $t \in [0,T)$. Dann erfüllt u die Gleichung

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F,$$

im Falle von $F = H$ also

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right),$$

in $\mathbb{R}^n \times [0,T)$.

Umgekehrt sei u eine Lösung von $\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F$. Dann gilt $\left\langle \frac{d}{dt}H, \nu\right\rangle = -F$ für $X(x,t) = (x, u(x,t))^T$, jedoch im allgemeinen nicht $\frac{d}{dt}H = -F\nu$.

Im Falle $F = H, K$ oder $|A|^2$ handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung.

Beweis. Sei X auf $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ definiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ mit ξ. Wir bezeichnen weiterhin die orthogonale Projektion von $X(\xi,t)$ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$ mit $x(\xi,t)$. Dann gilt

$$X(\xi,t) = (x(\xi,t), u(x(\xi,t),t))^T.$$

Aus der Evolutionsgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}X = \left(\dot{x}, u_i\dot{x}^i + \dot{u}\right)^T = -F\nu = F\frac{(-u^1,\dots,-u^n,1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Dabei benutzen wir $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Durch Komponentenvergleich erhalten wir

$$\dot{x}^i = \frac{-Fu^i}{\sqrt{1+|Du|^2}},$$

$$\dot{u} = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}} - u_i\dot{x}^i = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{F|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F.$$

Bis hier gelten die Rechnungen auch für andere Normalengeschwindigkeiten als H. Die Formel für H im graphischen Fall haben wir bereits oben in Lemma 3.3.6 hergeleitet. Somit folgt die Behauptung.

Zur Umkehrung der Aussage: Definiere $X(x,t) = (x, u(x,t))^T$ für eine Funktion u mit $\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X &= \left(0, \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F\right)^T, \\ \nu &= \frac{(\nabla u, -1)^T}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \\ \left\langle \frac{d}{dt}X, \nu \right\rangle &= -F. \end{aligned}$$

Ist $Du \neq 0$, so kann $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ nicht gelten. □

Eine bessere Umkehrung erhalten wir, indem wir noch gewöhnliche Differentialgleichungen lösen.

Lemma 10.3.3. *Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte Lösung von $\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F$. Seien Du und F gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es eine glatte Familie $(\psi_t)_{t\in[0,T)}$ von Diffeomorphismen $\psi_t = \psi(\cdot,t)$ mit $\psi\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_0 = \mathrm{id}$, so dass $X(x,t) := (\psi(x,t), u(\psi(x,t),t))^T$ die Evolutionsgleichung $\frac{d}{dt}X = -F\nu$ löst.*

Beweis. Nach Definition ist auch F glatt. Da die beiden äußeren Terme gleich sind, sollte

$$\frac{d}{dt}X = \left(\dot{\psi}, \dot{u} + u_i\dot{\psi}^i\right) \overset{!}{=} -F\frac{(\nabla u(\psi(x,t),t), -1)^T}{\sqrt{1+|Du(\psi(x,t),t)|^2}} = -F\nu$$

gelten. Nach Beschränktheits- und Regularitätsannahme besitzt das Anfangswertproblem des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{\psi}^i(x,t) = -\dfrac{Fu^i(\psi(x,t),t)}{\sqrt{1+|Du(\psi(x,t),t)|^2}}, \\ \psi(\cdot,0) = \mathrm{id} \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte glatte lokal gleichmäßig beschränkte Lösung $\psi\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$. Nach Konstruktion gilt die erwünschte Gleichheit in den ersten Komponenten und aus

$$\dot{u} + u_i\dot{\psi}^i = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F - \frac{F|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{F}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

folgt auch die Gleichheit in der letzten Komponente.

Aus Analysis III ist bekannt, dass alle Abbildungen ψ_t glatt und Diffeomorphismen sind. □

Bemerkung 10.3.4. Je nach Funktion F benötigt man weniger Regularität. So genügt bei Flüssen wie dem mittleren Krümmungsfluss oder dem Gaußkrümmungsfluss $u \in C^{3,1;1,1} \supset C^{4;2}$ und gleichmäßige Schranken in dieser Norm. Die Differenzierbarkeit von ψ folgt dann aus dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit von Lösungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf ψ und den Parameter x angewandt. Insbesondere ist es dafür nötig, dass die Ableitung der rechten Seite nach Differentiation nach ψ noch Lipschitzstetig in x ist.

Über den graphischen mittleren Krümmungsfluss ist später eine eigene Vorlesung geplant.

10.4. **Der mittlere Krümmungsfluss als negativer Gradientenfluss.** Wir leiten zunächst eine Eigenschaft des Gradientenflusses her, die wir auch beim mittleren Krümmungsfluss zeigen werden.

Bemerkung 10.4.1. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Sei I ein offenes Intervall. Dann löst eine C^1-Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ den negativen Gradientenfluss zur Funktion f bezüglich der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^n$, falls

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$$

für alle $t \in I$ gilt.

Sei $t_0 \in I$ und sei $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine weitere C^1-Funktion mit $y(t_0) = x(t_0)$ und $|\dot{y}(t_0)| \leq |\dot{x}(t_0)| = |\nabla f(x(t_0))|$. Dann gilt $\frac{d}{dt} f(x(t)) \leq \frac{d}{dt} f(y(t))$ an der Stelle $t = t_0$, d. h. der negative Gradientenfluss ist infinitesimal die schnellste Möglichkeit bei gegebener Geschwindigkeit f zu verkleinern. (Global braucht dies nicht richtig zu sein.)

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(x(t)) - f(y(t)))\bigg|_{t=t_0} &= Df(x(t_0))\langle \dot{x}(t_0)\rangle - Df(y(t_0))\langle \dot{y}(t_0)\rangle \\ &= \langle \nabla f(x(t_0)), \dot{x}(t_0)\rangle - \langle \nabla f(x(t_0)), \dot{y}(t_0)\rangle \\ &\leq -|\nabla f(x(t_0))|^2 + |\nabla f(x(t_0))| \cdot |\dot{y}(t_0)| \leq 0.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass Gleichheit genau für $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0)$ gilt. □

Nimmt man als Norm die L^2-Norm der Normalengeschwindigkeit, so erhalten wir ein entsprechendes Resultat für den mittleren Krümmungsfluss. Wir arbeiten mit Funktionen, die sich nur auf kompakten Teilmengen unterscheiden, damit wir bei partieller Integration keine Randterme bekommen. Ein entsprechendes Resultat gilt aber auch für kompakte Lösungen des mittleren Krümmungsflusses.

Lemma 10.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte graphische Lösung des mittleren Krümmungsflusses, es gelte also*

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) \quad \text{in } \Omega \times [0,T).$$

Sei $w\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$ ebenfalls glatt mit $w(\cdot,t_0) = u(\cdot,t_0)$ für ein $t_0 > 0$ und gelte $u(x,t) = w(x,t)$ für alle t und alle $x \in \Omega \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge $K \Subset \Omega$. Sei F so gewählt, dass $\dot{w} = \sqrt{1+|Dw|^2} \cdot F$ gilt. Nehme schließlich an, dass die L^2-Norm der Normalengeschwindigkeit F bezüglich des Oberflächenmaßes die L^2-Norm von H zur Zeit $t = t_0$ in K nicht übersteigt, dass also zur Zeit $t = t_0$

$$\int_K F^2 \, d\mu_w \leq \int_K H^2 \, d\mu_u$$

gilt, wobei $d\mu_u \equiv \sqrt{1+|Du|^2}\, dx$ ist und $d\mu_w$ entsprechend definiert ist, so dass insbesondere $d\mu_u = d\mu_w \equiv d\mu$ zur Zeit $t = t_0$ gilt. Dann folgt

$$\frac{d}{dt}\int_K \sqrt{1+|Du|^2}\, dx\bigg|_{t=t_0} \leq \frac{d}{dt}\int_K \sqrt{1+|Dw|^2}\, dx\bigg|_{t=t_0}.$$

Beweis. In der nachfolgenden Rechnung werten wir stets an der Stelle $t = t_0$ aus. Wir erhalten mit partieller Integration und Hölderscher Ungleichung

$$\frac{d}{dt}\int_K \sqrt{1+|Dw|^2} = \int_K \frac{\langle Dw, D\dot{w}\rangle}{\sqrt{1+|Dw|^2}} = -\int_K \dot{w} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|Dw|^2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_K F\cdot H\,\underbrace{\sqrt{1+|Dw|^2}\,dx}_{=d\mu}\\
&\geq -\left(\int_K F^2\,d\mu\right)^{1/2}\cdot\left(\int_K H^2\,d\mu\right)^{1/2}\\
&\geq -\int_K H^2\,d\mu = \frac{d}{dt}\int_K \sqrt{1+|Du|^2},
\end{aligned}
$$

wobei wir für den letzten Schritt die ersten Schritte für w im Falle $F = H$ wiederholen.

Beachte, dass wir die Abschätzung an einer Stelle machen, an der mit $F\cdot H$ das Produkt zweier Normalengeschwindigkeiten steht. □

10.5. **Einige Evolutionsgleichungen.**

Lemma 10.5.1. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und sei $X\colon\Omega\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ für ein $T>0$ eine Lösung der Evolutionsgleichung $\dot X = -F\nu$. Dann gilt für die Metrik*

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2Fh_{ij}.$$

Beweis. Wir differenzieren $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g_{ij} &= \left\langle \frac{d}{dt}X_i, X_j\right\rangle + \left\langle X_i, \frac{d}{dt}X_j\right\rangle\\
&= \langle(-F\nu)_i, X_j\rangle + \langle X_i, (-F\nu)_j\rangle\\
&= -\langle F_i\nu + F\nu_i, X_j\rangle - \langle X_i, F_j\nu + F\nu_j\rangle\\
&= -\left\langle Fh_i^kX_k, X_j\right\rangle - \left\langle X_i, Fh_j^kX_k\right\rangle\\
&= -Fh_i^kg_{kj} - Fg_{ik}h_j^k\\
&= -2Fh_{ij}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 10.5.2. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und sei $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung der Evolutionsgleichung $\dot X = -F\nu$. Dann gilt für das Volumenelement $d\mu\equiv\sqrt{\det g_{ij}}\,dx$*

$$\frac{d}{dt}d\mu = -FH\,d\mu.$$

Beweis. Wir benutzen die Evolutionsgleichung für die Metrik und die Differentiationsregel für die Determinante und erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}d\mu &= \frac{d}{dt}\sqrt{\det g_{ij}}\,dx\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\det g_{ij}g^{kl}\frac{d}{dt}g_{kl}\,dx\\
&= -F\sqrt{\det g_{ij}}g^{kl}h_{kl}\,dx\\
&= -FH\,d\mu.
\end{aligned}
$$

□

Ohne einen formalen Beweis geben wir das Resultat an, wie sich das eingeschlossene Volumen unter einer Flussgleichung ändert. Für eine formale Herleitung wäre zunächst das eingeschlossenen Volumen zu definieren, dann lässt sich die eingeschlossene Menge beispielsweise wie folgt beschreiben: Sei Ω_0 die eingeschlossene Menge zum Zeitpunkt $t=0$. Sei $\psi(\cdot,t)$ eine Familie von Diffeomorphismen auf ihr Bild in $\mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\dot\psi(x,t)$ für sämtliche Randpunkte gerade mit $-F\nu$ übereinstimmt. Nun kann man die Volumenänderung von $\psi(\Omega,t)$ bestimmen. Details: Übung.

Bemerkung 10.5.3. Sei M_t eine Familie geschlossener zusammenhängender Hyperflächen, die die Evolutionsgleichung $\dot{X} = -F\nu$ erfüllt. Sei Ω_t die beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M_t$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \int\limits_M -F\,d\mu.$$

Heuristik zur Formel. Infinitesimal wird ein kleines Flächenstück A mit Geschwindigkeit F nach innen verschoben. Dabei fällt in Physikernotation ein Zylinder mit Volumen $|A| \cdot F \cdot \Delta t$ weg. Aufintegriert über M erhalten wir genau die behautete Formel. □

10.6. **Die isoperimetrische Ungleichung.** Es gilt die folgende allgemeine Form der isoperimetrischen Ungleichung. Sie besagt, dass eine gewisse Oberfläche $|\partial\Omega|$ nötig ist, um ein gegebenes Volumen $|\Omega|$ einzuschließen.

Theorem 10.6.1 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$n\omega_n^{1/n}|\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial\Omega|.$$

Dabei steht $|\Omega|$ für das Lebesguesche äußere Maß von Ω und $|\partial\Omega|$ für das $(n-1)$-dimensionale Hausdorffmaß von $\partial\Omega$.

Wir untersuchen die isoperimetrische Ungleichung nur im folgenden glatten Fall. Mit $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$ ergibt sich

Theorem 10.6.2. *Sei $(M_t)_{0\leq t<T}$ mit $M_t \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Familie von glatten geschlossenen strikt konvexen Flächen, die sich unter dem mittleren Krümmungsfluss $\dot{X} = -H\nu$ bewegen. Sei $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega_t = M_t$ für alle $t \in [0, T)$. Gelte $|\Omega_t| \to 0$ für $t \nearrow T$. Dann gilt*

$$3\sqrt{4\pi} \cdot |\Omega_t| \leq |M_t|^{3/2}$$

für alle $0 \leq t < T$.

Beweis. Im eigentlichen Beweis benötigen wir zwei Ungleichungen. Die Höldersche Ungleichung liefert

$$\int\limits_{M_t} H\,d\mu \leq \left(\int\limits_{M_t} 1\,d\mu\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{M_t} H^2\,d\mu\right)^{1/2}.$$

Weiterhin gilt für jede strikt konvexe zusammenhängende Fläche nach Korollar 9.2.2

$$\int\limits_{M_t} H^2\,d\mu = \int\limits_{M_t} (\lambda_1 - \lambda_2)^2\,d\mu + \int\limits_{M_t} 4K\,d\mu \geq 4\int\limits_{M_t} K\,d\mu = 4 \cdot \left|\partial B_1^3\right| = 4 \cdot 3\omega_3 = 4 \cdot 4\pi.$$

(Ist M_t nicht strikt konvex, so gilt ebenfalls die Abschätzung $\int H^2 \geq 16\pi$. Dies zeigt man, indem man über eine messbare Teilmenge N von M_t integriert, so dass $\nu\colon N \to \mathbb{S}^2$ bijektiv ist und $K|_N \geq 0$ gilt. Details: Übung.) Wir definieren

$$\Phi(t) := \frac{1}{3\sqrt{4\pi}}|M_t|^{3/2} - |\Omega_t| \equiv \frac{1}{3\sqrt{4\pi}}\left(\int\limits_{M_t} 1\,d\mu\right)^{3/2} - |\Omega_t|.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{4\pi}}\left(\int\limits_{M_1} 1\,d\mu\right)^{1/2} \int\limits_{M_t} -H^2\,d\mu - \int\limits_{M_t} -H\,d\mu.$$

Ist $\int H \leq 0$, eine Situation, die aufgrund der Konvexität hier nicht auftreten kann, so erhalten wir $\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq 0$. Sonst ist $\int H > 0$ und wir erhalten aufgrund der vorbereiteten Ungleichungen mit Hilfe von $\int H^2 = \sqrt{\int H^2} \cdot \sqrt{\int H^2}$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq -\left(\int\limits_{M_t} H\,d\mu\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int\limits_{M_t} H^2\,d\mu\right)^{1/2}}_{\geq 1} + \int\limits_{M_t} H\,d\mu \leq 0.$$

Wegen $|\Omega_t| \to 0$ für $t \nearrow T$ gilt $\lim\limits_{t \nearrow T} \Phi(t) \geq 0$. Aus $\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq 0$ folgt $\Phi(t) \geq \Phi(s)$ für alle $t \leq s$. Wir lassen nun $s \nearrow T$ und erhalten $\Phi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, T)$. Dies ist äquivalent zur behaupteten isoperimetrischen Ungleichung. □

10.7. **Translatierende und homothetische Lösungen.** Im Kapitel über Minimalflächen haben wir bereits gesehen, dass Minimalflächen kritische Punkte des Oberflächenfunktionals sind. Solche Zusammenhänge gibt es auch für translatierende Lösungen oder homothetische Lösungen.

In diesem Kapitel wollen wir annehmen, dass alle auftretenden Hyperflächen glatt sind und die Integrale jeweils endlich ausfallen.

Wir zeigen zunächst nochmals eine Richtung des Resultats für Minimalflächen mit unseren jetzigen Methoden. Die andere Richtung folgt so nicht direkt, da wir hier nur normale Veränderungen betrachten.

Theorem 10.7.1. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche M, die ein kritischer Punkt des Funktionals $\int\limits_M 1\,d\mu$ ist. Dann ist X eine Minimalfläche, d. h. es gilt $H = 0$.*

Beweis. Sei $F\colon \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, deren stetige Fortsetzung auf $\Omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ einen kompakten Träger in $\Omega \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ habe und sei $Y\colon \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Y(\cdot, 0) = X$ und $\dot{Y} = -F\nu_X$.

(Achtung: Dies ist keine Evolutionsgleichung der Form $\dot{Y} = -F\nu_Y$, da wir die Normale fixiert haben. Bei nicht fixierter Normale hätten wir eine partielle Differentialgleichung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stimmen die Normalen jedoch überein und wir können die Evolutionsgleichung von $d\mu$ verwenden bzw. nochmals direkt analog zu oben herleiten.)

Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man lokal lösen und Y ist in beiden Variablen glatt. Da die Eigenschaft, Immersion zu sein, unter kleinen glatten Störungen erhalten bleibt, ist Y eine glatte Familie von glatten Immersionen, falls wir nur annehmen, dass $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Sei $M_t = Y(\Omega, t)$. Dann gilt zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{M_t} 1\,d\mu = \int\limits_{M_t} -FH\,d\mu.$$

Da X ein kritischer Punkt ist, verschwinden diese Ausdrücke. Für beliebige Funktionen F ist dies nur im Falle $H = 0$ möglich. □

Theorem 10.7.2. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche M, die ein kritischer Punkt des Funktionals*

$$\int\limits_M e^{\lambda\langle X, \eta\rangle}\,d\mu$$

mit $\eta \in \mathbb{S}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist X eine unter dem mittleren Krümmungsfluss mit Geschwindigkeit λ in Richtung η translatierende Lösung (zu einer festen Zeit betrachtet).

Bemerkung 10.7.3.

(i) Wenn wir X als translatierende Lösung zu einer festen Zeit bezeichnen bedeutet dies folgendes: Zunächst machen wir aus X eine translatierende Lösung, betrachten also $X+t\lambda\eta$. Dann betrachten wir die mittlere Krümmung davon. Sie stimmt mit der von X überein. Nun sollte die Evolution unter dem mittleren Krümmungsfluss und die Translation übereinstimmen, also $\frac{d}{dt}(X+t\lambda\eta) = -H\nu$ gelten. Dies ist i. a. wegen tangentialer Diffeomorphismen nicht möglich. Daher spricht man auch dann von einer translatierenden Lösung, wenn nur die Normalenkomponenten übereinstimmen. Wir fordern also $\langle \lambda\eta, \nu\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(X+t\lambda\eta), \nu\right\rangle = -H\langle\nu,\nu\rangle = -H$.

(ii) Wir haben hier gerade implizit eine Richtung als einen Vektor der Länge eins definiert.

Beweis von Theorem 10.7.2. Wir gehen wie bei Minimalflächen vor und erhalten zur Zeit $t=0$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{M_t} e^{\lambda\langle Y,\eta\rangle}\,d\mu = \int\limits_{M_t} e^{\lambda\langle Y,\eta\rangle}\left(\lambda\langle -F\nu,\eta\rangle - HF\right)\,d\mu.$$

Somit muss $0 = \lambda\langle\nu,\eta\rangle + H$ gelten. □

Theorem 10.7.4. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche M, die ein kritischer Punkt des Funktionals*

$$\int\limits_M e^{\lambda\frac{|X|^2}{2}}\,d\mu$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist M für $\lambda < 0$ eine unter dem mittleren Krümmungsfluss homothetisch schrumpfende und für $\lambda > 0$ eine homothetisch expandierende Lösung (zu einer festen Zeit).

Üblicherweise beschränkt man sich auf die Fälle $\lambda = \mp 1$.

Beweis. Gehe analog zu den Überlegungen zu Theorem 10.7.2 vor. Details: Übung. □

In der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen“ werden wir beispielsweise translatierende Lösungen unter Symmetrieannahmen untersuchen und deren Existenz zeigen.

10.8. **Niveauflächenfluss.**

Es gibt zwei verschiedene Varianten, den mittleren Krümmungsfluss mit Hilfe von Niveauflächen darzustellen. Wir beschreiben in beiden Fällen nur den regulären Fall. Beide Resultate gelten auch für Teilmengen des $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Resultate gelten ebenso für andere Normalengeschwindigkeiten F, erfordern dann jedoch die genaue Angabe der Normalen, da in diesem Fall möglicherweise $-F\nu$, anders als $-H\nu$, nicht mehr unter $\nu \mapsto -\nu$ invariant ist.

Die erste Niveauflächenvariante ist die folgende:

Lemma 10.8.1. *Sei $w\colon \mathbb{R}^{n+1}\times[0,T) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\nabla w \neq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt

$$\dot{w} = \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{w^\alpha w^\beta}{|Dw|^2}\right) w_{\alpha\beta}.$$

(ii) Die Niveauflächen $M_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon w(x,t) = h\}$ erfüllen den mittleren Krümmungsfluss bis auf tangentiale Diffeomorphismen, also $\left\langle \dot{X}, \nu\right\rangle = -H$, für beliebige Niveaus $h \in \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 10.8.2.

(i) Hinweis: Ist w eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, d. h. w erfüllt die Differentialgleichung aus Lemma 10.8.1, und ist X eine klassische Lösung des mittleren Krümmungsflusses mit $w(X(p,0),0) = c$, so rechnet man nach, dass $\frac{d}{dt} w(X(p,t),t) = 0$ für beliebige p gilt. Benutze dazu $\nu^\alpha = -\frac{w^\alpha}{|Dw|}$ sowie $H = \operatorname{div}(\nu) = -\sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{w^\alpha}{|Dw|}\right)$.

(ii) w löst hier für alle Niveauflächen gleichzeitig den mittleren Krümmungsfluss.

(iii) Sei $w(x,t) := t + \frac{1}{2n}|x|^2$. Dann ist w eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 1, \\ w_\alpha &= \frac{1}{n} x_\alpha, \\ w_{\alpha\beta} &= \frac{1}{n}\delta_{\alpha\beta}, \\ \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{w^\alpha w^\beta}{|Dw|^2}\right) w_{\alpha\beta} &= \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{x^\alpha x^\beta}{|x|^2}\right)\frac{1}{n}\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{n}((n+1)-1) = 1. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Hyperflächen M_t sind schrumpfende Sphären.

(iv) Sei w eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige C^2-Funktion. Dann ist $v := f \circ w$ in der Menge $Dv \neq 0$ eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses. Details: Übung.

(v) Die Niveauflächengleichung für den mittleren Krümmungsfluss ist degeneriert parabolisch, ein Eigenwert verschwindet.

(vi) Viskositätslösungen erlauben es, Niveauflächenlösungen auch unabhängig von $Dw \neq 0$ zu definieren und zu untersuchen. Alternativ betrachtet man elliptische Regularisierungen der rechten Seite.

Wir kommen nun zur zweiten Variante, den mittleren Krümmungsfluss mit Hilfe von Niveauflächen darzustellen. Sie funktioniert nur im Falle $H > 0$ und arbeitet dafür mit zeitunabhängigen Funktionen.

Lemma 10.8.3. *Sei $u\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $Du \neq 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = -\frac{1}{|\nabla u|}.$$

(ii) Die Niveauflächen $M_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon u(x) = t\}$ erfüllen den mittleren Krümmungsfluss bis auf tangentiale Diffeomorphismen.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 10.8.4.

(i) Wir können die Differentialgleichung wegen $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{\Delta u}{|\nabla u|} - \frac{D^2 u\langle \nabla u, \nabla u\rangle}{|\nabla u|^3}$ auch als

$$\Delta u - \frac{D^2 u\langle \nabla u, \nabla u\rangle}{|\nabla u|^2} = -1$$

schreiben.

(ii) Hinweis: Ist u eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, d. h. u erfüllt die Differentialgleichung aus Lemma 10.8.3, und ist X eine klassische Lösung des mittleren Krümmungsflusses mit $u(X(p,0)) = c$, so rechnet man nach, dass $\frac{d}{dt}u(X(p,t)) = 1$ für beliebige p gilt.

(iii) $u(x) := -\frac{1}{2n}|x|^2$ ist eine Niveauflächenlösung des mittleren Krümmungsflusses, denn es gilt:

$$u_\alpha = -\frac{1}{n}x_\alpha,$$
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \operatorname{div}\left(-\frac{x}{|x|}\right) = -\frac{(n+1)-1}{|x|} = -\frac{n}{|x|} = -\frac{1}{|\nabla u|}.$$

Diese Lösung beschreibt Sphären, die für $t \nearrow 0$ zu einem Punkt konvergieren.

(iv) Die Differentialgleichung hier ist degeneriert elliptisch und wird ebenenfalls mit Hilfe von Viskositätslösungen oder elliptischer Regularisierung untersucht.

(v) Übung: Welche Evolutionsgleichung gehört zur Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u|?$$

Bestimme eine (rotationssymmetrische) Lösung dieser Differentialgleichung.

Bemerkung 10.8.5. Beide Versionen von Niveauflächenlösungen ("level-set solutions") sind für die Untersuchung von Lösungen wichtig, die Singularitäten entwickeln. Beispiel: Eine "neck-pinch"-Singularität.

Mit Hilfe der Niveauflächenformulierung können wir eine nicht so triviale Lösung des mittleren Krümmungsflusses erstaunlicherweise in geschlossener Form hinschreiben.

Beispiel 10.8.6 (Haarnadellösung)**.** Sei $v \neq 0$. Betrachte die Menge

$$M_t := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{v^2 t}\cosh(vy) = \cos(vx)\right\}.$$

Dann ist M_t eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Die Kurven M_t sehen für $t \ll -1$ wie lange Haarnadeln oder Büroklammern und für $t \uparrow 0$ wie kleine runde Kreise aus.

Man kann die Lösung lokal auch vermöge

$$y_\pm := \frac{1}{v}\log\left(\cos(vx) \pm \sqrt{\cos^2(vx) - e^{2v^2 t}}\right) - vt.$$

als Graph darstellen und beim Nachrechnen, dass es sich um eine Lösung handelt $t_x = u_x = -\frac{\sin(vx)}{v\cos(vx)}$ und $u_y = -\frac{\sinh(vy)}{v\cosh(vy)}$ als Zwischenergebnisse begegnen.

Beweis. Übung. □

11. Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

11.1. **Flüsse in Tangentialrichtung.** Wir wiederholen zunächst ein Resultat aus Analysis III.

Theorem 11.1.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $V\colon \mathbb{R}^{n+1} \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein C^k-Vektorfeld, $k \geq 1$, das in M tangential zu M ist, d. h. für $(x,t) \in M \times [0,T]$ gilt $V(x,t) \in T_xM$. Sei $x_0 \in M$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = V(\alpha(t),t), & t \in [0,T], \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}$$

eine C^{k+1}-Lösung $\alpha\colon [0,T] \to M$. α ist die einzige $C^1([0,T],\mathbb{R}^{n+1})$-Lösung dieses Anfangswertproblems.

Beweis. Sei d (lokal) die signierte Distanzfunktion zu M. Da M von der Klasse C^2 ist, ist (in einer Tubenumgebung U von M) $d \in C^2$ nach Lemma 8.1.2. Wir setzen $\nu := \frac{\nabla d}{|\nabla d|}$. Es gilt $\nu \in C^1$. Wir definieren in $U \times [0,T]$ das C^1-Vektorfeld

$$\tilde{V} := V - \langle V, \nu\rangle \nu.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \tilde{V}(\alpha(t),t), & t \in [0,T], \\ \alpha(0) = x_0 \end{cases}$$

eine C^2-Lösung $\alpha\colon [0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ für ein $\varepsilon > 0$.

Wir möchten nun zeigen, dass die Lösung auf M bleibt. Es folgt für $\alpha(t) \in U$

$$\frac{d}{dt} d(\alpha(t)) = \langle \nabla d(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle = \left\langle \nabla d(\alpha(t)), \tilde{V}(\alpha(t),t)\right\rangle = 0.$$

Also gilt $d(\alpha(t)) = 0$, solange $\alpha(t) \in U$ gilt. Damit ist $\alpha(t) \in M$ für $\alpha(t) \in U$. Insbesondere folgt hieraus, dass die Menge aller $t \in [0,\varepsilon)$, für die $\alpha(t) \in M$ gilt, (relativ) offen ist. Aufgrund der Abgeschlossenheit von M ist sie aber auch relativ abgeschlossen. Schließlich ist $\alpha(0) = x_0 \in M$. Da $[0,\varepsilon)$ zusammenhängend ist, gilt somit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in [0,\varepsilon)$.

Da V beschränkt ist, lässt sich α mit Hilfe der äquivalenten Integralformulierung auf $[0,\varepsilon]$ und wie oben mit Startzeit $t = \varepsilon$ statt $t = 0$ über $t = \varepsilon$ hinaus fortsetzen. Durch Betrachten des maximalen Existanzintervalles sehen wir, dass α auf ganz $[0,T]$ existiert und $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in [0,T]$ erfüllt.

Auf $M \times [0,T]$ gilt $\tilde{V} = V$. Somit löst $\alpha(t)$ auch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = V(\alpha(t),t), & t \in [0,T], \\ \alpha(0) = x_0. \end{cases}$$

Wegen $V \in C^1$ ist α die einzige C^1-Lösung dieses Anfangswertproblems. Die Regularität von α folgt aus der von V. □

Bemerkung 11.1.2. ⋆

(i) Die obige Überlegung lässt sich auch auf höhere Kodimensionen übertragen, wenn man eine vektorwertige Funktion Φ betrachtet.
(ii) Alternativ kann man M mit Hilfe eines Diffeomorphismusses geradebiegen.
(iii) Ist V nur auf M definiert, so kann man zunächst V in eine Umgebung fortsetzen. Da die Lösung auf M bleibt, ist sie unabhängig von der Wahl der Fortsetzung.
(iv) Ist V auf $M \times \mathbb{R}$ definiert, so überlegt man sich leicht, dass auch α auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.
(v) Verallgemeinere das Resultat auf nichtkompakte Untermannigfaltigkeiten M, so dass $M \cap \overline{B}_R$ für jedes $R > 1$ kompakt ist.
(vi) Formuliere und beweise ein Resultat über den maximalen Fluss ähnlich wie im Euklidischen.

Beweis. Übung. □

11.2. **Tangentialgradient.** Die folgenden Überlegungen sind eine extrinsischere Variante und Verallgemeinerung von dem, was wir schon im Kapitel 2.4 für Differenzierbarkeit gemacht haben.

Definition 11.2.1. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}^l$ eine Funktion. Dann heißt f von der Klasse C^k, falls es eine C^k-Fortsetzung $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^l$ gibt.

Bemerkung 11.2.2. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit mit $k \geq 2$ und $f\colon M \to \mathbb{R}^l$ eine Funktion. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen. Sei $\varphi\colon M \cap U \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Karte von M. Dann gilt $f \in C^k$ genau dann, wenn $f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Beweis. Übung. Hinweis: Nutze Tubenumgebungen und eine Zerlegung der Eins. □

Definition 11.2.3. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir den **Gradienten** oder **Tangentialgradienten** von f in x, $\nabla^M f(x)$, als orthogonale Projektion von $\nabla_{\mathbb{R}^{m+n}} \tilde{f}(x)$ auf $T_x M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ für eine beliebige C^1-Fortsetzung $\tilde{f}$ von f.

Bemerkung 11.2.4.

(i) $\nabla^M f$ ist wohldefiniert, d. h. insbesondere von der Wahl der Fortsetzung von f unabhängig.

(ii) Sei $N_1, \ldots, N_n$ eine Orthonormalasis von $(T_x M)^\perp$, so ist
$$\nabla^M f(x) = \nabla \tilde{f}(x) - \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla \tilde{f}(x), N_i \right\rangle N_i.$$
Insbesondere gilt also in Kodimension eins
$$\nabla^M f(x) = \nabla \tilde{f}(x) - \left\langle \nabla \tilde{f}(x), \nu(x) \right\rangle \nu(x).$$

(iii) Ist $\{T_i\}_{1 \leq i \leq n}$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$, so gilt
$$\nabla^M f(x) = \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla \tilde{f}, T_i \right\rangle T_i.$$

Beweis. Übung. □

Definition 11.2.5. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1.

(i) Dann heißt $x_0 \in M$ kritischer Punkt von f, falls $\nabla^M f(x_0) = 0$ gilt.

(ii) Ein kritischer Punkt $x_0 \in M$ heißt isoliert, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass kein $x \in (B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap M$ ein kritischer Punkt ist.

(iii) $\star$ Ist jeder kritische Punkt isoliert, so sagen wir, dass f nur isolierte kritische Punkte besitzt.

Das folgende Lemma beschreibt eine Situationen, in der kritische Punkte isoliert sind.

Lemma 11.2.6. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokal strikt konvexe C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^{n+1}$ gegeben. Dann besitzt f auf M nur isolierte kritische Punkte.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$ ein kritischer Punkt von f auf M. Dann gilt
$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^M f(x_0) = \nabla f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), \nu(x_0) \rangle \nu(x_0) \\ &= e_{n+1} - \langle e_{n+1}, \nu(x_0) \rangle \nu(x_0). \end{aligned}$$
Also ist
$$1 = |e_{n+1}| = |\langle e_{n+1}, \nu(x_0) \rangle \nu(x_0)| = |\langle e_{n+1}, \nu(x_0) \rangle|$$
und somit gilt $\nu(x_0) = \pm e_{n+1}$. Wir nehmen ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und $\nu(x_0) = -e_{n+1}$ an. Dann gilt in einer Umgebung U des Ursprungs $M = \operatorname{graph} u$

für eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Du(0) = 0$ und $D^2u(0) \succ 0$. Es folgt $Du(x) \neq 0$ für $x \in U$ mit $x \neq 0$. Für solche Punkte x gilt daher $\nu(x) \neq \pm e_{n+1}$. Aufgrund der obigen Überlegungen ist x also kein kritischer Punkt von f. Also ist x_0 ein isolierter kritischer Punkt von f auf M. □

11.3. **Gradientenflüsse auf Mannigfaltigkeiten.** Das folgende Resultat gilt natürlich in analoger Weise für $t \to -\infty$. Wir folgen [14].

Theorem 11.3.1. *Sei $M^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine geschlossene C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^{1,1}$ und f besitze nur isolierten kritische Punkte. Sei $\alpha \equiv \alpha_x\colon \mathbb{R} \to M$ eine Lösung von $\dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_x(0) = x \in M$.*

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert $x_0 \in M$ mit $x_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t)$.

(ii) Es gilt $\nabla^M f(x_0) = 0$.

(iii) $t \mapsto f(\alpha(t))$ ist monoton fallend.

(iv) Ist x_0 ein striktes lokales Minimum von $f|_M$, so ist

$$\Big\{x \in M\colon \lim_{t\to\infty} \alpha_x(t) = x_0\Big\}$$

relativ offen in M.

Beweis.

(i) Aufgrund der Kompaktheit von M existiert die Lösung α für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nochmals aufgrund der Kompaktheit gibt es ein $x_0 \in M$ und eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $t_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha(t_k) = x_0$.

(ii) Wir behaupten, dass $\nabla^M f(x_0) = 0$ gilt: Zunächst leiten wir eine Monotonie her. Da $\dot\alpha(t) \in T_{\alpha(t)}M$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} f(\alpha(t)) - f(\alpha(0)) &= \int_0^t \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\,dt \\ &= \int_0^t \langle \nabla f(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle\,dt \\ &= \int_0^t \big\langle \nabla^M f(\alpha(t)), -\nabla^M f(\alpha(t))\big\rangle\,dt \\ &= -\int_0^t \big|\nabla^M f(\alpha(t))\big|^2\,dt. \end{aligned}$$

(iii) Da M kompakt ist, ist $f|_M$ beschränkt. Wäre $\nabla^M f(x_0) \neq 0$, so gäbe es eine Umgebung U von x_0 (in M) mit $\big|\nabla^M f(x)\big| \geq \varepsilon > 0$ für alle $x \in U$. Sei $\delta > 0$ mit $B_{2\delta}(x_0) \cap M \subset U$. Da $\overline{U}$ (und sogar M) kompakt ist, gibt es $L > 0$, so dass $\big|\nabla^M f(x)\big| \leq L$ für alle $x \in \overline{U}$ gilt. Für große $k \in \mathbb{N}$ gilt $\alpha(t_k) \in B_\delta(x_0)$. Wegen $|\dot\alpha(t)| \leq L$ für $\alpha(t) \in \overline{U}$ folgt

$$|\alpha(t) - \alpha(t_k)| \leq L \cdot |t - t_k|$$

für $\alpha([t_k, t]) \subset \overline{U}$. Die Inklusion gilt zunächst für $t \approx t_k$ aus Stetigkeitsgründen, dann aber aufgrund der obigen Abschätzung auch für alle t mit $|t - t_k| \leq \frac{\delta}{L}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung $t_{k+1} > t_k + 2\frac{\delta}{L}$, $\alpha(t_k) \in B_\delta(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t_0 \geq \frac{\delta}{L}$ annehmen.

Damit sind die Intervalle $\left(t_k - \frac{\delta}{L}, t_k + \frac{\delta}{L}\right) \subset \mathbb{R}_+$ disjunkt. Weiterhin haben wir in ((ii)) gesehen, dass f monoton fallend ist. Außerdem ist f beschränkt. Der Grenzwert für $t \to \infty$ existiert also und wir erhalten

$$\begin{aligned}
-c &< \lim_{k\to\infty} f(\alpha(t_k)) - f(\alpha(0)) \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_0^{t_k} \left|\nabla^M f(\alpha(t))\right|^2 \, dt \\
&\leq -\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{t_k-\frac{\delta}{L}}^{t_k+\frac{\delta}{L}} \left|\nabla^M f(\alpha(t))\right|^2 \, dt \\
&\leq -\sum_{k\in\mathbb{N}} 2\frac{\delta}{L}\varepsilon^2 = -\infty.
\end{aligned}$$

Widerspruch. Somit gilt $\nabla^M f(x_0) = 0$.

(iv) Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = x_0$: Falls nicht, so existiert, da eine Teilfolge trotzdem gegen x_0 konvergiert, für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ eine Folge $t_k \to \infty$ mit

$$|\alpha(t_{2k}) - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |\alpha(t_{2k+1}) - x_0| > \varepsilon.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es somit eine neue Folge $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $t_{2k} < \tau_k < t_{2k+1}$ und $|\alpha(\tau_k) - x_0| = \varepsilon$. Da $\partial B_\varepsilon(x_0) \cap M$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $\alpha(\tau_k)$; ohne Einschränkung gelte also $\alpha(\tau_k) \to x_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ für $k \to \infty$. Wie oben erhalten wir $\nabla^M f(x_\varepsilon) = 0$.

Wiederholen wir nun dieses Argument, so erhalten wir eine Folge $\varepsilon_k \searrow 0$ und Punkte $x_{\varepsilon_k} \in \partial B_{\varepsilon_k}(x_0)$ mit $\nabla^M f(x_{\varepsilon_k}) = 0$. Somit ist x_0 kein isolierter kritischer Punkt. Widerspruch.

(v) Nimmt f in x_0 ein striktes lokales Minimum an, so gibt es $\varepsilon > 0$, so dass f in $B_{2\varepsilon}(x_0) \cap M$ nur den kritischen Punkt x_0 besitzt und $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in (B_{2\varepsilon}(x_0) \cap M) \setminus \{x_0\}$ gilt. Durch Verkleinern von $\varepsilon > 0$ können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\partial B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$ gilt. Wir setzen

$$h := \inf_{x\in\partial B_\varepsilon(x_0)\cap M} f(x).$$

Das Infimum wird aufgrund der Kompaktheit angenommen und es gilt $h > f(x_0)$. Wir definieren weiter

$$M^h := \{x \in M \cap B_\varepsilon(x_0) \colon f(x) < h\}.$$

Sei $x_1 \in M^h$ beliebig. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t)), & t \geq 0, \\ \alpha(0) = x_1. \end{cases}$$

Da α einen negativen Gradientenfluss erfüllt, gilt $f(\alpha(t)) < h$ für alle $t \geq 0$. Wir behaupten, dass $\alpha(t) \in M^h$ für alle $t \geq 0$ gilt. Sonst gäbe es ein minimales $t_0 > 0$ mit $\alpha(t_0) \in \partial B_\varepsilon(x_0) \cap M$, da α wegen $f(\alpha(t)) < h$ nie den Teil des Randes mit $f = h$ erreichen kann. Nach Definition von h wäre dann $f(\alpha(t_0)) \geq h$. Widerspruch.

Aufgrund der obigen Beweisteile existiert $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) =: x_\infty$. Da α in M^h bleibt und x_∞ ein kritischer Punkt von $f|_M$ ist, folgt $\alpha(t) \to x_0$ für $t \to \infty$. Die Menge M^h ist also eine offene Umgebung von x_0 und alle Lösungen von $\dot\alpha(t) = -\nabla^M f(\alpha(t))$, die $\alpha(t_0) \in M^h$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ erfüllen, konvergieren für $t \to \infty$ gegen x_0.

(vi) Sei $y \in M$ ein weiterer Punkt mit $\lim_{t\to\infty} \alpha_y(t) = x_0$, wobei wir mit α_y eine Lösung von $\dot{\alpha}_y(t) = -\nabla^M f(\alpha_y(t))$ mit $\alpha_y(0) = y$ bezeichnet haben. Dann gibt es ein $T \geq 0$ mit $\alpha_y(T) \in M^h$. Da Lösungen stetig vom Anfangswert abhängen und M^h (relativ) offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in B_\delta(y)$ auch $\alpha_z(T) \in M^h$ gilt. Daraus folgt $\lim_{t\to\infty} \alpha_z(t) = x_0$. Wir erhalten die behauptete Offenheit. □

11.4. **Globale Konvexität.** Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass lokal strikt konvexe C^2-Untermannigfaltigkeiten auch global konvex sind. Beachte, dass solch ein Resultat für immersierte Mannigfaltigkeiten schon im Fall $n = 1$ i. a. falsch ist.

Zur Erinnerung:

Definition 11.4.1. ⋆ Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Menge. Dann heißt K (global) konvex, falls es für jeden Punkt $x_0 \in \partial K$ eine affin lineare Funktion $f \not\equiv 0$ mit $f(x_0) = 0$ und $K \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon f(x) \geq 0\}$ gibt.

Wir folgen nochmals [14].

Theorem 11.4.2. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene zusammenhängende lokal strikt konvexe C^2-Untermannigfaltigkeit. Dann ist M^n (global) konvex.*

Beweis im Fall $n \geq 2$. Sei M nicht global konvex. Dann gibt es einen Punkt $x_1 \in M$, so dass für jede affin lineare Funktion $0 \not\equiv f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = 0$ auch ein Punkt $x \in M$ mit $f(x) < 0$ existiert. Wähle nun eine affin lineare Funktion f mit $f(x_1) = 0$ und $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \colon f(y) = 0\} = T_{x_1}M$, so dass $f|_M$ in x_1 ein lokales Minumum besitzt (benutze dazu die lokale Normalform). Ohne Einschränkung dürfen wir nach Rotation, Translation und Skalierung annehmen, dass $f(y) = y^{n+1}$ gilt. Nach Annahme gibt es $x \in M$ mit $f(x) < 0$. Da M kompakt ist, besitzt $f|_M$ ein Minimum in einem Punkt x_2 mit $f(x_2) \leq f(x) < f(x_1) = 0$. Sei $Z := \{x_1, \ldots, x_N\}$ die Menge aller lokalen Minima von $f|_M$, bestehend aus N paarweise verschiedenen Punkten. Dann gilt $N \geq 2$. Nach Lemma 11.2.6 sind alle diese kritischen Punkte isolierte kritische Punkte von f. Daher sind es auch nur endlich viele. Seien U_i die nach Theorem 11.3.1 in M relativ offenen Mengen, die aus den Punkten $x \in M$ bestehen, so dass die Lösungen

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -\nabla^M f(\alpha(t)), & t \geq 0, \\ \alpha(0) = x \end{cases}$$

für $t \to \infty$ gegen x_i konvergieren. Sei Z die nach Lemma 11.2.6 endliche Menge der lokalen Maxima von $f|_M$. Da Lösungen α genau dann gegen einen Punkt in Z konvergieren, wenn sie in Z starten, gilt

$$M = Z \cup \bigcup_{i=1}^{N} U_i$$

und alle diese $N + 1$ Mengen sind paarweise disjunkt. Wegen $n \geq 2$ ist $M \setminus Z$ zusammenhängend, sogar wegzusammenhängend (betrachte eine lokale Graphendarstellung um die isolierten Punkte in Z). Somit haben wir $M \setminus Z$ mit $\bigcup_{i=1}^{N} U_i$ als disjunkte Vereinigung von offenen nichtleeren Mengen dargestellt. (Die Mengen U_i sind sogar wegzusammenhängend.) Wegen $N \geq 2$ erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass $M \setminus Z$ zusammenhängend ist. □

12. Geodätische

12.1. Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten.

Definition 12.1.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^2-Kurve mit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in (a,b)$. Dann heißt α Geodätische, falls

$$\ddot{\alpha}(t) \in \big(T_{\alpha(t)}M\big)^{\perp}$$

für alle $t \in (a,b)$ gilt.

Bemerkung 12.1.2.

(i) In der Definition haben wir die Dimension von M nicht vorgegeben. Auch $M = \mathbb{R}^{n+1}$ ist möglich. Wir schreiben auch $\alpha : (a,b) \to M$. Manchmal betrachten wir auch Geodätische auf halb offenen oder abgeschlossenen Intervallen.

(ii) Physikalische Interpretation: Beschreibt $\alpha(t)$ die Lage eines Massenpunktes auf M zur Zeit t, so ist $m\ddot{\alpha} = F$ die auf den Massenpunkt wirkende Kraft. Die Bedingung $\ddot{\alpha}(t) \in \big(T_{\alpha(t)}M\big)^{\perp}$ besagt also, dass keine tangentialen Kräfte auf den Massenpunkt wirken. In normaler Richtung wirken die Zwangskräfte, die den Massenpunkt auf M halten.

Im Falle $M = \mathbb{R}^{n+1}$ lautet die Bewegungsgleichung $\ddot{\alpha} = 0$ und beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes, auf den keine Kräfte wirken.

(iii) Geometrische Folgerung: Definiere $\alpha(t) := x_0 + t(x_1 - x_0)$ für $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $t \in [0,1]$. Dann ist α eine Geodätische mit Länge $L(\alpha) = |x_1 - x_0|$. Sei $y : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine weitere C^1-Kurve mit $y(0) = x_0$ und $y(1) = x_1$. Dann gilt aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} L(y) = \int_0^1 |\dot{y}(t)|\,dt &\geq \int_0^1 \frac{\langle \dot{y}(t), x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|}\,dt \\ &= \frac{\langle y(1), x_1 - x_0\rangle - \langle y(0), x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|} \\ &= \frac{|x_1 - x_0|^2}{|x_1 - x_0|} = |x_1 - x_0| = L(\alpha). \end{aligned}$$

Somit ist α die Kürzeste C^1-Kurve, die x_0 und x_1 verbindet. Wir werden später sehen, dass Geodätische, eingeschränkt auf kleine Intervalle, ebenfalls die Länge zwischen ihren Endpunkten minimieren. Wir sagen daher, dass Geodätische lokal Kürzeste sind.

Proposition 12.1.3. *Eine Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis. Es gilt $\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|^2 = 2\langle \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\rangle = 0$. □

Beispiele 12.1.4.

(i) Seien $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\alpha(t) = u + vt \in M$ für alle $t \in (a,b)$. Dann ist α ein Geradensegment und eine Geodätische.

(ii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ orthonormale Vektoren. Dann ist der Großkreis $\alpha : (a,b) \to \mathbb{S}^n$ mit $\alpha(t) = \cos t \cdot u + \sin t \cdot v$ eine Geodätische.

(iii) Sei $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ ein Zylinder. Dann ist für beliebiges $h \in \mathbb{R}$ die Spiralkurve $\alpha : \mathbb{R} \to M$, $t \to (\cos t, \sin t, ht)$ eine Geodätische, da

$$\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \in \big(T_{\alpha(t)}M\big)^{\perp}$$

gilt. Wickeln wir den Zylinder auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ ab, so wird aus der Spiralkurve α eine Gerade, also ebenfalls eine Geodätische. Es gilt allgemein, dass Isometrien $\Phi\colon M \to \tilde{M}$ Geodätische auf Geodätische abbilden. Dabei ist es irrelevant, wie M im Raum liegt. Wir sagen daher, dass die Eigenschaft, Geodätische zu sein, nur von der inneren Geometrie von M, also der Metrik, abhängt. Solche Dinge werden wir auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten untersuchen. Weitere Beispiele, die nur von der inneren Geometrie abhängen, sind die Länge einer Kurve oder der Abstand zwischen zwei Punkten.

(iv) Auf dem Ellipsoid

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

ist jede proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, die in einer der Koordinatenebenen $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ oder $\{z = 0\}$ verläuft, eine Geodätische.

Sei E eine der Koordinatenebenen. Aus Symmetriegründen gilt $\nu(\alpha(t)) \in E$ für alle t. Die Vektoren $\dot\alpha(t)$ und $\nu(\alpha(t))$ bilden somit eine Orthonormalbasis von E. Aus $\alpha(t) \in E$ für alle t folgt auch $\ddot\alpha(t) \in E$. Schließlich gilt $\langle \ddot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle = \frac{d}{dt}|\dot\alpha(t)|^2 = 0$. Daher ist $\ddot\alpha(t)$ proportional zu $\nu(x(t))$.

(v) Bestimme auf dem durch die Gleichung

$$\beta(x^2 + y^2) = z^2$$

im $\mathbb{R}^3$ definierten Kegel Geodätische, die keine Geradenstücke sind. Benutze dabei eine lokale Isometrie zu $\mathbb{R}^2$ für eine Vermutung über das Aussehen dieser Geodätischen. (Details: Übung.)

Theorem 12.1.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Seien $p \in M$ und $V \in T_pM$. Dann gibt es genau eine maximale Geodätische α mit $\alpha(0) = p$ und $\dot\alpha(0) = V$.*

Ohne explizite Regularitätsangabe gehen wir stets davon aus, dass alle Daten glatt sind.

Beweis. Wir leiten zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für α her. Ist α eine Geodätische auf einer Hyperfläche, so gilt

$$\ddot\alpha(t) = \langle \ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle\, \nu(\alpha(t)).$$

Aus $\langle \dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle \dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle \\ &= \langle \ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \left\langle \dot\alpha(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \\ &= \langle \ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \langle \dot\alpha(t), D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Oben eingesetzt erhalten wir also

$$\ddot\alpha(t) = -\langle \dot\alpha(t), D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle \cdot \nu\left((\alpha(t)\right). \tag{12.1.1}$$

Sei nun (lokal) $M = f^{-1}(\{0\})$ eine Niveauflächendarstellung. Wir setzen ν vermöge $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ in eine Umgebung von M fort. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt die obige Differentialgleichung für α eine eindeutig bestimmte maximale Lösung α für die Anfangswerte $\alpha(0) = p$ und $\dot\alpha(0) = V$. Daher folgt die Behauptung, falls $\alpha(t) \in M$ für alle t gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) &= \langle \nabla f(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \\ &= \langle \nabla f(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)\rangle \cdot \langle \nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \\ &= |\nabla f(\alpha(t))| \cdot \langle \nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle.\end{aligned}$$

Wir definieren $g(t) := \langle \nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle$ und erhalten

$$\dot g(t) = \langle D\nu(\alpha(t))\langle \dot\alpha(t)\rangle\rangle + \langle \nu(\alpha(t)), \ddot\alpha(t)\rangle = 0$$

aufgrund der Differentialgleichung für α. Somit folgt $g(t) = g(0) = 0$ für alle t und daraus $\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = 0$ sowie $f(\alpha(t)) = f(\alpha(0)) = 0$. Daher gilt $\alpha(t) \in M$ für alle t. □

Beispiele 12.1.6. In den folgenden Beispielen verzichten wir auf die Angabe der Parametrisierungen und geben ähnlich wie bei Hyperflächen nur das Bild an.

(i) Auf $\mathbb{S}^n$ sind alle Geodätischen Teile von Großkreisen, da für beliebige $p \in \mathbb{S}^n, V \in T_p\mathbb{S}^n$ ein Großkreis, also ein Geodätische, mit diesen Anfangsdaten existiert.

(ii) Mit einer analogen Begründung erhalten wir, dass auf dem Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sämtliche Geodätischen durch Spiralkurven, durch zu Kreisen $\mathbb{S}^1 \times \{x\}$ oder durch zu Geraden $\{p\} \times \mathbb{R}$ degenerierten Spiralkurven gegeben sind.

Definition 12.1.7. Eine Untermannigfaltigkeit heißt geodätisch vollständig, wenn jede maximale Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Beispiele 12.1.8.

(i) $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, und $\mathbb{R}^{n+1}$ sind geodätisch vollständig. Wir kennen alle Geodätischen und wissen, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

(ii) $\mathbb{S}^n \backslash \{p\}$ für ein beliebiges $p \in \mathbb{S}^n$ ist nicht geodätisch vollständig, da jede maximale Geodätische durch $-p$ ein Großkreis ist, der auch durch p läuft.

(iii) $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ ist nicht geodätisch vollständig.

(iv) $B_1(0)$ ist nicht geodätisch vollständig.

(v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2, z \neq 0\}$ ist nicht geodätisch vollständig, da $\alpha(t) = (t, 0, t)$, $t > 0$, eine maximale Geodätische ist.

Theorem 12.1.9. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei M als metrischer Raum mit der von der euklidischen Metrik induzierten Metrik vollständig. Dann ist M geodätisch vollständig.*

Beweis. Sei $\alpha \colon I \to M$ eine maximale Geodätische. Wir dürfen nach Umparametrisierung vermöge $\alpha(\lambda t), \lambda > 0$, ohne Einschränkung annehmen, dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist: $|\dot\alpha(t)| \equiv 1$.

Angenommen es gilt $\sup I =: T < \infty$.

Aus $|\dot\alpha(t)| = 1$ folgt

$$|\alpha(t) - \alpha(s)| \leq \int_s^t |\dot\alpha(\tau)|\, d\tau = |t - s|.$$

Daher existiert

$$p := \lim_{t \nearrow T} \alpha(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Da M als metrischer Raum vollständig ist, folgt auch $p \in M$. Mit der Differentialgleichung (12.1.1) und $|\dot\alpha(t)| = 1$ erhalten wir für große $s < t < T$

$$|\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s)| = \left| \int_s^t \ddot\alpha(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_s^t |\ddot\alpha(\tau)|\, d\tau = \int_s^t |\langle \dot\alpha(\tau), D\nu(\alpha(\tau))\langle \dot\alpha(\tau)\rangle\rangle|\, d\tau$$

$$\leq \int_s^t |D\nu(\alpha(\tau))|\, d\tau \leq \sup_{B_\varepsilon(p)\cap M} |D\nu| \cdot |t-s|,$$

falls $\alpha(\tau) \in B_\varepsilon(p)$ für alle $\tau > s$ gilt. Wir nehmen nun an, dass $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\sup_{B_\varepsilon(p)\cap M} |D\nu| < \infty$ gilt. Wir erhalten daraus, dass auch

$$V := \lim_{t \nearrow T} \dot\alpha(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

existiert. Im Grenzübergang überlebt auch die Orthogonalitätsbedingung

$$\langle V, \nu(p)\rangle = \lim_{t\nearrow T} \langle \dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$$

Somit gilt $V \in T_pM$.

Sei $\beta\colon [0,\delta) \to M$ eine Lösung der Differentialgleichung (12.1.1) mit Anfangswerten $\beta(0) = p$ und $\dot\beta(0) = V$. Die Differentialgleichung (12.1.1) ist wegen

$$\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s) = \int_s^t \ddot\alpha(\tau)\, d\tau$$

äquivalent zur Integralgleichung

$$\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s) = -\int_s^t \langle \dot\alpha(\tau), D\nu(\alpha(\tau))\langle\dot\alpha(\tau)\rangle\rangle \cdot \nu(\alpha(\tau))\, d\tau.$$

Zunächst ist

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t), & t < T, \\ \beta(t-T), & T \leq t < T+\delta \end{cases}$$

eine C^1-Kurve auf M. Damit lösen nicht nur α und β, sondern auch γ die Integralgleichung, insbesondere nahe $t = T$. Daher ist auch $\gamma \in C^2$ und γ löst (12.1.1). Daher war $T < \infty$ nicht maximal. Widerspruch. Somit ist M geodätisch vollständig. □

Korollar 12.1.10. *Sei $M \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist M geodätisch vollständig.*

12.2. **Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung.** Wir nehmen wieder an, dass alle betrachteten Objekte glatt sind.

Definition 12.2.1. Sei M eine reguläre Hyperfläche. Sei $\alpha : I \to M$ eine Kurve.

(i) Dann heißt $X : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein (tangentiales) Vektorfeld längs α, falls

$$X(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

für alle $t \in I$ gilt.

(ii) Die kovariante Ableitung von X längs α ist das (tangentiale) Vektorfeld

$$\frac{D}{dt}X(t) = \frac{dX}{dt}(t) - \left\langle \nu(\alpha(t)), \frac{dX}{dt}(t)\right\rangle \nu(\alpha(t)),$$

also die Projektion von $\dot X$ auf $T_{\alpha(t)}M$.

Beispiel 12.2.2. α ist genau dann eine Geodätische, wenn $\frac{D}{dt}\dot\alpha(t) = 0$ gilt.

Lemma 12.2.3. *Für die kovariante Ableitung von (tangentialen) Vektorfeldern X, Y und für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ gelten*

(i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$,
(ii) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{d}{dt}f X + f\frac{D}{dt}X$,
(iii) $\frac{D}{dt}(X,Y) = \left\langle \frac{D}{dt}X, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{D}{dt}Y\right\rangle$.

Beweis. Benutze die entsprechenden Eigenschaften der Ableitung aus der Analysis-Vorlesung und die Definition der kovarianten Ableitung. Beispielsweise gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \dot{X}, Y\right\rangle + \left\langle X, \dot{Y}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{D}{dt}Y\right\rangle,$$

da $X(t), Y(t) \in T_{\alpha(t)}M$ gilt. Dies liefert (iii). □

Definition 12.2.4. Ein Vektorfeld X längs α heißt parallel längs α, falls $\frac{D}{dt}X = 0$ gilt.

Beispiel 12.2.5. Sei α eine Geodätische. Dann ist $\dot{\alpha}$ längs α parallel.

Proposition 12.2.6. *Sei $\alpha : I \to M$ eine Kurve und seien X, Y längs α parallele Vektorfelder. Dann gelten*

(i) $X + Y$ und aX, $a \in \mathbb{R}$, sind ebenfalls längs α parallele Vektorfelder.
(ii) Insbesonder bilden die längs α parallelen Vektorfelder also einen Vektorraum.
(iii) $|X(t)|$ ist konstant.
(iv) $\langle X(t), Y(t)\rangle$ ist konstant. Insbesondere ist also auch der Winkel $\gamma(t)$ zwischen zwei nichtverschwindenden Vektorfeldern mit $\cos\gamma(t) = \frac{\langle X(t), Y(t)\rangle}{|X(t)|\cdot|Y(t)|}$ konstant.

Beweis.
(i) Klar.
(ii) Klar.
(iii) Dies folgt aus ((iv)).
(iv) Es gilt $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X(t), Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\right\rangle = 0.$ □

Theorem 12.2.7. *Sei M eine Hyperfläche und $\alpha : I \to M$ eine Kurve. Sei $0 \in I$ und $\alpha(0) = p$. Sei $X_0 \in T_pM$. Dann gibt es genau ein längs α paralleles Vektorfeld X mit $X(0) = X_0$.*

Beweis. Nach Definition der kovarianten Ableitung und mit $\langle X(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \frac{D}{dt}X(t) + \langle \dot{X}(t), \nu(\alpha(t))\rangle\nu(\alpha(t)) \\ &= \frac{D}{dt}X(t) + \frac{d}{dt}\langle X(t), \nu(\alpha(t))\rangle\nu(\alpha(t)) - \left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \nu(\alpha(t)) \\ &= \frac{D}{dt}X(t) - \left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \nu(\alpha(t)).\end{aligned}$$

Daher muss jedes längs α parallele Vektorfeld X die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{X}(t) = -\left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \nu(\alpha(t))$$

erfüllen. Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Daher gibt es eine globale Lösung $X(t) \in C^\infty\left(I, \mathbb{R}^{n+1}\right)$. Aus dieser Differentialgleichung folgt auch, dass $Y(t)$ tangential bleibt, da

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), \nu(\alpha(t))\rangle = \langle \dot{X}(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle = 0$$

gilt. □

Korollar 12.2.8. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $\alpha : I \to M$ eine Kurve. Dann bilden die längs α parallelen Vektorfelder X einen n-dimensionalen Vektorraum.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass die parallelen Vektorfelder längs α einen Vektorraum bilden. Sei $t_0 \in I$. Dann ist X eindeutig durch $X(t_0)$ bestimmt. Somit ist der Vektorraum n-dimensional. □

Beispiel 12.2.9. Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ der Äquator auf der Sphäre mit $\alpha(t) = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Dann gilt

$$T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2 = \langle \dot{\alpha}(t), e_3 \rangle.$$

Jedes längs α parallele Vektorfeld X hat die Form

$$X(t) = c_1 \cdot \dot{\alpha}(t) + c_2 \cdot e_3$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen $\dot{\alpha}(t) \perp e_3 \perp \alpha(t) \perp \dot{\alpha}(t)$ ist klar, dass $\dot{\alpha}(t)$ und e_3 den Tangentialraum $T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ aufspannen. $\dot{\alpha}$ ist parallel, da α eine Geodätische ist. Da $e_3 \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ ist, konstante Länge hat und stets senkrecht auf $\dot{\alpha}(t)$ steht, ist e_3 ein paralleles Vektorfeld längs α. Da die parallelen Vektorfelder längs α einen 2-dimensionalen Vektorraum bilden, hat X die angegebene Form. □

Definition 12.2.10. Sei α eine Kurve in einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Seien $p = \alpha(0)$ und $q = \alpha(1)$. Sei $X_0 \in T_pM$ und X das parallele Vektorfeld längs α mit $X(0) = X_0$. Dann definieren wir die Parallelverschiebung

$$P_\alpha \colon T_pM \to T_qM$$

durch

$$X_0 \to X(1).$$

Theorem 12.2.11. *Die Parallelverschiebung ist ein isometrischer Vektorraumisomorphismus.*

Beweis. Da parallele Vektorfelder längs α einen Vektorraum bilden, folgt die Linearität. Aus $|X(0)| = |X(1)|$ erhalten wir, dass P_α die Norm erhält und insbesondere injektiv ist. Wegen $\dim T_pM = \dim T_qM < \infty$ ist P_α damit auch surjektiv. Somit ist P_α ein Vektorraumisomorphismus. □

Bemerkung 12.2.12.

(i) Die Parallelverschiebung entlang eines stückweise glatten Weges $\alpha_k + \ldots + \alpha_1$ definieren wir durch $P_{\alpha_k} \circ \ldots \circ P_{\alpha_1}$.

(ii) Die Parallelverschiebung P_α hängt nicht nur von $\alpha(0)$ und $\alpha(1)$, sondern auch vom Weg dazwischen ab, selbst bei Geodätischen. (Details: Übung.)

12.3. Geodätische als Objekte der inneren Geometrie von Hyperflächen.

Lemma 12.3.1. *Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Sei $\alpha \colon I \to \Omega$ eine C^2-Kurve, so dass $\beta := X \circ \alpha$ eine Geodätische in $X(\Omega)$ ist. Dann gilt*

$$\ddot{\alpha}^i + \dot{\alpha}^k \dot{\alpha}^l \Gamma^i_{kl} \circ \alpha = 0.$$

Beweis. Aus $\ddot{\beta}(t) \in (T_{\beta(t)}X(\Omega))^\perp$ erhalten wir $\left\langle \ddot{\beta}(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle = 0$ für alle $t \in I$ und alle $1 \le j \le n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \ddot{\beta}(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \left\langle \frac{d^2}{dt^2}(X(\alpha(t)), X_j(\sigma(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}\left(X_k(\alpha(t))\dot{\alpha}^k(t)\right), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \left\langle X_k(\alpha(t))\ddot{\alpha}^k(t) + X_{,kl}(\alpha(t))\dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ddot{\alpha}^k(t) g_{kj}(\alpha(t)) g^{ji}(\alpha(t)) \\
&\quad + \left\langle (X_{;kl}(\alpha(t)) + \Gamma^r_{kl}(\alpha(t)) X_r(\alpha(t)))\, \dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot{\alpha}^i(t) \\
&\quad + \left\langle (-h_{ij}(\alpha(t))\nu(\alpha(t)) + \Gamma^r_{kl}(\alpha(t)) X_r(\alpha(t)))\, \dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot{\alpha}^i(t) + 0 + \Gamma^r_{kl}(\alpha(t)) \dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t) g_{rj}(\alpha(t)) g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot{\alpha}^i(t) + \Gamma^i_{kl}(\alpha(t)) \dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t)
\end{aligned}
$$

wie behauptet. □

Korollar 12.3.2. *Seien $X, \tilde{X} \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ immersierte C^2-Hyperflächen, so dass für die induzierten Metriken g und $\tilde{g}$*

$$g_{ij}(x) = \tilde{g}_{ij}(x)$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \le i, j \le n$ gilt. Sei $\alpha \colon I \to \Omega$ eine C^2-Kurve. Dann ist $X \circ \alpha$ genau dann eine Geodätische in $X(\Omega)$, wenn $\tilde{X} \circ \alpha$ eine Geodätische in $\tilde{X}(\Omega)$ ist.

Beweis. Aus $g = \tilde{g}$ folgt auch, dass die zugehörigen Christoffelsymbole übereinstimmen. Somit erhalten wir die Behauptung aus Lemma 12.3.1. □

Da die Eigenschaft, Geodätische zu sein, somit nicht von der Einbettung und nur von der Metrik abhängt, sagen wir, dass Geodätische ein Objekt der inneren Geometrie sind und geben daher die folgende Erweiterung unserer bisherigen Definition einer Geodätischen. Wir lassen den Nachweis als Übung, dass dies auch in höherer Kodimension richtig ist. Bisher haben wir $X \circ \alpha$ als Geodätische bezeichnet, nun bezeichnen wir auch α als Geodätische.

Definition 12.3.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit einer Metrik (g_{ij}) und Christoffelsymbolen (Γ^i_{kl}). Sei $\alpha \colon I \to \Omega$ eine C^2-Kurve. Dann heißt α eine Geodätische, falls

$$\ddot{\alpha}^i(t) + \Gamma^i_{kl}(\alpha(t)) \dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t) = 0$$

für alle $1 \le i \le n$ und alle $t \in I$ gilt.

12.4. Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung.

Lemma 12.4.1. *Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Sei $\alpha \colon I \to \Omega$ eine C^1-Kurve und sei $\gamma := X \circ \alpha$. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n+1})$ ein Vektorfeld längs γ, gelte also $Y(t) \in T_{\gamma(t)}X(\Omega)$ für alle $t \in I$. Gelte $Y(t) = v^i(t) X_i(\alpha(t))$. Dann ist $v^i(t) = \langle Y(t), X_j(\alpha(t)) \rangle g^{ji}(\alpha(t))$ und für die kovariante Ableitung von Y längs γ gilt*

$$\frac{DY}{dt} = \left(\dot{v}^k + \Gamma^k_{ij} v^i \dot{\alpha}^j \right) X_k.$$

Beweis. Die Vektoren $X_i(\alpha(t))$ bilden eine Basis von $T_{\gamma(t)}X(\Omega)$. Somit lässt sich jedes Vektorfeld längs γ in der Form $Y(t) = v^i(t) X_i(\alpha(t))$ mit geeigneten Funktionen v^i darstellen. Bilden wir das Skalarprodukt mit X_k, so erhalten wir $\langle Y, X_k \rangle = v^i g_{ij}$. Somit gilt $v^i = \langle Y, X_k \rangle g^{ki}$. Es gilt daher $v^i \in C^1(I)$ für alle $1 \le i \le n$.

Nach Definition der kovarianten Ableitung ist $\frac{D}{dt}Y$ der tangentiale Anteil von $\frac{d}{dt}Y$. Wir schreiben $\dot{Y} \equiv \frac{d}{dt}Y$, $\dot{v}^i = \frac{d}{dt}v^i$, ... und erhalten aus $Y(t) = v^i(t) X_i(\alpha(t))$

$$
\begin{aligned}
\dot{Y} &= \dot{v}^i X_i + v^i X_{,ij} \dot{\alpha}^j \\
&= \dot{v}^i X_i + v^i \left(X_{;ij} + \Gamma^k_{ij} X_k \right) \dot{\alpha}^j
\end{aligned}
$$

$$= \dot{v}^k X_k + v^i \dot{\alpha}^j \left(-h_{ij}\nu + \Gamma_{ij}^k X_k\right).$$

Somit gilt

$$\frac{D}{dt} Y = \left(\dot{v}^k + v^i \dot{\alpha}^j \Gamma_{ij}^k\right) X_k. \qquad \square$$

Korollar 12.4.2. *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte C^2-Hyperfläche. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine C^1-Kurve und sei $\gamma := X \circ \alpha$. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n+1})$ ein Vektorfeld längs γ mit $Y(t) = v^i(t) X_i(\alpha(t))$.*

(i) Dann ist Y genau dann längs γ parallel, wenn

$$\dot{v}^k + v^i \dot{\alpha}^j \Gamma_{ij}^k \circ \alpha = 0$$

für $1 \le k \le n$ auf ganz I gilt.

(ii) Ist $\gamma \in C^2$ (oder $\alpha \in C^2$), dann ist γ ganau dann eine Geodätische, wenn

$$\ddot{\alpha}^k + \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j \Gamma_{ij}^k \circ \alpha = 0$$

für $1 \le k \le n$ auf ganz I gilt.

Beweis. (i) Klar.

(ii) Es gilt $\dot{\gamma} = X_i \dot{\alpha}^k$ und γ ist genau dann eine Geodätische, wenn $\dot{\gamma}$ längs γ parallel ist. $\square$

Bemerkung 12.4.3. Dies zeigt, dass die Eigenschaft eines Vektorfeldes, längs einer Kurve parallel zu sein, oder die Eigenschaft einer Kurve, eine Geodätische zu sein, nur von der inneren Geometrie abhängt.

Daher definieren wir (wobei die Definition einer Geodätischen natürlich nur eine Wiederholung ist)

Definition 12.4.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei (g_{ij}) eine Metrik auf Ω. Seien $\left(\Gamma_{ij}^k\right)$ die Christoffelsymbole zur Metrik (g_{ij}). Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine C^1-Kurve und sei $Y(t) = Y^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Vektorfeld längs α, d. h. wir betrachten $Y(t)$ als Element von $T_{\alpha(t)}\Omega \cong \mathbb{R}^n$. Dabei ist $\frac{\partial}{\partial x^i}$ eine alternative Notation für das Standardbasiselement e_i.

(i) Dann heißt Y längs α parallel, falls

$$\dot{Y}^k + Y^i \dot{\alpha}^j \Gamma_{ij}^k \circ \alpha = 0$$

für alle $1 \le k \le n$ auf ganz I gilt.

(ii) Ist $\alpha \in C^2$, so heißt α Geodätische, falls

$$\ddot{\alpha}^k + \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j \Gamma_{ij}^k \circ \alpha = 0$$

für alle $1 \le k \le n$ auf ganz I gilt.

Diese Definition können wir auf den Fall anwenden, dass wir von einer Immersion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine Metrik und Christoffelsymbole auf Ω bekommen. Auch anwendbar ist sie auf den Fall, dass wir eine Metrik ohne eine Immersion haben. Dies ist wie folgt definiert:

Definition 12.4.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $g\colon \Omega \to L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, wobei $L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ der Raum der bilinearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ (was wir mit $T_x\Omega$ identifizieren) nach $\mathbb{R}$ ist, eine (Riemannsche) Metrik auf Ω, falls g stetig ist und für alle $x \in \Omega$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

(i) $g(x)\langle v, v\rangle > 0$ für $v \neq 0$ und

(ii) $g(x)\langle v, w\rangle = g(x)\langle w, v\rangle$

gelten.

Bemerkung 12.4.6.

(i) Dies besagt, dass wir jedem $x \in \Omega$ in stetiger Weise ein Skalarprodukt zuordnen.

(ii) Jede durch eine Immersion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ induzierte Metrik auf Ω ist auch eine Metrik im obigen Sinne.

(iii) Umgekehrt ist auch jede Metrik im obigen Sinne durch eine Immersion

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k,$$

k genügend groß, induziert. Eine Verallgemeinerung davon hat John Nash (A beautiful mind) mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen gezeigt.

Definition 12.4.7. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine eingebettete C^2-Hyperfläche. Sei $p_0 \in X(\Omega)$ und sei $Y \in T_{p_0}X(\Omega)$. Sei Z ein Vektorfeld auf $X(\Omega)$, d. h. eine Abbildung $Z\colon X(\Omega) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Z(p) \in T_pX(\Omega)$ für alle $p \in X(\Omega)$. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von Z in Richtung Y an der Stelle $p_0 \in X(\Omega)$ durch

$$\nabla_Y Z(p_0) := \frac{D}{dt}(Z \circ \gamma)(0),$$

wobei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X(\Omega)$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = p_0$ und $\dot\gamma(0) = Y$ ist.

Lemma 12.4.8. *Die kovariante Ableitung $\nabla_Y Z$ hängt nicht von der speziellen Wahl von γ ab.*

Beweis. Sei $Z \circ X = v^i X_i$ mit $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sei $\alpha := X^{-1} \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$, so dass $\gamma = X \circ \alpha$ gilt. Sei $x_0 \in \Omega$ mit $X(x_0) = p_0$. Dann gelten $\alpha(0) = x_0$ und $\dot\alpha(0) = w$, wobei $w \in \mathbb{R}^n$ so gewählt ist, dass $Y = w^i X_i(x_0)$ gilt. Beachte, dass w von der speziellen Wahl von γ unabhängig ist. Es gilt

$$(Z \circ \gamma)(t) = (Z \circ X \circ \alpha)(t) = v^i(\alpha(t))X_i(\alpha(t)).$$

Nach Lemma 12.4.1 erhalten wir mit $v^i \circ \alpha$ statt v^i dort

$$\begin{aligned}
\nabla_Y Z(p_0) &= \frac{D}{dt}(Z \circ \gamma)(0) \\
&= \left(\frac{d}{dt}(v \circ \alpha)^k(0) + v^i(x_0)\dot\alpha^j(0)\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0) \\
&= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j}(x_0)\dot\alpha^j(0) + v^i(x_0)\dot\alpha^j(0)\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0) \\
&= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j}(x_0)w^j + v^i(x_0)w^j\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0).
\end{aligned} \tag{12.4.1}$$

Dies hängt nicht von der speziellen Wahl von γ ab. □

Hieraus folgt direkt

Theorem 12.4.9. *Seien Y, Z, Z_1, Z_2 glatte Vektorfelder auf $X(\Omega)$ und sei $f \in C^\infty(X(\Omega))$. Dann gelten*

(i) $\nabla_Y(Z_1 + Z_2) = \nabla_Y Z_1 + \nabla_Y Z_2$,
(ii) $\nabla_Y(fZ) = \left\langle \nabla^M f, Y \right\rangle Z + f\nabla_Y Z$ *und*
(iii) $\nabla_{fY} Z = f\nabla_Y Z$.

Beweis. Nach (12.4.1) sind die Behauptungen für $\nabla_Y(Z_1 + Z_2)$ und $\nabla_{fY} Z$ klar. Gleichung (12.4.1) wollen wir auch für $\nabla_Y(fZ)$ benutzen. In der dortigen Notation müssen wir v^i durch $\tilde f v^i$ mit $f \circ X = \tilde f$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla_Y(fZ)(p_0) &= \left(\frac{\partial\left(\tilde f v^k\right)}{\partial x^j}(x_0)w^j + \tilde f v^i(x_0)w^j\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0) \\
&= (f \cdot \nabla_Y Z)(p_0) + \frac{\partial \tilde f}{\partial x^j}(x_0)v^k(x_0)w^j X_k(x_0)
\end{aligned}$$

$$= (f \cdot \nabla_Y Z)(p_0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}(x_0) w^j Z(p_0).$$

Weiterhin gilt für eine Fortsetzung $\hat{f}$ von f

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}(x_0) w^j &= \frac{\partial (f \circ X)}{\partial x^j}(x_0) w^j = \frac{\partial \left(\hat{f} \circ X\right)}{\partial x^j}(x_0) w^j \\ &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial p^\beta}(X(x_0)) X_j^\beta w^j \\ &= \left\langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{f}(p_0), Y \right\rangle = \left\langle \nabla^M f(p_0), Y \right\rangle.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Anhang A. Lineare Algebra in kovarianter Notation

Ein Hinweis vorweg: Dieser Abschnitt ist als eher umgangssprachlich und erklärend als als streng formal mathematisch aufgebauter Text geschreiben und auch entsprechen zu lesen. Dementsprechend nutze ich auch gelegentlich eine eher umgangssprachlichere Wortwahl.

Wir betrachten nur den Modellfall $V = \mathbb{R}^n$ mit Dualraum V^*. Lineare Algebra dieser Art macht man nun in jedem Punkt. Statt Vektoren in V betrachtet man dann Vektoren im Tangentialraum. Im Euklidischen könnte man auch das Kroneckerdeltas δ_{ij} statt g_{ij} betrachten.

Um Dinge der linearen Algebra kovariant zu notieren, muss man sich nur merken, dass man Vektoren in V mit oberen Indices bezeichnet und dass man bei der Einsteinschen Summenkonvention über doppelt auftretende Indices summiert, wenn sie einmal oben und einmal unten stehen.

A.1. **Vektoren und Endomorphismen.** Sei $x \in V$ ein (Spalten-)Vektor:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \left(x^i\right)_{1 \le i \le n}$$

in verschiedenen Schreibweisen. Sei $A\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann erhält A einen Vektor, also ein Objekt mit einem oben stehenden Index, und liefert wieder einen Vektor, natürlich wieder mit einem oben stehenden Index. Setze $y := Ax \in V$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Einträge der Matrix, anders als in vielen Linearen Algebravorlesungen – in meinen Skripten benutze ich auch die kovariante Notation – mit einem oberen und einem unteren Index versehen. Mit Summenkonvention schreiben wir nämlich für die Zeilen in der obigen Matrixgleichung

$$y^i = a_j^i x^j.$$

Der Index j steht hier unten, damit die Summenkonvention greift; der Index i steht oben, denn es soll ja wieder ein Vektor herauskommen. Dies entspricht dann einem (k, l)-Tensor mit $k = l = 1$, also einem Objekt mit $k = 1$ oberen und $l = 1$ unteren Indices.

A.2. **Basen und der Dualraum.** Nutzen wir

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Eins in der i-ten Zeile, so bilden die Vektoren e_i, $1 \leq i \leq n$ eine Basis von V. Für einen Vektor $x \in V$ erhalten wir passend zur Einsteinschen Summenkonvention, daher mit unteren Indices bei den e_i's,

$$x = e_i x^i.$$

Elemente des Dualraumes V^* bezeichnet man auch als Kovektoren, $(0,1)$-Tensoren oder Formen. Für den Dualraum können wir eine Basis aus Vektoren e_*^i, $1 \leq i \leq n$, wählen, die duale Basis, so dass

$$e_*^i(e_j) = \delta_j^i$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Die Position des Indexes i ist hier zunächst einmal beliebig. Wichtig ist nur, dass jeder der beiden Indices auf beiden Seiten der Gleichung jeweils oben oder unten steht. Diese Basisvektoren sind als Zeilen durch

$$e_*^i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit 1 an der i-ten Stelle gegeben. Dann ergibt sich die Beziehung $e_*^i(e_j) = \delta_j^i$ aus der Multiplikation des Zeilenvektors mit dem Spaltenvektor, wobei in der Vektornotation die Reihenfolge relevant ist. Analog zu V stellen wir einen Vektor

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$$

im Dualraum als

$$\xi = e_*^i \xi_i$$

dar.

Nun wenden wir in der obigen Notation $\xi \in V^*$ auf $x \in V$ an und erhalten ein Ergebnis in $\mathbb{R}$. Wir betrachten also die Abbildung $V^* \times V \to \mathbb{R}$ mit $(\xi, x) \mapsto \xi(x)$. Es gilt

$$\xi(x) = e_*^i \xi_i (e_j x^j) = \xi_i x^j e_*^i(e_j) = \xi_i x^j \delta_j^i = \xi_i x^i,$$

wobei wir die Linearität benutzt haben. Da rechts nur noch ein oberer und ein unterer Indes stehen, über die wir summieren, ergibt sich hier eine reelle Zahl. Es bleiben also keine freien Indices stehen, über die nicht summiert würde. Dies zeigt, dass wir die Indexstellung im Dualraum so gewählt haben, dass sie zum Bisherigen passt.

A.3. **Bilinearformen.** Sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $G\colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ eine weitere Bilinearform. In der linearen Algebra werden Bilinearformen ebenfalls durch Matrizen dargestellt. Dies sollte man aus Kovarianzgründen aber besser nicht kommentarlos machen, da wir Matrizen ja bereits für Endomorphismen benutzt haben. Es wird die Transposition benötigt: Aus $g(x, y)$ wird in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

An der nötigen Transposition sieht man, dass diese Matrixdarstellung aus Kovarianzgründen nicht so schön ist. Transponieren entspricht dem Übergang von einem

Zeilen- zu einem Spaltenvektor oder umgekehrt. Da wir Zeilenvektoren für Elemente aus V und Spaltenvektoren für Elemente aus V^* nutzen, entspricht Transponieren dem Übergang von V zum Dualraum V^* oder umgekehrt. Weiterhin entspricht dies dem Heben oder Senken eines Indexes mit Hilfe des Kroneckerdeltas $(\delta_{ij})_{i,j}$ oder $\left(\delta^{ij}\right)_{ij}$: $x_i = \delta_{ij}x^j$. Dabei bezeichnen wir allgemeiner den Übergang von ξ_i zu $\xi_i G^{ij}$ als das Heben eines Indexes mit Hilfe von G^{ij} und den Übergang von x^i zu $x^i g_{ij}$ als das Senken eines Indexes mit Hilfe von g_{ij}.

Dabei ergeben sich die Matrixeinträge aus

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Wir schreiben daher

$$g_{ij}x^i y^j.$$

Dies ergibt sich aus

$$g(x, y) = g\left(x^i e_i, y^j e_j\right) = g(e_i, e_j)x^i y^j = g_{ij}x^i y^j.$$

Betrachten wir nun die Abbildung $y \mapsto g(\cdot, y)$. Sie bildet $y \in V$ auf ein Objekt ab, das, auf einen Vektor aus V angewandt, eine Zahl liefert. Somit handelt es sich um eine Abbildung

$$V \ni y \mapsto g(\cdot, y) \in V^*.$$

Bei der Schreibweise

$$g_{ij}y^j$$

sehen wir direkt, dass das Ergebnis ein Objekt mit einem freien unteren Index ist. So etwas haben wir für die Komponenten eines Objektes im Dualraum V^* verwendet. Die Bilinearform g ist ein $(0, 2)$-Tensor, da sie zwei untere Indices hat. Gemäß den obigen Ausführungen können wir sie sowohl als Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

als auch als Abbildung

$$V \to V^*$$

auffassen. Dies nutzt man, wenn man mit einer Bilinearform einen Index senkt.

Aus der Linearen Algebra kennt man die folgenden (teils nur im Endlichdimensionalen gültigen) Isomorphismen:

$$L(V, L(V, \mathbb{R})) \cong L\left(V, V^*\right) \cong L^2(V, V; \mathbb{R}) \cong L(V \otimes V, \mathbb{R}) \cong (V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*.$$

Den zweiten Isomorphismus haben wir oben bereits diskutiert, den Zusammenhang mit Tensoren verfolgen wir hier nicht weiter; er erklärt jedoch, dass die hier betrachteten Tensoren dasselbe wie die in der Linearen Algebra betrachteten Objekte sind.

Zunächst ist die Bilinearform G eine Abbildung $G\colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$. Seien $\xi, \zeta \in V^*$ mit $\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$ und $\zeta = (\zeta_i)_{1 \le i \le n}$, so ergibt sich analog zu oben

$$G(\xi, \zeta) = G\left(e_*^i \xi_i, e_*^j \zeta_j\right) = G\left(e_*^i, e_*^j\right) \xi_i \zeta_j = G^{ij}\xi_i\zeta_j$$

mit

$$G^{ij} = G\left(e_*^i, e_*^j\right).$$

Die Bilinearform G können wir aber auch analog zu oben als Abbildung

$$V^* \mapsto V^{**} \cong V$$

auffassen. Für $\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$ ist $G(\cdot, \xi) \in V^{**} \cong V$ bzw.

$$G^{ij}\xi_j$$

sind die Komponenten eines Vektors in V, da der eine freie Index ein oberer ist.

Anhang B. Extremaleigenschaften der Eigenwerte

Bemerkung B.0.1.

(i) Vermöge
$$\varphi(x,x) = \langle x, f(x)\rangle = \langle x, Ax\rangle$$
übertragen sich die folgenden Ergebnisse auch auf symmetrische Bilinearformen oder symmetrische Matrizen.

(ii) Wenn nicht anders vermerkt sind alle Skalarprodukte in diesem Abschnitt Standardskalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$, alle Normen die davon induzierten Normen mit $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$ und alle selbstadjungierten Endomorphismen seien bezüglich des Standardskalarproduktes selbstadjungiert. Wir setzen $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$.

(iii) Sei U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Sei f ein symmetrischer Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt. Dann gilt aus Homogenitätsgründen
$$\sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}\cap U} \langle x, f(x)\rangle = \sup_{\substack{x\in U\\ x\neq 0}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2}.$$
Dieser letzte Quotient heißt Rayleigh-Quotient. Die Resultate dieses Kapitels können wir mit beiden Varianten formulieren.

(iv) Sucht man Eigenwerte einer Bilinearform φ bezüglich einer positiv definiten Bilinearform ψ, so betrachtet man nachfolgend Quotienten der Form $\frac{\varphi(x,x)}{\psi(x,x)}$ beziehungsweise $\varphi(x,x)$ auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \psi(x,x) = 1\}$. Details dazu lassen wir als Übung.

B.1. **Analysisnaher Diagonalisierbarkeitsbeweis.** Zunächst geben wir in den folgenden drei Theoremen einen neuen analysisnahen Beweis für die orthogonale Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen. In den folgenden Beweisen hätte man auch die Lagrangesche Multiplikatorregel verwenden können.

Theorem B.1.1. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ selbstadjungiert. Dann gilt für den größten Eigenwert λ_n von f*
$$\lambda_n = \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \langle x, f(x)\rangle = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq 0}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2}.$$
Das Supremum wird in einem Eigenvektor zum Eigenwert λ_n angenommen.

Beweis. Aufgrund der Kompaktheit von $\mathbb{S}^{n-1}$ wird das Supremum in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ angenommen. Sei $\varepsilon > 0$ und $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(0) = x_0$. Dann nimmt die Funktion $t \mapsto \langle \gamma(t), f(\gamma(t))\rangle$ in $t = 0$ ein Maximum an. Somit gilt $0 = \langle \gamma'(0), f(x_0)\rangle + \langle x_0, f(\gamma'(0))\rangle$. Sei $x_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\langle x_0, x_1\rangle = 0$. Dann ist $\gamma(t) := \cos t \cdot x_0 + \sin t \cdot x_1$ eine Kurve in $\mathbb{S}^{n-1}$ wie oben betrachtet mit $\gamma'(0) = x_1$. Da f selbstadjungiert ist erhalten wir
$$0 = \langle x_1, f(x_0)\rangle + \langle x_0, f(x_1)\rangle = 2\langle x_1, f(x_0)\rangle.$$
Somit ist $f(x_0)$ ein Vielfaches von x_0 und daher ist x_0 ein Eigenvektor. Da für jeden Eigenvektor $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ von f zum Eigenwert λ
$$\lambda = \langle y, f(y)\rangle$$
gilt, liefert die obige Formel auch den größten Eigenwert und das Maximum wird am Eigenvektor x_0 angenommen. □

Ähnlich wie in Theorem B.1.1 finden wir nun auch die anderen Eigenwerte.

Theorem B.1.2. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ selbstadjungiert. Sei $1 \le k \le n-1$ und seien $a_{k+1}, \dots, a_n$ paarweise orthogonale Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$. Setze $U := \langle a_{k+1}, \dots, a_n \rangle$. Dann wird das Supremum in*

$$\lambda_k := \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap U^\perp} \langle x, f(x) \rangle = \sup_{\substack{x \in U^\perp \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\|x\|^2}$$

in einem zu U orthogonalen Eigenvektor a_k von f zum Eigenwert λ_k angenommen und λ_k ist der größte Eigenwert von f, der in der obigen Liste noch nicht mit seiner vollen geometrischen Vielfachheit auftaucht. Insbesondere gibt es also einen weiteren Eigenvektoren a_k und $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ sind paarweise orthogonal zueinander und somit linear unabhängig.

Beweis. Werde das Supremum in $a_k \in \mathbb{S}^{n-1} \cap U^\perp$ angenommen. Sei $b \in U^\perp$ mit $\langle b, a_k \rangle = 0$ und $\|b\| = 1$ beliebig. Betrachte eine Kurve wie oben, hier $\mathbb{R} \ni t \mapsto \cos t \cdot a_k + \sin t \cdot b$. Wiederum folgt $0 = \langle b, f(a_k) \rangle$ für alle Vektoren $b \in U^\perp \cap \langle a_k \rangle^\perp$; die Normierung benötigen wir hier nicht. Sei $v \in U$ ein beliebiger Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt $\langle v, f(a_k) \rangle = \langle f(v), a_k \rangle = \lambda \langle v, a_k \rangle = 0$. Sei $w \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \langle a_k \rangle^\perp$ beliebig. Dann können wir $w = v + b$ mit $v \in U$ und $b \in U^\perp \cap \langle a_k \rangle^\perp$ schreiben. Somit folgt $\langle w, f(a_k) \rangle = \langle v, f(a_k) \rangle + \langle b, f(a_k) \rangle = 0$ für alle $w \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \langle a_k \rangle^\perp$. Daher ist $a_k \in U^\perp$ ein Eigenvektor von f; der zugehörige Eigenwert ist wie bei jedem normierten Eigenvektor durch $\langle a_k, f(a_k) \rangle = \lambda_k$ gegeben.

Aufgrund der Orthogonalität ist a_k kein Eigenvektor zu einem Eigenwert, der bereits entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit in $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ auftaucht. Zu allen Eigenwerten, die noch nicht entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit in $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ auftauchen, gibt es jeweils einen (normierten) Eigenvektor in $U^\perp$. Da in a_k das Supremum angenommen wird, folgt also, dass λ_k der größte solche Eigenwert ist. □

Somit erhalten wir

Theorem B.1.3. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ selbstadjungiert. Dann besitzt f eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Proof. Wir zeigen per Induktion nach $k \in \{1, \dots, n\}$, dass die größten k Eigenwerte von f, entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit gegebenenfalls mehrfach aufgeführt, mit zugehörigen paarweise orthonormalen Eigenvektoren existieren. Dabei ist Theorem B.1.1 der Induktionsanfang und Theorem B.1.2 der Induktionsschritt. □

B.2. **Min-Max-Charakterisierung der Eigenwerte.**

Bemerkung B.2.1. In diesem Kapitel verstehen wir unter den angeordneten Eigenwerten $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ die nach Größe aufsteigend geordneten reellen Eigenwerte eines selbstadjungierten Endomorphismusses bzw. einer symmetrischen reellen Matrix, wobei wir einen Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit k genau k-mal aufführen.

Für das folgende Theorem benötigen wir einen kleinen Hilfssatz:

Lemma B.2.2. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ selbstadjungiert mit angeordneten Eigenwerten $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$. Sei U ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein $x \in U \cap \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\langle x, f(x) \rangle \ge \lambda_k$.*

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis $\{a_i\}_{1 \le i \le n}$ aus Eigenvektoren von f mit $f(a_i) = \lambda_i a_i$. Setze $W := \langle a_k, \dots, a_n \rangle$. Aus Dimensionsgründen ist $U \cap W \neq \{0\}$.

Sei $x \in U \cap W$ mit $\|x\| = 1$. Aus $x \in W$ mit $x = \sum\limits_{i=k}^{n} x^i a_i$ folgt

$$\langle x, f(x)\rangle = \left\langle \sum_{i=k}^{n} x^i a_i, \sum_{j=k}^{n} x^j \underbrace{f(a_j)}_{=\lambda_j a_j} \right\rangle = \sum_{i=k}^{n} \left(x^i\right)^2 \underbrace{\lambda_i}_{\geq \lambda_k} \geq \lambda_k \cdot \sum_{i=k}^{n} \left(x^i\right)^2 = \lambda_k.$$

Somit ergibt sich die Behauptung. □

Theorem B.2.3. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ selbstadjungiert. Sei $\mathcal{U}_k$ die Menge aller k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für die angeordneten Eigenwerte $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$*

$$\lambda_k = \inf_{U \in \mathcal{U}_k} \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap U} \langle x, f(x)\rangle.$$

Beweis. Das Supremum wird stets angenommen, da $\mathbb{S}^{n-1} \cap U$ kompakt (= beschränkt und abgeschlossen) ist und da $x \mapsto \langle x, f(x)\rangle$ stetig ist.

Sei $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ mit $f(a_i) = \lambda_i a_i$. Setze $W := \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$. Dann gilt für $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x^i a_i \in W$ mit $\|x\| = 1$, also $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\begin{aligned}\langle x, f(x)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{k} x^i x^j \langle a_i, f(a_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{k} x^i x^j \lambda_j \underbrace{\langle a_i, a_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \left(x^i\right)^2 \lambda_i \\ &\leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \left(x^i\right)^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k.\end{aligned}$$

Insbesondere folgt also

$$\langle a_k, f(a_k)\rangle = \lambda_k = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap W} \langle x, f(x)\rangle.$$

Lemma B.2.2 zeigt, dass

$$\inf_{U \in \mathcal{U}_k} \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap U} \langle x, f(x)\rangle \geq \lambda_k = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap W} \langle x, f(x)\rangle$$

gilt. Somit folgt Gleichheit in der obigen Ungleichung und damit die Behauptung. □

Theorem B.2.4. *Sei $a > 0$. Sei $(-a, a) \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und sei $A(t)$ für alle $t \in (-a, a)$ symmetrisch. Seien $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \ldots \leq \lambda_n(t)$, $t \in (-a, a)$, die angeordneten Eigenwerte von $A(t)$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixiert. Dann ist $t \mapsto \lambda_i(t)$ stetig.*

Ist Ω ein topologischer Raum und $\Omega \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig, so folgt die stetige Abhängigkeit der Eigenvektoren quasi mit demselben Beweis.

Beweis. Wir wollen Theorem B.2.3 benutzen. Seien $t_0 \in (-a, a)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Gelte $A(t) = \left(a^i_j(t)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (-a, a)$ und $\left|a^i_j(t) - a^i_j(t_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ (da $t \mapsto A(t)$ stetig ist) gelten. Sei $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ beliebig. Wegen $1 = \langle x, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2$ gilt $\left|x^i\right| \leq 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}|\langle x, A(t)x\rangle - \langle x, A(t_0)x\rangle| &= |\langle x, (A(t) - A(t_0))x\rangle| \\ &= \left| \sum_{i,j,k=1}^{n} x^i \delta_{ij} \left(a^j_k(t) - a^j_k(t_0)\right) x^k \right|\end{aligned}$$

$$\leq n^2 \underbrace{\left(\sup_{1\leq i\leq n} \left|x^i\right|\right)^2}_{\leq 1} \frac{\varepsilon}{n^2} \leq \varepsilon.$$

Es folgt nach Theorem B.2.3 (wobei $\mathcal{U}_k$ wieder die Menge aller k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet)

$$\begin{aligned}\lambda_k(t) &= \inf_{U\in\mathcal{U}_k} \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}\cap U} \langle x, A(t)x\rangle \\ &\leq \inf_{U\in\mathcal{U}_k} \sup_{x\in\mathbb{S}^{n-1}\cap U} \langle x, A(t_0)x\rangle + \varepsilon \\ &= \lambda_k(t_0) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Hierfür schreibe man die obige Abschätzung zuerst als Ungleichung ohne Beträge um und gehe dann zunächst auf einer Seite zum Supremum bzw. Infimum über. Analog folgt die umgekehrte Ungleichung und daher die Stetigkeit. □

B.3. **Charakterisierung positiver Definitheit.** Als Anwendung erhalten wir eine Charakterisierung positiver Definitheit.

Bemerkung B.3.1.

(i) Das folgende Theorem gilt auch für symmetrische und hermitesche Matrizen, siehe [5, Theorem 7.2.5]. Wir lassen es als Übung, die Min-Max-Charakterisierung der Eigenwerte auf hermitesche Matrizen zu übertragen.
(ii) Für positiv semidefinite Matrizen gilt es nicht mit „≥ 0“.
(iii) Wir schreiben $\mathbb{K}$ statt $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Theorem B.3.2. *Sei $A = \left(a^i_j\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist positiv definit,
(ii) alle Unterdeterminanten $\det\left(a^i_j\right)_{1\leq i,j\leq k} \equiv \det A_k$, $k = 1,\dots,n$, erfüllen $\det A_k > 0$ (und sind im hermiteschen Fall reell).

Beweis.

- „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei A positiv definit. Betrachte $A_k = \left(a^i_k\right)_{1\leq i,j\leq k}$ für ein k mit $1 \leq k \leq n$. Dann ist auch A_k positiv definit. A_k ist diagonalisierbar und hat positive Eigenwerte. Somit ist auch das Produkt dieser Eigenwerte, $\det A_k$, positiv.
- „(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Per Induktion. Sei die Aussage bereits für $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen gezeigt, A_{n-1} also positiv definit. Nach Theorem B.2.3, mit Infimum und Supremum vertauscht um die größeren Eigenwerte zuerst zu bekommen, besitzt A mindestens $(n-1)$ positive Eigenwerte, da wir schon für die spezielle Wahl $U = \langle e_1,\dots,e_k\rangle$ mit $1 \leq k \leq n-1$ auch k positive Werte erhalten die dann untere Schranken für die Eigenwerte von A sind. Das Produkt der Eigenwerte ist aber ebenfalls positiv. Somit sind alle Eigenwerte positiv. □

Literatur

1. Richard Bödi, *Differentialgeometrie*, 1996/7, Vorlesung in Tübingen, p. 96.
2. Klaus Ecker and Gerhard Huisken, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 547–569.
3. Michael Gage and Richard S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom. **23** (1986), no. 1, 69–96.
4. Matthew A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 2, 285–314.
5. Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Corrected reprint of the 1991 original.

6. Gerhard Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 237–266.
7. Ernst Kuwert, *Elementare Differentialgeometrie*, 2006, Skript zur Vorlesung.
8. Elon L. Lima, *The Jordan-Brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), no. 1, 39–42.
9. John W. Milnor, *On the total curvature of knots*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 248–257.
10. Hans Samelson, *Orientability of hypersurfaces in R^n*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 301–302.
11. Oliver C. Schnürer, *Differentialtopologie*, 2011, Skript zur Vorlesung.
12. Oliver C. Schnürer, *Lineare Algebra II*, 2013, Skript zur Vorlesung.
13. Michael Struwe, *Differentialgeometrie I*, 2002/03, Vorlesungsskript.
14. John A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1979 original.
15. Friedrich Tomi, *Differentialgeometrie I*, 1997, Lecture Notes.
16. Wikipedia, `https://www.wikipedia.org`.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

Email address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`