DIFFERENTIALGEOMETRIE II

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zum zweiten Teil einer Vorlesung Differentialgeometrie II an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2007/8. Vielen Dank an Juliette Hell für Korrekturen.

Inhaltsverzeichnis

1. Energie- und Volumenfunktional

Wir verwenden in den folgenden Kapiteln [9], siehe auch [4].

Definition 1.1. Sei $f : M \to \left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ eine Immersion einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Mit der zurückgezogenen Metrik $g := f^*\tilde{g}$ wird $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ zu einer isometrischen Immersion. Das Volumen V von $f(M)$ ist durch $V(f(M)) = \int\limits_M d\mu_g$ gegeben. In einer lokalen Karte (U, φ) von M mit Standardbasis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ ist

$$V(f(U)) = \int\limits_U d\mu_g = \int\limits_{\varphi(U)} \sqrt{\det(g_{ij}) \circ \varphi^{-1}}\, dx^1 \ldots dx^m,$$

wobei

$$g_{ij} = g\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \tilde{g}\left(f_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle, f_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\right).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01, 53C22, 58E10.

Das Energiefunktional E einer Abbildung $f:(M,g)\to\left(\tilde M,\tilde g\right)$, die nicht notwendigerweise eine isometrische Immersion ist, ist durch

$$E(f):=\frac{1}{2}\int\limits_M\sum_{i,j}g^{ij}\left\langle f_*\tfrac{\partial}{\partial x^i},f_*\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_{\tilde g}\,d\mu_g$$

definiert, wobei $\left(g^{ij}\right)$ die Inverse zu (g_{ij}) ist.

Sei $f\in C^k$. Eine C^k-Variation F von f ist eine Abbildung $F:M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\tilde M$, $\varepsilon>0$, mit $F(x,0)=f(x)$ für $x\in M$. Dann heißt

$$\tfrac{\partial}{\partial t}F(\cdot,t)\big|_{t=0}=F_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle\big|_{t=0}=:X$$

Variationsvektorfeld von F und ist ein Vektorfeld längs f, also ein Schnitt in $f^*T\tilde M$. Eine Variation F hat kompakten Träger in einer Menge U, falls

$$\overline{\bigcup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}\operatorname{supp}(F(\cdot,t)-f)}\Subset U$$

gilt.

Lemma 1.2 (1. Variation des Volumens)**.** *Seien M^m, $\tilde M$ kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f:(M,g)\to\left(\tilde M,\tilde g\right)$ eine isometrische Immersion der Klasse C^2. Sei F eine C^2-Variation von f mit Variationsvektorfeld X und kompakten Träger im Definitionsgebiet U einer Karte (U,φ). Dann erfüllt die erste Variation des Volumens mit Bezeichnungen wie in Definition 1.1*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(F(\cdot,t))\bigg|_{t=0}&=-\int\limits_U\left\langle\frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\sum_{i,j=1}^m\tilde\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\,g^{ij}f_*\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right),X\right\rangle_{\tilde g}d\mu_g\\&\equiv-\int\limits_U\langle\Delta f,X\rangle\,d\mu_g.\end{aligned}$$

Beweis. Es genügt, über U zu integrieren. Die Kompaktheit der Mannigfaltigkeiten sichert die Differenzierbarkeit und dass die Integrale endlich sind. Wir definieren $G:=\det g_{ij}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(F(\cdot,t))&=\frac{d}{dt}\int\limits_{\varphi(U)}\sqrt{G\circ\varphi^{-1}}\,dx\\&=\int\limits_{\varphi(U)}\left(\frac{1}{2\sqrt G}\sum_{i,j=1}^m Gg^{ij}\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\right)\circ\varphi^{-1}\,dx\\&=\int\limits_{\varphi(U)}\left(\frac{1}{2\sqrt G}\sum_{i,j=1}^m Gg^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle F_*\frac{\partial}{\partial x^i},F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_{\tilde g}\right)\circ\varphi^{-1}\,dx\\&=\frac12\int\limits_U\sum_{i,j=1}^m g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle F_*\frac{\partial}{\partial x^i},F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_{\tilde g}d\mu_g\\&=\int\limits_U\sum_{i,j=1}^m g^{ij}\left\langle\tilde\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^i}\right),F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_{\tilde g}d\mu_g,\end{aligned}$$

da $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang auf $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ bzw. $\tilde{M}\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ ist,

$$= \int\limits_U \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\left\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} F_*\frac{\partial}{\partial t}, F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle d\mu_g,$$

da nach der 1. Cartan-Formel für einen Levi-Civita Zusammenhang $0=\tilde{\nabla}_X F_*Y-\tilde{\nabla}_Y F_*X-F_*[X,Y]$ gilt,

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_U \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\left\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle d\mu_g\\
&= -\int\limits_U \sum_{i,j=1}^m \left\langle X, \frac{1}{\sqrt{G}}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\sqrt{G}\,g^{ij}F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle d\mu_g,
\end{aligned}$$

nach Divergenzsatz.

Es gilt nämlich für Vektorfelder X, Y, von denen eines einen kompakten Träger in U hat, aufgrund der partiellen Integrationsformel im $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
\int\limits_U \left\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, Y\right\rangle d\mu_g &= \int\limits_{\varphi(U)} \left\langle \left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X\right)\circ\varphi^{-1}, Y\circ\varphi^{-1}\right\rangle \sqrt{G\circ\varphi^{-1}}\,dx\\
&= \int\limits_{\varphi(U)} \frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle X\circ\varphi^{-1}, \left(\sqrt{G}\,Y\right)\circ\varphi^{-1}\right\rangle dx\\
&\quad - \int\limits_{\varphi(U)} \left\langle X\circ\varphi^{-1}, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\sqrt{G}\,Y\right)\circ\varphi^{-1}\right\rangle dx\\
&= -\int\limits_U \left\langle X, \frac{1}{\sqrt{G}}\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\sqrt{G}\,Y\right)\right\rangle d\mu_g.
\end{aligned}$$

Beachte für die zweite Gleichheit, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\circ\varphi$ für $f:M\to\mathbb{R}$ gilt. $\square$

Bemerkung 1.3. Für beliebiges Vektorfeld X mit kompaktem Träger gibt es eine Variation F von f mit kompaktem Träger, deren Variationsvektorfeld durch X gegeben ist, nämlich $F(x,t):=\exp_{f(x)}(t\cdot X(x))$.

Somit ist genau dann $\Delta f=0$, wenn f ein kritischer Punkt des Volumenfunktionals ist.

Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist $\det g=1$ und wir erhalten $\Delta f=\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dx}}f_*\frac{d}{dx}=\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dx}}f'=0$, f ist also eine Geodätische. Gleichzeitig ist f harmonisch. Daher ist es naheliegend, die erste Variation der Energie für Geodätische zu untersuchen.

Sei $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ von der Klasse C^1. Wir schreiben L für das Volumenfunktional V. L heißt Längenfunktional. Es gilt nach Hölder

$$L(f)=\int\limits_a^b ||f'(t)||\,dt\le(b-a)^{1/2}\cdot\left(\int ||f'||^2\,dt\right)^{1/2}=\sqrt{b-a}\sqrt{2E(f)}$$

mit Gleichheit, falls $||f'||$ und 1 linear abhängig sind, wenn also $||f'||$ konstant ist. Jede reguläre Kurve lässt sich so parametrisieren, dass $||f'||$ konstant ist. Wir sehen also, dass wir Minima für L finden können, indem wir E minimieren. Minima sind dann automatisch proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Beim Längenfunktional kann man Minima, anders als bei der Energie, noch umparametrisieren und bekommt Konvergenzprobleme bei Minimalfolgen.

2. 1. und 2. Variation der Energie, Jacobifelder

Lemma 2.1 (1. Variation der Energie)**.** *Sei $\alpha : [a,b] \to (M,g)$ eine C^2-Kurve, $\alpha(t)$. Sei $V = V(t,\tau)$ eine C^2-Variation von α mit festen Endpunkten, also $V \in C^2([a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon),M)$, $\varepsilon > 0$, mit $V(t,0) = \alpha(t)$, $V(a,\tau) = \alpha(a)$ und $V(b,\tau) = \alpha(b)$ für alle $\tau \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Dann ist*

$$\frac{\partial}{\partial\tau}E(V(\cdot,\tau))\bigg|_{\tau=0} = -\int\limits_a^b \langle\nabla_{\frac{d}{dt}}\alpha', X\rangle\, dt =: E_{*,\alpha}(X).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}E(V(\cdot,\tau)) &= \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left\langle V_*\tfrac{\partial}{\partial t}, V_*\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle\, dt \\
&= \int\limits_a^b \left\langle V_*\tfrac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}V_*\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle\, dt && \text{(Ricci)}\\
&= \int\limits_a^b \left\langle V_*\tfrac{\partial}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\tfrac{\partial}{\partial \tau}\right\rangle\, dt && \text{(Cartan)}\\
&= \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left\langle V_*\tfrac{\partial}{\partial t}, V_*\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle\, dt - \int\limits_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\tfrac{\partial}{\partial t}, V_*\tfrac{\partial}{\partial \tau}\right\rangle\, dt && \text{(Ricci).}
\end{aligned}$$

$V_*\frac{\partial}{\partial\tau}$ verschwindet für $t = a$, b. Wir definieren $X := V_*\frac{\partial}{\partial\tau}\big|_{\tau=0}$ und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial\tau}E(V(\cdot,\tau))\bigg|_{\tau=0} = -\int\limits_a^b \left\langle\nabla_{\frac{d}{dt}}\alpha', X\right\rangle\, dt.$$

□

Bemerkung 2.2. Die folgenden vier Aussagen sind äquivalent

(i) $E_{*,\alpha}(X) = 0$ für alle X mit $X(a) = X(b) = 0$,
(ii) $\nabla_{\frac{d}{dt}}\alpha' = 0$,
(iii) $\alpha^{k\prime\prime} + \sum\limits_{i,j}\Gamma^k_{ij}\circ\alpha\cdot\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime} = 0$,
(iv) $\alpha =$ konstant oder α ist Geodätische.

Daher können wir auch Extreme des Energiefunktionals suchen, wenn wir Geodätische finden wollen.

Bemerkung 2.3. Im Fall geschlossener Kurven $\alpha \in C^2([a,b],M)$ mit $\alpha(a)=\alpha(b)$ betrachten wir periodische Variationen, also $V \in C^2([a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon),M)$, $\varepsilon>0$, mit $V(a,\tau)=V(b,\tau)$ für alle $\tau\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Dann ist insbesondere $X(a)=X(b)$. Mit Hilfe der Rechnung aus Lemma 2.1 folgt

$$E_{*,\alpha}(X)=\langle\alpha'(b)-\alpha'(a),X(a)\rangle-\int\limits_a^b\left\langle\nabla_{\frac{d}{dt}}\alpha',X\right\rangle dt.$$

Somit ist α genau dann unter allen periodischen Variationen stationär, wenn α eine Geodätische ist (folgt aus Variationen mit festen Endpunkten) und $\alpha'(a)=\alpha'(b)$ gilt. In diesem Falle sagen wir auch, dass α periodische Lösung der geodätischen Differentialgleichung oder geschlossene Geodätische ist. Beachte, dass aufgrund der Differentialgleichung auch die höheren Ableitungen von α übereinstimmen.

Bemerkung 2.4 (2. Variation von E)**.**
Sei $\alpha:[a,b]\to M$ eine Geodätische. Betrachte 2 Parameter-Variationen $V=V(t,\tau_1,\tau_2)$ von α. Sei $V\in C^3\left([a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)^2,M\right)$, $\varepsilon>0$, $V(t,0,0)=\alpha(t)$. Definiere $\frac{\partial V}{\partial\tau_1}\Big|_{(\tau_1,\tau_2)=0}=: X_1$ und $\frac{\partial V}{\partial\tau_2}\Big|_{(\tau_1,\tau_2)=0}=: X_2(t)$. Für gegebene Vektorfelder $X_1(t)$ und $X_2(t)$ ist $V(t,\tau_1,\tau_2):=\exp_{\alpha(t)}(\tau_1X_1(t)+\tau_2X_2(t))$ eine Variation, die gerade diese Vektorfelder liefert.

Wir wissen aus den Rechnungen zu Lemma 2.1, dass

$$\frac{\partial}{\partial\tau_2}E(V(\cdot,\tau_1,\tau_2))=\int\limits_a^b\left\langle V_*\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\rangle dt$$

gilt. Somit erhalten wir mit Ricci und $R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}E(V(\cdot,\tau_1,\tau_2)) &= \int\limits_a^b\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau_1}}V_*\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\rangle dt\\
&\quad+\int\limits_a^b\left\langle V_*\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau_1}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\rangle dt\\
&=\int\limits_a^b\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau_1}}V_*\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\rangle dt\\
&\quad+\int\limits_a^b\left\langle V_*\frac{\partial}{\partial t},R\left(V_*\frac{\partial}{\partial\tau_1},V_*\frac{\partial}{\partial t}\right)V_*\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\rangle dt\\
&\quad+\int\limits_a^b\left\langle V_*\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau_1}}V_*\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\rangle dt.\end{aligned}$$

Für $\tau=(\tau_1,\tau_2)=0$ vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}E(V(\cdot,\tau_1,\tau_2))\Big|_{(\tau_1,\tau_2)=0}=\int\limits_a^b\langle\nabla X_1,\nabla X_2\rangle+\langle\alpha',R(X_1,\alpha')X_2\rangle\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_a^b \left\langle \alpha', \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_* \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right\rangle\Big|_{\tau=0} dt \\
&= \int\limits_a^b \langle \nabla X_1, \nabla X_2\rangle - \langle R(X_1,\alpha')\alpha', X_2\rangle\, dt \\
&+\int\limits_a^b \left\langle \alpha', \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_* \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right\rangle\Big|_{\tau=0} dt \equiv I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten für $\tau = 0$, da α eine Geodätische ist, also $\nabla\alpha' = 0$ erfüllt,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_a^b \frac{d}{dt} \left\langle \alpha', \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_* \left(\frac{\partial}{\partial \tau_2}\right)\right\rangle dt - \int\limits_a^b \left\langle \nabla\alpha', \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_* \left(\frac{\partial}{\partial \tau_2}\right)\right\rangle dt \\
&= \left\langle \alpha'(b), \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_{*,(b,0)} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right\rangle - \left\langle \alpha'(a), \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_{*,(a,0)} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Bei Variationen mit festen Endpunkten gilt $I_2 = 0$, denn dann ist $V(a,\tau_1,\tau_2) = \alpha(a)$ und $V(b,\tau_1,\tau_2) = \alpha(b)$. Wir erhalten also für $t = a,\ b$, dass $V_{*,(t,\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau_2} = 0$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_{*,(t,\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau_2} = 0$ gelten.

Ist α eine geschlossene stationäre Geodätische und V eine periodische Variation, so gilt ebenfalls $I_2 = 0$, denn dann ist $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ und $V(a,\tau_1,\tau_2) = V(b,\tau_1,\tau_2)$ und es folgt $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_{*,(a,0)} \frac{\partial}{\partial \tau_2} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau_1}} V_{*,(b,0)} \frac{\partial}{\partial \tau_2}$.

Somit gilt für Geodätische und Variationen V mit festen Endpunkten oder für stationäre (bzgl. des Energiefunktionals) periodische Geodätische und periodische Variationen

$$
\frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} E(V(\cdot,\tau_1,\tau_2))\Big|_{\tau=0} = \int\limits_a^b \langle \nabla X_1, \nabla X_2\rangle - \langle R(X_1,\alpha')\alpha', X_2\rangle\, dt.
$$

Definition 2.5. Sei α eine Geodätische. Für Vektorfelder X_1, X_2 längs α nennen wir die symmetrische Bilinearform

$$
\int\limits_a^b \langle \nabla X_1, \nabla X_2\rangle - \langle R(X_1,\alpha')\alpha', X_2\rangle =: E_{**,\alpha}(X_1,X_2)
$$

die 2. Variation der Energie längs α.

Bemerkung 2.6. Sei $V(t,\tau)$ eine einparametrige Variation längs α. Definiere $\tilde V(t,\tau_1,\tau_2) := V(t,\tau_1+\tau_2)$. Dann ist

$$
\frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} E(\tilde V(\cdot,\tau_1,\tau_2))\Big|_{\tau_1=\tau_2=0} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E(V(\cdot,\tau))\Big|_{\tau=0}.
$$

Weiterhin gilt

$$
X_1 \equiv \frac{\partial \tilde V}{\partial \tau_1}\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \tilde V}{\partial \tau_2}\Big|_{\tau=0} \equiv X_2.
$$

Mit $X := \frac{\partial V}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}$ folgt daher

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E(V(\cdot,\tau))\Big|_{\tau=0} = \int\limits_a^b ||\nabla X||^2 - \langle R(X,\alpha')\alpha', X\rangle \, dt,$$

falls (wie oben) V die Endpunkte fest lässt oder eine periodische Variation ist.

Erinnerung: Für Vektoren $X \neq 0 \neq Y$ in T_pM ist die Schnittkrümmung von M durch

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$$

definiert.

Bemerkung 2.7. Liefert die Geodätische α ein Minimum der Energie bei allen Variationen mit festen Endpunkten oder bei allen periodischen Variationen, falls α periodisch ist, so gilt

$$E_{**,\alpha}(X,X) \geq 0$$

für alle X mit $X(a) = X(b) = 0$ bzw. $X(a) = X(b)$.

Definition 2.8. Sei B eine symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum V. Dann ist der Nullraum $N(B)$ von B durch

$$N(B) = \{X \in V \,:\, B(X,Y) = 0 \quad \forall\, Y \in V\}$$

definiert.

Bemerkung 2.9. Seien X_1, X_2 Vektorfelder längs einer Geodätischen α mit $X_1 \in C^2$ und $X_2 \in C^1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_{**,\alpha}(X_1,X_2) &= \int\limits_a^b \langle \nabla X_1, \nabla X_2\rangle - \langle R(X_1,\alpha')\alpha', X_2\rangle \, dt \\ &= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}\langle \nabla X_1, X_2\rangle \, dt - \int\limits_a^b \left\langle \nabla^2 X_1 + R(X_1,\alpha')\alpha', X_2\right\rangle \, dt. \end{aligned}$$

Im Falle fester Endpunkte ($X(a) = X(b) = 0$) sind also die beiden Bedingungen

(i) $X \in N(E_{**,\alpha}) \cap C^2([a,b])$,
(ii) $\nabla^2 X + R(X,\alpha')\alpha' = 0$

äquivalent.

Im periodischen Fall ($X(a) = X(b)$) sind die beiden Bedingungen

(i) $X \in N(E_{**,\alpha}) \cap C^2([a,b])$,
(ii) $\nabla^2 X + R(X,\alpha')\alpha' = 0$ und $\nabla X(a) = \nabla X(b)$

äquivalent, da aus $\langle \nabla X(a) - \nabla X(b), Y(a)\rangle = 0$ für alle Y auch die Gleichheit der Gradienten folgt.

Definition 2.10. Ein C^2-Vektorfeld J längs einer Geodätischen $\alpha : [a,b] \to M$ heißt Jacobifeld, falls

$$\nabla^2 J + R(J,\alpha')\alpha' = 0 \tag{2.1}$$

gilt.

Ein Punkt $c \in [a,b]$ heißt zu a konjugiert, falls es ein nichttriviales Jacobifeld J längs α gibt, so dass $J(a) = J(c) = 0$ ist.

Bemerkung 2.11. Auf einer m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die Jacobische Differentialgleichung (2.1) ein m-dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ist α gegeben, so ist die Menge der Lösungen ein $2m$-dimensionaler Vektorraum. Ein Jacobifeld J ist durch die Anfangswerte $J(a)$ und $\nabla J(a)$ eindeutig festgelegt.

Ist $\alpha : [a,b] \to M$ eine Geodätische und $\lambda(t) = ct + d$, c, $d \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda\alpha'$ ein Jacobifeld längs α, denn es gilt $\lambda R(\alpha', \alpha')\alpha' = 0$ und

$$\nabla^2(\lambda\alpha') = ((\lambda'\alpha') + \lambda\nabla\alpha')' = \lambda''\alpha' + \lambda'\nabla\alpha',$$

da $\lambda'' = 0$ und $\nabla\alpha' = 0$ gelten.

Ist J ein beliebiges Jacobifeld längs α, so ist $\langle J, \alpha'\rangle$ affin linear, es gilt nämlich

$$\langle J, \alpha'\rangle'' = (\langle\nabla J, \alpha'\rangle + \langle J, \nabla\alpha'\rangle)' = \langle\nabla J, \alpha'\rangle' = \langle\nabla^2 J, \alpha'\rangle = -\langle R(J, \alpha')\alpha', \alpha'\rangle = 0.$$

Somit ist $\langle J, \alpha'\rangle\alpha'$ ebenfalls ein Jacobifeld längs α.

Ein Jacobifeld heißt normal, falls $\langle J, \alpha'\rangle = 0$, und tangential, falls $J = \lambda\alpha'$ gilt.

Jedes Jacobifeld J längs α lässt sich als Summe eines tangentialen und eines normalen Jacobifeldes schreiben, nämlich als

$$J = \left\langle J, \frac{\alpha'}{||\alpha'||}\right\rangle \frac{\alpha'}{||\alpha'||} + \left(J - \left\langle J, \frac{\alpha'}{||\alpha'||}\right\rangle \frac{\alpha'}{||\alpha'||}\right).$$

Da $\langle J, \alpha'\rangle$ affin linear ist, ist ein Jacobifeld J mit mindestens 2 Nullstellen normal.

Lemma 2.12. *Sei α eine Geodätische in M. Ist die Schnittkrümmung $K = K(\cdot, \cdot)$ längs α nicht positiv, so ist die 2. Variation der Energie von α auf dem Raum der stetigen Vektorfelder X, die längs α stückweise C^1 sind und $X(a) = X(b) = 0$ erfüllen, positiv definit.*

Insbesondere gibt es auf α keine zueinander konjugierten Punkte.

Beweis. Sei die Schnittkrümmung für alle X, Y nicht positiv, $K(X, Y) \le 0$. Somit gilt $\langle R(X, Y)Y, X\rangle \le 0$ für alle X, Y. Es folgt

$$E_{**,\alpha}(X, X) = \int\limits_a^b ||\nabla X||^2 - \langle R(X, \alpha')\alpha', X\rangle\, dt \ge \int\limits_a^b ||\nabla X||^2\, dt \ge 0.$$

Gilt $E_{**,\alpha}(X, X) = 0$, so ist $||X|| = \text{ konstant } = ||X(a)|| = 0$.

Sind a', b' konjugierte Punkte mit $a \le a' < b' \le b$ und J das zugehörige Jacobifeld. Dann gilt

$$E_{**,\alpha|_{[a',b']}}(J, J) = -\int\limits_a^b \left\langle \nabla^2 J + R(J, \alpha')\alpha', J\right\rangle\, dt = 0.$$

Aufgrund der obigen Überlegung folgt dann $J \equiv 0$. □

3. Konjugierte Punkte und Minimaleigenschaften von Geodätischen

Lemma 3.1. *Sei $V : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine C^3-Schar von Geodätischen, d. h. $V(\cdot, \tau)$ ist für jedes $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Geodätische. Dann ist $\frac{\partial V}{\partial \tau}(\cdot, \tau) = V_*\left\langle\frac{\partial}{\partial \tau}\right\rangle$ ein Jacobifeld längs $V(\cdot, \tau)$.*

Beweis. Wir vertauschen Ableitungen und erhalten nach Definition des Riemannschen Krümmungstensors

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle-\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle=R\left(V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle,V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle\right)V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle.$$

Da $V(\cdot,\tau)$ für alle τ eine Geodätische ist, verschwindet der erste Term, es ist also $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle=0$. Im zweiten Term vertauschen wir die Ableitungen und erhalten für $J=J(t):=V_*\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle$ und $\alpha(t):=V(t,\tau)$ (bei fixiertem τ)

$$0=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle+R\left(V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle,V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle\right)V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle=\nabla^2J+R(J,\alpha')\alpha'.$$

Somit ist J wie behauptet ein Jacobifeld. □

Korollar 3.2. *Es sei $\alpha:[0,c]\to M$ eine Geodätische, $\alpha(0)=x$, $\alpha'(0)=v$. Dann ist das Jacobifeld J längs α mit $J(0)=0$, $\nabla J(0)=w\in T_xM$ durch*

$$J(t)=\exp_{x*,tv}\langle tw\rangle$$

gegeben.

Beweis. $V(t,\tau):=\exp_x(t(v+\tau w))$ definiert eine Familie von Geodätischen $V(\cdot,\tau)$. Somit ist $\frac{\partial V}{\partial\tau}$ nach Lemma 3.1 ein Jacobifeld. Ableiten liefert

$$V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle\Big|_{\tau=0}=\exp_{x*,tv}\langle tw\rangle.$$

Der Ausdruck für das Jacobifeld ist also wie angegeben, wenn die Anfangswerte stimmen.

Es gilt $V_*\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle\big|_{(0,0)}=0$. Weiterhin gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right\rangle\Big|_{(0,0)}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}V_*\left\langle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(0,0)}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}(v+\tau w)\Big|_{\tau=0}=\frac{\partial}{\partial\tau}(v+\tau w)\Big|_{\tau=0}=w.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die Ableitung der Exponentialabbildung im Ursprung $0\in T_xM$ die Identität ist. Nach dem zweiten Gleichheitszeichen ist $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}$ die kovariante Ableitung längs der konstanten Abbildung $\tau\mapsto x$, da $V(0,\tau)\equiv x$ ist. Somit stimmen auch die Anfangswerte und die Behauptung folgt. □

Definition 3.3. Sei $\alpha:[0,c]\to M$ eine Geodätische. Für $0<s\le c$ definieren wir die Vielfachheit von s als die Dimension des Raumes der Jacobifelder J längs α mit $J(0)=0$ und $J(s)=0$.

Theorem 3.4. *Sei $\alpha:[0,c]\to M$ eine Geodätische mit $\alpha(0)=x$ und $\alpha'(0)=v$. Die Vielfachheit von $s\in(0,c]$ ist gleich* $\dim(\ker\exp_{x*,sv})$.

Beweis. Sei $W(s)$ der Raum der Jacobifelder längs α mit $J(0)=J(s)=0$. Nach Korollar 3.2 ist $J\in W(s)\iff\nabla J(0)\in\ker\exp_{x*,sv}$, denn für solche Werte $\nabla J(0)$ gilt $J(s)=\exp_{x*,sv}\langle\nabla J(0)\rangle=0$. Beachte, dass die Abbildung $W(s)\ni J\mapsto\nabla J(0)$ nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen eineindeutig ist. □

Hat $\exp_x$ vollen Rang, so schließen wir:

Korollar 3.5. *Besitzt die Geodätische $\alpha(t):=\exp_x(tv)$ für $0\le t\le c$ keine konjugierten Punkte, so ist $\exp_x$ längs des Segmentes $\{tv\,:\,0\le t\le c\}$ ein lokaler Diffeomorphismus.*

Dies ist bei nichtpositiver Schnittkrümmung stets erfüllt.

Lemma 3.6 (Gauß)**.**
Für (x,v) im Definitionsbereich von exp *und alle $w\in T_vT_xM\cong T_xM$ gilt*

$$\langle \exp_{x*,v}\langle v\rangle, \exp_{x*,v}\langle w\rangle\rangle_{\exp_x(v)} = \langle v,w\rangle_x.$$

Beweis. Betrachte die Geodätische $\alpha(t)=\exp_x(tv)$, $0\le t\le 1$. Sei J das Jacobifeld längs α mit $J(0)=0$ und $\nabla J(0)=w$. Dann ist $\alpha'(t)=\exp_{x*,tv}\langle v\rangle$ und nach Korollar 3.2 gilt $J(t)=\exp_{x*,tv}\langle tw\rangle$. Betrachte $f(t):=\langle\alpha'(t),J(t)\rangle$. Wir haben die beiden Randwerte $f(0)=0$, da $J(0)=0$ ist, und $f(1)=\langle\exp_{x*,v}\langle v\rangle,\exp_{x*,v}\langle w\rangle\rangle$. Da α eine Geodätische ist, folgt

$$f'(t)=\langle\nabla\alpha'(t),J(t)\rangle+\langle\alpha'(t),\nabla J(t)\rangle=\langle\alpha'(t),\nabla J(t)\rangle.$$

Nach Bemerkung 2.11 wissen wir aber, dass $f(t)$ affin linear sein muss. Also ist $f'(t)$ konstant und es gilt in unserem Falle $f(t)=tf'(0)$, da $f(0)=0$ ist. Wir erhalten insbesondere $f(1)=f'(0)=\langle v,w\rangle_x$ und die Behauptung folgt. □

Das folgende Theorem besagt, dass Geodätische mit Startpunkt x global Kürzeste sind, wenn Anfangs- und Endpunkt unter der „Liftung" zu $\exp_x$ übereinstimmen.

Theorem 3.7. *Es sei $\tilde M_x$ der Definitionsbereich von $\exp_x$, $V\in\tilde M_x$ und $\varphi(t)=tV$ für $t\in[0,1]$. Dann gilt für jede stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurve $\psi:[0,1]\to\tilde M_x$ mit $\psi(0)=0$ und $\psi(1)=V$ die Abschätzung*

$$||V||=L(\exp_x\circ\varphi)\le L(\exp_x\circ\psi).$$

Beweis. Wir dürfen $V\neq 0$ annehmen. Sei $t_0:=\sup\{t:\psi(t)=0\}$. Dann gilt $\psi(t_0)=0$ und $\psi(t)\neq 0$ für $t>t_0$. Definiere $v(t):=\frac{\psi(t)}{||\psi(t)||}$ für $t_0<t\le 1$. Wir schreiben $\psi'(t)=\langle\psi'(t),v(t)\rangle v(t)+w(t)$ mit $\langle v(t),w(t)\rangle=0$. Es gilt

$$L(\exp_x\circ\psi)=\int\limits_0^1||\exp_{x*,\psi(t)}\langle\psi'(t)\rangle||\,dt\ge\int\limits_{t_0}^1||\exp_{x*,\psi(t)}\langle\psi'(t)\rangle||\,dt.$$

Für $t>t_0$ erhalten wir für den quadrierten Integranden

$$\begin{aligned}||\exp_{x*,\psi(t)}\langle\psi'(t)\rangle||^2=&\langle\psi'(t),v(t)\rangle^2\cdot||\exp_{x*,\psi(t)}\langle v(t)\rangle||^2\\&+2\langle\psi'(t),v(t)\rangle\cdot\langle\exp_{x*,\psi(t)}\langle v(t)\rangle,\exp_{x*,\psi(t)}\langle w(t)\rangle\rangle\\&+||\exp_{x*,\psi(t)}\langle w(t)\rangle||^2.\end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Gauß, Lemma 3.6, gilt

$$||\exp_{x*,\psi(t)}\langle v(t)\rangle||^2=||v(t)||^2=1.$$

Ebenfalls nach dem Lemma von Gauß gilt

$$\langle\exp_{x*,\psi(t)}\langle v(t)\rangle,\exp_{x*,\psi(t)}\langle w(t)\rangle\rangle=\langle v(t),w(t)\rangle=0.$$

Der dritte Term ist zumindest nichtnegativ. Somit folgt

$$\begin{aligned}L(\exp_x\circ\psi)\ge&\int\limits_{t_0}^1|\langle\psi'(t),v(t)\rangle|\,dt=\int\limits_{t_0}^1\frac{|\langle\psi(t),\psi'(t)\rangle|}{||\psi(t)||}\,dt\\=&\int\limits_{t_0}^1||\psi(t)||'\,dt=||\psi(1)||-||\psi(t_0)||=||\psi(1)||=||V||\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 ||V||\, dt = \int_0^1 ||\exp_{x*,tV}\langle V\rangle||\, dt = L(\exp_x \circ \varphi).$$

Hier haben wir nochmals das Lemma von Gauß verwendet.

Wir bemerken, dass Gleichheit nur gilt, falls für alle t

$$\exp_{x*,\psi(t)}\langle w(t)\rangle = 0$$

gilt. □

Korollar 3.8. *Sei $V_{x,\varepsilon} := \{v \in T_xM : ||v|| < \varepsilon\}$ und $U_{x,\varepsilon} := \exp_x(V_{x,\varepsilon})$. Falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\exp_x$ auf $V_{x,\varepsilon}$ definiert und ein Diffeomorphismus ist, so ist $U_{x,\varepsilon}$ die ε-Umgebung von x bezüglich der Metrik*

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ verbindet } x \text{ mit } y\}.$$

Beweis. Sei zunächst $v \in V_{x,\varepsilon}$ und $y = \exp_x(v) \in U_{x,\varepsilon}$. Dann ist $\gamma(t) = tv$, $0 \le t \le 1$, eine Kurve von x nach y der Länge $||v|| < \varepsilon$. Nach Theorem 3.7 ist also $d(x, y) < \varepsilon$.

Sei nun $y \notin U_{x,\varepsilon}$ und $\gamma : [0, 1] \to M$ eine stückweise C^1-Kurve von x nach y. Definiere $t_\varepsilon := \sup\{t : \gamma([0, t]) \subset U_{x,\varepsilon}\}$. Somit ist $\gamma(t_\varepsilon) \in \partial U_{x,\varepsilon}$. Auf $[0, t_\varepsilon)$ gilt $\gamma(t) = \exp_x \circ \psi(t)$ mit $\psi(t) \to \partial V_{x,\varepsilon}$ für $t \to t_\varepsilon$. Nach Theorem 3.7 gilt für $0 < t < t_\varepsilon$ die Abschätzung $L(\gamma([0, t])) \ge ||\psi(t)||$. Daher folgt $L(\gamma) \ge \varepsilon$, also $d(y, x) \ge \varepsilon$. □

Bemerkung 3.9. Die folgenden beiden Tatsachen sind inkompatibel:

(i) $\exp_x$ ist eine Überlagerung.

(ii) Es gibt ein p und zwei verschiedene, bei festen Endpunkten, homotope Geodätische von x nach p.

Andernfalls könnte man die Homotopie liften und erhielte einen Widerspruch.

Definition 3.10. Seien α, $\beta \in C^0([0, 1], M)$. Definiere

$$d(\alpha, \beta) := \sup\{d(\alpha(t), \beta(t)) : 0 \le t \le 1\}.$$

Theorem 3.11. *Ist $\gamma : [0, 1] \to M$ eine Geodätische ohne konjugiert Punkte, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $L(\alpha) \ge L(\gamma)$ für alle stetigen stückweise C^1-Kurven α mit $d(\alpha, \gamma) < \varepsilon$, $\alpha(0) = \gamma(0)$ und $\alpha(1) = \gamma(1)$.*

Gleichheit kann (für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$) nur eintreten, falls α eine Umparametrisierung von γ ist.

γ ist auch für die Energie lokal minimierend, falls γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Beweis. Sei $x := \gamma(0)$, $v := \gamma'(0)$. Dann ist $\gamma(t) = \exp_x(tv)$.

Wir behaupten, dass es ein $\varepsilon > 0$, gibt, so dass alle Kurven α wie oben beschrieben sich als $\alpha = \exp_x \circ \psi$ mit $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = v$ darstellen lassen.

Nach Theorem 3.4 ist $\exp_x$ in einer Umgebung des Segmentes $\{tv : 0 \le t \le 1\}$ ein lokaler Diffeomorphismus. Definiere $\sigma := \{(t, tv) : 0 \le t \le 1\}$. Sei $\tilde{M}_x$ der Definitionsbereich von $\exp_x$. Definiere

$$F : \mathbb{R} \times \tilde{M}_x \to \mathbb{R} \times M,$$
$$F(t, w) = (t, \exp_x(w)).$$

F ist in einer Umgebung von σ ein lokaler Diffeomorphismus. $F|_\sigma$ ist eineindeutig, d. h. $F : \sigma \to F(\sigma)$ ist ein Homöomorphismus. Somit gibt es eine offene Umgebung

U von σ, so dass $F : U \to F(U)$ ein Homöomorphismus ist. (Die Eineindeutigkeit von $F|_U$ mit $U = U_\delta(\sigma)$ folgt so: Gäbe es kein $\delta > 0$, so dass $F_{U_\delta(\sigma)}$ eineindeutig wäre, so fänden wir x_x, y_n mit $x_n \neq y_x$, $F(x_n) = F(y_n)$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ für $n \to \infty$ mit x, $y \in \sigma$. Dann folgt aus $F(x) = F(y)$ aber $x = y$ und wir erhalten für große n einen Widerspruch zur lokalen Eineindeutigkeit von F.) Da $F(\sigma)$ kompakt ist, enthält $F(U)$ eine ε-Umgebung von $F(\sigma)$ bezüglich (z. B.) der Metrik $\rho((s,p),(t,q)) = |s-t| + d(p,q)$ auf $\mathbb{R} \times M$. Ist daher $\alpha : [0,1] \to M$ eine Kurve mit $d(\alpha,\gamma) < \varepsilon$ und $\tilde{\alpha} := (t, \alpha(t))$, so ist $\tilde{\alpha}([0,1]) \subset F(U)$ und daher ist $\tilde{\psi} := (F|_U)^{-1} \circ \tilde{\alpha}$ wohldefiniert. $\tilde{\psi}$ hat die Form $\tilde{\psi}(t) = (t, \psi(t))$. Es folgt $\exp_x \circ \psi(t) = \alpha(t)$. Definiere $\tilde{\gamma}(t) := (t, \gamma(t))$. Es gilt $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\gamma}(1)$ und $F|_U$ ist eineindeutig. Also folgt $\tilde{\psi}(0) = (0,0)$, $\tilde{\psi}(1) = (1,v)$ und daher $\psi(0) = 0$ sowie $\psi(1) = v$. Damit ist Theorem 3.7 anwendbar und wir erhalten $L(\alpha) \geq L(\gamma)$.

Die Eigenschaft, auch für E minimierend zu sein folgt für $\beta : [0,1] \to M$ aus $L(\beta) \leq \sqrt{2E(\beta)}$ mit Gleichheit, wenn β proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist

$$\sqrt{2E(\alpha)} \geq L(\alpha) \geq L(\gamma) = \sqrt{2E(\gamma)}.$$

Zur Diskussion der Gleichheit der Längen verwenden wir den Beweis von Theorem 3.7 und nehmen ohne Einschränkung an, dass für $t > 0$ stets $\psi(t) \neq 0$ gilt. Wir hatten im Beweis $v(t) = \frac{\psi(t)}{||\psi(t)||}$ und $w(t) = \psi'(t) - \langle \psi'(t), v(t) \rangle v(t)$ definiert. Wie wir dort festgestellt hatten, gilt Gleichheit in der Längenabschätzung nur, wenn $\exp_{x*,\psi(t)} \langle w(t) \rangle = 0$ für alle t gilt. Da $\exp_x$ auf einer Umgebung des Segmentes $\{tv : 0 \leq t \leq 1\}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt $\psi'(t) = \lambda(t)\psi(t)$ für $t > 0$ und eine Funktion $\lambda(t)$. Die eindeutig bestimmte Lösung dieser Differentialgleichung ist durch

$$\psi(t) = e^{-\int\limits_t^1 \lambda(s)\,ds} \psi(1) = e^{-\int\limits_t^1 \lambda(s)\,ds} v$$

gegeben. Damit ist ψ eine Umparametrisierung von $[0,1] \ni t \mapsto tv$ und somit ist auch α eine Umparametrisierung von γ. □

4. Der Morsesche Indexsatz

Definition 4.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$AC(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f'(t)\,dt + f(t_0) \text{ mit } f' \in L^1_{\text{loc}}(I) \text{ und } t_0 \in I \right\}.$$

AC steht für "absolutely continuous". Wir definieren die eindimensionalen Sobolevräume durch

$$H^{1,p}(I) = \{f \in AC(I) \,:\, f' \in L^p(I) \text{ und } f \in L^p(I)\}.$$

$H^{1,2}(I)$ ist ein Hilbertraum mit

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_I (fg + f'g')\,dt.$$

Bemerkung 4.2. Die Definition von $H^{1,2}$ mit AC hat den Vorteil, dass wir stets stetige Repräsentanten betrachten.

Für $f,\, g \in AC(I)$ gilt $fg \in AC(I)$ mit $(fg)' = f'g + fg'$, denn für eine äquidistante aufsteigende Unterteilung des Intervalls I mit Hilfe von Punkten (a_k), die auch noch von der Anzahl n der Punkte abhängt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b (f'g + fg')\,dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} (f'(t)g(a_k) + f(a_{k-1})g'(t))\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n [(f(a_k) - f(a_{k-1}))g(a_k) + f(a_{k-1})(g(a_k) - g(a_{k-1}))] \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a).\end{aligned}$$

Lemma 4.3. *Ist $f \in L^1([a,b])$ und $g \in C^0([a,b])$ bzw. $g \in L^1([a,b])$ und gilt*

$$\int\limits_a^b (f(t)\varphi'(t) + g(t)\varphi(t))\,dt = 0 \text{ für alle } \varphi \in C^1([a,b]) \text{ mit } \varphi(a) = \varphi(b) = 0, \tag{4.1}$$

dann ist $f \in C^1([a,b])$ bzw. $f \in AC([a,b])$ und $f' = g$ für einen geeigneten Repräsentanten von f.

Beweis. Definiere $\tilde f(t) := \int\limits_a^t g(s)\,ds$. Dann gilt (in beiden Fällen) nach Bemerkung 4.2 die Gleichheit (4.1) für $\tilde f$ statt f. Wir betrachten die Differenz der beiden Gleichungen und erhalten $\int\limits_a^b \left(f(t) - \tilde f(t)\right)\varphi'(t)\,dt = 0$ für alle φ wie oben. Wir dürfen also $g = 0$ annehmen. Wir schreiben nun wieder f statt $f - \tilde f$.

Sei $\psi \in C^0([a,b])$ mit $\int\limits_a^b \psi(t)\,dt = 0$. Dann erfüllt $\varphi(t) := \int\limits_a^t \psi(s)\,ds$ die Randbedingungen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Für alle solchen Funktionen ψ gilt also $\int\limits_a^b f(t)\psi(t)\,dt = 0$. Definiere $c := \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt$. Für alle ψ mit $\int\limits_a^b \psi = 0$ folgt also $\int\limits_a^b (f(t)-c)\psi(t)\,dt = 0 - c\cdot 0 = 0$. Sei nun $\tilde\psi \in C^0([a,b])$ beliebig und $\tilde c := \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \tilde\psi(s)\,ds$. Dann gilt $\int\limits_a^b (\tilde\psi - \tilde c)\,dt = 0$. Wir dürfen also $\psi := \tilde\psi - \tilde c$ als Testfunktion benutzen und erhalten

$$0 = \int\limits_a^b (f(t) - c)(\tilde\psi(t) - \tilde c)\,dt = \int\limits_a^b (f(t) - c)\tilde\psi(t)\,dt - \tilde c\int\limits_a^b (f(t) - c)\,dt.$$

Der zweite Term verschwindet nach Definition von c. Somit verschwindet auch der erste Term. Er verschwindet für alle $\tilde\psi \in C^0([a,b])$ und somit nach Du Bois-Reymond $f(t) - c = 0$ für fast alle t. Die Behauptung folgt. □

Definition 4.4 ($H^{1,2}$ längs Kurven)**.** Sei $\alpha : [a,b] \to M^m$ eine C^2-Kurve. Sei C^1_α der Raum aller C^1-Vektorfelder längs α. Definiere

$$C^1_{\alpha,0} := \left\{X \in C^1_\alpha \,:\, X(a) = X(b) = 0\right\}.$$

Zur entsprechenden Definition von $H^{1,2}_\alpha$ bzw. von $H^{1,2}_{\alpha,0}$ sei $X_1,\ldots,X_m$ eine C^2-Orthonormalbasis von längs α parallelen Vektorfeldern. Sei $X=\sum\limits_{k=1}^m \lambda_k X_k$. Dann ist per definitionem genau dann $X\in H^{1,2}_\alpha$, wenn $\lambda_k\in H^{1,2}([a,b])$ ist. Weiterhin setzen wir

$$H^{1,2}_{\alpha,0} := \left\{X\in H^{1,2}_\alpha\,:\,X(a)=X(b)=0\right\}.$$

Wir machen $H^{1,2}_\alpha$ mit

$$\langle X,Y\rangle := \int\limits_a^b \left(\langle X(t),Y(t)\rangle_{\alpha(t)} + \langle\nabla X(t),\nabla Y(t)\rangle_{\alpha(t)}\right)dt$$

zu einem Hilbertraum. Seien $X=\sum\lambda_k X_k$ und $Y=\sum\mu_k X_k$. Dann ist $\nabla X=\sum\lambda_k' X_k$ und wir erhalten $\langle X(t),Y(t)\rangle=\sum\lambda_k\mu_k$ sowie $\langle\nabla X(t),\nabla Y(t)\rangle=\sum\lambda_k'\mu_k'$.

Sei nun α eine Geodätische. Beachte, dass

$$E_{**,\alpha}(X,Y)=\int\limits_a^b\left(\langle\nabla X,\nabla Y\rangle-\langle R(X,\alpha')\alpha',Y\rangle\right)dt$$

für X, $Y\in H^{1,2}_\alpha$ auf glatten Mannigfaltigkeiten wohldefiniert ist.

Lemma 4.5. *Sei α eine Geodätische in M^m. Dann ist $X\in H^{1,2}_\alpha$ genau dann ein Jacobifeld, wenn für alle $Y\in H^{1,2}_{\alpha,0}$ die Gleichheit $E_{**,\alpha}(X,Y)=0$ gilt.*

Beweis. Wir werden sehen, dass es genügt, die obige Gleichheit für $Y\in C^1_{\alpha,0}$ zu fordern.

Ist $X\in C^2$, so ist die Behauptung klar, da dann

$$\langle\nabla X,\nabla Y\rangle=\frac{d}{dt}\langle\nabla X,Y\rangle-\left\langle\nabla^2X,Y\right\rangle.$$

Sei also $X\in H^{1,2}_\alpha$. Es genügt der Nachweis, dass aus $E_{**,\alpha}(X,Y)=0$ für alle $Y\in C^1_{\alpha,0}$ folgt, dass $X\in C^2$ gilt. Mit den Bezeichnungen aus Definition 4.4 erhalten wir für $\mu_l\in C^1_0$, dass

$$E_{**,\alpha}(X,Y)=\int\limits_a^b\left(\sum_k\lambda_k'\mu_k'-\sum_{k,l}\langle R(X_k,\alpha')\alpha',X_l\rangle\lambda_k\mu_l\right)dt=0.$$

Wähle zunächst $\mu_2=\ldots=\mu_m=0$. Dann folgt

$$0=\int\limits_a^b\left(\lambda_1'\mu_1'-\left[\sum_k\langle R(X_k,\alpha')\alpha',X_1\rangle\lambda_k\right]\mu_1\right)dt.$$

Der Term in der eckigen Klammer ist nach Voraussetzung und Sobolevschem Einbettungssatz in $C^0([a,b])$. Nach Lemma 4.3 ist daher $\lambda_1'\in C^1$, $\lambda_1\in C^2$. Analog folgt $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in C^2$ und daher auch $X\in C^2$. □

Theorem 4.6. *Sei α eine Geodätische. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent*

(i) α besitzt keine konjugierten Punkte.
(ii) $E_{**,\alpha}$ ist auf $H^{1,2}_{\alpha,0}$ positiv definit.

Beweis. „(i)$\Longrightarrow$ (ii)“: Sei zunächst α frei von konjugierten Punkten. Nach Theorem 3.11 ist α ein „lokales“ Minimum der Energie. Insbesondere gilt für alle C^3-Variationen $V = V(t, \tau)$ von α mit festen Endpunkten

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E(V(\cdot, \tau))\bigg|_{\tau=0} \geq 0.$$

Wir setzen $X := \frac{\partial V}{\partial \tau}\big|_{\tau=0}$. Damit ist für alle $X \in C^2_{\alpha,0}$ auch $E_{**,\alpha}(X, X) \geq 0$. In der schwachen Formulierung folgt nun durch Approximation aufgrund der Stetigkeit von $X \mapsto E_{**,\alpha}(X, X)$ bezüglich der $H^{1,2}$-Norm, dass $E_{**,\alpha}(X, X) \geq 0$ für alle $X \in H^{1,2}_{\alpha,0}$.

Nehme nun an, es gibt ein $X_0 \in H^{1,2}_{\alpha,0}$ mit $E_{**,\alpha}(X_0, X_0) = 0$ und $X_0 \neq 0$ in $H^{1,2}_{\alpha,0}$. Sei $Y \in H^{1,2}_{\alpha,0}$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Da die zweite Variation der Energie positiv semi-definit ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{**,\alpha}(X_0, X_0) &= 0 \leq E_{**,\alpha}(X_0 + \tau Y, X_0 + \tau Y) \\ &= E_{**,\alpha}(X_0, X_0) + 2\tau E_{**,\alpha}(X_0, Y) + \tau^2 E_{**,\alpha}(Y, Y). \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn für alle $Y \in H^{1,2}_{\alpha,0}$ auch $E_{**,\alpha}(X_0, Y) = 0$ gilt. Somit ist nach Lemma 4.5 das Vektorfeld X_0 ein Jacobifeld. Widerspruch.

„(ii)$\Longrightarrow$ (i)“: Sei andererseits $J \not\equiv 0$ ein Jacobifeld mit $J(a') = J(b') = 0$ und $a \leq a' < b' \leq b$. Definiere

$$X_0(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } a \leq t \leq a', \\ J(t) & \text{für } a' \leq t \leq b', \\ 0 & \text{für } b' \leq t \leq b. \end{cases}$$

Es gilt $X_0 \in H^{1,2}_{\alpha,0}$. Außerdem ist

$$E_{**,\alpha}(X_0, X_0) = E_{**,\alpha|_{[a',b']}}(J, J) = 0.$$

Damit ist $E_{**,\alpha}$ nicht positiv definit und die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 4.7. *Sei $K \subset M$ kompakt. Dann gibt es eine Umgebung U von K und $\delta > 0$, so dass $(p, \exp)|_{\{(x,v)\in TM\,:\,x\in U,\,\|v\|_x<\delta\}} \equiv (p, \exp)|_{U(\delta)}$ ein Diffeomorphismus ist und es gilt*

$$(p, \exp)(U(\delta)) \supset \{(x, y) \,:\, x \in K,\, d(y, x) < \delta\}.$$

Beweis. Die Abbildung $(p, \exp) : TM \to M \times M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung des Nullschnittes. Mit Hilfe eines Überdeckungsargumentes finden wir aufgrund der Kompaktheit von K ein $\delta > 0$ und eine Umgebung U, so dass $(p, \exp)|_{U(\delta)}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Noch nachzuweisen ist also, dass $U(\delta)$ so gewählt werden kann, dass $(p, \exp)|_{U(\delta)}$ eineindeutig ist.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es $(x_j, v_j) \neq (y_j, w_j) \in TM$, $x_j \to x \in K$, $y_j \to y \in K$, $\|v_j\| \to 0$, $\|w_j\| \to 0$, so dass $(p, \exp)(x_j, v_j) = (p, \exp)(y_j, w_j)$ gilt. Es folgt $x_j = y_j$ und damit auch $x = y$. Dies ist ein Widerspruch zur lokalen Eineindeutigkeit von $(p, \exp)$ in einer Umgebung von $(x, 0)$.

Die behauptete Inklusion folgt aus Korollar 3.8. $\square$

Korollar 4.8. *Seien N ein topologischer Raum, $f,\, g : N \to K \subset M$ stetige Abbildungen in eine kompakte Teilmenge K einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dann existiert $\delta > 0$, so dass aus $d(f(x), g(x)) < \delta$ für alle $x \in N$ folgt, dass f und g homotop sind.*

Beweis. Sei $(x, y) \mapsto (x, V(y, x)) \in T_x M$, $||V(y, x)|| < \delta$ die Umkehrabbildung von $(p, \exp)|_{U(\delta)}$. Dann ist

$$\exp_{f(x)}(tV(f(x), g(x))), \quad 0 \le t \le 1,$$

eine Homotopie zwischen f und g. $\square$

Korollar 4.9. *Sei $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Sei $\delta > 0$, so dass $\exp_x |_{U_\delta(0)}$ für alle $x \in K$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist jede Geodätische mit Anfangspunkt in K und Länge kleiner als δ frei von konjugierten Punkten.*

Beweis. Benutze Theorem 3.4. $\square$

Definition 4.10. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und B eine symmetrische Bilinearform auf V. Wir definieren (bzw. erinnern daran)

(i) die Nullität $\operatorname{null}(B) := \dim N(B)$, wobei $N(B) := \{x \in V : B(x, y) = 0 \,\forall\, y \in V\}$.
(ii) den Index
$$\operatorname{ind}(B) := \sup\{\dim L : L \subset V, \text{ so dass } B|_L \text{ negativ definit ist.}\}$$
(iii) den erweiterten Index:
$$\operatorname{ind}_0(B) := \sup\{\dim L : L \subset V, \text{ so dass } B|_L \text{ negativ semidefinit ist.}\}$$

Hier ist $L \subset V$ stets ein endlichdimensionaler Teilraum. Hier und auch im Folgenden wollen wir $B|_L$ statt $B|_{L\times L}$ für die entsprechende Einschränkung schreiben.

Bemerkung 4.11. Ist $\dim V < +\infty$, so gilt vermöge einer Hauptachsentransformation $V = V^+ \oplus N(B) \oplus V^-$, wobei $B|_{V^+}$ positiv definit und $B|_{V^-}$ negativ definit sind. Es gilt $B(v^+, v^-) = 0$ für alle $v^+ \in V^+$ und alle $v^- \in V^-$.

Es gilt $\operatorname{ind} B = \dim V^-$ und $\operatorname{ind}_0 B = \dim V^- + \operatorname{null}(B)$.

$\operatorname{ind} B$ ist eine unterhalbstetige und $\operatorname{ind}_0 B$ eine oberhalbstetige Funktion von B.

Beweis. Sei $V = V^+ \oplus N(B) \oplus V^-$ zu B gewählt. Dann ist $C|_{V^-}$ negativ für alle symmetrischen Bilinearformen C in einer Umgebung von B; ebenso ist $C|_{V^+}$ in einer Umgebung von B positiv. Somit ist $\operatorname{ind} C \ge \dim V^- = \operatorname{ind} B$. Außerdem gilt $\dim V - \operatorname{ind}_0 C = \operatorname{ind}(-C) \ge \dim V^+ = \operatorname{ind}(-B) = \dim V - \dim N(B) - \dim V^- = \dim V - \operatorname{ind}_0 B$. Somit ist $\operatorname{ind}_0 C \le \operatorname{ind}_0 B$ und die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 4.12. Sei $\alpha : [a, b] \to M$ eine Geodätische. Wähle eine so feine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, dass $E_{**,\alpha|_{[a_{k-1},a_k]}}$ auf $H^{1,2}_{\alpha,0}([a_{k-1}, a_k])$ positiv definit ist; benutze Korollar 4.9 und Theorem 4.6. Definiere die Räume

$$V_\alpha := \left\{X \in H^{1,2}_\alpha : X|_{[a_{k-1},a_k]} \text{ ist Jacobifeld für } k = 1, \ldots, n\right\}$$

und

$$V_{\alpha,0} := \{X \in V_\alpha : X(a) = X(b) = 0\}.$$

Wir wollen eine Projektion $P : H^{1,2}_\alpha \to V_\alpha$ definieren.

Sei dazu J_α der $2m$-dimensionale Raum der Jacobifelder längs α. Die Abbildung $J_\alpha \ni J \mapsto (J(a_{k-1}), J(a_k)) \in T_{\alpha(a_{k-1})}M \times T_{\alpha(a_k)}M$ ist nach Wahl der Unterteilung injektiv. Da die Dimensionen übereinstimmen ist die Abbildung auch bijektiv. Zu $X \in H^{1,2}_\alpha$ gibt es also genau ein $\tilde{X} \in V_\alpha$ mit $\tilde{X}(a_k) = X(a_k)$ für alle $k = 0, \ldots, n$. Wir setzen $PX := \tilde{X}$. Analog bekommen wir $P : H^{1,2}_{\alpha,0} \to V_{\alpha,0}$.

Wir behaupten, dass P bezüglich $E_{**,\alpha}$ orthogonal ist: Sei dazu $\tilde{X} \in V_\alpha$ und $X \in H^{1,2}_\alpha$. Die Orthogonalität bezüglich $E_{**,\alpha}$ besagt, dass $E_{**,\alpha}(\tilde{X}, X - PX) = 0$ für beliebige derartige Vektorfelder $\tilde{X}$ und X gilt. Es gilt $X - PX = 0$ in allen Punkten a_k. Also folgt $E_{**,\alpha}|_{[a_{k-1},a_k]}(\tilde{X}, X - PX) = 0$, da $\tilde{X}$ auf dem betrachteten Intervall ein Jacobifeld ist und aufgrund der Randwerte von $X-PX$. Aufsummieren liefert $E_{**,\alpha}(\tilde{X}, X - PX) = 0$.

Wenden wir dies auf $\tilde{X} = PX$ an, so können wir die Orthogonalität auch durch eine Pythagorasformel ausdrücken:

$$\begin{aligned} E_{**,\alpha}(X,X) &= E_{**,\alpha}(PX + (X - PX), PX + (X - PX)) \\ &= E_{**,\alpha}(PX,PX) + E_{**,\alpha}(X - PX, X - PX). \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.9 und Theorem 4.6 ist $E_{**,\alpha}$ auf den Intervallen $[a_k, a_{k+1}]$ positiv definit. Somit folgt im Falle $X \not\equiv PX$, dass $E_{**,\alpha}(X - PX, X - PX) > 0$ ist und daher gilt

$$E_{**,\alpha}(X,X) > E_{**,\alpha}(PX,PX). \tag{4.2}$$

Allgemein gilt also, auch wenn möglicherweise $X = PX$ ist,

$$E_{**,\alpha}(X,X) \geq E_{**,\alpha}(PX,PX). \tag{4.3}$$

Lemma 4.13. *Betrachte $E_{**,\alpha}$ als Bilinearform auf $H^{1,2}_{\alpha,0}$. Es gilt $N(E_{**,\alpha}) = N(E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}})$ und*

$$\operatorname{ind}_{(0)} E_{**,\alpha} = \operatorname{ind}_{(0)} E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}}.$$

Insbesondere sind daher alle diese Indices endlich.

Beweis. Da $H^{1,2}_{\alpha,0} \cap J_\alpha \subset V_{\alpha,0}$ ist, folgt trivialerweise $N(E_{**,\alpha}) \subset N(E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}})$.

Sei umgekehrt $X_0 \in N(E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}})$ und $X \in H^{1,2}_{\alpha,0}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $E_{**,\alpha}(X_0, X) = 0$ gilt, dass also $X_0 \in N(E_{**,\alpha})$ ist. Es gilt

$$E_{**,\alpha}(X_0, X) = E_{**,\alpha}(X_0, X - PX) + E_{**,\alpha}(X_0, PX).$$

Der erste Term verschwindet, da $X - PX$ orthogonal zu V_α ist und der zweite Term verschwindet, da $X_0 \in N(E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}})$ ist und auch $PX \in V_{\alpha,0}$ gilt. Daher ist $X_0 \in N(E_{**,\alpha})$ wie behauptet.

Trivial ist, dass $\operatorname{ind}_{(0)} E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}} \leq \operatorname{ind}_{(0)} E_{**,\alpha}$ gilt. Sei $L \subset H^{1,2}_{\alpha,0}$ ein Unterraum, so dass $E_{**,\alpha}|_L$ negativ semi-definit ist.

Wir behaupten, dass $P|_L$ injektiv ist. Ist dies nicht der Fall, so existiert $X_0 \in L$ mit $X_0 \not\equiv 0$ und $P(X_0) = 0$. Wir erhalten also nach (4.2)

$$0 \geq E_{**,\alpha}(X_0, X_0) > E_{**,\alpha}(PX_0, PX_0) = 0.$$

Widerspruch. Daher ist $P|_L$ injektiv.

Aus (4.3) folgern wir, dass $E_{**,\alpha}|_{P(L)}$, $P(L) \subset V_{\alpha,0}$, ebenfalls negativ semidefinit ist. Damit erhalten wir $\operatorname{ind}_0 E_{**,\alpha}|_{V_{\alpha,0}} \geq \operatorname{ind}_0 E_{**,\alpha}$.

Für den nicht erweiterten Index, ind, argumentieren wir analog zu den obigen Betrachtungen für den erweiterten Index ind_0. ☐

Theorem 4.14 (Morsescher Indexsatz)**.** *Sei $\alpha : [a,b] \to M$ eine Geodätische. Betrachte $E_{**,\alpha}$ als Bilinearform auf $H^{1,2}_{\alpha,0}$. Bezeichne $n(t)$ für $t \in (a,b]$ die Vielfachheit von t als konjugiertem Punkt von a, d. h. $n(t) = \operatorname{null}\left(E_{**,\alpha}|_{[a,t]}\right) \equiv \dim N\left(E_{**,\alpha}|_{[0,t]}\right)$. Dann gilt* *(i)* $\operatorname{ind}_0 E_{**,\alpha} = \sum\limits_{a<t\le b} n(t)$,

(ii) $\operatorname{ind} E_{**,\alpha} = \sum\limits_{a<t<b} n(t)$.

Beweis. (ii) folgt direkt aus (i), da

$$\operatorname{ind}_0 E_{**,\alpha} = \operatorname{ind} E_{**,\alpha} + \dim N(E_{**,\alpha}) = \operatorname{ind} E_{**,\alpha} + n(b).$$

Wir setzen $\varphi_{(0)}(t) := \operatorname{ind}_{(0)} E_{**,\alpha|_{[a,t]}}$. Die Funktionen φ und φ_0 sind monoton nicht fallend, da die Einbettung $H^{1,2}_{\alpha|_{[a,s]},0} \hookrightarrow H^{1,2}_{\alpha|_{[a,t]},0}$ für $s < t$ besteht vermöge $H^{1,2}_{\alpha|_{[a,s]},0} \ni X \mapsto \tilde{X}$ mit

$$\tilde{X}(\sigma) = \begin{cases} X(\sigma) & \text{für } \sigma \le s, \\ 0 & \text{für } \sigma \ge s. \end{cases}$$

Wir behaupten zunächst, dass es auf dem Intervall $(a,b]$ nur endlich viele zu a konjugierte Punkte gibt. Seien $\tau_1 < \ldots < \tau_k$ solche konjugierten Punkte. Sei J^i jeweils ein nichttriviales Jacobifeld, das dies bezeugt. Definiere $\tilde{J}^i$ wie oben als triviale Fortsetzung von J^i auf $[a,b]$. Dann ist $E_{**,\alpha}\left(\tilde{J}^i, \tilde{J}^i\right) = 0$ und $E_{**,\alpha}\left(\tilde{J}^i, \tilde{J}^j\right) = 0$ für alle $1 \le i,\, j \le k$. Die Vektorfelder $\tilde{J}^i$ sind offenbar linear unabhängig. Somit ist $E_{**,\alpha}$ auf dem von den Vektoren $\tilde{J}^i$ erzeugten Vektorraum negativ semidefinit. Also folgt $\operatorname{ind}_0(E_{**,\alpha}) \ge k$. Nach Lemma 4.13 ist jedoch $\operatorname{ind}_0 E_{**,\alpha}$ für eine fixierte Kurve α gleichmäßig nach oben beschränkt. Daher kann k nicht beliebig groß gewählt werden, es gibt also nur endlich viele solche konjugierte Punkte.

Sind $\tau_1, \ldots, \tau_k \in (a,b]$ die zu a konjugierten Punkte von α, so gilt $\varphi(t) = \varphi_0(t)$ für $t \ne \tau_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Angenommen, wir wüssten schon, dass φ unterhalb- und φ_0 oberhalbstetig ist. Dann ist $\varphi = \varphi_0$ konstant auf (τ_{j-1}, τ_j). Monotonie und Halbstetigkeit implizieren

$$\lim_{s\uparrow t} \varphi(s) \le \varphi(t) \le \liminf_{s\to t} \varphi(s)$$

und

$$\lim_{s\downarrow t} \varphi_0(s) \ge \varphi_0(t) \ge \limsup_{s\to t} \varphi_0(s).$$

Somit ist φ linksseitig und φ_0 rechtsseitig stetig. Es gilt daher

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau_{j+1}) &= \varphi(\tau_{j+1}) + n(\tau_{j+1}) = \lim_{s\uparrow\tau_{j+1}} \varphi(s) + n(\tau_{j+1}) \\ &= \lim_{s\downarrow\tau_j} \varphi_0(s) + n(\tau_{j+1}) = \varphi_0(\tau_j) + n(\tau_{j+1}). \end{aligned}$$

Dabei ist der rechtsseitige Limes an der Stelle b mit Hilfe von Fortsetzungen definiert. Es folgt

$$\varphi_0(b) - \varphi_0(a) = \sum_{j=0}^{k-1} (\varphi_0(\tau_{j+1}) - \varphi_0(\tau_j)) = \sum_{j=1}^{k} n(\tau_j).$$

Wir weisen nun noch nach, dass φ unterhalb- und φ_0 oberhalbstetig ist: Sei ohne Einschränkung $t_0 \in (a,b)$; für $t_0 = b$ setzen wir wieder α über b hinaus fort. Wie in Bemerkung 4.12 wählen wir eine feine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. Wir dürfen ohne Einschränkung $t_0 \ne a_j$ für alle j annehmen. Gelte $a_{j_0} < t_0 < a_{j_0+1}$. Wir setzen $V_t := V_{\alpha|_{[a,t]}}$ relativ zu der Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{j_0} < t$. Nach

Lemma 4.13 gilt $\varphi_{(0)}(t) = \operatorname{ind}_{(0)}(E_{**,\alpha}|_{V_t})$ für $t \in (a_{j_0}, a_{j_0+1})$. Unter Auslassung des ersten und des letzten Teilpunktes definieren wir

$$V := T_{\alpha(a_1)}M \times \ldots \times T_{\alpha(a_{j_0})}M.$$

Wir erhalten eine Schar $(A_t)_t$ von Automorphismen $A_t : V \to V_t$ für $t \in (a_{j_0}, a_{j_0+1})$ wie folgt: Für $v = (v_1, \ldots, v_{j_0}) \in V$ sei $A_t(v)$ das eindeutig bestimmte stückweise Jacobifeld X mit $X(a) = 0$, $X(a_j) = v_j$ für $j = 1, \ldots, j_0$ und $X(t) = 0$. Wir definieren für $t \in (a_{j_0}, a_{j_0+1})$ die symmetrische Bilinearform $B_t : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$B_t(v, w) := E_{**,\alpha}(A_t(v), A_t(w)) \quad \text{für } v,\, w \in V.$$

Somit gilt $\varphi_{(0)}(t) = \operatorname{ind}_{(0)} B_t$.

Die Zuordnung $J_\alpha \in J \mapsto (J(a_{j_0}), J(t)) \in T_{\alpha(a_{j_0})}M \times T_{\alpha(t)}M$ ist linear, stetig und eineindeutig, da a_{j_0} und t nicht zueinander konjugierte Punkte sind. Daher ist auch die Umkehrabbildung stetig. Somit ist die Abbildung $t \mapsto A_t$ stetig. Somit folgt die Halbstetigkeit von $\varphi_{(0)}$ aus der Halbstetigkeit im Endlichdimensionalen, die wir in Bemerkung 4.11 nachgewiesen haben. □

5. Banach-Mannigfaltigkeiten

Wir verwenden [9, 10].

Definition 5.1. Eine B-Mannigfaltigkeit (= Banach-Mannigfaltigkeit) der Klasse C^k, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, ist ein topologischer Hausdorffraum $\mathcal{M}$ zusammen mit einem Atlas von C^k-verträglichen Karten $\mathcal{A} = \{(U, \varphi, X)\}$, d. h.

(i) $U \subset \mathcal{M}$ ist offen, X ist eine B-Raum (=Banachraum) und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset X$ ist ein Homöomorphismus.

(ii) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{(U,\varphi,X)\in\mathcal{A}} U$.

(iii) Sind (U, φ, X), $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}$ Karten mit $U \cap V \neq \emptyset$, so ist

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U \cap V)}_{\subset X} \to \underbrace{\psi(U \cap V)}_{\subset Y}$$

ein C^k-Diffeomorphismus.

Zwei Mannigfaltigkeiten heißen gleich, wenn die zugehörigen maximalen Atlanten übereinstimmen.

Die folgende Bemerkung erklärt, warum wir Banachraummannigfaltigkeiten der Klasse C^k mit $k \geq 1$ betrachten wollen.

Bemerkung 5.2. In Definition 5.1 (iii) ist $d(\psi \circ \varphi^{-1})(x) : X \to Y$ ein topologischer Isomorphismus, d. h. X und Y sind topologisch isomorph (aber die Abbildung ist nicht eine Banachraumisometrie). Daher kann man für jede Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}$ einen festen B-Raum X annehmen.

Wir haben nicht vorausgesetzt, dass $\mathcal{M}$ eine abzählbare topologische Basis besitzt. Dies ist aber auch bei vielen Banachräumen nicht der Fall.

Definition 5.3. Sind $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ B-Mannigfaltigkeiten der Klasse C^k, so heißt die Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ von der Klasse C^k (kurz: $f \in C^k(\mathcal{M}, \mathcal{N})$), wenn für alle Karten (U, φ, X) von $\mathcal{M}$ und (V, ψ, Y) von $\mathcal{N}$ gilt:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

ist von der Klasse C^k.

Definition 5.4 (Splitten)**.** Sei X ein B-Raum. Eine lineare Teilmenge $Y \subset X$ splittet (oder spaltet) X, wenn Y abgeschlossen ist und ein abgeschlossener linearer Teilraum $Z \subset X$ (Komplementärraum) existiert, so dass $X = Y \oplus Z$.

Definition 5.5. Sei $\mathcal{M}$ eine B-Mannigfaltigkeit der Klasse C^k. Eine Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ heißt C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{M}$, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{N}$ eine Karte (U, φ, X), die mit dem Atlas von $\mathcal{M}$ verträglich ist, gibt, so dass $x \in U$ und $\varphi(U \cap \mathcal{N}) = \varphi(U) \cap X_0$, wobei X_0 ein linearer Teilraum von X ist, welcher X splittet.

Bemerkung 5.6. Jeder endlich dimensionale Teilraum X_0 splittet, ebenso jeder abgeschlossene Teilraum endlicher Kodimension. (Beweis der ersten Behauptung für eindimensionale Räume X_0: Zu $0 \neq x \in X_0$ existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein stetiges lineares Funktional φ mit $\varphi(x) \neq 0$. Definiere $X_0^c := \{y : \varphi(y) = 0\}$. Dies ist ein abgeschlossener Teilraum und es gilt $X = X_0 \oplus X_0^c$. Für endlich dimensionale Räume funktioniert der Beweis analog zum eindimensionalen Fall.) In einem Hilbertraum splittet jeder abgeschlossene Teilraum. Ist (U, φ, X) wie in Definition 5.5, so wird $\mathcal{N}$ mit den Karten $(U \cap \mathcal{N}, \varphi|_{U\cap\mathcal{N}}, X_0)$ selbst zu einer C^k-Mannigfaltigkeit.

Definition 5.7 (Immersion, Submersion)**.** Seien X, Y B-Räume, $U \subset X$ offen, $f \in C^k(U, Y)$, $k \geq 1$. Dann heißt f Immersion, wenn $df(x)$ injektiv ist und $df(x)(X)$ den Raum Y für alle $x \in X$ splittet.

f heißt Submersion, wenn $df(x)$ surjektiv ist und $df(x)^{-1}(0)$ für alle $x \in X$ den Raum X splittet.

Bemerkung 5.8. Die Sätze von der inversen Abbildung und der impliziten Funktion gelten in der C^k-Version, $k \geq 1$, mit $d(f^{-1}) = (df \circ f^{-1})^{-1}$ (Kettenregel).

Lemma 5.9 (Lokale Normalformen für „doppelt splittende“ Abbildungen)**.** *Seien X, Y B-Räume, $U \subset X$ offen, $f \in C^k(U, Y)$, $x_0 \in U$, $df(x_0) : X \to Y$ splittet doppelt, d. h. $X = N \oplus N^\perp$, $Y = R \oplus R^\perp$ mit abgeschlossenen Teilräumen N, $N^\perp$, R, $R^\perp$, wobei $N = df(x_0)^{-1}(0)$, $R = df(x_0)(X)$.*

Dann gilt:

(i) Es gibt eine Umgebung V von $0 \in N \times R \cong N \times N^\perp \cong X$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : V \to \varphi(V) \subset X$ und $g \in C^k(V, R^\perp)$, so dass $\varphi(0) = x_0$ und

$$f \circ \varphi(n, r) = f(x_0) + r + g(n, r),$$

wobei $dg(0, 0) = 0$.

(ii) Es gibt eine Umgebung W von x_0, einen C^k-Diffeomorphismus $\psi : W \to \psi(W) \subset X$ mit $\psi(x_0) = x_0$ und $h \in C^k(W, R^\perp)$ mit $dh(x_0) = 0$, so dass

$$f \circ \psi(x) = f(x_0) + df(x_0)\langle x - x_0\rangle + h(x).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass der oben verwandte (topologische) Isomorphismus $N^\perp \cong R$ von $df(x_0)$ induziert ist. Die Abbildung ist bijektiv, stetig und, nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Ein abgeschlossener (= der Graph ist abgeschlossen) linearer Operator zwischen Banachräumen ist stetig.), ist ihre Inverse ebenfalls stetig.

Seien $P : X \to N$ und $Q : Y \to R$ die zu den obigen Zerlegungen gehörigen kanonischen stetigen Projektionen.

(i) Gelte ohne Einschränkung $x_0 = f(x_0) = 0$. Betrachte die Abbildung $F : U \to N \times R$ mit $F = (P, Q \circ f)$. Es gilt $dF(0) = (P, Q \circ df(0)) = (P, df(0))$. Ist $dF(0)\langle h\rangle = 0$, so folgt einerseits $Ph = 0$ und andererseits $df(0)\langle h\rangle = 0$. Daher ist $h \in N^\perp$ und $h \in N$, also $h = 0$. Somit ist F injektiv. Sei $(n, r) \in N \times R$. Dann gibt es $n^\perp \in N^\perp$ mit $df(0)\langle n^\perp\rangle = r$. Somit ist $dF(0)\langle(n+n^\perp)\rangle = (n, r)$ und F ist surjektiv. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen besitzt die Abbildung $dF(0)$ eine stetige Inverse.

Nach dem Satz von der inversen Abbildung existiert daher eine Umgebung V und eine Funktion $\varphi := F^{-1} : V \to \varphi(V)$, so dass $F(\varphi(n, r)) = (n, r)$. Da $F(\varphi(n, r)) = (P \circ \varphi(n, r), Q \circ f \circ \varphi(n, r))$ ist, folgt $Q \circ f \circ \varphi(n, r) = r$. Wir definieren nun $g(n, r)$ durch $f \circ \varphi(n, r) = Q \circ f \circ \varphi(n, r) + (I - Q) \circ f \circ \varphi(n, r) \equiv r + g(n, r)$, also $g(n, r) := (I - Q) \circ f \circ \varphi(n, r)$. Es gilt $dg(0) = 0$, da $\operatorname{im} df(0) \in R$, also $(I - Q)df(0) = 0$.

(ii) Definiere $\psi := \varphi \circ dF(0) = F^{-1} \circ dF(0) = \varphi(P, df(0))$. Dann folgt mit Hilfe von (i)

$$\begin{aligned} f \circ \psi(x) &= f \circ \varphi(\underbrace{Px}_{n}, \underbrace{df(0)\langle x\rangle}_{r}) \\ &= df(0)\langle x\rangle + \underbrace{g(Px, df(0)\langle x\rangle)}_{=:h(x)}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.10. Ist insbesondere f eine Submersion in x_0, so folgen $R^\perp = 0$ und $g = h = 0$. Wir definieren $T := (df(x_0)|_{N^\perp})^{-1}$ und wenden Lemma 5.9 (i) auf $T \circ f : U \to N^\perp$ an. Dann folgt $T \circ f \circ \varphi = Tf(x_0) + P^\perp$, wobei $P^\perp : X \to N^\perp$ die kanonische Projektion ist.

Satz 5.11. *Seien X, Y B-Räume, $U \subset X$ offen, $f \in C^k(U, Y)$. Sei f für alle $x \in f^{-1}(0)$ eine Submersion. Dann ist $f^{-1}(0)$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $U \subset X$.*

Beweis. Sei $x_0 \in f^{-1}(0)$. Sei $X = N + N^\perp$ mit $N = df(x_0)^{-1}(0)$ und seien N, $N^\perp$ abgeschlossen. Nach Bemerkung 5.10 gibt es einen lokalen Diffeomorphismus $\varphi \in C^k$, $\varphi : V \to \varphi(V)$ für eine Umgebung V von 0 mit $\varphi(0) = x_0$, so dass $T \circ f \circ \varphi = P^\perp$ oder $f \circ \varphi = T^{-1} \circ P^\perp$. Es folgt $\varphi^{-1}(\varphi(V) \cap f^{-1}(\{0\})) = V \cap (f \circ \varphi)^{-1}(\{0\}) = V \cap (T^{-1} \circ P^\perp)^{-1}(\{0\}) = V \cap (P^\perp)^{-1} \circ T(\{0\}) = V \cap (P^\perp)^{-1}(\{0\}) = V \cap N$. Somit ist $f^{-1}(0)$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von U. □

Definition 5.12. Sei $T : X \to Y$ ein stetiger linearer Operator. Dann heißt T Fredholm, wenn $\operatorname{im} T$ abgeschlossen ist und $\ker T$ sowie der Komplementärraum zu $\operatorname{im} T$ endlich dimensional sind.

Bemerkung: Die Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} T$ braucht man nicht explizit zu fordern.

Lemma 5.13. *Seien X, Y B-Räume und $T \in L(X, Y)$ surjektiv. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $T^{-1}(\{0\})$ splittet X.
(ii) Es existiert ein abgeschlossener Unterraum $X_1 \subset X$, so dass $T : X_1 \to Y$ ein Isomorphismus ist.
(iii) Es existiert ein abgeschlossener Unterraum $X_1 \subset X$, so dass $T : X_1 \to Y$ Fredholm ist.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii)$\Longrightarrow$ (iii) ist trivial.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Definiere $X_0 := T^{-1}(\{0\})$. X_0 ist abgeschlossen, da T stetig ist. Es ist zu zeigen, dass $X = X_0 \oplus X_1$ gilt. Sei $x \in X$. Dann existiert $x_1 \in X_1$ mit $Tx_1 = Tx$. Hieraus folgen nacheinander $T(x - x_1) = 0$, $x_0 := x - x_1 \in X_0$ und $x = x_0 + x_1$.

(iii)$\Longrightarrow$ (ii): Definiere $X_0 := N(T|_{X_1})$. Es ist $\dim X_0 < \infty$. Somit gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $X^\perp$, so dass $X_1 = X_0 \oplus X^\perp$. Da T Fredholm ist, gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum $Y^\perp \subset Y$, so dass $Y = T(X_1) \oplus Y^\perp$.

Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine Basis von $Y^\perp$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in X$, so dass $T(x_i) = y_i$. Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind in X linear unabhängig modulo X_1, d. h. nur die triviale Linearkombination ergibt einen Vektor in X_1. Dies folgt, da sonst auch die Bilder nicht linear unabhängig sein könnten. Definiere $Z := X^\perp \oplus \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, wobei wir mit $\langle \ldots \rangle$ die lineare Hülle bezeichnet haben. Da $X^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X ist, gilt dies auch für Z. T ist surjektiv, denn es gilt $T(Z) = T(X^\perp) + Y^\perp = T(X_1) + Y^\perp = Y$. Zeige schließlich noch, dass T auch injektiv ist: Sei $x^\perp \in X^\perp$ und gelte $0 = T(x^\perp + \sum_i \lambda_i x_i)$. Dann folgt $\sum_i \lambda_i y_i = -T(x^\perp) \in T(X_1)$ und somit $\lambda_i = 0$. Also ist auch $T(x^\perp) = 0$ und daher $x^\perp \in X_0$, also erhalten wir wegen $x^\perp \in X^\perp$ nun $x^\perp = 0$. Somit ist $T : Z \to Y$ ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 5.14. Wir definieren den Tangentialraum $T\mathcal{M}$ einer B-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ wie im Endlichdimensionalen als Äquivalenzklassen von Kurven durch einen festen Punkt. Zu (U, φ, X) bekommen wir dann eine assoziierte Bündelkarte $(TU, \tilde\varphi, \varphi(U) \times X)$ mit $\tilde\varphi([\alpha]) := (\alpha(0), (\varphi \circ \alpha)'|_{t=0}) = (\alpha(0), \varphi_*([\alpha]))$ bzw. $\tilde\varphi([\alpha]) = [\varphi \circ \alpha]$, wenn man $\varphi(U) \times X$ und $T\varphi(U)$ identifiziert, und $\varphi(U) \subset X$. Für $p \in U$ erhalten alle Tangentialräume $T_p\mathcal{M}$ eine B-Struktur durch $\|v\|_\varphi := \|\varphi_{*,p}(v)\|_X$ für $v \in T_p\mathcal{M}$. Je zwei Normen $\|\cdot\|_\varphi$ und $\|\cdot\|_\psi$ sind äquivalent.

Sei $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ in C^1. Wie üblich definieren wir $f_{*,x} : T_x\mathcal{M} \to T_{f(x)}\mathcal{N}$ durch $f_{*,x}([\alpha]) := [f \circ \alpha]$.

Bemerkung 5.15. Seien $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ B-Mannigfaltigkeiten, $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine C^1-Abbildung.

(i) f heißt Immersion in $p \in \mathcal{M}$, wenn $f_{*,p}$ injektiv und $f_{*,p}(T_p\mathcal{M})$ abgeschlossen ist und $f_{*,p}(T_p\mathcal{M})$ den Raum $T_{f(p)}\mathcal{M}$ spaltet.
(ii) f heißt Submersion in $p \in \mathcal{M}$, wenn $f_{*,p}$ surjektiv ist und $\ker f_{*,p}$ den Raum $T_p\mathcal{M}$ spaltet.

Bemerkung 5.16. Es gelten die üblichen Sätze über Immersionen und Submersionen, z. B. ist $f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit, falls $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ und f eine Submersion ist. Lokal ist das Bild einer Immersion ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung 5.17 (Ableitungen in Banachräumen)**.** Seien X, Y Banachräume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist $f \in C^1(X, Y)$ genau dann, wenn $df(x) : X \to Y$ für alle $x \in X$ stetig ist ($\Longleftrightarrow df(x) \in L(X, Y)\, \forall\, x \in X$) und $df : X \to L(X, Y)$ stetig ist.

Für $T \in L(X, Y)$ definieren wir $\|T\| := \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|T(x)\|$.

Es ist $d^2 f(x) \in L(X, L(X, Y)) \cong L_2(X, Y)$, definiert als die Menge der bilinearen stetigen Abbildungen $X \times X \to Y$. Analog ist $d^k f(x) \in L_k(X, Y)$.

Definition 5.18. $\mathcal{M}$ ist eine Riemannsche H-Mannigfaltigkeit (= Hilbertraummannigfaltigkeit) der Klasse C^k, $k \geq 1$, falls $\mathcal{M}$ eine C^k B-Mannigfaltigkeit, modelliert über Hilberträumen, ist und falls $T\mathcal{M}$ mit einer Familie $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, $p \in \mathcal{M}$, vollständiger (= induzierte Topologie ist äquivalent zur vorhandenen Topologie), stetiger Skalarprodukte versehen ist und so dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ in folgendem Sinne differenzierbar von p abhängt: Für jede Karte (U, φ, X) ist

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p \in C^{k-1}(\varphi(U), L_2(X, \mathbb{R})). \tag{5.1}$$

Beispiel 5.19. Sei $\mathcal{M}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit eines H-Raumes $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann ist $\mathcal{M}$ mit dem eingeschränkten Skalarprodukt von X eine Riemannsche H-Mannigfaltigkeit.

Beweis. Eine Karte von $\mathcal{M}$ ist von der Form $(U \cap \mathcal{M}, \varphi|_{\mathcal{M}}, V)$, wobei $U \subset X$ offen und $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^k ist. Es ist $X = V \oplus W$ mit abschlossenen Teilräumen V, W und $\varphi(U \cap \mathcal{M}) = \varphi(U) \cap V$. Somit ist $(\varphi|_{\mathcal{M}})^{-1} = \varphi^{-1}|_V$ und $(\varphi^{-1})_* \in C^{k-1}(\varphi(U), L(X))$. Es gilt also

$$\left(\left(\varphi^{-1}\right)^* \langle \cdot, \cdot \rangle_X\right) \langle v, w \rangle = \left\langle \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\cdot} v, \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\cdot} w \right\rangle_X .$$

Dies hängt $(k-1)$-mal stetig differenzierbar vom Fußpunkt ab. □

6. Die Wegemannigfaltigkeit $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$

Lemma 6.1. *Sei $\mathcal{M}$ eine zusammenhängende Riemannsche H-Mannigfaltigkeit, so wird durch*

$$d(p, q) := \inf \left\{ \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \, dt \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha : [0,1] \to \mathcal{M} \textit{ stückweise } C^1\textit{-Kurve} \\ \textit{mit } \alpha(0) = p, \alpha(1) = q \end{array} \right\}$$

eine Metrik auf $\mathcal{M}$ definiert, welche die Topologie von $\mathcal{M}$ erzeugt.

Beweis.

(i) In geeigneten lokalen Koordinaten ist d sogar Lipschitz stetig,

$$d(p, q) \leq C \|\varphi(p) - \varphi(q)\|_X :$$

Sei nämlich (U, φ, X) eine Karte von $\mathcal{M}$, ohne Einschränkung so klein, dass (aufgrund von (5.1))

$$\left\| \left(\varphi^{-1}\right)_X^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}} \right\|_{L_2(X, \mathbb{R})} \leq C \quad \text{für alle } x \in \varphi(U).$$

Sei weiterhin $\varphi(U)$ ohne Einschränkung konvex. Seien p, $q \in U$. Definiere $\alpha(t) := \varphi^{-1}((1-t)\varphi(p) + t\varphi(q))$ für $0 \leq t \leq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq \int_0^1 \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} \, dt = \int_0^1 \left\| \left(\varphi^{-1}\right)_{*,(1-t)\varphi(p)+t\varphi(q)} \langle \varphi(q) - \varphi(p) \rangle \right\|_{\alpha(t)} dt \\ &\leq \sqrt{C} \int_0^1 \|\varphi(p) - \varphi(q)\|_X \, dt = \sqrt{C} \|\varphi(p) - \varphi(q)\|_X . \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass die von d induzierte Topologie auf $\mathcal{M}$ gröber ist als die Topologie, die $\mathcal{M}$ als Mannigfaltigkeit besitzt.

(ii) Sei andererseits auf X für $x \in \varphi(U)$ die folgende Familie von Normen
$$|v|_x := \|(\varphi^{-1})_{*,x}\langle v\rangle\|_{\varphi^{-1}(x)}.$$
Da $(\varphi^{-1})_{*,x}$ ein topologischer Isomorphismus ist, sind alle diese Normen äquivalent zu $\|\cdot\|_X$. Nehme an, dass $0 \in \varphi(U)$ gilt. Dann existiert $c > 0$, so dass $|v|_0 \ge c\|v\|_X$ für alle $v \in X$ gilt. Nach (5.1) finden wir $\rho > 0$, so dass
$$|\langle v, v\rangle_x - \langle v, v\rangle_0| \le \frac{c^2}{2} \quad \text{für } \|v\|_X = 1 \text{ und } \|x\|_X < \rho.$$
Es folgt insbesondere
$$\langle v, v\rangle_x \ge \langle v, v\rangle_0 - \frac{c^2}{2} \ge \frac{c^2}{2} \quad \text{für } \|v\|_X = 1 \text{ und } \|x\|_X < \rho$$
und
$$|v|_x \ge \frac{c}{\sqrt{2}}\|v\|_X \quad \text{für } \|x\|_X < \rho \text{ und } v \in X.$$
Wir wollen nun zeigen, dass die von d induzierte Topologie feiner ist als die ursprüngliche Topologie auf $\mathcal{M}$. Dazu weisen wir nach, dass jede Umgebung V von $p_0 \in U$ eine ε-Umgebung (bzgl. der von d induzierten Topologie) enthält: Sei ohne Einschränkung $\varphi(p_0) = 0$ und weiterhin $V \supset \varphi^{-1}(\{\|v\|_X < \rho\})$ mit $\rho > 0$ wie oben. Sei $p \notin V$ und $\alpha : [0, 1] \to \mathcal{M}$ eine stückweise C^1-Kurve mit $\alpha(0) = p_0$ und $\alpha(1) = p$. Definiere
$$t_0 := \sup\{t : \|\varphi(\alpha(s))\| \le \rho \text{ für } 0 \le s \le t\}.$$
Wir erhalten die folgende Abschätzung
$$\begin{aligned}\rho &= \|\varphi(\alpha(t_0))\|_X = \|\varphi(\alpha(t_0)) - \varphi(\alpha(0))\|_X\\ &\le \int\limits_0^{t_0} \|\varphi_{*,\alpha(t)}\langle\alpha'(t)\rangle\|_X\,dt \le \frac{\sqrt{2}}{c}\int\limits_0^{t_0} |\varphi_{*,\alpha(t)}\langle\alpha'(t)\rangle|_{\varphi(\alpha(t))}\,dt\\ &= \frac{\sqrt{2}}{c}\int\limits_0^{t_0} \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)}\,dt \quad \text{nach Definition von } |\cdot|_x.\end{aligned}$$
Es folgt $\rho \le \frac{\sqrt{2}}{c} d(p_0, p)$ und somit $V \supset U^d_\varepsilon(p_0)$ für $\varepsilon = \frac{c}{\sqrt{2}}\rho$.

□

Definition 6.2 (Die Wegemannigfaltigkeit $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eigentlich eingebettete (keine Einschränkung) differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Also ist $M \cap C$ für alle kompakten Mengen $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Wir definieren $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ als den Hilbertraum aller 2π-periodischen, absolutstetigen Abbildungen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit lokal quadratintegrierbaren Ableitungen, versehen mit dem Skalarprodukt
$$\langle \alpha, \beta\rangle_{H^{1,2}} := \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\langle\alpha(t), \beta(t)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle\alpha'(t), \beta'(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}\right)\,dt.$$
Definiere
$$H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M) = \left\{\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) : \alpha(t) \in M \text{ für alle } t\right\}.$$

(Da eine solche Abbildung α nach Sobolev automatisch stetig ist, verlangen wir $\alpha(t) \in M$ nicht nur für fast alle t.)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit. Wir wollen zeigen, dass dann $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der H-Mannigfaltigkeit $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ ist.

Bemerkung 6.3. Da $M \subset \mathbb{R}^n$ eigentlich eingebettet ist, ist M insbesondere eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ ist ein Hilbertraum.

Seien TM und NM das Tangential- bzw. Normalbündel von M. Definiere für $\rho > 0$ und $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$M_\rho := \{x \in M \,:\, |x| < \rho\},$$

und

$$V_{\rho,\varepsilon} := \{(x, \xi) \in NM \,:\, x \in M_\rho,\ |\xi| < \varepsilon\}.$$

Die Exponentialabbildung $E : NM \to \mathbb{R}^n$ ist durch $E(x, \xi) := x + \xi$ definiert.

Da M eigentlich eingebettet ist, gibt es für alle $\rho > 0$ ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$E|_{V_{\rho,\varepsilon}} : V_{\rho,\varepsilon} \to U_{\rho,\varepsilon} := E(V_{\rho,\varepsilon})$$

ein Diffeomorphismus ist.

Lemma 6.4. *Ist $p : NM \to M$ die kanonische Projektion, sind $\rho > 0$ beliebig und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so ist*

$$R := p \circ (E|_{V_{\rho,\varepsilon}})^{-1} : U_{\rho,\varepsilon} \to M_\rho$$

eine Retraktion und für $x \in M_\rho$ ist

$$dR(x) = P(x) : \mathbb{R}^n \to T_xM \subset \mathbb{R}^n$$

die orthogonale Projektion.

Beweis. Klar ist, dass R eine Retraktion ist.

Es gilt $T_{(x,0)}NM \cong T_xM \oplus N_xM$, denn für eine Kurve $(x(t), \xi(t))_{|t|<\varepsilon}$ in $NM \subset \bigcup\limits_{p\in M} \{p\} \times N_pM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mit $\xi(0) = 0$ folgt aus $\langle x'(t), \xi(t)\rangle = 0$ insbesondere, dass

$$\langle x''(0), \underbrace{\xi(0)}_{=0}\rangle + \langle \underbrace{x'(0)}_{\in T_xM}, \xi'(0)\rangle = 0.$$

Also ist $\xi'(0) \in N_xM$ und die Behauptung folgt.

Damit gilt für das Differential der Exponentialabbildung

$$dE_{(x,0)}\langle y, \eta\rangle = y + \eta$$

für $y \in T_xM$ und $\eta \in N_xM$. Also folgt

$$(dE|_{(x,0)})^{-1} = (P(x), (I - P)(x))$$

und somit gilt auch $dR(x) = P(x)$. □

Wir wollen beliebige Vektorfelder tangential machen. Dazu benutzen wir

Definition 6.5. Sei $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Definiere

$$\Pi_\alpha : H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \to H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$$

durch

$$\Pi_\alpha(\beta)(t) := P(\alpha(t))\langle \beta(t) \rangle.$$

Lemma 6.6. *Sei $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Dann ist Π_α eine* ***stetige*** *Projektion auf den Unterraum der $H^{1,2}$-Vektorfelder längs α, die tangential zu M sind.*

Beweis. Nachzuweisen ist nur die Stetigkeit. Die Abschätzung für die L^2-Norm ist klar, denn aus $|\Pi_\alpha(\beta)(t)| \le |\beta(t)|$ folgt, dass auch $\|\Pi_\alpha(\beta)\|_{L^2} \le \|\beta\|_{L^2}$ gilt.

Aus Produkt- und Kettenregel folgt

$$(\Pi_\alpha(\beta))'(t) = dP_{\alpha(t)}\langle \alpha' \rangle \langle \beta(t) \rangle + P(\alpha(t))\langle \beta'(t) \rangle$$

und daher erhalten wir

$$\begin{aligned} |(\Pi_\alpha(\beta))'(t)| &\le |dP_{\alpha(t)}\langle \alpha' \rangle \langle \beta(t) \rangle| + |P(\alpha(t))\langle \beta'(t) \rangle| \\ &\le c(\alpha) \cdot |\alpha'(t)| \cdot |\beta(t)| + |\beta'(t)|. \end{aligned}$$

Die sup-Norm von β ist durch die $H^{1,2}$-Norm kontrolliert, denn aus $\beta(t) - \beta(s) = \int\limits_s^t \beta'(\sigma)\, d\sigma$ folgt $|\beta(t)| \le |\beta(s)| + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\beta'(\sigma)|\, d\sigma$. Wir integrieren nun bezüglich s, wenden Hölder an und schließen, dass

$$\begin{aligned} |\beta(t)| &\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\beta(s)|\, ds + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\beta'(\sigma)|\, d\sigma \\ &\le \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\beta|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \right)^{1/2} + \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\beta'|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \right)^{1/2} \le c \cdot \|\beta\|_{H^{1,2}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \|(\Pi_\alpha(\beta))'\|_{L^2} &\le c(\alpha) \cdot \|\alpha'\|_{L^2} \cdot c \cdot \|\beta\|_{H^{1,2}} + \|\beta'\|_{L^2} \\ &\le \tilde{c}(\alpha) \cdot \|\beta\|_{H^{1,2}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 6.7. *Die Wegemannigfaltigkeit $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ ist eine vollständige Untermannigfaltigkeit von $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Für den Beweis wollen wir annehmen, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ glatt ist. Die nötige Regularität für M werden wir in Bemerkung 6.8 diskutieren.

Wir zeigen zunächst, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt: Sei $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Wähle $\rho > 0$ so groß, dass $\alpha(t) \in M_{\rho/2}$ für alle t. (Der Parameter ρ erlaubt es uns, auch nichtkompakte Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ zu betrachten.) Wähle dann $\varepsilon > 0$ so klein, dass

(i) $E : V_{2\rho,\varepsilon} \to U_{2\rho,\varepsilon}$ ein Diffeomorphismus ist,
(ii) $U_{\rho,\varepsilon} \cap (M \setminus M_{2\rho}) = \emptyset$ gilt.

Die Bedingung (ii) ist erfüllbar, da $\overline{M}_\rho$ kompakt und $M \setminus M_{2\rho}$ abgeschlossen ist. Nach (i) und (ii) folgt, dass

$$E(x,\xi) \notin M \quad \text{für } x \in M_\rho \text{ und } 0 < |\xi| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Nach Lemma 6.6 sind

$$V_\alpha := \Pi_\alpha(H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n))$$

und

$$W_\alpha := (I - \Pi_\alpha)(H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n))$$

komplementäre abgeschlossene Teilräume von $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. ($V_\alpha$ ist Urbild von $\{0\}$ unter $x \mapsto x - \Pi_\alpha(x)$.) Wir definieren darin Umgebungen

$$V_\alpha^\delta := \{v \in V_\alpha \,:\, \|v\|_{H^{1,2}} < \delta\}$$

und

$$W_\alpha^\delta := \{w \in W_\alpha \,:\, \|w\|_{H^{1,2}} < \delta\}.$$

Sei $R : U_{\rho,\varepsilon} \to M_\rho$ die Retraktion aus Lemma 6.4. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $\alpha(t) + v(t) \in U_{\rho,\varepsilon}$ für alle t und alle $v \in V_\alpha^\delta$ und $\|w\|_{C^0} < \varepsilon$ für $w \in W_\alpha^\delta$ gilt.

Betrachte die Abbildung

$$\Phi : V_\alpha^\delta \times W_\alpha^\delta \to H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n),$$

definiert durch

$$\Phi(v,w) := R \circ (\alpha + v) + w.$$

(Ist R von der Klasse C^2, so ist Φ in der $H^{1,2}$-Norm differenzierbar.) Es gilt $\Phi(0,0) = \alpha$. Für alle $v \in V_\alpha^\delta$ gilt $\Phi(v,0) \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Nach (6.1) ist somit $\Phi(v,w) \notin H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ für $v \in V_\alpha^\delta$ und $w \in W_\alpha^\delta \setminus \{0\}$. Mit Hilfe von Lemma 6.4 folgt daher

$$d\Phi(0,0)\langle v,w\rangle = dR_\alpha\langle v\rangle + w = \Pi_\alpha\langle v\rangle + w = v + w.$$

Somit ist $d\Phi(0,0)$ ein topologischer Isomorphismus. Für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ ist damit $\Phi|_{V_\alpha^\delta \times W_\alpha^\delta}$ ein Diffeomorphismus (auf das Bild). Es gilt

$$\Phi(V_\alpha^\delta \times \{0\}) = H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M) \cap \Phi(V_\alpha^\delta \times W_\alpha^\delta).$$

Damit ist $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.

Zum Nachweis der Vollständigkeit: Seien α, $\beta \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Mit der Definition aus Lemma 6.1 gilt

$$\|\alpha - \beta\|_{H^{1,2}} \le d(\alpha, \beta),$$

da sich die linke Seite auch mit Hilfe einer verbindenden Kurve darstellen lässt, diese aber nicht in M liegen muss. Sei nun (α_n) eine Cauchyfolge bezüglich d. Dann gibt es $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ mit $\|\alpha - \alpha_n\|_{H^{1,2}} \to 0$ für $n \to \infty$. Aufgrund der Einbettungssätze folgt aber insbesondere auch $\|\alpha - \alpha_n\|_{C^0} \to 0$ für $n \to \infty$. Für alle t gilt $\alpha_n(t) \in M$ und daher auch $\alpha(t) \in M$. Somit ist $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Nach Lemma 6.1 ist d aber stetig bzgl. $H^{1,2}$-Konvergenz und somit folgt $d(\alpha_n, \alpha) \to 0$ für $n \to \infty$. □

Bemerkung 6.8. Genauer gilt: Ist $R \in C^k$, so ist $\Phi \in C^{k-1}$ und daher ist $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ eine C^{k-1}-Untermannigfaltigkeit. Eine Differenzierbarkeitsstufe geht dabei verloren, da $H^{1,2}$ bereits eine Ableitung enthält.

Bemerkung 6.9. Ist N eine kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $M \subset \mathbb{R}^p$ eigentlich eingebettet und X ein B-Raum von Abbildungen $u : N \to \mathbb{R}^p$, wie z. B. $C^k(N, \mathbb{R}^p)$ oder $H^{k,p}(N, \mathbb{R}^p)$, welcher stetig in $C^0(N, \mathbb{R}^p)$ eingebettet ist, so funktioniert die obige Konstruktion analog.

Ist X nicht stetig in $C^0(N, \mathbb{R}^p)$ eingebettet, so betrachtet man stattdessen $H^{k,p} \cap C^0$ und addiert die C^0-Norm.

7. Palais-Smale Folgen, Deformationslemma und Minimax Prinzip

7.1. **Palais-Smale Folgen.**

Definition 7.1 (Palais-Smale)**.** Betrachte eine H-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit einer Riemannschen Struktur der Klasse C^k, $k \geq 2$, und $E \in C^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Eine Folge (x_n) in $\mathcal{M}$ heißt Palais-Smale Folge (PS-Folge), wenn $E(x_n)$ beschränkt ist und $\|dE(x_n)\| \to 0$ für $n \to \infty$.

E erfüllt die PS-Bedingung, wenn jede PS-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 7.2. Häufig genügt es auch, wie in [3] eine $(PS)_c$-Bedingung zu fordern. Dabei setzt man zusätzlich voraus, dass $E(x_n) \to c$ für $n \to \infty$ gilt.

Die Idee des Minimax-Prinzips ist nun eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von $\mathcal{M}$ zu betrachten und

$$\inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} E(x) =: c.$$

Die Hoffnung ist nun, dass dieser Wert c endlich ist und von einem kritischen Punkt $x \in \mathcal{M}$ herkommt, es also ein $x \in \mathcal{M}$ gibt mit $E(x) = c$ und $dE(x) = 0$.

Dies braucht jedoch nicht richtig zu sein, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt [8]: Sei $E \in C^1(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $E(x, y) = \exp(-y) - x^2$. Definiere $E_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) < 0\}$. Bestehe nun $\mathcal{F}$ aus den Mengen $[-1, 1] \times \{y\}$ für $y \in \mathbb{R}$. Dann ist in der obigen Definition $c = 0$, es gibt aber keinen kritischen Punkt x von E mit $E(x) = 0$. $x_n = (0, n)$ ist eine Palais-Smale Folge, aber die PS-Bedingung ist nicht erfüllt, E besitzt überhaupt keinen kritischen Punkt.

Definition 7.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte eigentlich eingebettete Mannigfaltigkeit. Definiere das Energiefunktional $E : H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M) \to \mathbb{R}$ durch

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\alpha'(t)|^2 \, dt.$$

Lemma 7.4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte eigentlich eingebettete Mannigfaltigkeit. Dann ist das Energiefunktional E von der Klasse $C^\infty(H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M))$. Ist M zusätzlich kompakt, so erfüllt E die PS-Bedingung.*

Beweis. Zunächst ist $E(\alpha) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\alpha'(t)|^2 \, dt$ auch auf $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ definiert und dort von der Klasse C^∞. Damit ist auch $E \in C^\infty(H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M))$.

Die Ableitung von E ist gegeben durch

$$dE(\alpha)\langle\beta\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle \, dt.$$

Sei nun (α_n) eine PS-Folge in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ für E, d. h. es gilt $E(\alpha_n) \le c$ und $\|dE(\alpha_n)\|_{L(T_{\alpha_n}H^{1,2}(\mathbb{S}^1,M),\mathbb{R})} \to 0$ für $n \to \infty$.

Da M kompakt ist, gilt für ein $R > 0$ die Abschätzung $|\alpha_n(t)| \le R$ für alle t und n. Nach Hölder folgt für $t_2 > t_1$

$$|\alpha_n(t_1) - \alpha_n(t_2)| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} |\alpha_n'(t)|\, dt \le \sqrt{\int 1}\sqrt{\int |\alpha_n'|^2} \le \sqrt{|t_2 - t_1|}\sqrt{2E(\alpha_n)}.$$

Daher ist die Folge (α_n) gleichgradig stetig, nämlich Hölderstetig mit Exponent $1/2$ und gleichmäßig beschränkter Höldernorm. Somit gibt es eine Teilfolge (die wir weiterhin mit α_n bezeichnen wollen), so dass $\alpha_n \to \alpha$ gleichmäßig, d. h. in C^0, konvergiert. Da α_n in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ gleichmäßig beschränkt ist, gibt es eine in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ schwach konvergente Teilfolge. Wir dürfen also zusätzlich annehmen, dass $\alpha_n \rightharpoonup \alpha$ in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ gilt. Da aber M abgeschlossen ist, gilt auch $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\alpha_n \to \alpha$ stark in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ konvergiert. Wir müssen dazu nachweisen, das $\alpha_n' \to \alpha'$ in L^2 konvergiert. Es genügt natürlich zu zeigen, dass (α_n') in L^2 eine Cauchyfolge ist: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n' - \alpha_m'\|_{L^2} &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\alpha_n'(t) - \alpha_m'(t)|^2\, dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha_n'(t) - \alpha_m'(t), \alpha_n'(t) - \alpha_m'(t)\rangle\, dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha_n', \alpha_n' - \alpha_m'\rangle - \langle \alpha_m', \alpha_n' - \alpha_m'\rangle\, dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle P(\alpha_n)\alpha_n', \alpha_n' - \alpha_m'\rangle - \langle P(\alpha_m)\alpha_m', \alpha_n' - \alpha_m'\rangle\, dt,
\end{aligned}$$

wobei $P(x) : \mathbb{R}^n \to T_xM$ die orthogonale Projektion ist,

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha_n', P(\alpha_n)(\alpha_n' - \alpha_m')\rangle - \langle \alpha_m', P(\alpha_m)(\alpha_n' - \alpha_m')\rangle\, dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha_n', (P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m))'\rangle - \langle \alpha_m', (P(\alpha_m)(\alpha_n - \alpha_m))'\rangle\, dt \\
&\quad \underbrace{- \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha_n', (P(\alpha_n))'(\alpha_n - \alpha_m)\rangle - \langle \alpha_m', (P(\alpha_m))'(\alpha_n - \alpha_m)\rangle\, dt}_{=:R}
\end{aligned}$$

Wir wollen zunächst $|R|$ abschätzen: Es gilt

$$|P(\alpha_n)'| \equiv |(P(\alpha_n))'| = |dP(\alpha_n)\langle\alpha_n'\rangle| \le c(M) \cdot |\alpha_n'|. \tag{7.1}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}|R| \le& \|\alpha_n'\|_{L^2} \cdot \|(P(\alpha_n))'\|_{L^2} \cdot \|\alpha_n - \alpha_m\|_{C^0} + \ldots\\ \le& c(M) \cdot \|\alpha_n'\|^2_{L^2} \cdot \|\alpha_n - \alpha_m\|_{C^0} + \ldots\\ =& c(M) \cdot 2E(\alpha_n) \cdot \|\alpha_n - \alpha_m\|_{C^0} + \ldots \to 0 \quad \text{für } n,\, m \to \infty,\end{aligned}$$

wobei wir jeweils ... für Terme geschrieben haben, die man durch Vertauschen von m und n erhält. Von den verbliebenen Termen betrachten wir ohne Einschränkung nur den ersten. Es gilt, da α_n eine PS-Folge ist,

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle \alpha_n', (P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m))'\rangle\, dt =& \ dE(\alpha_n)\langle P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m)\rangle\\ \le& \underbrace{\|dE(\alpha_n)\|_{L(T_{\alpha_n}H^{1,2}(\mathbb{S}^1,M),\mathbb{R})}}_{\to 0 \quad \text{für } n\to\infty} \cdot \|P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m)\|_{H^{1,2}}.\end{aligned}$$

Wegen $|P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m)| \le |\alpha_n - \alpha_m|$ folgt für n, $m \to \infty$ auch $\|P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m)\|_{L^2} \to 0$. Weiterhin gilt nach (7.1)

$$\begin{aligned}|(P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m))'| =& |(P(\alpha))'(\alpha_n - \alpha_m) + P(\alpha_n)(\alpha_n' - \alpha_m')|\\ \le& c(M) \cdot |\alpha_n'| \cdot |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_n' - \alpha_m'|.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|(P(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_m))'\|_{L^2} \le c(M) \cdot \|\alpha_n'\|_{L^2} \cdot \underbrace{\|\alpha_n - \alpha_m\|_{C^0}}_{\to 0} + \|\alpha_n'\|_{L^2} + \|\alpha_m'\|_{L^2} \le c.$$

Die Behauptung folgt. □

7.2. **Deformationslemma.** Das folgende Deformationslemma von M. Willem [11, Chapter 2] brauchen wir nur in Hilberträumen, in denen ein Gradient existiert. Wir beweisen es aber in Banachräumen, denn der Beweis ist in beiden Fällen ähnlich.

Ein Gradient existiert in einem allgemeinen Banachraum nicht, denn dafür benötigt man ein inneres Produkt. Stattdessen definieren wir

Definition 7.5. Sei M ein metrischer Raum, X ein normierter Raum und $h : M \to X' \setminus \{0\}$ stetig. Ein Pseudogradientenfeld zu h auf M ist ein lokal Lipschitz stetiges Vektorfeld $g : M \to X$ so dass für alle $u \in M$

$$||g(u)||_X \le 2\,||h(u)||_{X'}$$

und

$$\langle h(u), g(u)\rangle \ge ||h(u)||^2_{X'}$$

gelten.

Beispiel 7.6. Sei X ein Hilbertraum. Für $f : \Omega \to R$, $f \in C^1$, $\Omega \subset X$ offen, ist $g = \nabla f : \Omega \to X$ das (Pseudo)-Gradientenfeld zu $h = df : \Omega \to X'$ und es gilt insbesondere $\langle h(x_0), x - x_0\rangle = df(x_0)\langle x - x_0\rangle = \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle = \langle g(x_0), x - x_0\rangle$.

Lemma 7.7. *Unter den Voraussetzungen von Definition 7.5 existiert ein Pseudogradientenfeld zu h auf M.*

Beweis. Sei $v \in M$. Dann gibt es $x \in X$ mit $||x|| = 1$, so dass

$$\langle h(v), x\rangle > \frac{2}{3}||h(v)||.$$

Definiere $y := \frac{3}{2}||h(v)||x$. Dann gelten

$$||y|| < 2||h(v)|| \quad \text{und} \quad \langle h(v), y\rangle > ||h(v)||^2.$$

Da h stetig ist, gibt es eine offene Umgebung N_v von v in M, so dass

$$||y|| < 2||h(u)|| \quad \text{und} \quad \langle h(u), y\rangle > ||h(u)||^2 \tag{7.2}$$

auch für alle $u \in N_v$ gelten. Die Familie $\mathcal{N} := \{N_v : v \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M. M ist ein metrischer Raum und damit insbesondere parakompakt, d. h. es existiert eine lokal endliche offene Überdeckung $\mathcal{M} := \{M_i : i \in I\}$ von M, die feiner als $\mathcal{N}$ ist. Zu jedem $i \in I$ existiert also ein $v \in M$, so dass $M_i \subset N_v$ ist. Somit finden wir $y =: y_i$, so dass die Bedingung (7.2) für alle $u \in M_i$ erfüllt ist. Besteht die Überdeckung $\mathcal{M}$ lediglich aus einer Menge, so sind wir fertig. Sonst definieren wir auf M die Funktionen

$$\rho_i(u) := \operatorname{dist}(u, X \setminus M_i)$$

und

$$g(u) := \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)} y_i.$$

Aufgrund von (7.2) ist klar, dass g das gesuchte Pseudogradientenfeld zu h auf M ist. □

Definition 7.8. Sei X ein metrischer Raum, $S \subset X$, $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $c \in \mathbb{R}$. Definiere

$$S_\varepsilon := \bigcup_{x \in S} B_\varepsilon(x)$$

und

$$\varphi^c := \{x \in X : \varphi(x) \le c\} \equiv \varphi^{-1}((-\infty, c]).$$

Lemma 7.9 (Deformationslemma)**.** *Seien X ein Banachraum, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ und ε, $\delta > 0$, so dass*

$$||\varphi'(u)|| \ge \frac{8\varepsilon}{\delta} \quad \textit{für alle } u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{7.3}$$

Dann gibt es $\eta \in C^0([0, 1] \times X, X)$, so dass

(i) $\eta(t, u) = u$, *falls* $t = 0$ *oder* $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,
(ii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$.
(iii) Für alle $t \in [0, 1]$ ist $\eta(t, \cdot) : X \to X$ ein Homöomorphismus.
(iv) Für $u \in X$ und $t \in [0, 1]$ gilt $||\eta(t, u) - u|| \le \delta$.
(v) Für festes $u \in X$ ist $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(\eta(t, u))$ nicht wachsend.
(vi) Für $u \in \varphi^c \cap S_\delta$ und $0 < t \le 1$ gilt $\varphi(\eta(t, u)) < c$.

Beweis. Nach Lemma 7.7 existiert ein Pseudogradientenfeld g für φ' auf $M := \{u \in X : \varphi'(u) \neq 0\}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} A :=& \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \\ B :=& \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{\delta} \end{aligned}$$

und

$$\psi(u) := \frac{\operatorname{dist}(u, X \setminus A)}{\operatorname{dist}(u, X \setminus A) + \operatorname{dist}(u, B)}.$$

Die Funktion $\psi : X \to \mathbb{R}$ ist lokal Lipschitz stetig und erfüllt $\psi = 1$ auf B und $\psi = 0$ auf $X \setminus A$. Wir definieren das Lipschitz stetige Vektorfeld $f : X \to X$ durch

$$f(u) := \begin{cases} -\psi(u) \frac{g(u)}{||g(u)||^2} & \text{für } u \in A, \\ 0 & \text{für } u \in X \setminus A. \end{cases}$$

(Für $u \in X \setminus A$ könnte $g(u) = 0$ gelten.) Nach Definition 7.5 folgt insbesondere (mit $h = \varphi'$) $||h(u)||^2 \le \langle h(u), g(u) \rangle \le ||h(u)|| \cdot ||g(u)||$. Also ist (auf Mengen mit $h(u) \neq 0$) auch $||h(u)|| \le ||g(u)||$. In A ist $h \neq 0$ und wir erhalten dort mit Hilfe von (7.3)

$$||f(u)|| \le ||g(u)||^{-1} \le ||h(u)||^{-1} = ||\varphi'(u)||^{-1} \le \frac{\delta}{8\varepsilon}. \tag{7.4}$$

Die Abschätzung $||f(u)|| \le \frac{\delta}{8\varepsilon}$ gilt in ganz X.

Betrachte für festes $u \in X$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) = f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) = u. \end{cases}$$

Sie besitzt eine Lösung $\sigma(\cdot, u)$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. σ ist auf $\mathbb{R} \times X$ stetig. Definiere $\eta : [0,1] \times X \to X$ durch $\eta(t,u) := \sigma(8\varepsilon t, u)$. Mit Hilfe von (7.4) erhalten wir

$$||\sigma(t,u) - u|| = \left\| \int\limits_0^t f(\sigma(\tau,u))\, dt \right\| \le \int\limits_0^t ||f(\sigma(\tau,u))||\, d\tau \le \frac{\delta t}{8\varepsilon}. \tag{7.5}$$

Weiterhin gilt (Ab der zweiten Zeile nehmen wir an, dass $g \neq 0$. Die Behauptung insgesamt gilt auch für $g = 0$, da dort $\psi = 0$ ist.) nach Definition 7.5

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) =& \left\langle \varphi'(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u) \right\rangle = \langle \varphi'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u)) \rangle \\ =& -\psi(\sigma(t,u)) \left\langle \varphi'(\sigma(t,u)), \frac{g(\sigma(t,u))}{||g(\sigma(t,u))||^2} \right\rangle \\ \le& -\psi(\sigma(t,u)) \frac{||\varphi'(\sigma(t,u))||^2}{||g(\sigma(t,u))||^2} \le -\frac{1}{4}\psi(\sigma(t,u)). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Bis auf Behauptung (ii) sind damit alle Behauptungen leicht einzusehen. Sei also $u \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$. Falls es ein $t \in [0, 8\varepsilon]$ gibt, so dass $\varphi(\sigma(t,u)) < c - \varepsilon$ gilt, so folgt auch $\varphi(\sigma(8\varepsilon, u)) < c - \varepsilon$ und (ii) folgt. Falls aber für alle $t \in [0, 8\varepsilon]$

$$c - \varepsilon \le \varphi(\sigma(t,u)) \le c + \varepsilon$$

gilt, so folgt aus (7.5) $||\sigma(t,u)-u|| \le \delta$ für alle $t \in [0,8\varepsilon]$, also insbesondere $\sigma(t,u) \in S_\delta$ für $0 \le t < 8\varepsilon$. Weiterhin gilt nach (7.6)

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma(8\varepsilon,u)) &= \varphi(u) + \int\limits_0^{8\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))\,dt\\ &\le \varphi(u) - \frac{1}{4}\int\limits_0^{8\varepsilon} \psi(\sigma(t,u))\,dt\\ &\le c+\varepsilon - \frac{8\varepsilon}{4} = c-\varepsilon.\end{aligned}$$

Dies zeigt (ii) und das Lemma folgt. □

Bemerkung 7.10. Ist $\mathcal{M}$ eine H-Untermannigfaltigkeit in einem Hilbertraum X, so gilt ebenfalls ein Deformationslemma. Benutze dazu den Gradienten der Funktion φ. Da dieser tangential zu $\mathcal{M}$ ist, verläßt der Fluss nach Hahn-Banach die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ nie.

Die Aussage gilt ebenso in Banachraumuntermannigfaltigkeiten; wir werden sie jedoch nur für Hilbertraumuntermannigfaltigkeiten benutzen.

7.3. **Minimax Prinzip.**

Theorem 7.11 (Minimax Prinzip)**.** *Sei X ein Banachraum. Sei M_0 eine Teilmenge eines metrischen Raumes M und $\Gamma_0 \subset C^0(M_0,X)$. Definiere*

$$\Gamma := \{\gamma \in C^0(M,X) \,:\, \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Nimm an, dass $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ die Bedingung

$$a := \sup_{\gamma_0\in\Gamma_0}\sup_{u\in M_0}\varphi(\gamma_0(u)) < c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{u\in M}\varphi(\gamma(u)) < \infty \tag{7.7}$$

erfüllt. Seien $\varepsilon \in \left(0,\frac{c-a}{2}\right)$, $\delta>0$, und $\gamma\in\Gamma$ mit $\sup\limits_M \varphi\circ\gamma \le c+\varepsilon$. Dann gibt es ein $u \in X$ mit

(i) $c-2\varepsilon \le \varphi(u) \le c+2\varepsilon$,
(ii) $\operatorname{dist}(u,\gamma(M)) \le 2\delta$,
(iii) $||\varphi'(u)|| \le \frac{8\varepsilon}{\delta}$.

Beweis. Nimm an, dass die Behauptung falsch wäre. Genauer nehmen wir an, dass (iii) verletzt ist, wenn die anderen beiden (offensichtlicherweise ohne (iii) erfüllbaren) Bedingungen erfüllt sind. Definiere $\gamma_0 := \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0$. Wir wenden Lemma 7.9 mit $S := \gamma(M)$ an und definieren $\beta(u) := \eta(1,\gamma(u))$. Da nach Annahme stets $c-2\varepsilon > a$ gilt und $\eta(t,\cdot) = \mathrm{id}$ auf $\varphi^{c-2\varepsilon}$ ist, erhalten wir für $u \in M_0$, dass $\beta(u) = \eta(1,\gamma_0(u)) = \gamma_0(u)$ gilt. Somit ist $\beta\in\Gamma$. Wir benutzen die Voraussetzung $\sup\limits_M \varphi\circ\gamma \le c+\varepsilon$ und Lemma 7.9 (ii). Damit erhalten wir

$$\sup_{u\in M}\varphi(\beta(u)) = \sup_{u\in M}\varphi(\eta(1,\gamma(u))) \le c-\varepsilon$$

im Widerspruch zur Definition von c. Das Theorem folgt. □

Bemerkung 7.12. Da der Beweis des Minimax-Theorems 7.11 nur das Deformationslemma 7.9 benutzt, gilt es auch auf H- oder B-Mannigfaltigkeiten.

8. Existenz einer geschlossenen Geodätischen

Kritische Punkte des Energiefunktionals sind geschlossene Geodätische oder konstante Kurven. Das Problem ist, dass konstante Kurven stets absolute Minima des Energiefunktionals sind.

Ist $\pi_1(M) \neq 0$, so können wir das Energiefunktional in einer nichttrivialen Homotopieklasse minimieren und erhalten eine geschlossene (nichttriviale) Geodätische. Übungsaufgabe.

Wollen wir geschlossene Geodätische auf beliebigen kompakten glatten Mannigfaltigkeiten finden, so benötigen wir das folgende Resultat aus der algebraischen Topologie:

Proposition 8.1. *Sei M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Dann gibt es $1 \leq k \leq n$, so dass für die k-te Homotopiegruppe $\pi_k(M) \neq 0$ gilt.*

Beweis. Ist M nicht orientierbar, so ist $\pi_1(M) \neq 0$: Widerspruchsbeweis: Nehme an, dass $\pi_1(M) = 0$. Sei $x_0 \in M$ und $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von $T_{x_0}M$, die wir positiv orientiert nennen. Sei $x \in M$. Sei γ eine differenzierbare Kurve von x_0 nach x. Definiere eine Orientierung in x durch die Festlegung, dass die entlang γ parallel transportierte Basis positiv orientiert sei. Dies ist wohldefiniert, denn zwei Kurven γ_1 und γ_2 lassen sich ineinander homotopieren, da nach Annahme $\pi_1(M) = 0$ gilt, und Positivität verhält sich stetig unter Deformationen des Verbindungsweges. Dies definiert (auf der Zusammenhangskomponente von x_0) eine Orientierung. Widerspruch.

Ist M orientierbar, so ist [5, S. 236] $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Insbesondere ist also $H_k(M)$ nicht für alle $k \geq 1$ trivial. Sei nun $\pi_1(M) = \pi_2(M) = \ldots = \pi_{k-1}(M) = 0$ für $k \geq 2$, so ist nach Hurewicz [5, S. 366] $\pi_k(M) \cong H_k(M)$. Gilt $\pi_k(M) = 0$ für alle $1 \leq k < n$, so ist also $\pi_n(M) \cong H_n(M) \cong \mathbb{Z} \neq 0$. □

Das folgende Theorem findet sich für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die topologische Sphären sind, in [8, Theorem 4.4]. Es geht auf L. Lyusternik (oder Ljusternik, ...) und A. Fet zurück [7].

Theorem 8.2. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine geschlossene glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine geschlossene Geodätische auf M.*

Beweis. Nach Proposition 8.1 gibt es eine stetige homotop nichttriviale stetige Abbildung $f_0 : \mathbb{S}^k \to M$ für ein geeignetes $k \geq 1$. Wir dürfen annehmen, dass f_0 glatt ist. Definiere $B^{k-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^{k-1} : |x| \leq 1\right\}$. Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \to M$ induziert eine Abbildung

$$\Phi(f) : \left(B^{k-1}, \partial B^{k-1}\right) \to \left(C^0(\mathbb{S}^1, M), M\right)$$

vermöge

$$\Phi(f)(x_1, \ldots, x_{k-1})(t) := f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \cos t\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}, \sin t\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}\right).$$

Beachte, dass Φ injektiv ist. Die hier verwendete Notation soll dabei andeuten, das $\Phi(f)$ eine Abbildung von B^{k-1} nach $C^0(\mathbb{S}^1, M)$ ist, unter der Punkte aus ∂B^{k-1} auf konstante Wege, die wir mit M identifizieren, abgebildet werden. Ist $f \in C^1$, so hat $\Phi(f)$ Werte in den geschlossenen C^1-Kurven in M, also ist insbesondere $\Phi(f)(B^{k-1}) \subset H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$.

Für das Minimax-Verfahren betrachten wir die Familie $\mathcal{F} \subset H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ definiert durch

$$\mathcal{F} := \left\{ F\left(B^{k-1}\right) \,\middle|\, \begin{array}{ll} F : \left(B^{k-1}, \partial B^{k-1}\right) \to \left(H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M), M\right) & \text{stetig,} \\ \Phi^{-1}(F) \quad \text{frei homotop zu } f_0 & \end{array} \right\}.$$

Beachte für die Wohldefiniertheit insbesondere, dass $\Phi(f) : (B^{k-1}, \partial B^{k-1}) \to (H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M), M)$ und F in denselben Räumen definiert sind.

Wir wollen das Minimax-Theorem 7.11 anwenden. Dazu definieren wir $\Gamma_0 := C^0(\partial B^{k-1}, H^{1,2}_{\text{konst.}}(\mathbb{S}^1, M))$, wobei $H^{1,2}_{\text{konst.}}(\mathbb{S}^1, M) \subset H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ den Unterraum der konstanten Kurven bezeichnet, und

$$\Gamma := \{\gamma \in C^0(B^{k-1}, H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)) \,:\, \gamma|_{\partial B^{k-1}} \in \Gamma_0\}.$$

Die Bedingung in der Definition von $\mathcal{F}$, dass $\Phi^{-1}(F)$ frei homotop zu f_0 sein soll, stört nicht bei der Anwendung des Minimax-Prinzips, da sie unter den Flüssen aus dem Deformationslemma nicht zerstört wird. Auch die Bedingung, dass F den Rand ∂B^{k-1} auf konstante Wege abbildet, ist unter den Flüssen im Deformationslemma erhalten, da konstante Wege die minimale Energie 0 haben und somit konstant bleiben.

Da wir $f_0 \in C^1(\mathbb{S}^k, M)$ annehmen durften, ist $\Phi(f_0)(B^{k-1}) \in \mathcal{F}$. Es folgt $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\sup\limits_{\alpha \in \Phi(f_0)(B^{k-1})} E(\alpha) < +\infty$. Somit ist

$$c := \inf_{F(B^{k-1}) \in \mathcal{F}} \sup_{\alpha \in F(B^{k-1})} E(\alpha) < +\infty.$$

Weiterhin ist für beliebige $\gamma_0 \in \Gamma_0$ und $x \in \partial B^{k-1}$ der Ausdruck $\gamma_0(x)$ ein konstanter Weg in M. Somit ist

$$\sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{x \in \partial B^{k-1}} E(\gamma_0(x)) = 0.$$

Schließlich ist $c > 0$: Sonst fänden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $F : (B^{k-1}, \partial B^{k-1}) \to (H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M), M)$ mit $F(B^{k-1}) \in \mathcal{F}$ und $\sup\limits_{\alpha \in F(B^{k-1})} L(\alpha) < \varepsilon$, da sich die Länge durch die Energie kontrollieren lässt. Damit wäre insbesondere $d(\alpha(t), \alpha(0)) < \varepsilon$ für alle t und alle $\alpha \in F(B^{k-1})$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so ist die ε-Umgebung $U_\varepsilon(\Delta)$ der Diagonalen $\Delta \subset M \times M$ auf $\Delta \cong M$ retrahierbar. Damit wäre F homotop zu einer Abbildung $\tilde{F} : B^{k-1} \to H^{1,2}_{\text{konst.}}(\mathbb{S}^1, M)$ und daher homotop trivial. Dies liefert einen Widerspruch, da damit auch $\Phi^{-1}(F)$ homotop trivial wäre. Also gilt $c > 0$.

Wir können also das Minimax-Theorem 7.11 anwenden und erhalten, indem wir dort $\varepsilon = \frac{1}{n}$ wählen eine Folge geschlossener Kurven $\alpha_n \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ mit $c - \frac{2}{n} \le E(\alpha_n) \le c + \frac{2}{n}$ und $||dE(\alpha_n)||_{T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)} \le \frac{1}{n}$. Nach Lemma 7.4 besitzen die Kurven α_n eine in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ konvergente Teilfolge. Gelte also $\alpha_n \to \alpha$. Es folgt $E(\alpha) = c$ und $dE(\alpha) = 0$. α ist also ein kritischer Punkt für das Längenfunktional und daher eine (geschlossene) Geodätische. Diese ist auch nichttrivial, da $c > 0$ ist. □

Wir wollen nun noch die Zahl k zur nichttrivialen Homotopiegruppe $\pi_k(M)$ in Beziehung zum Index der gefundenen geschlossenen Geodätischen setzen.

9. Index von Geodätischen

Lemma 9.1. *Sei $\mathcal{M}$ eine B-Mannigfaltigkeit, X ein Banachraum, $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le 1\}$ und $B^\infty = \{x \in X : ||x|| \le 1\}$. Sei $U \subset \mathcal{M}$ offen und $\overline{U}$ homöomorph zu $B^m \times B^\infty$. Seien $P : \overline{U} \to B^m$ und $Q : \overline{U} \to B^\infty$ die (mit dem Homöomorphismus verketteten) natürlichen Projektionen. Ist dann $f : (B^l, \partial B^l) \to (\mathcal{M}, \mathcal{M} \setminus U)$ stetig, $l < m$, und $V \subset \mathcal{M}$ offen mit $\overline{V} \subset U$, so lässt sich f beliebig gut durch stetige Abbildungen*

$$f_0 : (B^l, \partial B^l) \to \left(\mathcal{M} \setminus \left(V \cap P^{-1}(0)\right), \mathcal{M} \setminus U\right)$$

mit $f|_{\partial B^l} = f_0|_{\partial B^l}$ approximieren. Insbesondere ist f homotop zu solchen f_0 bei festen Randwerten.

Beweis. Sei $W \subset \mathcal{M}$ offen mit $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Da (P, Q) lokale Koordinaten sind, können wir annehmen, dass $U = B^m \times B^\infty$ gilt. Durch Approximation können wir weiterhin annehmen, dass $P \circ f \in C^1\left(f^{-1}(W), \mathbb{R}^m\right)$ ist. Da $f(B^l)$ kompakt ist, ist

$$\delta := \operatorname{dist}\left(\overline{V} \cap \operatorname{im} f, U \setminus W\right) > 0.$$

Wegen $l < m$ ist $P(\operatorname{im} f \cap W) = P \circ f\left(f^{-1}(W)\right)$ eine m-dimensionale Lebesgue Nullmenge. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in \mathbb{R}^m$ mit $|v| < \min\{\varepsilon, \delta\}$, so dass $v \notin P(\operatorname{im} f \cap W)$. Wähle nun eine Abschneidefunktion $\varphi \in C^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ auf W, $\varphi = 0$ auf $\mathcal{M} \setminus U$ und definiere

$$f_0 := \begin{cases} f & \text{auf } f^{-1}(\mathcal{M} \setminus U), \\ (Pf - \varphi(f)v, Qf) & \text{auf } f^{-1}(U). \end{cases}$$

f_0 ist stetig. Nach Wahl von δ gilt für $x \in B^l$, so dass $f_0(x) \in V$ ist, zunächst $f(x) \in W$. Es folgt weiterhin $\varphi(f(x)) = 1$. Somit ist $Pf_0(x) = Pf(x) - v \ne 0$ und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 9.2. Die Wegemannigfaltigkeit $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ und daher ist $TH^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ mit dem üblichen $H^{1,2}$-Skalarprodukt versehen. Darin trägt der Tangentialvektor α' einer Geodätischen i. a. zum Skalarprodukt bei, obwohl er intrinsisch parallel ist; vergleiche auch den flach eingebetteten und den zylinderförmig eingebetteten $\mathbb{R}^p$. Wir führen daher ein äquivalentes, der Geometrie von (M, g) angepasstes Skalarprodukt ein: Sei $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ und seien v, $w \in T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$. Setze dann

$$\langle v, w\rangle_0 := \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle v(t), w(t)\rangle_g \, dt$$

und

$$\langle v, w\rangle_1 := \langle v, w\rangle_0 + \left\langle \nabla^\alpha_{\frac{d}{dt}} v, \nabla^\alpha_{\frac{d}{dt}} w \right\rangle_0 .$$

Hierbei ist

$$\nabla^\alpha_{\frac{d}{dt}} v = \nabla v = v' + \Gamma(\alpha)(v, \alpha').$$

Auf jeder kompakten Teilmenge K gilt (mit $c = 1$ für isometrisch eingebettete Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$)

$$c\langle v, v\rangle_g \le \langle v, v\rangle_{\mathbb{R}^n} \le c^{-1}\langle v, v\rangle_g$$

für ein $c = c(K)$ und alle $p \in K$ und $v \in T_pM$. Damit ist das intrinsische L^2-Skalarprodukt äquivalent zum extrinsischen.

Wir wollen nun zeigen, dass auch $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ durch die quadrierte $H^{1,2}$-Norm abgeschätzt ist: „$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ ist $H^{1,2}$-stetig". Es gilt $|\Gamma(\alpha)(v,\alpha')| \le \gamma \cdot |v| \cdot |\alpha'|$ für alle $\alpha : I \to K$ und eine Konstante $\gamma > 0$. Wir erhalten (der erste Faktor 2 kommt vom Ausmultiplizieren und der Cauchyschen Ungleichung)

$$\begin{aligned}\langle\nabla v, \nabla v\rangle_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \langle\nabla v, \nabla v\rangle_g \, dt\\ &\le \frac{2}{c}\int \left(|v'|^2 + |\Gamma(\alpha)(v,\alpha')|^2\right) dt\\ &\le \frac{2}{c}\int \left(|v'|^2 + \gamma^2|\alpha'|^2|v|^2\right) dt\\ &\le c(K, \|\alpha'\|^2_{H^{1,2}}) \cdot \|v\|^2_{H^{1,2}},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, das $|\alpha'|^2 \in L^1$ ist und dass wir $\sup\limits_t |v(t)| \le c_0 \cdot \|v\|_{H^{1,2}}$ abschätzen können.

Für die umgekehrte Abschätzung integrieren wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle v(t), v(t)\rangle_g - \langle v(s), v(s)\rangle_g &= \int_s^t \frac{d}{d\sigma}\langle v(\sigma), v(\sigma)\rangle_g \, d\sigma\\ &= 2\int_s^t \langle v(\sigma), \nabla v(\sigma)\rangle_g \, d\sigma \le \langle v, v\rangle_1\end{aligned}$$

bezüglich s und erhalten

$$2\pi\langle v(t), v(t)\rangle_g \le \langle v, v\rangle_0 + 2\pi\langle v, v\rangle_1.$$

Wie oben erhalten wir, falls $\operatorname{im}\alpha \subset K$ ist,

$$\|v\|_{H^{1,2}} \le c(K, \|\alpha\|_{H^{1,2}}) \cdot \|v\|_1.$$

Da $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_{H^{1,2}(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^n)}$ auf $T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ somit vergleichbar sind, überträgt sich die Sobolevungleichung auch auf $\|\cdot\|_1$. Insbesondere ist die kanonische Einbettung $\iota : (H^{1,2}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \to (L^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ also kompakt.

Bemerkung 9.3. Sei α eine geschlossene Geodätische. Dann ist die zweite Variation von α durch

$$\begin{aligned}E_{**,\alpha}(v,w) &= \int \left(\langle\nabla v, \nabla v\rangle_g - \langle R(v,\alpha')\alpha', w\rangle_g\right) dt\\ &= \langle v, w\rangle_1 - \langle v + R(v,\alpha')\alpha', w\rangle_0\end{aligned}$$

gegeben. Auf $T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ definieren wir den Endomorphismus ρ_α durch $\rho_\alpha(v) := v + R(v,\alpha')\alpha'$. Da $\langle R(v,\alpha')\alpha', w\rangle_g = \langle R(w,\alpha')\alpha', v\rangle_g$ aufgrund der Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors ist, ist ρ_α symmetrisch. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es einen Endomorphismus k_α von $T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$, so dass $\langle k_\alpha(v), w\rangle_1 = \langle\rho_\alpha(v), w\rangle_0$ gilt. Der Operator k_α ist kompakt, denn es gilt (mit der kompakten Einbettung $\iota : H^{1,2} \to L^2$ wie oben) $k_\alpha = \iota^*\rho_\alpha\iota$ und $\rho_\alpha : L^2 \to$

L^2 ist stetig. Da ρ_α bezüglich L^2 symmetrisch ist, ist auch k_α in $T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ symmetrisch.

Nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren auf Hilberträumen gibt es eine Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten mit $\lambda_i \to 0$ für $i \to \infty$. Weiterhin gibt es normierte Eigenvektoren u_i für k_α, die eine Hilbertraumbasis von $T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ bilden, und wir erhalten daher die folgende Darstellung

$$E_{**,\alpha}(v, w) = \sum_{i=1}^{\infty}(1 - \lambda_i)\langle u_i, v\rangle_1\langle u_i, w\rangle_1.$$

Wir dürfen zusätzlich annehmen, dass $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ alle Eigenwerte > 1 (mit Vielfachheit gezählt) sind, sowie dass $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+n} = 1$ und $\lambda_i < 1$ für $i > k + n$ gelten. Dann folgt $k = \operatorname{ind} E_{**,\alpha}$ und $n = \operatorname{null} E_{**,\alpha}$. Wir erhalten die Aufspaltung

$$T_\alpha := T_\alpha H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M) = T_\alpha^- \oplus T_\alpha^0 \oplus T_\alpha^+$$

in orthogonale Teilräume, wobei T_α^- die lineare Hülle von $u_1, \ldots, u_k$ ist und T_α^0 sowie T_α^+ entsprechend definiert sind. Hieraus lesen wir ab, dass

$$E_{**,\alpha}(v, v) = E_{**,\alpha}(v^-, v^-) + E_{**,\alpha}(v^+, v^+)$$

gilt. Hierfür haben wir v mit Komponenten als (v^-, v^0, v^+) geschrieben. Folglich gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$E_{**,\alpha}(v^-, v^-) \le -\delta\|v^-\|_1^2$$

und

$$E_{**,\alpha}(v^+, v^+) \le \delta^{-1}\|v^+\|_1^2.$$

Lemma 9.4. *Sei $\alpha \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ ein kritischer Punkt des Energiefunktionals E. Mit den obigen Bezeichnungen existiert dann eine offene Umgebung $U(\alpha)$ mit $\alpha \in U(\alpha)$ und eine lokale Karte*

$$\varphi : U(\alpha) \to T_\alpha = T_\alpha^- \oplus T_\alpha^0 \oplus T_\alpha^+$$

mit $\varphi(\alpha) = 0$. Wir setzen $\tilde{E} = E \circ \varphi^{-1}$ und erhalten in den φ-Koordinaten

(i) $\tilde{E}(u) = E(\alpha) + E_{**,\alpha}(u^-, u^-) + E_{**,\alpha}(u^+, u^+) + o(\|u\|_1^2)$,

(ii) $\frac{\partial \tilde{E}}{\partial u^-}(0, u^0, u^+) = 0$.

Beweis. Wir wählen eine Karte $\varphi : U \to T_\alpha$ mit $\varphi(\alpha) = 0$ und $\varphi_{*,\alpha} = \mathrm{Id}$ (keine Stauchung). Dann folgt bereits (i).

Für (ii) führen wir neue Koordinaten $v = v(u)$ vermöge $v^+ = u^+$, $v^0 = u^0$ und $v^- = u^- - h(u^0, u^+)$ ein, wobei h eine Lösung der impliziten Gleichung

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial u^-}(h(u^0, u^+), u^0, u^+) = 0 \tag{9.1}$$

ist. (9.1) ist lokal eindeutig lösbar, denn $\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial u^{-2}}$ ist nach Definition nichtsingulär. Es gilt $h(0, 0) = 0$. Aus $u^- = v^- + h(v^0, v^+)$ folgern wir, dass

$$\left.\frac{\partial \tilde{E}}{\partial v^-}\right|_{(0,v^0,v^+)} = \left.\frac{\partial \tilde{E}}{\partial u^-}\right|_{(h(v^0,v^+),v^0,v^+)} = 0.$$

Wir wollen nun überprüfen, dass die Bedingung (i) auch noch in den v-Koordinaten gilt: Wir differenzieren (9.1) nach u^0 und erhalten

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial u^{-2}} \frac{\partial h}{\partial u^0} + \underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial u^0 u^-}}_{=0 \quad \text{für } v=0} = 0.$$

Hieraus folgt $\frac{\partial h}{\partial u^0}(0,0) = 0$ und ebenso erhalten wir $\frac{\partial h}{\partial u^+}(0,0) = 0$. Die Ableitungen von $\tilde{E}$ nach u und v hängen nach Ketten- und Produktregel wie folgt zusammen

$$\begin{aligned} d_v(\tilde{E}(v)) &= d_u(\tilde{E}(u(v)))\langle d_v u\rangle, \\ d_v^2(\tilde{E}(v)) &= d_u^2(\tilde{E}(u(v)))\langle d_v u, d_v u\rangle + \underbrace{d_u(\tilde{E}(u(v)))}_{=0 \quad \text{für } v=0}\langle d_v^2 u\rangle. \end{aligned}$$

Wegen $dh(0) = 0$ ist $d_v u(0) = \mathrm{Id}$. Somit folgt $d_v^2 \tilde{E}(v)|_{v=0} = d_u^2 \tilde{E}(u)|_{u=0}$ und (i) bleibt auch in den v-Koordinaten richtig. □

Proposition 9.5. *Sei $\mathcal{M}$ eine H-Mannigfaltigkeit der Klasse C^2 und das Funktional $E \in C^2(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ erfülle die PS-Bedingung. Wir definieren*

$$\mathcal{M}^c := \{x \in \mathcal{M} \,:\, E(x) \le c\}$$

und

$$\mathcal{M}^{c^-} := \{x \in \mathcal{M} \,:\, E(x) < c\}.$$

Es seien $c_0 \le c_1$ und in jedem kritischen Punkt x von E mit $c_0 \le E(x) \le c_1$ existiere eine Darstellung von $E_{**,x}$ wie in Lemma 9.4 beschrieben. Gelte stets ind $E_{**,x} \ge l > 0$ *für alle solchen x. Ist dann $k < l$ und $f_0 : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c_1}, \mathcal{M}^{c_0^-})$ stetig, so ist f_0 homotop (als Abbildung von Paaren) zu einer Abbildung $f_1 : B^k \to \mathcal{M}^{c_0^-}$ innerhalb von $\mathcal{M}^{c_1}$.*

Korollar 9.6. *Das kritische Niveau, welches im Satz von Ljusternik-Fet zu einem Element von $\pi_{k+1}(M) \setminus \{0\}$ konstruiert wurde, enthält wenigstens eine Geodätische vom Index $\le k$.*

Bemerkung 9.7. Wir wollen das Deformationslemma in der folgenden Form benutzen, die direkt aus dem obigen Deformationslemma folgt: Sei $\mathcal{M}$ eine Banachraummannigfaltigkeit und $E \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ erfülle die PS-Bedingung. Definiere $K^c := \{x \in \mathcal{M} \,:\, E(x) = c,\, dE(x) = 0\}$. Sei U eine Umgebung von K^c. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und $\Phi \in C^0(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$ mit

(i) $\Phi(t, x) = 0$ für $t = 0$ oder $dE(x) = 0$.
(ii) $t \mapsto E(\Phi(t, x))$ ist fallend.
(iii) $\Phi(1, E^{c+\varepsilon} \setminus U) \subset E^{c-\varepsilon}$.
(iv) $\Phi(1, E^{c+\varepsilon}) \subset E^{c-\varepsilon} \cup U$.

Durch Verkleinern von $\varepsilon > 0$ können wir aufgrund der PS-Bedingung erreichen, dass $||dE||$ in $\complement U \cap E^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ nach unten durch eine positive Konstante beschränkt ist.

Beweis von Proposition 9.5. Betrachte

$$\mathcal{F} := \left\{ f(B^k) \,\middle|\, \begin{array}{l} f : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c_1}, \mathcal{M}^{c_0^-}) \\ \text{stetig und homotop zu } f_0 \end{array} \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{F}$ ist invariant unter den Halbflüssen ($t \ge 0$) des Deformationslemmas. Somit liefert das Minimax-Verfahren, dass

$$c := \inf_{f(B^k)\in\mathcal{F}} \sup_{f(B^k)} E$$

ein kritischer Wert von E ist. Es gilt $c \le c_1$. Falls $c < c_0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $c_0 \le c \le c_1$. Wir konstruieren eine offene Umgebung U von $K^c := \{x : E(x) = c, dE(x) = 0\}$ mit folgender Eigenschaft:

($\star$) Ist $f : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c^-} \cup U, \mathcal{M}^{c_0^-})$ stetig, so ist f homotop zu einer Abbildung $\tilde{f} : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c^-}, \mathcal{M}^{c_0^-})$.

Angenommen, wir hätten ($\star$) schon gezeigt, so bekämen wir daraus wie folgt einen Widerspruch: Zu U gibt es nach dem Deformationslemma ein $\varepsilon > 0$ und eine Deformation $\Phi_t \equiv \Phi(t, \cdot) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit $0 \le t \le 1$, $\Phi_0 = \mathrm{Id}$, $\Phi_1(\mathcal{M}^{c+\varepsilon}) \subset \mathcal{M}^{c-\varepsilon} \cup U$ und $\Phi_t(\mathcal{M}^s) \subset \mathcal{M}^s$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $t \ge 0$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass in $E^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \setminus U$ die Norm $||dE||$ gleichmäßig nach unten abgeschätzt ist. Dies ist möglich, da E die PS-Bedingung erfüllt. Wähle dann $f(B^k) \in \mathcal{F}$ mit $\sup\limits_{f(B^k)} E < c+\varepsilon$. Definiere

$$f_t := \Phi_t \circ f : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c_1}, \mathcal{M}^{c_0^-}).$$

Aufgrund des Deformationslemmas kann man f_1 auch als Abbildung

$$f_1 : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c-\varepsilon} \cup U, \mathcal{M}^{c_0^-})$$

auffassen. Dann erhalten wir mit Hilfe von ($\star$) einen Widerspruch zur Definition von c.

Zum Beweis von ($\star$): Nach Lemma 9.4 dürfen wir annehmen, dass

$$\tilde{E}(u) = c + E_{**,\alpha}(u^-, u^-) + E_{**,\alpha}(u^+, u^+) + o(||u||^2)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial u^-}(0, u^0, u^+) \equiv 0$$

gelten. Weiterhin existiert aufgrund der PS-Bedingung ein $\delta > 0$, so dass

$$E_{**,\alpha}(u^-, u^-) \le -\delta ||u^-||^2$$

und

$$E_{**,\alpha}(u^+, u^+) \le \delta^{-1} ||u^+||^2$$

für alle $\alpha \in K^c$ gelten. Im Falle $||(0, u^0, u^+)|| \le \varepsilon ||u^-|| \le \varepsilon\sigma$ folgt für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ und $\sigma > 0$

$$\tilde{E}(u) - c \le -\delta ||u^-||^2 + \delta^{-1}\varepsilon^2 ||u^-||^2 + o\left(2(1+\varepsilon^2)||u^-||^2\right) < -\frac{\delta}{2}||u^-||^2. \tag{9.2}$$

Wir schreiben nun $x \equiv \alpha$. Definiere die Umgebung $V_\sigma(x)$ durch $||u^-|| \le \sigma$ und $||(u^0, u^+)|| \le \frac{1}{2}\varepsilon\sigma$. Nehme weiterhin an, dass $\sigma > 0$ so klein gewählt ist, dass $\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial u^{-2}} < 0$ auf $V_\sigma(x)$ gilt.

In lokalen Koordinaten definieren wir das Vektorfeld X auf $V_\sigma(x)$ durch $X(u) := \varphi(u) \cdot (u^-, 0, 0)$, wobei $\varphi \in C^2(V_\sigma(x))$, $\varphi(u) = 1$ für $u \in V_{\sigma/2}$, analog zu V_σ definiert, und $\varphi(u) = 0$ für $u \in \partial V_\sigma(x)$. Nehme an, dass $0 \le \varphi \le 1$ gilt. Wir setzen X auf $\mathcal{M} \setminus V_\sigma(x)$ durch $X \equiv 0$ fort. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = X(u(t)) \\ u(0) = u. \end{cases}$$

Die Integralkurven sind durch $u(t) = (\lambda(t)u^-(0), u^0(0), u^+(0))$ mit $\lambda(0) = 1$ und $\lambda' \ge 0$ gegeben. Für $u = u(0) \in V_{\sigma/2}$ und solange $||e^t u^-(0)|| \le \frac{\sigma}{2}$ gilt, ist $\lambda(t) = e^t$. Die Bedingung $||e^t u^-(0)|| \le \frac{\sigma}{2}$ ist äquivalent zu $t \le \log \frac{\sigma}{2||u^-(0)||}$, falls $||u^-(0)|| \ne 0$ ist.

Behauptung: $\tilde{E}$ ist entlang der Integralkurven abnehmend. Falls $u(0) \in V_{\sigma/2}(x)$ ist mit $u^-(0) \ne 0$, so ist $\tilde{E}$ strikt abnehmend bis unterhalb des Wertes $c - \frac{\delta\sigma^2}{8}$.

Nach Wahl des Koordinatensystems mit $\frac{\partial \tilde{E}}{\partial u^-}(0, u^0, u^+) \equiv 0$ und da $\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial u^{-2}} < 0$ in $V_\sigma(x)$ erhalten wir

$$\frac{d}{ds}\tilde{E}(su^-, u^0, u^+) = 0 \quad \text{für } s = 0$$

und für $u^- \ne 0$

$$\frac{d^2}{ds^2}\tilde{E}(su^-, u^0, u^+) < 0.$$

Somit ist $\frac{d}{ds}\tilde{E}(su^-, u^0, u^+) < 0$ für $u \in V_\sigma$, $u^- \ne 0$ und $0 \le \sigma \le 1$ erfüllt. Zum Zeitpunkt $t = \log \frac{\sigma}{2||u^-(0)||}$ erhalten wir für $u(0) \in V_{\sigma/2}(x)$ und $u^-(0) \ne 0$, dass $u(t) = \left(\frac{\sigma}{2||u^-(0)||}u^-(0), u^0(0), u^+(0)\right)$ ist. Wir erhalten also zu diesem Zeitpunkt aus (9.2)

$$\tilde{E}(u(t)) \le c - \frac{\delta}{2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = c - \frac{\delta\sigma^2}{8},$$

was die Behauptung zeigt.

Außerdem lässt dieser Fluss das Komplement von $V_{\sigma/2}(x)$ invariant.

Die Menge K^c ist kompakt. Somit gibt es $x_1, \ldots, x_N \in K^c$ und $\sigma_j > 0$ sowie $\varepsilon_j > 0$ mit

$$K^c \subset \bigcup_{j=1}^N \operatorname{int}(V_{\sigma_j/2}(x_j)) =: V,$$

wobei V. wie oben von σ_j und ε_j abhängt. Die Proposition folgt nun aus den obigen Teilschritten wie folgt: Gemäß dem Deformationslemma wählen wir $\varepsilon > 0$, so dass $\mathcal{M}^{c+\varepsilon} \setminus V$ in die Menge $\mathcal{M}^{c-\varepsilon}$ deformierbar ist. Setze $U := V \cap \mathcal{M}^{(c+\varepsilon)^-} \supset K^c$. Sei $f : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c^-} \cup U, \mathcal{M}^{c_0^-})$ stetig. Nach Lemma 9.1 können wir $f(B^k) \cap \{x \in V_{\sigma_1/2}(x_1) : u^- = 0\} = \emptyset$ annehmen. Die Kompaktheit von B^k sichert, dass dieser Abstand positiv ist. Sei dann Φ^1_t der Fluss von X_1. Aufgrund der obigen Überlegungen gibt es $t_1 > 0$ und $\eta > 0$, so dass

$$\Phi^1_{t_1}\left(f(B^k) \cap V_{\sigma_1/2}(x_1)\right) \subset \mathcal{M}^{c-\eta}$$

gilt. Da $\complement V_{\sigma_1/2}(x_1)$ unter dem Fluss zu X_1 invariant ist, gilt

$$\Phi^1_{t_1}\left(f(B^k) \cap \complement V_{\sigma_1/2}(x_1)\right) \subset \complement V_{\sigma_1/2}(x_1) \subset \complement\overline{V} \cup \bigcup_{j=2}^N V_{\sigma_j/2}(x_j)$$

und daher insgesamt

$$\Phi^1_{t_1}(f(B^k)) \subset \mathcal{M}^{c^-} \cup \complement\overline{V} \cup \bigcup_{j=2}^{N} V_{\sigma_j/2}(x_j).$$

Beachte, dass $\Phi^1_{t_1}(f(\partial B^k)) \subset \mathcal{M}^{c_0^-}$ gilt, da Φ^1 energievermindernd ist. Ersetze nun f durch $\Phi^1_{t_1} \circ f$ und wiederhole das Argument. Nach N Schritten erhält man eine Deformation $\hat{f}$ von f mit $\hat{f} : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c^-} \cup \complement\overline{V}, \mathcal{M}^{c_0^-})$. Da anfänglich $f(B^k) \subset \mathcal{M}^{c^-} \cup U \subset \mathcal{M}^{c+\varepsilon}$ galt und alle Deformationen energievermindernd waren, folgt $\hat{f}(B^k) \subset \mathcal{M}^{c^-} \cup (\mathcal{M}^{c+\varepsilon} \setminus \overline{V})$. Nach dem Deformationslemma ist $\hat{f}$ nun in eine Abbildung $\tilde{f} : (B^k, \partial B^k) \to (\mathcal{M}^{c^-}, \mathcal{M}^{c_0^-})$ deformierbar. Die Behauptung folgt. □

In geraden Dimensionen erhält man das folgende Theorem, das wir hier nicht beweisen wollen. Beachte dazu insbesondere auch, dass M nach dem Satz von Synge aufgrund der Orientierbarkeit einfach zusammenhängend ist.

Theorem 9.8 (Klingenberg)**.** *Es sei M kompakt, orientierbar, von gerader Dimension und positiver Schnittkrümmung K. Dann gilt für den Injektivitätsradius*

$$\rho(x) \ge \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad \textit{mit } \kappa = \sup K.$$

Proposition 9.9 (Homotopie-Lemma von Klingenberg)**.** *Es sei M vollständig und $\kappa > 0$, so dass die Schnittkrümmung $K \le \kappa$ erfüllt. Ferner seien α, $\beta : [0, \pi] \to M$ zwei verschiedene Geodätische mit $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(\pi) = \beta(\pi)$ und $L(\alpha) = L(\beta)$. Definiere die Hintereinanderausführung $\gamma := \beta^{-1}\alpha : [-\pi, \pi] \to M$. Sei $h : [0, 1] \to H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ ein stetiger Weg mit $h(0) =$ konstant und $h(1) = \gamma$. Dann gibt es $t \in [0, 1]$ mit $L(h(t)) \ge \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$.*

Beweis. Setze $\rho := \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, $U_\rho TM := \{(x, v) \in TM : ||v|| < \rho\}$ und $U_\rho(\Delta) := \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) < \rho\}$. Die Abbildung $(p, \exp) : U_\rho TM \to U_\rho(\Delta)$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, da Geodätische der Länge $< \rho$ keine konjugierten Punkte besitzen, was wir noch zeigen werden. Wir bezeichnen die Null in T_xM mit 0_x und die Einschränkung $\exp_x : U_\rho(0_x) \to U_\rho(x)$ wie angegeben.

Zur Behauptung, dass alle Geodätischen der Länge $< \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ frei von konjugierten Punkten sind: Sei $\alpha : [0, l] \to M$ eine Geodätische mit $||\alpha'|| = 1$, X ein Normalenfeld längs α mit $X(0) = X(l) = 0$. Für die zweite Variation der Energie erhalten wir die folgende Abschätzung

$$E_{**,\alpha}(X, X) = \int_0^l (\langle \nabla X, \nabla X\rangle - \langle R(X, \alpha')\alpha', X\rangle)\, ds \ge \int_0^l \left(||\nabla X||^2 - \kappa ||X||^2\right)\, ds$$

Mit $X = \sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i X_i$, wobei $X_2, \ldots, X_m$ längs α parallele normale orthonormierte Vektorfelder sind, folgt

$$E_{**,\alpha}(X, X) \ge \int_0^l \sum_{i=2}^{m} \left(\lambda_i'^2 - \kappa\lambda_i^2\right)\, ds = \int_0^l \sum_{i=2}^{m} (-\lambda_i'' - \kappa\lambda_i)\lambda_i\, ds.$$

Konjugierte Punkte des Systems $\lambda_i'' = -\kappa\lambda_i$ sind $\frac{k\pi}{\sqrt{\kappa}}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, die Jacobifelder in einer Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ erfüllen $\lambda_i(s) =$

$c_i \sin(\sqrt{\kappa} s)$. Daher ist

$$E_{**,\alpha}(X,X) > 0, \quad \text{falls } l < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

und die Behauptung über konjugierte Punkte folgt.

Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$, so dass $L(h(t)) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} - 2\varepsilon = 2\rho - 2\varepsilon$ für alle $t \in [0,1]$ wäre.

Wir behaupten, dass es eine stetige Funktion $\sigma = \sigma(t)$ mit $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(1) = 0$ gibt, so dass

$$L(h(t)|_{[-\pi,\sigma(t)]}) < \rho \quad \text{und} \quad L(h(t)|_{[\sigma(t),\pi]}) < \rho.$$

Da $h : [0,1] \to H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|L(h(t_1)|_{[s_1,s_2]}) - L(h(t_2)|_{[s_1,s_2]})| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |t_1 - t_2| < \delta \text{ und für alle } s_1 < s_2. \tag{9.3}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\delta}$ und für $i = 0, \ldots, N$ wähle σ_i mit $L(h(i/N)|_{[-\pi,\sigma_i]}) = \frac{1}{2} L(h(i/N))$ sowie $\sigma_0 = 0$ und $\sigma_N = 0$. Definiere σ durch affin lineare Interpolation auf $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]$ mit $\sigma(i/N) = \sigma_i$.

Sei nun i fest und ohne Einschränkung $\sigma_i \le \sigma_{i+1}$. Sei $\frac{i}{N} \le t \le \frac{i+1}{N}$. Unter doppelter Benutzung von (9.3) und da $[-\pi, \sigma(t)] \subset [-\pi, \sigma_{i+1}]$ ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} L(h(t)|_{[-\pi,\sigma(t)]}) &\le L(h(t)|_{[-\pi,\sigma_{i+1}]}) < L\left(h\left(\tfrac{i+1}{N}\right)\Big|_{[-\pi,\sigma_{i+1}]}\right) + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \tfrac{1}{2} L\left(h\left(\tfrac{i+1}{N}\right)\right) + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{1}{2} L(h(t)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Analog dazu erhalten wir auch

$$L(h(t)|_{[\sigma(t),\pi]}) < \tfrac{1}{2} L(h(t)) + \varepsilon.$$

Somit existiert eine stetige Funktion σ wie oben behauptet.

Durch Umparametrisieren der Kurven $h(t)$ kann man ohne Einschränkung $\sigma(t) \equiv 0$ annehmen.

Angenommen, eine Kurve $c : [0,a] \to U_\rho(x)$ mit $c(0) = x$ und $L(c) < \rho$ besitzt eine Liftung $\tilde{c} : [0,a] \to U_\rho(0_x)$ unter $\exp_x$ mit $\tilde{c}(0) = 0_x$. Nach dem Gauß-Lemma 3.6 gilt $\|\tilde{c}(t)\| \le L(c) < \rho$ für alle $t \in [0,a]$. Daher besitzt jede Kurve $c : [0,a] \to U_\rho(x)$ mit $L(c) < \rho$ eine eindeutige Liftung $\tilde{c} : [0,a] \to U_\rho(0_x)$. Insbesondere besitzt jede der Kurven $h(t)$ eine Liftung $\tilde{h}(t) : [-\pi, +\pi] \to T_{h(t)(0)}M \cap U_\rho(0_{h(t)(0)})$ mit $\tilde{h}(t)(0) = 0_{h(t)(0)}$. Diese Liftungen hängen stetig von t ab, da $(p, \exp)|_{U_\rho TM}$ ein lokaler Homöomorphismus (sogar ein lokaler Diffeomorphismus) ist. Damit ist $\tilde{h}$ eine Homotopie. Alle Liftungen $\tilde{h}(t)$ sind geschlossene Kurven, da $\tilde{h}(t)$ eine konstante Kurve und $(p, \exp)$ lokal eineindeutig ist. Somit ist auch $\tilde{h}(1)$ eine geschlossene Kurve. Dies ist aber ein Widerspruch, da $\tilde{h}(1)$ nach Konstruktion aus der Liftung von zwei verschiedenen Geodätischen, also aus zwei Geradensegmenten, besteht. □

Theorem 9.10 (Klingenberg).
Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung K der Bedingung $\kappa/4 < K \le \kappa$ mit $\kappa > 0$ genügt. Dann gilt für den Injektivitätsradius ρ die Ungleichung $\rho \ge \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Beweis. Für gerade Raumdimensionen folgt die Behauptung aus einfacheren Überlegungen zu Minimaleigenschaften von Geodätischen. Sei also $\dim M$ ungerade und $\alpha : [0,l] \to M$ eine Geodätische mit $\|\alpha'\| = 1$. Sei $X_1, \ldots, X_m$ ein paralleles Orthonormalsystem längs α mit $X_1 = \alpha'$. Betrachte ein normales Vektorfeld X mit

$X(0) = X(l) = 0$ und definiere Funktionen $(\lambda_i)_i$ durch $X = \sum\limits_{i=2}^m \lambda_i X_i$. Aufgrund der Voraussetzungen an die Schnittkrümmung gelten die Abschätzungen

$$E_{**,\alpha}(X,X) \ge \int\limits_0^l \sum_{i=2}^m \left((\lambda_i')^2 - \kappa\lambda_i^2\right)\,ds$$

und

$$E_{**,\alpha}(X,X) < \int\limits_0^l \sum_{i=2}^m \left((\lambda_i')^2 - \frac{\kappa}{4}\lambda_i^2\right)\,ds, \quad \text{falls } X \not\equiv 0.$$

Durch Vergleich mit Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen bzw. aus dem Morseschen Indexsatz erhalten wir, dass

(i) $\operatorname{ind} E_{**,\alpha} = 0$ für $l \le \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.
(ii) $E_{**,\alpha}$ für $l < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ positiv ist.
(iii) für $l \ge \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ die Ungleichung $\operatorname{ind} E_{**,\alpha} \ge m-1 \ge 2$ gilt, da es keine eindimensionalen kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten gibt.

Angenommen, es wäre $\rho < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Dann gäbe es ein nichttriviales geodätisches Zweieck α, β mit $L(\alpha) = L(\beta) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Es sei $\gamma : [-\pi,\pi] \to M$ die geschlossene Kurve $\beta^{-1}\alpha$ und $h : [0,1] \to H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)$ ein stetiger Weg mit $h(0) =$ konstant und $h(1) = \gamma$. Solch einen Weg gibt es, da die Mannigfaltigkeit nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist. Auf $[-\pi,+\pi]$ gilt $L^2 \le 4\pi E$ aufgrund der Hölderschen Ungleichung mit Gleichheit falls $|\gamma'| = 1$ fast überall. γ ist sückweise Geodätische. Daher gilt $\frac{(2\pi)^2}{\kappa} > L^2(\gamma) = 4\pi E$ und somit $\frac{\pi}{\kappa} > E$. Nach dem Homotopie-Lemma 9.9 folgt

$$\sup_{t\in[0,1]} E(h(t)) \ge \frac{1}{4\pi} \sup_{t\in[0,1]} L^2(h(t)) \ge \frac{\pi}{\kappa}.$$

Setze $c_0 := \frac{\pi}{\kappa}$ und $c_1 := \sup\limits_{t\in[0,1]} E(h(t)) \ge c_0$. Jeder kritische Punkt α von E mit $E(\alpha) \ge c_0$ erfüllt nach Hölder $\frac{\pi}{\kappa} \le E = \frac{1}{4\pi}L^2$, also $L \ge \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und daher ist der Index des kritischen Punktes aufgrund der obigen Überlegungen $\ge m-1 \ge 2$. Dies widerspricht Proposition 9.5, da sich die Homotopie h in $\{E < c_0\}$ „drücken“ lässt. □

Eine Verallgemeinerung des folgenden Theorems wurde von S. Brendle und R. Schoen gezeigt [1, 2]. Sie zeigen insbesondere, dass die Mannigfaltigkeiten im Falle $\pi_1(M) = 0$ nicht nur homöomorph sondern sogar diffeomorph zur Sphäre sind.

Theorem 9.11 (1/4-Pinching)**.** *Sei M kompakt und erfülle die Schnittkrümmung K die Bedingung $\frac{\kappa}{4} < K \le \kappa$ für ein $\kappa > 0$. Dann gilt für $j = 2,\ldots,m-1$ für die Homotopiegruppen $\pi_j(M) = 0$.*

Bemerkung 9.12. Ist zusätzlich $\pi_1(M) = 0$, so ist M^m eine Homotopiesphäre. Eine Homotopiesphäre ist nach Hurewicz eine Mannigfaltigkeit, bei der die Homotopiegruppen mit denen der Sphäre übereinstimmen.

Benutzt man die Poincaré-Vermutung, die nach Smale ($m \ge 5$), Freedman ($m = 4$) und Perelman ($m = 3$) gilt, dann ist M homöomorph zu $\mathbb{S}^m$. Man kann diese Folgerung auch ohne die (kompliziert zu beweisende) Poincaré-Vermutung zeigen.

Beweis von Theorem 9.11. Sei zunächst $\pi_1(M) = 0$. Aus Theorem 9.10 (das als Voraussetzung $\pi_1(M) = 0$ benötigt) folgt aufgrund des Morseschen Indexsatzes, Theorem 4.14, dass jede geschlossene Geodätische einen Index $\geq m - 1$ hat. Sei nun $f \in C^0(\mathbb{S}^j, M)$. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass f (beliebig oft) differenzierbar ist. Wie beim Beweis des Satzes von Ljusternik-Fet induziert f eine stetige Abbildung

$$F := \Phi(f) : \left(B^{j-1}, \partial B^{j-1}\right) \to \left(H^{1,2}\left(\mathbb{S}^1, M\right), M\right).$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass alle Kurven der Energie $\leq \varepsilon$, die also in $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)^\varepsilon$ liegen, (in einer geeigneten Kartenumgebung) auf die konstanten Kurven homotopierbar sind. Nach Proposition 9.5 ist F für $2 \leq j \leq m - 1$ zu einer Abbildung $\tilde{F} : \left(B^{j-1}, \partial B^{j-1}\right) \to H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M)^\varepsilon$ und damit sogar (ohne Einschränkung; $\varepsilon > 0$ klein genug) zu einer konstanten Abbildung $F_1 : \left(B^{j-1}, \partial B^{j-1}\right) \to M$ deformierbar. Also ist f in M wie behauptet nullhomotop.

Im allgemeinen Fall sei $p : \left(\tilde{M}, \tilde{g}\right) \to (M, g)$ die Riemannsche universelle Überlagerung. Auch $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ erüllt $\frac{\kappa}{4} < \tilde{K} \leq \kappa$ und ist insbesondere einfach zusammenhängend und vollständig. Nach dem Satz von Myers [6, Theorem 2.6.3] (Eine positive untere Schranke an die Schnittkrümmung impliziert, dass eine Geodätische ab einer gewissen Länge der Kurve nicht mehr minimierend ist, was eine obere Schranke an den Durchmesser liefert.) ist $\tilde{M}$ daher kompakt. Nach den obigen Überlegungen ist also $\pi_j\left(\tilde{M}\right) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m - 1$. Da S^j für $j \geq 2$ einfach zusammenhängend ist, lässt sich die Abbildung $f : \mathbb{S}^j \to M$ zu einer Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{S}^j \to \tilde{M}$ liften, die f überlagert ist, also $f = p \circ \tilde{f}$ erfüllt. Da $\pi_j\left(\tilde{M}\right) = 0$ ist, ist $\tilde{f}$ nullhomotop. Verketten wir die Homotopie, die zeigt, dass $\tilde{f}$ nullhomotop ist, mit p, so erhalten wir ein Homotopie, die zeigt, dass f ebenfalls nullhomotop ist, die Behauptung folgt also. □

Literatur

1. Simon Brendle and Richard M. Schoen, *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms*, `arXiv:0705.0766v2 [math.DG]`.
2. Simon Brendle, *Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures*, `arXiv:0705.3963v1 [math.DG]`.
3. Haïm Brézis, Jean-Michel Coron, and Louis Nirenberg, *Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 5, 667–684.
4. Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg, and Wolfgang Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Zweite Auflage, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 55.
5. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, `http://www.math.cornell.edu/ hatcher/`.
6. Wilhelm P. A. Klingenberg, *Riemannian geometry*, second ed., de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 1, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.
7. Lazar A. Lyusternik and Abram I. Fet, *Variational problems on closed manifolds*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **81** (1951), 17–18.
8. Michael Struwe, *Variational methods*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 2000, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.
9. Friedrich Tomi, *Differentialgeometrie II*, 1997/8, Lecture Notes.
10. Friedrich Tomi, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, 1997, Lecture Notes.
11. Michel Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

Oliver C. Schnürer, Freie Universität Berlin, Arnimallee 6, 14195 Berlin, Germany
E-mail address: Oliver.Schnuerer@math.fu-berlin.de