# DIFFERENTIALGEOMETRIE II

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Differentialgeometrie II an der Universität Konstanz.

INHALTSVERZEICHNIS



In der Differentialgeometrie geht es um Mannigfaltigkeiten und deren Krümmung.

## 13. GEODÄTISCHE

Die Kapitel über Geodätische und Tensoranalysis beinhalten gewissen Überschneidungen mit späteren Kapiteln. In aktuellen Kapitel geht es insbesondere auch darum, zu zeigen, dass z. B. die Eigenschaft, eine Geodätische zu sein, nur von der inneren Geometrie abhängt und nicht von der Immersion einer Untermannigfaltigkeit.

### 13.1. **Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten.**

**Definition 13.1.** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine $C^2$-Untermannigfaltigkeit. Sei $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine $C^2$-Kurve mit $\alpha(t) \in M$ für alle $t \in (a, b)$. Dann heißt $\alpha$ Geodätische, falls

$$\ddot{\alpha}(t) \in \left(T_{\alpha(t)}M\right)^{\perp}$$

für alle $t \in (a, b)$ gilt.

**Bemerkung 13.2.**

---

*Date*: 5. Oktober 2018.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Vielen Dank an Elisabeth Greiler für das Tippen einiger Abschnitte.

Benutzt: Sommersemester 2018.

(i) In der Definition haben wir die Dimension von $M$ nicht vorgegeben. Auch $M = \mathbb{R}^{n+1}$ ist möglich. Wir schreiben auch $\alpha : (a, b) \to M$. Manchmal betrachten wir auch Geodätische auf halb offenen oder abgeschlossenen Intervallen.

(ii) Physikalische Interpretation: Beschreibt $\alpha(t)$ die Lage eines Massenpunktes auf $M$ zur Zeit $t$, so ist $m\ddot{\alpha} = F$ die auf den Massenpunkt wirkende Kraft. Die Bedingung $\ddot{\alpha}(t) \in \left(T_{\alpha(t)}M\right)^{\perp}$ besagt also, dass keine tangentialen Kräfte auf den Massenpunkt wirken. In normaler Richtung wirken die Zwangskräfte, die den Massenpunkt auf $M$ halten.

Im Falle $M = \mathbb{R}^{n+1}$ lautet die Bewegungsgleichung $\ddot{\alpha} = 0$ und beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes, auf den keine Kräfte wirken.

(iii) Geometrische Folgerung: Definiere $\alpha(t) := x_0 + t(x_1 - x_0)$ für $x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $t \in [0, 1]$. Dann ist $\alpha$ eine Geodätische mit Länge $L(\alpha) = |x_1 - x_0|$. Sei $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine weitere $C^1$-Kurve mit $y(0) = x_0$ und $y(1) = x_1$. Dann gilt aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} L(y) = \int_0^1 |\dot{y}(t)|\, dt &\geq \int_0^1 \frac{\langle \dot{y}(t), x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|} dt \\ &= \frac{\langle y(1), x_1 - x_0\rangle - \langle y(0), x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|} \\ &= \frac{|x_1 - x_0|^2}{|x_1 - x_0|} = |x_1 - x_0| = L(\alpha). \end{aligned}$$

Somit ist $y$ die Kürzeste $C^1$-Kurve, die $x_0$ und $x_1$ verbindet. Wir werden später sehen, dass Geodätische, eingeschränkt auf kleine Intervalle, ebenfalls die Länge zwischen ihren Endpunkten minimieren. Wir sagen daher, dass Geodätische lokal Kürzeste sind.

**Proposition 13.3.** *Eine Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

*Beweis.* Es gilt $\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|^2 = 2\langle \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\rangle = 0$. □

**Beispiele 13.4.**

(i) Ist $\alpha$ eine Geodätische, so ist auch $t \mapsto \alpha(\lambda t)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Geodätische.

(ii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\alpha(t) = u + tv \in M$ für alle $t \in (a, b)$. Dann ist $\alpha$ ein Geradensegment und eine Geodätische.

(iii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ orthonormale Vektoren. Dann ist der Großkreis $\alpha : (a, b) \to \mathbb{S}^n$ mit $\alpha(t) = \cos t \cdot u + \sin t \cdot v$ eine Geodätische.

(iv) Sei $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ ein Zylinder. Dann ist für beliebiges $h \in \mathbb{R}$ die Spiralkurve $\alpha : \mathbb{R} \to M$, $t \to (\cos t, \sin t, ht)$ eine Geodätische, da

$$\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \in \left(T_{\alpha(t)}M\right)^{\perp}$$

gilt. Wickeln wir den Zylinder auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ ab, so wird aus der Spiralkurve $\alpha$ eine Gerade, also ebenfalls eine Geodätische. Es gilt allgemein, dass Isometrien $\Phi\colon M \to \tilde{M}$ Geodätische auf Geodätische abbilden. Dabei ist es irrelevant, wie $M$ im Raum liegt. Wir sagen daher, dass die Eigenschaft, Geodätische zu sein, nur von der inneren Geometrie von $M$, also der Metrik, abhängt. Solche Dinge werden wir auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten untersuchen. Weitere Beispiele, die nur von der inneren Geometrie abhängen, sind die Länge einer Kurve oder der Abstand zwischen zwei Punkten.

(v) Auf dem Ellipsoid
$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$
ist jede proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, die in einer der Koordinatenebenen $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ oder $\{z=0\}$ verläuft, eine Geodätische.

Sei $E$ eine der Koordinatenebenen mit $\alpha(t) \in E$ für alle $t$. Gelte ohne Einschränkung $|\dot\alpha(t)| = 1$ für alle $t$. Aus Symmetriegründen gilt $\nu(\alpha(t)) \in E$ für alle $t$. Die Vektoren $\dot\alpha(t)$ und $\nu(\alpha(t))$ bilden somit eine Orthonormalbasis von $E$. Aus $\alpha(t) \in E$ für alle $t$ folgt auch $\ddot\alpha(t) \in E$. Schließlich gilt $2\langle\ddot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle = \frac{d}{dt}|\dot\alpha(t)|^2 = 0$. Daher ist $\ddot\alpha(t)$ proportional zu $\nu(x(t))$.

(vi) Bestimme auf dem durch die Gleichung
$$\beta(x^2+y^2) = z^2$$
mit $z \neq 0$ und $\beta > 0$ im $\mathbb{R}^3$ definierten Kegel Geodätische, die keine Geradenstücke sind. Benutze dabei eine lokale Isometrie zu $\mathbb{R}^2$ für eine Vermutung über das Aussehen dieser Geodätischen. (Details: Übung.)

**Theorem 13.5.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Seien $p \in M$ und $V \in T_pM$. Dann gibt es genau eine maximale Geodätische $\alpha$ mit $\alpha(0) = p$ und $\dot\alpha(0) = V$.*

Ohne explizite Regularitätsangabe gehen wir stets davon aus, dass alle Daten regulär sind.

*Beweis.* Wir leiten zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\alpha$ her. Ist $\alpha$ eine Geodätische auf einer Hyperfläche $M$, so gilt
$$\ddot\alpha(t) = \langle\ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle\, \nu(\alpha(t)).$$
Sei (lokal) $M = f^{-1}(\{0\})$ eine Niveauflächendarstellung. Wir setzen $\nu$ vermöge $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ in eine Umgebung von $M$ fort. Aus $\langle\dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$ erhalten wir
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle\dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle \\ &= \langle\ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \left\langle \dot\alpha(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)) \right\rangle \\ &= \langle\ddot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \langle\dot\alpha(t), D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle. \end{aligned}$$
Oben eingesetzt erhalten wir also
$$\ddot\alpha(t) = -\langle\dot\alpha(t), D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle\rangle \cdot \nu\left((\alpha(t)\right). \tag{13.1}$$
Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt die obige Differentialgleichung für $\alpha$ auf einem kleinen Zeitintervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\alpha$ für die Anfangswerte $\alpha(0) = p$ und $\dot\alpha(0) = V$. Wir behaupten zunächst, dass $\alpha(t) \in M$ für alle $t$ gilt.

Es gilt
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) &= \langle\nabla f(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \\ &= \langle\nabla f(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)\rangle \cdot \langle\nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \\ &= |\nabla f(\alpha(t))| \cdot \langle\nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle. \end{aligned}$$
Wir definieren $g(t) := \langle\nu(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle$ und erhalten
$$\dot g(t) = \langle D\nu(\alpha(t))\langle\dot\alpha(t)\rangle, \dot\alpha(t)\rangle + \langle\nu(\alpha(t)), \ddot\alpha(t)\rangle = 0$$
aufgrund der Differentialgleichung für $\alpha$. Somit folgt $g(t) = g(0) = 0$ für alle $t$ und daraus $\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$ sowie $f(\alpha(t)) = f(\alpha(0)) = 0$. Daher gilt $\alpha(t) \in M$ für alle $t$.

Somit hängt die Geodätische nicht von der Wahl von $f$ ab. Durch Vereinigung aller Existenzintervalle von Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichung mit gegebenem Anfangswert erhalten wir eine eindeutige maximale Geodätische. $\square$

**Beispiele 13.6.** In den folgenden Beispielen verzichten wir auf die Angabe der Parametrisierungen und geben ähnlich wie bei Hyperflächen nur das Bild an.

(i) Auf $\mathbb{S}^n$ sind alle Geodätischen Teile von Großkreisen, da für beliebige $p \in \mathbb{S}^n, V \in T_p\mathbb{S}^n$ ein Großkreis, also ein Geodätische, mit diesen Anfangsdaten existiert.
(ii) Mit einer analogen Begründung erhalten wir, dass auf dem Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sämtliche Geodätischen durch Spiralkurven, durch zu Kreisen $\mathbb{S}^1 \times \{x\}$ oder durch zu Geraden $\{p\} \times \mathbb{R}$ degenerierten Spiralkurven gegeben sind.

**Definition 13.7.** Eine Untermannigfaltigkeit heißt geodätisch vollständig, wenn jede maximale Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

**Beispiele 13.8.**
(i) $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, und $\mathbb{R}^{n+1}$ sind geodätisch vollständig. Wir kennen alle Geodätischen und wissen, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.
(ii) $\mathbb{S}^n \backslash \{p\}$ für ein beliebiges $p \in \mathbb{S}^n$ ist nicht geodätisch vollständig, da jede maximale Geodätische durch $-p$ ein Großkreis ist, der auch durch $p$ läuft.
(iii) $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ ist nicht geodätisch vollständig.
(iv) $B_1(0)$ ist nicht geodätisch vollständig.
(v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2, z \neq 0\}$ ist nicht geodätisch vollständig, da $\alpha(t) = (t, 0, t)$, $t > 0$, eine maximale Geodätische ist.

**Theorem 13.9.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $M$ als metrischer Raum mit der von der euklidischen Metrik induzierten Metrik vollständig. Dann ist $M$ geodätisch vollständig.*

*Beweis.* Sei $\alpha \colon I \to M$ eine maximale Geodätische. Wir dürfen nach Umparametrisierung vermöge $\alpha(\lambda t), \lambda > 0$, ohne Einschränkung annehmen, dass $\alpha$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist: $|\dot{\alpha}(t)| \equiv 1$.

Angenommen es gilt $\sup I =\colon T < \infty$.

Aus $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ folgt für $s < t$

$$|\alpha(t) - \alpha(s)| \le \int\limits_s^t |\dot{\alpha}(\tau)| \, d\tau = |t - s|.$$

Daher existiert

$$p\colon = \lim_{t \nearrow T} \alpha(t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Da $M$ als metrischer Raum vollständig ist, folgt auch $p \in M$. Mit der Differentialgleichung (13.1) und $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ erhalten wir für große $s < t < T$

$$\begin{aligned} |\dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}(s)| = {} & \left| \int\limits_s^t \ddot{\alpha}(\tau) \, d\tau \right| \le \int\limits_s^t |\ddot{\alpha}(\tau)| \, d\tau = \int\limits_s^t |\langle \dot{\alpha}(\tau), D\nu(\alpha(\tau))\langle \dot{\alpha}(\tau)\rangle\rangle| \, d\tau \\ \le {} & \int_s^t |D\nu(\alpha(\tau))| \, d\tau \le \sup_{B_\varepsilon(p) \cap M} |D\nu| \cdot |t - s|, \end{aligned}$$

falls $\alpha(\tau) \in B_\varepsilon(p)$ für alle $\tau > s$ gilt. Wir nehmen nun an, dass $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\sup\limits_{B_\varepsilon(p) \cap M} |D\nu| < \infty$ gilt. Wir erhalten daraus, dass auch

$$V := \lim_{t \nearrow T} \dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

existiert. Im Grenzübergang überlebt auch die Orthogonalitätsbedingung (Details: Übung)

$$\langle V, \nu(p)\rangle = \lim_{t\nearrow T} \langle \dot\alpha(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0.$$

Somit gilt $V \in T_pM$.

Sei $\beta\colon [0,\delta) \to M$ eine Lösung der Differentialgleichung (13.1) mit Anfangswerten $\beta(0) = p$ und $\dot\beta(0) = V$. Die Differentialgleichung (13.1) ist wegen

$$\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s) = \int\limits_s^t \ddot\alpha(\tau)\, d\tau$$

äquivalent zur Integralgleichung

$$\dot\alpha(t) - \dot\alpha(s) = -\int\limits_s^t \langle \dot\alpha(\tau), D\nu(\alpha(\tau))\langle\dot\alpha(\tau)\rangle\rangle \cdot \nu(\alpha(\tau))\, d\tau.$$

Zunächst ist

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t), & t < T, \\ \beta(t-T), & T \le t < T+\delta \end{cases}$$

eine $C^1$-Kurve auf $M$. Damit lösen nicht nur $\alpha$ und $\beta$, sondern auch $\gamma$ die Integralgleichung, insbesondere nahe $t = T$. Daher ist auch $\gamma \in C^2$ und $\gamma$ löst (13.1). Daher war $T < \infty$ nicht maximal. Widerspruch. Somit ist $M$ geodätisch vollständig. $\square$

**Korollar 13.10.** *Sei $M \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine geschlossene $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $M$ geodätisch vollständig.*

13.2. **Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung.** Wir nehmen wieder an, dass alle betrachteten Objekte glatt sind.

**Definition 13.11.** Sei $M$ eine reguläre Hyperfläche. Sei $\alpha : I \to M$ eine Kurve.

(i) Dann heißt $X : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein (tangentiales) Vektorfeld längs $\alpha$, falls

$$X(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

für alle $t \in I$ gilt.

(ii) Die kovariante Ableitung von $X$ längs $\alpha$ ist das (tangentiale) Vektorfeld

$$\frac{D}{dt}X(t) = \frac{dX}{dt}(t) - \left\langle \nu(\alpha(t)), \frac{dX}{dt}(t)\right\rangle \nu(\alpha(t)),$$

also die Projektion von $\dot X$ auf $T_{\alpha(t)}M$.

**Beispiel 13.12.** $\alpha$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $\frac{D}{dt}\dot\alpha(t) = 0$ gilt.

**Lemma 13.13.** *Für die kovariante Ableitung von (tangentialen) Vektorfeldern $X, Y$ längs einer Kurve $\alpha\colon I \to M$ und für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ gelten*

*(i)* $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y$,

*(ii)* $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{d}{dt}fX + f\frac{D}{dt}X$,

*(iii)* $\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{D}{dt}Y\right\rangle$.

*Beweis.* Benutze die entsprechenden Eigenschaften der Ableitung aus der Analysis-Vorlesung und die Definition der kovarianten Ableitung. Beispielsweise gilt:

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \dot X, Y\right\rangle + \left\langle X, \dot Y\right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X, Y\right\rangle + \left\langle X, \frac{D}{dt}Y\right\rangle,$$

da $X(t), Y(t) \in T_{\alpha(t)}M$ gilt. Dies liefert (iii). $\square$

**Definition 13.14.** Ein Vektorfeld $X$ längs $\alpha$ heißt parallel längs $\alpha$, falls $\frac{D}{dt}X = 0$ gilt.

**Beispiel 13.15.** Sei $\alpha$ eine Geodätische. Dann ist $\dot{\alpha}$ längs $\alpha$ parallel.

**Proposition 13.16.** *Sei $\alpha : I \to M$ eine Kurve und seien $X, Y$ längs $\alpha$ parallele Vektorfelder. Dann gelten*

*(i) $X + Y$ und $aX$, $a \in \mathbb{R}$, sind ebenfalls längs $\alpha$ parallele Vektorfelder.*
*(ii) Insbesondere bilden die längs $\alpha$ parallelen Vektorfelder also einen Vektorraum.*
*(iii) $|X(t)|$ ist konstant.*
*(iv) $\langle X(t), Y(t)\rangle$ ist konstant. Insbesondere ist also auch der Winkel $\gamma(t)$ zwischen zwei nichtverschwindenden Vektorfeldern mit $\cos\gamma(t) = \frac{\langle X(t),Y(t)\rangle}{|X(t)|\cdot|Y(t)|}$ konstant.*

*Beweis.*
(i) Klar.
(ii) Klar.
(iii) Dies folgt aus (iv).
(iv) Es gilt $\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}X(t), Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\right\rangle = 0$. □

**Theorem 13.17.** *Sei $M$ eine Hyperfläche und $\alpha : I \to M$ eine Kurve. Sei $0 \in I$ und $\alpha(0) = p$. Sei $X_0 \in T_pM$. Dann gibt es genau ein längs $\alpha$ paralleles Vektorfeld $X$ mit $X(0) = X_0$.*

*Beweis.* Nach Definition der kovarianten Ableitung und mit $\langle X(t), \nu(\alpha(t))\rangle = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \frac{D}{dt}X(t) + \langle \dot{X}(t), \nu(\alpha(t))\rangle \nu(\alpha(t))\\ &= \frac{D}{dt}X(t) + \frac{d}{dt}\langle X(t), \nu(\alpha(t))\rangle \nu(\alpha(t)) - \left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \nu(\alpha(t))\\ &= \frac{D}{dt}X(t) - \left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \nu(\alpha(t)).\end{aligned}$$

Daher muss jedes längs $\alpha$ parallele Vektorfeld $X$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{X}(t) = -\left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle \nu(\alpha(t))$$

erfüllen. Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Daher gibt es eine globale Lösung $X \in C^\infty\left(I, \mathbb{R}^{n+1}\right)$. Aus dieser Differentialgleichung folgt auch, dass $Y(t)$ tangential bleibt, da

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), \nu(\alpha(t))\rangle = \langle \dot{X}(t), \nu(\alpha(t))\rangle + \left\langle X(t), \frac{d}{dt}\nu(\alpha(t))\right\rangle = 0$$

gilt. □

**Korollar 13.18.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $\alpha : I \to M$ eine Kurve. Dann bilden die längs $\alpha$ parallelen Vektorfelder $X$ einen n-dimensionalen Vektorraum.*

*Beweis.* Wir haben bereits gesehen, dass die parallelen Vektorfelder längs $\alpha$ einen Vektorraum bilden. Sei $t_0 \in I$. Dann ist $X$ durch $X(t_0)$ eindeutig bestimmt. Somit ist der Vektorraum n-dimensional. □

**Beispiel 13.19.** Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ der Äquator auf der Sphäre mit $\alpha(t) = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2$, wobei $e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Dann gilt

$$T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2 = \langle \dot{\alpha}(t), e_3\rangle \equiv \operatorname{span}\{\dot{\alpha}(t), e_3\}.$$

Jedes längs $\alpha$ parallele Vektorfeld $X$ hat die Form

$$X(t) = c_1 \cdot \dot{\alpha}(t) + c_2 \cdot e_3$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

*Beweis.* Wegen $\dot\alpha(t) \perp e_3 \perp \alpha(t) \perp \dot\alpha(t)$ ist klar, dass $\dot\alpha(t)$ und $e_3$ den Tangentialraum $T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ aufspannen. $\dot\alpha$ ist parallel, da $\alpha$ eine Geodätische ist. Da $e_3 \in T_{\alpha(t)}\mathbb{S}^2$ ist, konstante Länge hat und stets senkrecht auf $\dot\alpha(t)$ steht, ist $e_3$ ein paralleles Vektorfeld längs $\alpha$. Da die parallelen Vektorfelder längs $\alpha$ einen 2-dimensionalen Vektorraum bilden, hat $X$ die angegebene Form. □

**Definition 13.20.** Sei $\alpha\colon I \to M$ eine Kurve in einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Seien $p = \alpha(0)$ und $q = \alpha(1)$. Sei $X_0 \in T_pM$ und $X$ das parallele Vektorfeld längs $\alpha$ mit $X(0) = X_0$. Dann definieren wir die Parallelverschiebung

$$P_\alpha\colon T_pM \to T_qM$$

durch

$$X_0 \mapsto X(1).$$

**Theorem 13.21.** *Die Parallelverschiebung ist ein isometrischer Vektorraumisomorphismus.*

*Beweis.* Da parallele Vektorfelder längs $\alpha$ einen Vektorraum bilden, folgt die Linearität. Aus $|X(0)| = |X(1)|$ erhalten wir, dass $P_\alpha$ die Norm erhält und insbesondere injektiv ist. Wegen $\dim T_pM = \dim T_qM < \infty$ ist $P_\alpha$ damit auch surjektiv. Somit ist $P_\alpha$ ein Vektorraumisomorphismus. □

**Bemerkung 13.22.**
(i) Die Parallelverschiebung entlang eines stückweise glatten Weges $\alpha_k + \ldots + \alpha_1$ definieren wir durch $P_{\alpha_k} \circ \ldots \circ P_{\alpha_1}$.
(ii) Die Parallelverschiebung $P_\alpha$ hängt nicht nur von $\alpha(0)$ und $\alpha(1)$, sondern auch vom Weg dazwischen ab, selbst bei Geodätischen. (Details: Übung.)

### 13.3. **Geodätische als Objekte der inneren Geometrie von Hyperflächen.**

**Lemma 13.23.** *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte $C^2$-Hyperfläche. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine $C^2$-Kurve, so dass $\beta := X \circ \alpha$ eine Geodätische in $X(\Omega) \equiv M$ ist. Dann gilt*

$$\ddot\alpha^i + \dot\alpha^k\dot\alpha^l\Gamma^i_{kl} \circ \alpha = 0$$

*für alle $1 \le i \le n$.*

*Beweis.* Aus $\ddot\beta(t) \in (T_{\beta(t)}M)^\perp$ erhalten wir $\left\langle \ddot\beta(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle = 0$ für alle $t \in I$ und alle $1 \le j \le n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \ddot\beta(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \left\langle \frac{d^2}{dt^2}(X(\alpha(t)), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}\left(X_k(\alpha(t))\dot\alpha^k(t)\right), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \left\langle X_k(\alpha(t))\ddot\alpha^k(t) + X_{,kl}(\alpha(t))\dot\alpha^k(t)\dot\alpha^l(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot\alpha^k(t)g_{kj}(\alpha(t))g^{ji}(\alpha(t)) \\
&\quad + \left\langle \left(X_{;kl}(\alpha(t)) + \Gamma^r_{kl}(\alpha(t))X_r(\alpha(t))\right)\dot\alpha^k(t)\dot\alpha^l(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot\alpha^i(t) \\
&\quad + \left\langle \left(-h_{kl}(\alpha(t))\nu(\alpha(t)) + \Gamma^r_{kl}(\alpha(t))X_r(\alpha(t))\right)\dot\alpha^k(t)\dot\alpha^l(t), X_j(\alpha(t)) \right\rangle g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot\alpha^i(t) + 0 + \Gamma^r_{kl}(\alpha(t))\dot\alpha^k(t)\dot\alpha^l(t)g_{rj}(\alpha(t))g^{ji}(\alpha(t)) \\
&= \ddot\alpha^i(t) + \Gamma^i_{kl}(\alpha(t))\dot\alpha^k(t)\dot\alpha^l(t)
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

**Korollar 13.24.** *Seien $X, \tilde{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ immersierte $C^2$-Hyperflächen, so dass für die induzierten Metriken $g$ und $\tilde{g}$*

$$g_{ij}(x) = \tilde{g}_{ij}(x)$$

*für alle $x \in \Omega$ und alle $1 \le i, j \le n$ gilt. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine $C^2$-Kurve. Dann ist $X \circ \alpha$ genau dann eine Geodätische in $X(\Omega)$, wenn $\tilde{X} \circ \alpha$ eine Geodätische in $\tilde{X}(\Omega)$ ist.*

*Beweis.* Aus $g = \tilde{g}$ folgt auch, dass die zugehörigen Christoffelsymbole übereinstimmen. Somit erhalten wir die Behauptung aus Lemma 13.23. $\square$

Da die Eigenschaft, Geodätische zu sein, somit nicht von der Einbettung und nur von der Metrik abhängt, sagen wir, dass Geodätische ein Objekt der inneren Geometrie sind und geben daher die folgende Erweiterung unserer bisherigen Definition einer Geodätischen. Wir lassen den Nachweis als Übung, dass dies auch in höherer Kodimension richtig ist. Bisher haben wir $X \circ \alpha$ als Geodätische bezeichnet, nun bezeichnen wir auch $\alpha$ als Geodätische.

**Definition 13.25.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit einer Metrik $(g_{ij})$ und Christoffelsymbolen $(\Gamma^i_{kl})$. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine $C^2$-Kurve. Dann heißt $\alpha$ eine Geodätische, falls

$$\ddot{\alpha}^i(t) + \Gamma^i_{kl}(\alpha(t))\dot{\alpha}^k(t)\dot{\alpha}^l(t) = 0$$

für alle $1 \le i \le n$ und alle $t \in I$ gilt.

### 13.4. **Kovariante Ableitung und Parallelverschiebung.**

**Lemma 13.26.** *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte $C^2$-Hyperfläche, $M := X(\Omega)$. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine $C^1$-Kurve und sei $\gamma := X \circ \alpha$. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n+1})$ ein Vektorfeld längs $\gamma$, gelte also $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in I$. Gelte $Y(t) = v^i(t)X_i(\alpha(t))$. Dann ist $v^i(t) = \langle Y(t), X_j(\alpha(t))\rangle g^{ji}(\alpha(t))$ und für die kovariante Ableitung von $Y$ längs $\gamma$ gilt*

$$\frac{DY}{dt} = \left(\dot{v}^k + \Gamma^k_{ij} v^i \dot{\alpha}^j\right) X_k.$$

*Beweis.* Die Vektoren $X_i(\alpha(t))$ bilden eine Basis von $T_{\gamma(t)}X(\Omega)$. Somit lässt sich jedes Vektorfeld längs $\gamma$ in der Form $Y(t) = v^i(t)X_i(\alpha(t))$ mit geeigneten Funktionen $v^i$ darstellen. Bilden wir das Skalarprodukt mit $X_k$, so erhalten wir $\langle Y, X_k\rangle = v^i g_{ik}$. Somit gilt $v^i = \langle Y, X_k\rangle g^{ki}$. Es gilt daher $v^i \in C^1(I)$ für alle $1 \le i \le n$.

Nach Definition der kovarianten Ableitung ist $\frac{D}{dt}Y$ der tangentiale Anteil von $\frac{d}{dt}Y$. Wir schreiben $\dot{Y} \equiv \frac{d}{dt}Y$, $\dot{v}^i = \frac{d}{dt}v^i, \ldots$ und erhalten aus $Y(t) = v^i(t)X_i(\alpha(t))$

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= \dot{v}^i X_i + v^i X_{,ij}\dot{\alpha}^j \\
&= \dot{v}^i X_i + v^i \left(X_{;ij} + \Gamma^k_{ij} X_k\right)\dot{\alpha}^j \\
&= \dot{v}^k X_k + v^i \dot{\alpha}^j \left(-h_{ij}\nu + \Gamma^k_{ij} X_k\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{D}{dt}Y = \left(\dot{v}^k + v^i \dot{\alpha}^j \Gamma^k_{ij}\right) X_k. \qquad \square$$

**Korollar 13.27.** *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte $C^2$-Hyperfläche. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine $C^1$-Kurve und sei $\gamma := X \circ \alpha$. Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n+1})$ ein Vektorfeld längs $\gamma$ mit $Y(t) = v^i(t)X_i(\alpha(t))$.*

*(i) Dann ist $Y$ genau dann längs $\gamma$ parallel, wenn*

$$\dot{v}^k + v^i \dot{\alpha}^j \Gamma^k_{ij} \circ \alpha = 0$$

*für $1 \le k \le n$ auf ganz $I$ gilt.*

*(ii) Ist $\gamma \in C^2$ (oder $\alpha \in C^2$), dann ist $\gamma$ ganau dann eine Geodätische, wenn*
$$\ddot{\alpha}^k + \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j \Gamma^k_{ij} \circ \alpha = 0$$
*für $1 \le k \le n$ auf ganz $I$ gilt.*

*Beweis.*
(i) Klar.
(ii) Es gilt $\dot{\gamma} = X_k \dot{\alpha}^k$ und $\gamma$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $\dot{\gamma}$ längs $\gamma$ parallel ist. □

**Bemerkung 13.28.** Dies zeigt, dass die Eigenschaft eines Vektorfeldes, längs einer Kurve parallel zu sein, oder die Eigenschaft einer Kurve, eine Geodätische zu sein, nur von der inneren Geometrie abhängt.

Daher definieren wir (wobei die Definition einer Geodätischen natürlich nur eine Wiederholung ist)

**Definition 13.29.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $(g_{ij})$ eine Metrik auf $\Omega$. Seien $\left(\Gamma^k_{ij}\right)$ die Christoffelsymbole zur Metrik $(g_{ij})$. Sei $\alpha\colon I \to \Omega$ eine $C^1$-Kurve und sei $Y(t) = Y^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Vektorfeld längs $\alpha$, d. h. wir betrachten $Y(t)$ als Element von $T_{\alpha(t)}\Omega \cong \mathbb{R}^n$. Dabei ist $\frac{\partial}{\partial x^i}$ eine alternative Notation für das Standardbasiselement $e_i$.
(i) Dann heißt $Y$ längs $\alpha$ parallel, falls
$$\dot{Y}^k + Y^i \dot{\alpha}^j \Gamma^k_{ij} \circ \alpha = 0$$
für alle $1 \le k \le n$ auf ganz $I$ gilt.
(ii) Ist $\alpha \in C^2$, so heißt $\alpha$ Geodätische, falls
$$\ddot{\alpha}^k + \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j \Gamma^k_{ij} \circ \alpha = 0$$
für alle $1 \le k \le n$ auf ganz $I$ gilt.

Diese Definition können wir auf den Fall anwenden, dass wir von einer Immersion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine Metrik und Christoffelsymbole auf $\Omega$ bekommen. Auch anwendbar ist sie auf den Fall, dass wir eine Metrik ohne eine Immersion haben. Dies ist wie folgt definiert:

**Definition 13.30.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $g\colon \Omega \to L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, wobei $L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ der Raum der bilinearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ (was wir mit $T_x\Omega$ identifizieren) nach $\mathbb{R}$ ist, eine (Riemannsche) Metrik auf $\Omega$, falls $g$ stetig ist und für alle $x \in \Omega$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^n$
(i) $g(x)\langle v, v\rangle > 0$ für $v \neq 0$ und
(ii) $g(x)\langle v, w\rangle = g(x)\langle w, v\rangle$
gelten.

**Bemerkung 13.31.**
(i) Dies besagt, dass wir jedem $x \in \Omega$ in stetiger Weise ein Skalarprodukt zuordnen.
(ii) Die Stetigkeit von $g$ ist äquivalent zur Stetigkeit der Komponentenfunktionen $x \mapsto g_{ij}(x)$.
(iii) Jede durch eine Immersion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ induzierte Metrik auf $\Omega$ ist auch eine Metrik im obigen Sinne.
(iv) Umgekehrt ist auch jede Metrik im obigen Sinne durch eine Immersion
$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}^k,$$
$k$ genügend groß, induziert. Eine Verallgemeinerung davon hat John Nash (A beautiful mind) mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen gezeigt.

**Definition 13.32.** Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine eingebettete $C^2$-Hyperfläche, $M := X(\Omega)$. Sei $p_0 \in M$ und sei $Y \in T_{p_0}M$. Sei $Z$ ein Vektorfeld auf $M$, d. h. eine Abbildung $Z\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Z(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von $Z$ in Richtung $Y$ an der Stelle $p_0 \in X(\Omega)$ durch

$$\nabla_Y Z(p_0) := \frac{D}{dt}(Z \circ \gamma)(0),$$

wobei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine $C^1$-Kurve mit $\gamma(0) = p_0$ und $\dot\gamma(0) = Y$ ist.

**Lemma 13.33.** *Die kovariante Ableitung $\nabla_Y Z$ hängt nicht von der speziellen Wahl von $\gamma$ ab.*

*Beweis.* Sei $Z \circ X = v^i X_i$ mit $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Sei $\alpha := X^{-1} \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$, so dass $\gamma = X \circ \alpha$ gilt. Sei $x_0 \in \Omega$ mit $X(x_0) = p_0$. Dann gelten $\alpha(0) = x_0$ und $\dot\alpha(0) = w$, wobei $w \in \mathbb{R}^n$ so gewählt ist, dass $Y = w^i X_i(x_0)$ gilt. Beachte, dass $w$ von der speziellen Wahl von $\gamma$ unabhängig ist. Es gilt

$$(Z \circ \gamma)(t) = (Z \circ X \circ \alpha)(t) = v^i(\alpha(t)) X_i(\alpha(t)).$$

Nach Lemma 13.26 erhalten wir mit $v^i \circ \alpha$ statt $v^i$ dort

$$\begin{aligned}
\nabla_Y Z(p_0) &= \frac{D}{dt}(Z \circ \gamma)(0) \\
&= \left(\frac{d}{dt}(v \circ \alpha)^k(0) + v^i(x_0)\dot\alpha^j(0)\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0) \\
&= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j}(x_0)\dot\alpha^j(0) + v^i(x_0)\dot\alpha^j(0)\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0) \\
&= \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j}(x_0)w^j + v^i(x_0)w^j\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0).
\end{aligned} \tag{13.2}$$

Dies hängt nicht von der speziellen Wahl von $\gamma$ ab. □

Hieraus folgt direkt

**Theorem 13.34.** *Seien $Y, Z, Z_1, Z_2$ glatte Vektorfelder auf $X(\Omega)$ und sei $f \in C^\infty(X(\Omega))$. Dann gelten*
- *(i)* $\nabla_Y(Z_1 + Z_2) = \nabla_Y Z_1 + \nabla_Y Z_2$,
- *(ii)* $\nabla_Y(fZ) = \left\langle \nabla^M f, Y \right\rangle Z + f\nabla_Y Z$ *und*
- *(iii)* $\nabla_{fY} Z = f\nabla_Y Z$.

*Beweis.* Nach (13.2) sind die Behauptungen für $\nabla_Y(Z_1 + Z_2)$ und $\nabla_{fY}Z$ klar. Gleichung (13.2) wollen wir auch für $\nabla_Y(fZ)$ benutzen. In der dortigen Notation müssen wir $v^i$ durch $\tilde f v^i$ mit $f \circ X = \tilde f$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla_Y(fZ)(p_0) &= \left(\frac{\partial\left(\tilde f v^k\right)}{\partial x^j}(x_0)w^j + \tilde f v^i(x_0)w^j\Gamma^k_{ij}(x_0)\right) X_k(x_0) \\
&= (f \cdot \nabla_Y Z)(p_0) + \frac{\partial \tilde f}{\partial x^j}(x_0)v^k(x_0)w^j X_k(x_0) \\
&= (f \cdot \nabla_Y Z)(p_0) + \frac{\partial \tilde f}{\partial x^j}(x_0)w^j Z(p_0).
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für eine Fortsetzung $\hat f$ von $f$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde f}{\partial x^j}(x_0)w^j &= \frac{\partial (f \circ X)}{\partial x^j}(x_0)w^j = \frac{\partial\left(\hat f \circ X\right)}{\partial x^j}(x_0)w^j \\
&= \frac{\partial \hat f}{\partial p^\beta}(X(x_0))X^\beta_j w^j
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \nabla^{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{f}(p_0), Y \right\rangle = \left\langle \nabla^M f(p_0), Y \right\rangle.$$

Die Behauptung folgt. □

## 14. Theorema egregium

Zunächst einmal recht willkürlich definieren wir:

**Definition 14.1** (Riemannscher Krümmungstensor). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit Metrik $(g_{ij})$. Dann definieren wir den Riemannschen Krümmungstensor durch

$$R^k{}_{lij} \equiv R^k_{lij} = \Gamma^k_{jl,i} - \Gamma^k_{il,j} + \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{il}.$$

Weiterhin setzen wir $R_{klij} := g_{kr}R^r{}_{lij}$ und definieren den Riccitensor durch

$$R_{ik} = R_{ijkl}g^{jl}$$

sowie die Skalarkrümmung durch

$$R = R_{ij}g^{ij}.$$

Diese Größen sind auch in der Physik wichtig, siehe [6].

**Bemerkung 14.2.** Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Dabei ist die linke Seite allein durch die Geometrie einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (mit Signatur $+++-$) bestimmt. Die rechte Seite ist durch die Physik bestimmt und verschwindet im Vakuum.

Neben der Lösung mit Metrik $g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}(1,1,1,-1)$ ist die nächsteinfachere Lösung die Schwarzschildlösung mit Metrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

oder

$$ds^2 = \left(1 + \frac{Gm}{2c^2r}\right)^4 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - c^2 \frac{\left(1 - \frac{Gm}{2c^2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{Gm}{2c^2r}\right)^2} dt^2$$

in Physikerschreibweise.

Im Falle einer immersierten Hyperfläche wollen wir den Riemannschen Krümmungstensor durch bekannte Grössen ausdrücken.

**Bemerkung 14.3.** Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Dann gelten die Gaußsche Formel

$$X_{;ij} = -h_{ij}\nu = X_{,ij} - \Gamma^k_{ij}X_k,$$

und die Weingartengleichung

$$\nu_i = h^k_i X_k.$$

Hieraus oder direkt an der Definition der Christoffelsymbole lesen wir ab, dass $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ gilt.

Da partielle Ableitungen kommutieren, gilt für alle $1 \le i, j, k, l, m \le n$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle X_{,ijk} - X_{,ikj}, X_m \rangle \\
&= \langle (\Gamma^r_{ij}X_r - h_{ij}\nu)_{,k} - (\Gamma^r_{ik}X_r - h_{ik}\nu)_{,j}, X_m \rangle \\
&= \Gamma^r_{ij,k}g_{rm} - \Gamma^r_{ik,j}g_{rm} + \Gamma^r_{ij}\langle X_{,rk}, X_m\rangle - \Gamma^r_{ik}\langle X_{,rj}, X_m\rangle \\
&\quad + 0 - h_{ij}\langle h^r_k X_r, X_m\rangle + h_{ik}\langle h^r_j X_r, X_m\rangle \\
&= (\Gamma^r_{ij,k} - \Gamma^r_{ik,j})g_{rm} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk}g_{sm} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj}g_{sm} - h_{ij}h_{km} + h_{ik}h_{jm}
\end{aligned}$$

$$= R^r{}_{ikj} g_{rm} - h_{ij} h_{km} + h_{ik} h_{jm},$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition mit vertauschten Indices verwandt haben.

Vertauschen wir nochmals die Indices, so erhalten wir

**Theorem 14.4** (Gaußgleichung)**.** *Sei* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ *eine immersierte Hyperfläche. Dann gilt*

$$R_{ijkl} = h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}.$$

Als Korollar dazu erhalten wir das Theorema egregium von C. F. Gauß.

**Theorem 14.5.** *Sei* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *eine 2-dimensionale immersierte Fläche. Dann ist die Gaußkrümmung allein durch die Metrik bestimmt und es gilt*

$$R_{1212} = K \cdot \det g.$$

*Beweis.* Die Gaußgleichung liefert

$$R_{1212} = h_{11} h_{22} - h_{12}^2 = \det h_{ij} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} \det g_{ij} = K \cdot \det g. \qquad \square$$

Wir halten ein paar Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors fest.

**Lemma 14.6.** *Der Riemannsche Krümmungstensor besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:*

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} &= R_{klij}, \\ 0 &= R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} \quad \textit{(1. Bianchi Identität).} \end{aligned}$$

*Kombiniert man die ersten beiden Symmetrieeigenschaften, so erhält man* $R_{ijkl} = -R_{jikl}$*. Weiterhin überlegt man sich, dass die 1. Bianchi Identität auch für die zyklische Vertauschung von drei beliebigen Indices gilt.*

*Beweis.* Aus

$$R_{klij} = \left(\Gamma^r_{jl,i} - \Gamma^r_{il,j} + \Gamma^r_{im}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^r_{jm}\Gamma^m_{il}\right) g_{rk}$$

erhalten wir direkt $R_{klij} = -R_{klji}$.

Der Nachweis der zweiten Symmetrieeigenschaft benötigt stets ein paar Rechnungen. Ohne die Wahl von speziellen Koordinatensystemen wird dies leider etwas länger. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{klij} = {} & \left(\frac{1}{2} g^{rs}(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s})\right)_{,i} g_{rk} \\ & - \left(\frac{1}{2} g^{rs}(g_{is,l} + g_{ls,i} - g_{il,s})\right)_{,j} g_{rk} \\ & + \frac{1}{4}(g_{ik,m} + g_{mk,i} - g_{im,k}) g^{ms}(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s}) \\ & - \frac{1}{4}(g_{jk,m} + g_{mk,j} - g_{jm,k}) g^{ms}(g_{is,l} + g_{ls,i} - g_{il,s}) \\ = {} & \frac{1}{2}(g_{jk,li} + \underline{g_{lk,ji}} - g_{jl,ki} - g_{ik,lj} - \underline{g_{lk,ij}} + g_{il,kj}) \\ & - \frac{1}{2} \underline{g^{rs}(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s}) g_{rk,i}} + \frac{1}{2} \underline{g^{rs}(g_{is,l} + g_{ls,i} - g_{il,s}) g_{rk,j}} \\ & + \frac{1}{4}(g_{ik,m} + \underline{g_{mk,i}} - g_{im,k}) \underline{g^{ms}(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s})} \\ & - \frac{1}{4}(g_{jk,m} + \underline{g_{mk,j}} - g_{jm,k}) \underline{g^{ms}(g_{is,l} + g_{ls,i} - g_{il,s})} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
={}&\frac{1}{2}(g_{jk,li}-g_{jl,ki}-g_{ik,lj}+g_{il,kj})\\
&+\frac{1}{4}(g_{ik,m}-g_{mk,i}-g_{im,k})g^{ms}(g_{js,l}+g_{ls,j}-g_{jl,s})\\
&-\frac{1}{4}(g_{jk,m}-g_{mk,j}-g_{jm,k})g^{ms}(g_{is,l}+g_{ls,i}-g_{il,s})\\
={}&\frac{1}{2}(g_{jk,li}-g_{jl,ki}-g_{ik,lj}+g_{il,kj})\\
&-\frac{1}{4}(g_{km,i}+g_{im,k}-g_{ik,m})g^{ms}(g_{js,l}+g_{ls,j}-g_{jl,s})\\
&+\frac{1}{4}(g_{km,j}+g_{jm,k}-g_{jk,m})g^{ms}(g_{is,l}+g_{ls,i}-g_{il,s})\\
={}&\frac{1}{2}(g_{jk,li}-g_{jl,ki}-g_{ik,lj}+g_{il,kj})\\
&-\Gamma^r_{ik}g_{rs}\Gamma^s_{jl}+\Gamma^r_{kj}g_{rs}\Gamma^s_{il}.
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir direkt

$$
\begin{aligned}
R_{klij}-R_{ijkl}={}&\frac{1}{2}(g_{jk,li}-g_{jl,ki}-g_{ik,lj}+g_{il,kj})\\
&+\frac{1}{2}(-g_{li,jk}+g_{lj,ik}+g_{ki,jl}-g_{kj,il})\\
&-\Gamma^r_{ik}g_{rs}\Gamma^s_{jl}+\Gamma^r_{kj}g_{rs}\Gamma^s_{il}+\Gamma^r_{ki}g_{rs}\Gamma^s_{lj}-\Gamma^r_{il}g_{rs}\Gamma^s_{kj}\\
={}&0.
\end{aligned}
$$

Schließlich erhalten wir aus der Symmetrie $\Gamma^k_{ij}$ der Christoffelsymbole unmittelbar

$$
\begin{aligned}
{R^k}_{lij}+{R^k}_{ijl}+{R^k}_{jli}={}&\Gamma^k_{jl,i}+\Gamma^k_{li,j}+\Gamma^k_{ij,l}\\
&-\Gamma^k_{il,j}-\Gamma^k_{ji,l}-\Gamma^k_{lj,i}\\
&+\Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jl}+\Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{li}+\Gamma^k_{lm}\Gamma^m_{ij}\\
&-\Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{il}-\Gamma^k_{lm}\Gamma^m_{ji}-\Gamma^k_{im}\Gamma^m_{lj}\\
={}&0.
\end{aligned}
$$

Mit den oben gezeigten Symmetrieeigenschaften folgt daraus

$$
\begin{aligned}
0={}&R_{klij}+R_{kijl}+R_{kjli}\\
={}&R_{ijkl}+R_{jlki}+R_{likj}\\
={}&-R_{ijlk}-R_{jlik}-R_{lijk}
\end{aligned}
$$

wie behauptet. □

**Bemerkung 14.7.** Betrachte eine $n$-dimensionale Sphäre vom Radius $r$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $\sigma_{ij}$ die Metrik der Einheitssphäre. Dann gelten $g_{ij}=r^2\sigma_{ij}$ und $h_{ij}=\frac{1}{r}g_{ij}=r\sigma_{ij}$. Wir erhalten für den Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{ijkl}=r^2(\sigma_{ik}\sigma_{jl}-\sigma_{il}\sigma_{jk}).$$

Weiterhin erhalten wir für den Riccitensor $R_{ik}=R_{ijkl}g^{jl}=(n-1)\sigma_{ik}$ und für die Skalarkrümmung $R=R_{ik}g^{ik}=\frac{n(n-1)}{r^2}$.

Für Sphäre können wir Lösungen des Ricciflusses $\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}=-2R_{ij}$ also konkret angeben: Es gilt $g_{ij}(t)=(r^2-2(n-1)t)\sigma_{ij}$.

Überprüfe diese Formeln auch im Falle, dass die Metrik zwar mit der Metrik einer immersierten Sphäre übereinstimmt, aber nicht von einer Immersion induziert ist, d. h. führe diese Rechnungen ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform nochmals durch (Übung).

## 15. Topologische Grundbegriffe ⋆

**Definition 15.1** (Topologie)**.** Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Topologie auf $X$ ist eine Kollektion $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $X$, so dass

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(ii) $A_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, impliziert $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$,
(iii) $A_1, A_2 \in \mathcal{O}$ impliziert $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

Die Mengen $A \in \mathcal{O}$ heißen offene Mengen. $B \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus B$ offen ist.

Eine Topologie $\mathcal{O}_1$ heißt feiner als eine Topologie $\mathcal{O}_2$ (und $\mathcal{O}_2$ heißt gröber als $\mathcal{O}_1$) falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ gilt.

Sei $Y \subset X$ und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X$. Dann heißt $\mathcal{O}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{O}\}$ von $\mathcal{O}$ auf $Y$ induzierte Topologie.

Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, falls jedes $A \subset \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$, wenn die Kollektion aller endlichen Schnitte von Mengen in $\mathcal{S}$ eine Basis der Topologie bildet.

**Beispiel 15.2.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann sind die Kugeln $B_\varepsilon(x)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, Basis der metrischen Topologie. Die metrische Topologie des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine abzählbare Basis.

**Definition 15.3** (Umgebung, Stetigkeit)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $x \in X$, $U \subset X$ mit $x \in U$. Dann heißt $U$ Umgebung von $x$, wenn es $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt. Die Menge aller Umgebungen von $x$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt in $x \in X$ stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}_Y(f(x))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ gibt. $f$ heißt stetig, wenn $f$ in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. $f$ heißt Homöomorphismus, falls $f$ bijektiv ist und $f$ und $f^{-1}$ stetig sind.

**Definition 15.4** (Initiale Topologie, Produkttopologie)**.** Sei $X$ eine Menge und seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Dann existiert eine gröbste Topologie auf $X$, die Initialtopologie, so dass alle Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stetig werden. $\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{O}_i, i \in I\}$ ist eine Subbasis dieser Topologie.

**Spezialfall Produkttopologie:** Ist $X := X_1 \times X_2 \times \ldots$ und $f_i$ die Projektion auf den Faktor $i$, so ist $\mathcal{S} := \{X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times \ldots : A_i \subset X_i \text{ offen}, i \in I\}$. Ist $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, so ist $\{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathcal{O}_i\}$ eine Basis.

**Definition 15.5** (Finale Topologie, Quotiententopologie)**.** Sei $Y$ eine Menge und seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen. Dann existiert eine feinste Topologie auf $Y$, die finale Topologie, so dass alle $f_i$ stetig werden, nämlich $\mathcal{O} := \{A \subset Y : f_i^{-1}(A) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}$.

**Spezialfall Quotientenraum:** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Sei $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von $x$ und $\bar{X} := \{\bar{x} : x \in X\}$. Definiere die Projektion $p : X \to \bar{X}$ durch $x \mapsto \bar{x}$. Die zugehörige finale Topologie heißt Quotiententopologie. $U \subset \bar{X}$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

**Beispiele 15.6.**

(i) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, $\bar{X} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Vermöge $h \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ mit $h(\bar{x}) = e^{2\pi i x}$ sehen wir, dass $\bar{X}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.
(ii) $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, $x \sim y \iff x = \pm y$. $\mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n/\sim$ ist der $n$-dimensionale reelle projektive Raum.

**Definition 15.7** (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt überdeckungskompakt, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein überdeckungskompakter Raum heißt kompakt, falls er ein $T_2$-Raum (= Hausdorffraum) ist, d. h. falls je zwei Punkte $x \neq y \in X$ disjunkte Umgebungen besitzen.

Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, so sind Kompaktheit, Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

**Theorem 15.8** (Tychonov)**.** *Das Produkt kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

*Beweis.* Topologievorlesung. □

**Definition 15.9** (Überlagerung)**.** Seien $X, Y$ topologische Räume. Dann heißt $p : X \to Y$ Überlagerung, wenn

(i) $p$ stetig und surjektiv ist,
(ii) jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung $V$ besitzt, so dass $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ mit paarweise disjunkten offenen $U_i \subset X$ ist und $p|_{U_i} : U_i \to V$ für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind.

**Beispiel 15.10.**

(i) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{it}$,
(ii) $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $p(x) = \bar{x}$. „2-blättrige Überlagerung“.

**Theorem 15.11.** *Sei $p : X \to B$ eine Überlagerung. Sei $Z$ ein topologischer Raum und $f : Z \to B$ eine stetige Abbildung. Ist $Z$ einfach zusammenhängend (also z. B. $Z = [0, 1]$ oder $Z = [0, 1]^2$), so existiert eine stetige Liftung $\tilde{f} : Z \to X$ mit $f = p \circ \tilde{f}$.*

*Beweis.* Topologievorlesung. □

## 16. Mannigfaltigkeiten

Grundlage für die Kapitel über abstrakte Mannigfaltigkeiten ist [4].

**Definition 16.1** (Mannigfaltigkeit)**.**

(i) Ein topologischer Raum $M$ heißt lokal euklidisch von der Dimension $m$, falls $M$ mit offenen Mengen überdeckt werden kann, von denen jede zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist.
(ii) Ein Paar $(U, \varphi)$, wobei $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus (wie oben) ist, heißt Karte von $M$. Eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Karten heißt Atlas von $M$, falls $M \subset \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U$ gilt.
(iii) Zwei Karten $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ heißen $C^k$-verträglich, $k \geq 1$, wenn $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ ein $C^k$-Diffeomorphismus ist. Ein Atlas heißt von der Klasse $C^k$, falls je zwei seiner Karten $C^k$-verträglich sind.
(iv) Ist $\mathcal{A}$ ein $C^k$-Atlas, so gibt es genau einen maximalen $C^k$-Atlas $\mathcal{A}_0$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$; er besteht aus allen Karten, welche mit den Karten von $\mathcal{A}$ auch $C^k$-verträglich sind.
(v) Eine differenzierbare ($C^k$-)Struktur auf $M$ ist ein maximaler $C^k$-Atlas auf $M$.
(vi) Ein lokal euklidischer Hausdorff-Raum mit einer differenzierbaren Struktur heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.

**Bemerkung 16.2.**

(i) Beispiele sind $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$.
(ii) Offene Teilmengen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

(iii) Teilweise fordert man zusätzlich, dass die Topologie von $M$ eine abzählbare Basis besitzt.
(iv) In der algebraischen Topologie lernt man, dass offene nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nur dann homöomorph zueinander sein können, wenn $m = n$ gilt. Somit ist die Dimension eines nichtleeren lokal euklidischen Raumes wohldefiniert.
(v) Wir schreiben häufig $M^m$ für eine $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M$.
(vi) Punkte in $\varphi(U)$ nennt man auch Koordinaten für die Mannigfaltigkeit $M$.

**Beispiel 16.3** (Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{m+n}$ $\star$)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ heißt $m$-dimensionale $C^k$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ und einen $C^k$-Diffeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit
$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$
gibt. Ein solches $M$ besitzt einen $C^k$-Atlas, nämlich
$$\mathcal{A} := \{(U \cap M, \varphi|_{U\cap M})\colon \text{wobei } (U, \varphi) \text{ wie oben}\}.$$
$M$ ist lokal euklidisch von der Dimension $m$. Es gilt
$$(\psi|_{V\cap M}) \circ (\varphi|_{U\cap M})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{(\mathbb{R}^m\times\{0\})\cap\varphi(U\cap V)} \in C^k.$$

**Bemerkung 16.4.** Der Einbettungssatz von Whitney (vgl. z. B. eine Vorlesung Differentialtopologie) besagt, dass jede $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit (bis auf einen Diffeomorphismus) eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, falls $n \gg 1$ genügend groß ist.

In der folgenden Definition verlangen wir nicht, dass $f$ stetig ist. Stattdessen fordern wir die Existenz gewisser Umgebungen.

Die Forderung, dass $f(U)$ offen ist, ist nötig, da wir sonst die Dimension im Zielraum erhöhen könnten.

**Definition 16.5** (Differenzierbare Abbildungen)**.**
Seien $M$, $N$ $C^k$-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt von der Klasse $C^k$, falls es zu jedem $x \in M$ Karten $(U, \varphi)$ von $M$ und $(V, \psi)$ von $N$ mit $x \in U$, $f(U) \subset V$ gibt und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Ist $f$ bijektiv und $f^{-1}$ ebenfalls von der Klasse $C^k$, $k \geq 1$, so heißt $f$ Diffeomorphismus von der Klasse $C^k$.

Gibt es für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U$, so dass $f(U)$ offen und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, so heißt $f$ ein lokaler Diffeomorphismus.

**Bemerkung 16.6.**
(i) Ist $f$ von der Klasse $C^k$, so ist $f$ stetig: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist stetig, also auch $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.
(ii) Ist $f$ von der Klasse $C^k$, so ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ für alle Karten $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ der betreffenden differenzierbaren Strukturen. (Falls $U$ klein genug ist, so dass die Komposition wohldefiniert ist.)

*Beweis.* Sei $x \in U$, $f(x) \in V$ und $z := \varphi(x)$. Nach Definition existieren Karten $(U_0, \varphi_0)$ und $(V_0, \psi_0)$ mit $x \in U_0$, $f(U_0) \subset V_0$, so dass $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \in C^k$ ist. Wir wählen eine offene Umgebung $W$ von $z$ mit $\varphi^{-1}(W) \subset U_0 \cap U$ und $f(\varphi^{-1}(W)) \subset V \cap V_0$. In $W$ gilt dann
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\left(\psi \circ \psi_0^{-1}\right)}_{\in C^k} \circ \underbrace{\left(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}\right)}_{\in C^k} \circ \underbrace{\left(\varphi_0 \circ \varphi^{-1}\right)}_{\in C^k} \in C^k.$$
Dies beendet den Beweis, da $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ genau dann in $C^k$ ist, wenn dies lokal um jeden Punkt herum gilt. Dies haben wir aber gerade nachgewiesen. $\square$

(iii) Eine Karte ist eine differenzierbare Abbildung, da $\mathrm{id} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ dies ist.

**Beispiel 16.7** (Kartesisches Produkt)**.** Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ zwei $C^k$-Mannigfaltigkeiten. Dann ist ein $C^k$-Atlas auf $M \times N$ durch

$$\{(U \times V, \varphi \times \psi) \colon (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

mit $(\varphi \times \psi)((x, y)) = (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben.

**Definition 16.8** (Zurückziehen einer differenzierbaren Struktur)**.** Sei $M$ ein topologischer Raum, $N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$ und $h : M \to N$ ein Homöomorphismus. Definiere

$$h^*\mathcal{A} := \left\{ \left(h^{-1}(U), \varphi \circ h\right) : (U, \varphi) \in \mathcal{A} \right\}.$$

**Bemerkung 16.9.** Eine zurückgezogene Struktur $h^*\mathcal{A}$ ist ein $C^k$-Atlas auf $M$ und $h : (M, h^*\mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A})$ ist ein Diffeomorphismus.

Sei $M = N = \mathbb{R}$ und $h(x) = x^3$. Sei $\mathcal{A}$ die Standardstruktur auf $\mathbb{R}$ mit der Identität als Karte. Dann ist $(\mathbb{R}, h^*\mathcal{A}) \neq (\mathbb{R}, \mathcal{A})$, da $h$ kein Diffeomorphismus von $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ist.

*Beweis.* Für die Kartenwechselabbildungen gilt

$$(\psi \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \in C^k.$$

Somit ist $h^*\mathcal{A}$ ein $C^k$-Atlas.

Wähle die Karten $\varphi$ und $\varphi \circ h$. Dann gelten

$$\varphi \circ h \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$$

und analog $(\varphi \circ h) \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$ und somit ist $h$ ein Diffeomorphismus. ☐

Ein Atlas legt im folgenden Sinne bereits die Topologie fest:

**Lemma 16.10.** *Sei $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ ein Atlas auf einer Menge $X$ (bis auf die Stetigkeitsforderung an $\varphi$), d. h. gelte*

*(i) $U \subset X$, $\varphi \colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist bijektiv und $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.*
*(ii) $X = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U$ und für $(U, \varphi)$, $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ ist $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ stets ein Homöomorphismus.*

*Dann gibt es genau eine Topologie auf $X$, so dass $X$ lokal euklidisch mit $\mathcal{A}$ als Atlas wird.*

*Beweis.* **Eindeutigkeit:** Ist $X$ lokal euklidisch mit Atlas $\mathcal{A}$, so sind die Abbildungen $\varphi \colon U \to \varphi(U)$ für $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ Homöomorphismen. Sei $V \subset X$ offen. Dann gilt

$$V = \bigcup_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U \cap V = \bigcup \varphi^{-1}(\underbrace{\varphi(U \cap V)}_{\text{offen im } \mathbb{R}^n}).$$

Zunächst ist $U \cap V$ relativ offen in $U$. Dann ist $\varphi(U \cap V)$ relativ offen in $\varphi(U)$ und daher auch in $\mathbb{R}^n$.

Definiere

$$\mathcal{B} := \{\varphi^{-1}(W) \colon (U, \varphi) \in \mathcal{A},\ W \subset \varphi(U) \text{ offen}\}.$$

Mengen der Form $\varphi^{-1}(W)$ sind offen in $U$ und, da $\mathcal{A}$ ein Atlas auf $X$ und daher $U \subset X$ offen ist, auch in $X$. Die Menge ist $\mathcal{B}$ in einer Basis von $X$ enthalten. Weil sich aber aufgrund der obigen Gleichung jede offene Menge in $X$ als eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ darstellen lässt, ist $B$ eine Basis. Daher ist die Topologie eindeutig bestimmt.

**Existenz:** Wir behaupten, dass $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie ist.

(i) $X = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$, da für eine Karte $(U,\varphi)$ nach Definition $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U \in \mathcal{B}$ ist und da nach Voraussetzung $X = \bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ gilt.

(ii) Seien $W_i \subset \varphi_i(U_i)$ offen, $i = 1,2$, und sei $x \in \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$. $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Topologie, wenn wir eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $x \in A \subset \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$ finden ([3, Satz 2.7]). Setze $z_i := \varphi_i(x)$. Dann gelten $z_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z_1)$ und $z_i \in W_i$. Da $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ stetig ist, gibt es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, so dass $z_1 \in W \subset W_1$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(W) \subset W_2$. Es folgt $\varphi_1^{-1}(W) \subset \varphi_2^{-1}(W_2)$. Daher ist
$$x \in \underbrace{\varphi_1^{-1}(W)}_{\in\mathcal{B}} \subset \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$$
und somit ist $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie.

□

**Definition 16.11** (Untermannigfaltigkeit)**.** Sei $N$ eine $n$-dimensionale differenzierbare $C^k$-Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt $C^k$-Untermannigfaltigkeit von $N$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Karte $(U,\varphi)$ von $N$ mit $x \in U$ und
$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$
$m \le n$, gibt. Die Kollektion aller $(U \cap M, \varphi|_{U\cap M})$ ist dann ein $C^k$-Atlas von $M$.

## 17. Tensoranalysis

In diesem Kapitel werden wir mit intrinsischen differentialgeometrischen Größen rechnen ohne uns genau zu überlegen, in welchen Räumen diese Objekte leben. Dieser Zugang erlaubt es, lange Begriffsbildungen zu vermeiden und wird gerne von Physikern gewählt. Wir folgen [2].

### 17.1. Grundlagen.

**Bemerkung 17.1.** Seien $x = (x^1,\ldots,x^n) \in \Omega$ und $\bar{x} = (\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n) \in \hat{\Omega}$ Koordinaten einer Mannigfaltigkeit. Seien $\varphi\colon U \to \Omega$ und $\psi\colon V \to \hat{\Omega}$ die zugehörigen Karten. Für $p \in U \cap V$ setzen wir $x = \varphi(p)$ und $\bar{x} = \psi(p)$. Es folgt $x = \varphi(p) = \varphi\circ\psi^{-1}\circ\psi(p) = \varphi\circ\psi^{-1}(\bar{x})$. Daher hängt $x$ von $\bar{x}$ ab und umgekehrt hängt auch $\bar{x}$ von $x$ ab. Wir schreiben $\bar{x}^j = \bar{x}^j\left(x^k\right)$ sowie $x^k = x^k\left(\bar{x}^j\right)$, unterdrücken also die Kartenabbildungen und schreiben $x, \bar{x}, x^k, \bar{x}^k$ sowohl für die Punkte als auch für die Abbildungen. Da diese beiden Abbildungen hintereinander ausgeführt die Identität ergeben, erhalten wir aus der Kettenregel
$$\delta^h_k = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad \delta^j_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l}. \tag{17.1}$$

**Bemerkung 17.2.** Wir hatten für die induzierte Metrik das folgende Transformationsverhalten hergeleitet: Ist $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, so ist $\hat{X} = X \circ \varphi$ und die Metrik transformiert sich folglich gemäß
$$\hat{g}_{ij}(y) = g_{kl}(\varphi(y))\varphi^k_i(y)\varphi^l_j(y).$$
Nun ist der Diffeomorphismus durch $\bar{x} \mapsto x^k\left(\bar{x}^j\right)$ gegeben und wir erhalten daher die Transformationsformel
$$\bar{g}_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}.$$
Bei der Inversen der Metrik trat auch die Inverse von $D\varphi$ im Transformationsverhalten auf. In unserer Notation erhalten wir daher
$$\bar{g}^{ij} = g^{kl}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}.$$

Wir erinnern daran, dass hier jeweils die Einsteinsche Summenkonvention anwendbar ist, da der Index $k$ bei $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$ als unten stehend gilt.

Dieses Transformationsverhalten nehmen wir als Motivation für

**Definition 17.3** (Tensoren)**.** Eine Größe $T$ mit Komponenten $T^{h_1\ldots h_r}_{l_1\ldots l_s}$, die für feste Indices reellwertige Funktionen von $x \in \Omega$ sind, heißt Tensor der Stufe $(r,s)$, $r,s \in \mathbb{N}$, falls

$$\bar{T}^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s} = \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{h_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{j_r}}{\partial x^{h_r}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_s}}{\partial \bar{x}^{l_s}} T^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s}$$

gilt, wobei $\bar{T}^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s}$ die Komponenten für $\bar{x} \in \hat{\Omega}$ sind und wir jeweils an den Stellen $\bar{x}$ bzw. $x$ auswerten.

**Bemerkung 17.4.**

(i) Ein $(r,s)$-Tensor in einem festen Punkt ist eine multilineare Abbildung auf $((\mathbb{R}^n)^*)^r \times (\mathbb{R}^n)^s$.

(ii) $\mathbb{R}^n$ erscheint hier als Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$.

(iii) $\mathbb{R}^n$ kann man noch durch einen allgemeinen Vektorraum ersetzen.

(iv) Wir sprechen auch von einem Tensorfeld, um die Abhängigkeit von einem Punkt $x \in \Omega$ zu betonen.

(v) Genau genommen sind $T$ für jedes $\Omega$ (mit zughöriger Karte) Komponentenfunktionen $x \mapsto T^{h_1\ldots h_r}_{l_1\ldots l_s}(x)$ zugeordnet. Die obige Definition beschreibt nun, wie die Komponentenfunktionen für unterschiedliche Wahlen von $\Omega$ miteinander zusammenhängen.

(vi) Gemäß (17.1) folgt hieraus auch

$$T^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_s} = \frac{\partial x^{h_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{h_r}}{\partial \bar{x}^{j_r}} \frac{\partial \bar{x}^{l_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{l_s}}{\partial x^{k_s}} \bar{T}^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s}.$$

(vii) Bezeichnen wir mit $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasiselemente von $\mathbb{R}^n$ als Tangentialraum in einem Punkt von $\Omega$ und mit $dx^i$ die Standardbasiselemente der dazu dualen Basis, die also $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$ erfüllt, so gilt

$$T = T^{h_1\ldots h_r}_{l_1\ldots l_s} \frac{\partial}{\partial x^{h_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{h_r}} dx^{l_1} \ldots dx^{l_s}.$$

Hieraus sieht man, dass man die Komponenten von $T$ vermöge

$$T\left\langle dx^{h_1}, \ldots, dx^{h_r}, \frac{\partial}{\partial x^{l_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{l_s}} \right\rangle = T^{h_1\ldots h_r}_{l_1\ldots l_s}$$

bestimmt, wobei die Reihenfolge der Einträge in $T\langle \ldots \rangle$ geeignet zu wählen ist.

(viii) Verschwinden die Komponenten eines Tensors in einem Koordinatensystem, so verschwinden sie in allen Koordinatensystem. Wir schreiben dann $T = 0$.

(ix) Tensoren einer festen Stufe $(r,s)$ bilden einen Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. In einem Punkt hat er die Dimension $n^{r+s}$.

(x) Die induzierte Metrik ist ein Beispiel für einen $(0,2)$-Tensor, ihre Inverse ein Beispiel für einen $(2,0)$-Tensor. Ein $(r,s)$-Tensor hat stets $r$ oben und $s$ unten stehende Indices.

(xi) Ein $(1,0)$-Tensor heißt auch kontravarianter Vektor. Er transformiert sich gemäß

$$\bar{X}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} X^h.$$

Die kontravarianten Vektoren bilden den Tangentialraum. Wollen wir betonen, dass ein Vektor in einer ganzen Umgebung definiert ist, so sprechen wir auch von einem Vektorfeld.

Ein $(0,1)$-Tensor heißt auch Form. Er transformiert sich gemäß

$$\bar{\omega}_j = \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^j}\omega_h.$$

Die Formen bilden den Kotangentialraum.

Ein $(0,0)$-Tensor heißt Skalar. Er transformiert sich gemäß $\bar{f} = f$.

Ein $(1,1)$-Tensor transformiert sich gemäß

$$\bar{T}^j_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}T^h_k.$$

Aus (17.1) erhalten wir, dass das Kronecker-Delta ein $(1,1)$-Tensor ist, denn es gilt

$$\bar{\delta}^j_l = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\delta^h_k.$$

Beachte jedoch, dass $\delta_{ij}$ kein $(0,2)$-Tensor ist.

**Lemma 17.5.** *Die komponentenweise Multiplikation eines $(r_1, s_1)$-Tensors und eines $(r_2, s_2)$-Tensors ergibt einen $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$-Tensor.*

Dies ist aus der (linearen) Algebra als Tensorprodukt $(T, S) \mapsto T \otimes S$ bekannt.

*Beweis.* Wir illustrieren dies lediglich am Beispiel eines $(2,1)$-Tensors und eines $(0,2)$-Tensors. Gelte

$$\bar{T}^{jl}_m = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}T^{hk}_p \quad \text{und} \quad \bar{S}_{qr} = \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^r}S_{uv},$$

so folgt

$$\bar{T}^{jl}_m \bar{S}_{qr} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^r}T^{hk}_p S_{uv}.$$

Damit erfüllen die Komponenten $V^{hk}_{puv} := T^{hk}_p S_{uv}$ das Transformationsgesetz eines $(2,3)$-Tensors. □

**Lemma 17.6** (Kontraktion, informelle Version)**.** *Sei $T$ ein $(r,s)$-Tensor mit $r, s \geq 1$. Wähle einen oberen und einen unteren Index aus, setze sie gleich und summiere mit der Einsteinschen Summenkonvention. Dann ist das Ergebnis ein $(r-1, s-1)$-Tensor.*

*Beweis.* Wir illustieren dies für einen $(2,1)$-Tensor. Gelte

$$\bar{T}^{jl}_m = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m}T^{hk}_p.$$

Wir setzen $S^j := T^{jq}_q$ sowie $\bar{S}^j := \bar{T}^{jq}_q$ und erhalten

$$\bar{S}^j = \bar{T}^{jq}_q = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^k}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}T^{hk}_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}\delta^p_k T^{hk}_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}T^{hp}_p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h}S^h.$$

Somit ist $S$ ein Tensor. □

**Bemerkung 17.7.** Nehmen wir für den Moment an, dass wir schon nachgerechnet hätten, dass der Riemannsche Krümmungstensor ein Tensor ist, so ist auch $R_{ijkl}g^{rs}$ aufgrund der Multiplikationsregel ein Tensor; genauer: bei diesen Komponenten handelt es sich um die Komponenten eines Tensors; dies werden wir noch häufiger so lax verwenden. Wenn wir nun kontrahieren, erhalten wir $R_{ik} = R_{ijkl}g^{jl}$ und sehen daher, dass auch der Riccitensor ein Tensor ist.

**Bemerkung 17.8.** Ist $S_{ij}$ ein Tensor, so sind auch der symmetrische Anteil

$$\frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji})$$

und der antisymmetrische Anteil $\frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji})$ Tensoren. (Übung.)

Das folgende Resultat liefert eine Möglichkeit, nachzuweisen, dass eine Größe ein Tensor ist.

**Lemma 17.9.**

(i) *Seien $a_h$ gegebene reelle Funktionen auf $\Omega$ und sei $a_h X^h$ in jedem Koordinatensystem für jedes kontravariante Vektorfeld $X^h$ ein Skalar. Dann ist $a_h$ ein $(0,1)$-Tensor.*

(ii) *Seien $a_{hk}$ gegebene relle Funktionen auf $\Omega$. Sei $a_{hk}$ symmetrisch, d. h. gelte $a_{hk} = a_{kh}$. Auch in einem anderen Koordinatensystem sei die Symmetriebedingung erfüllt, gelte also $\bar{a}_{jl} = \bar{a}_{lj}$. Sei $a_{hk} X^h X^k$ in jedem Koordinatensystem für jedes kontravariante Vektorfeld $X^h$ ein Skalar. Dann ist $a_{hk}$ ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor.*

*Beweis.*

(i) Nach Voraussetzung gilt

$$a_h X^h = \varphi = \bar{\varphi} = \bar{a}_j \bar{X}^j.$$

Da $\varphi$ ein Skalar ist, gilt dabei $\varphi = \bar{\varphi}$. Für den Vektor $X^h$ ist das Transformationsgesetz durch $\bar{X}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} X^h$ gegeben. Das Transformationsgesetz für $a_h$ wollen wir herleiten. Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\left( a_h - \bar{a}_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \right) X^h = 0.$$

Da dies für beliebige Vektorfelder $X^h$ gilt, verschwindet bereits der Ausdruck in der Klammer und $a_h$ ist ein Tensor.

(ii) Gelte wie oben $a_{hk} X^h X^k = \psi$ und $\bar{a}_{jl} \bar{X}^j \bar{X}^l = \bar{\psi}$. Wieder erhalten wir

$$\left( a_{hk} - \bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} \right) X^h X^k = 0.$$

Daraus folgt wie oben

$$a_{kk} - \bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} = 0.$$

Wählen wir nun beispielhaft ein Vektorfeld, für das höchstens $X^1$ und $X^2$ nicht verschwinden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = &\left( a_{11} - \bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^1} \right) X^1 X^1 + \left( a_{12} - \bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^2} \right) X^1 X^2 \\ &+ \left( a_{21} - \bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^1} \right) X^2 X^1 + \left( a_{22} - \bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^2} \right) X^2 X^2. \end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass die äußeren beiden Terme verschwinden. Da $X^2$ und $X^2$ beliebig waren, erhalten wir durch Umbenennen aus den mittleren Termen

$$2a_{12} = a_{12} + a_{21} = (\bar{a}_{jl} + \bar{a}_{lj}) \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^2} = 2\bar{a}_{jl} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^2}.$$

Dies liefert die Behauptung.

Wir bemerken, dass wir in beiden Fällen $X^h$ in einem Koordinatensystem beliebig wählen konnten. Setzt man $\bar{X}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} X^h$, so ergibt sich nämlich automatisch das Transformationsverhalten eines Vektorfeldes. □

17.2. **Kovariante Differentiation.**

**Bemerkung 17.10.** Sei $\varphi$ ein Skalar. Gelte $\varphi(x) = \bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{x}(x))$. Dann folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}.$$

Somit ist die partielle Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ein $(0,1)$-Tensor oder ein einfach kovarianter Tensor.

**Bemerkung 17.11.** Sei nun $V^h$ ein Vektorfeld, gelte also

$$V^h(x) = \bar{V}^l(\bar{x}(x))\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l}(\bar{x}).$$

Differenzieren liefert hier

$$\frac{\partial V^h}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial \bar{V}^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l} + \underline{\bar{V}^l(\bar{x})\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^l \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}}.$$

Wegen des unterstrichenen Termes handelt es sich hierbei nicht mehr um einen Tensor. Wir suchen nun eine alternative Ableitung, so dass sich ein Tensor ergibt. Das Ergebnis sollte in $\bar{V}$ linear sein (Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen). Außerdem sollte das Ergebnis nur vom Punkt, in dem wir auswerten, abhängen. Wir machen daher den Ansatz

$$\nabla_i V^h \equiv \nabla_{x^i} V^h \equiv V^h_{;i} = \frac{\partial V^h}{\partial x^i} + \Gamma^h_{ki} V^k.$$

Dabei steht $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ hier nur für einen beliebigen Koeffizienten. Wie die Notation aber bereits andeutet, werden wir für $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ künftig insbesondere die Christoffelsymbole verwenden. Damit dies ein Tensor wird, muss die Relation

$$\nabla_{x^i} V^h = V^h_{;i} \stackrel{!}{=} \bar{V}^k_{;j}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} = \nabla_{\bar{x}^j}\bar{V}^k\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$$

gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
V^h_{;i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} V^h + \Gamma^h_{ki} V^k \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\bar{V}^l\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l}\right) + \Gamma^h_{ki} V^k \\
&= \frac{\partial \bar{V}^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^l} + \bar{V}^l\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \Gamma^h_{ki}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\bar{V}^l \\
&\stackrel{!}{=} \frac{\partial \bar{V}^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}^k_{mj}\bar{V}^m\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme heben sich gerade gegenseitig auf. Daher sollte

$$\Gamma^h_{ki}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} = \bar{\Gamma}^k_{mj}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}$$

gelten. Dies multiplizieren wir mit $\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^l}$ und erhalten

$$\Gamma^h_{li} = \bar{\Gamma}^k_{mj}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^l}. \tag{17.2}$$

Mit vertauschten Rollen wird aus Symmetriegründen daraus

$$\bar{\Gamma}^h_{li} = \Gamma^k_{mj}\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l} - \frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^m \partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l}.$$

Wir bemerken, dass $\Gamma^h_{li}$ **kein** Tensor ist.

**Definition 17.12.** Eine Größe $\Gamma^k_{ij}$ mit der Transformationseigenschaft (17.2) heißt Zusammenhangskoeffizient. $V^h_{;i}$ mit

$$V^h_{;i} := \frac{\partial V^h}{\partial x^i} + \Gamma^h_{ki} V^k$$

heißt kovariante Ableitung von $V^h$ in Richtung $x^i$. Ist $W^k$ ein weiteres Vektorfeld, so heißt die Abbildung

$$\left(W^k, V^h\right) \mapsto W^k V^h_{;k} \equiv (\nabla_W V)^h$$

Zusammenhang.

**Bemerkung 17.13.**
(i) Die Differenz von zwei Zusammenhangskoeffizienten ist ein Tensor, das sich der Term mit den zweiten Ableitungen in (17.2) dann gerade weghebt.
(ii) Sind $\Gamma^k_{ij}$ Zusammenhangskoeffizienten, so auch $\Gamma^k_{ji}$.
(iii) Insbesondere ist also

$$T^h_{ij} := \Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji}$$

ein Tensor: Die Torsion.

**Definition 17.14.** Sind die Zusammenhangskomponenten gleich den Christoffelsymbolen, so heißt der zugehörige Zusammenhang Levi-Civita Zusammenhang.

**Lemma 17.15.** *Sei $g_{ij}$ eine Metrik. Dann sind die Christoffelsymbole $\Gamma^k_{ij}$ ein Beispiel für Zusammenhangskomponenten; in den unteren beiden Indices sind sie symmetrisch. Allgemein nennen wir einen Zusammenhang mit $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ einen symmetrischen Zusammenhang.*

*Beweis.* Sei

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}) = g_{kl}(x(\bar{x})) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}(\bar{x}) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}(\bar{x}).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^h_{li} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{hm} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \bar{g}_{lm} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} \bar{g}_{im} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^m} \bar{g}_{li} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{rs} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} \right) \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^i} \right. \\
&\qquad + \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} \right) \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^l} - \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{ab} \right) \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^m} \\
&\qquad + g_{ab} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^m} + \underline{g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^i}} \\
&\qquad + g_{ab} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^m} + \underline{g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l}} \\
&\qquad \left. \underline{- g_{ab} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^i}} - \underline{g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^m}} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{rs} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{as} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial}{\partial x^c} g_{as} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^l} - \frac{\partial}{\partial x^s} g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^i} \right) \\
&\quad + g^{rs} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} g_{as} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} g^{rs} \left( \frac{\partial}{\partial x^c} g_{as} + \frac{\partial}{\partial x^a} g_{cs} - \frac{\partial}{\partial x^s} g_{ac} \right) \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l}
\end{aligned}$$

$$=\Gamma^r_{ac}\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^r}\frac{\partial x^a}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial x^c}{\partial\bar{x}^i}+\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^l}.$$

Somit bleibt noch

$$0=\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^l}+\frac{\partial^2\bar{x}^h}{\partial x^m\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^l}\tag{17.3}$$

zu zeigen. Dazu differenzieren wir

$$\delta^r_m=\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^h}(\bar{x}(x))\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^m}(x)$$

nach $x^k$ und erhalten

$$0=\frac{\partial^2 x^r}{\partial\bar{x}^h\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^h}{\partial x^m}+\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^h}\frac{\partial^2\bar{x}^h}{\partial x^m\partial x^k}.$$

Nach Multiplikation mit

$$\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^r}$$

erhalten wir daraus

$$0=\frac{\partial^2 x^r}{\partial\bar{x}^h\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^r}\delta^l_i\delta^h_l+\delta^a_h\frac{\partial^2\bar{x}^h}{\partial x^m\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^l}$$

wie behauptet. □

**Bemerkung 17.16.** Wir möchten nun eine Ableitungsregel für Formen herleiten, so dass für diese Ableitungen so etwas wie eine Produktregel gilt. Sei $\varphi=X^k\omega_k$ eine Gleichung mit drei Tensoren. Dann hätten wir gerne, dass

$$\varphi_i=X^k_{;i}\omega_k+X^k\omega_{k;i}$$

gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_i&=\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\omega_k+X^k\frac{\partial}{\partial x^i}\omega_k\\&=\left(X^k_{;i}-\Gamma^k_{ri}X^r\right)\omega_k+X^k\frac{\partial}{\partial x^i}\omega_k\\&=X^k_{;i}\omega_k+X^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\omega_k-\Gamma^s_{ki}\omega_s\right).\end{aligned}$$

Definieren wir also

$$\omega_{k;i}\equiv\nabla_i\omega_k:=\frac{\partial}{\partial x^i}\omega_k-\Gamma^s_{ki}\omega_s,$$

so gilt die Produktregel.

**Definition 17.17.** Sei $T$ ein $(r,s)$-Tensor. Dann definieren wir die kovariante Ableitung von $T$ in Richtung $k$ durch

$$T^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s;k}:=\frac{\partial T^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s}}{\partial x^k}+\sum_{a=1}^r\Gamma^{j_a}_{mk}T^{j_1\ldots j_{a-1}m\,j_{a+1}\ldots j_r}_{l_1\ldots l_s}-\sum_{b=1}^s\Gamma^m_{l_bk}T^{j_1\ldots j_r}_{l_1\ldots l_{b-1}m\,l_{b+1}\ldots l_s}.$$

**Bemerkung 17.18.**

(i) Für Vektorfelder erhalten wir dieselbe Formel wie in (13.2).

(ii) Die kovariante Ableitung eines Skalars stimmt mit der partiellen Ableitung überein.

(iii) Die kovariante Ableitung eines $(r,s)$-Tensors ist ein $(r,s+1)$-Tensor. Wir haben dies für einen $(1,0)$-Tensor nachgerechnet und werden noch den Fall eines $(0,1)$-Tensors vorführen. Den allgemeinen Fall lassen wir als Übung.

(iv) Für das Produkt von Tensoren gilt die Produktregel für kovariante Ableitungen in derselben Form wie für partielle Ableitungen bei Funktionen.

(v) Wir halten nochmals fest, dass wir „;“ vor die Indices bei kovarianten Ableitungen schreiben und entsprechend „,“ bei partiellen Ableitungen verwenden.

(vi) Die Bezeichnungen für kovariante Ableitungen unterscheiden sich; Komma, Strichpunkt und Doppelpunkt werden teils auch mit anderen Bedeutungen als hier verwendet.
(vii) Ist klar, dass es sich bei Indices um kovariante Ableitungen handelt, so lassen wir (später) die Strichpunkte auch wieder weg.

**Lemma 17.19.** *Sei $\omega_k$ eine Form. Dann ist $\omega_{k;i}$ ein $(0,2)$-Tensor, d. h. es gilt*
$$\omega_{k;i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = \bar{\omega}_{l;j} \equiv \nabla_{\bar{x}^j}\bar{\omega}_l.$$

*Beweis.* Wir erhalten unter Benutzung von (17.2) beim vorletzten Gleichheitszeichen
$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{x}^j}\bar{\omega}_l &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\bar{\omega}_l - \overline{\Gamma}^s_{lj}\bar{\omega}_s\\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left(\omega_k\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right) - \bar{\Gamma}^s_{lj}\bar{\omega}_s\\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\omega_k\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} + \omega_k\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^j} - \bar{\Gamma}^s_{lj}\bar{\omega}_s\\
&= (\nabla_i\omega_k + \Gamma^s_{ki}\omega_s)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} + \omega_k\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^j}\\
&\quad - \left(\Gamma^a_{bc}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^j}\right)\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\omega_r\\
&= \nabla_i\omega_k\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}.\end{aligned}$$
Somit gilt die Behauptung. □

**Lemma 17.20.** *Für den Levi-Civita Zusammenhang gilt*
$$g_{ij;k} = \nabla_k g_{ij} = 0$$
*für alle $i, j, k$. Wir sagen daher, dass die Metrik bezüglich des zugehörigen Levi-Civita Zusammenhanges parallel sei.*

*Beweis.* Wir berechnen direkt
$$\begin{aligned}g_{ij;k} &= g_{ij,k} - \Gamma^r_{ik}g_{rj} - \Gamma^r_{jk}g_{ir}\\
&= g_{ij,k} - \frac{1}{2}g^{rs}(g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s})g_{rj} - \frac{1}{2}g^{rs}(g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s})g_{ir}\\
&= g_{ij,k} - \frac{1}{2}(g_{ij,k} + \underline{g_{kj,i}} - \underline{g_{ik,j}}) - \frac{1}{2}(g_{ji,k} + \underline{g_{ki,j}} - \underline{g_{jk,i}}) = 0\end{aligned}$$
wie behauptet. □

**Korollar 17.21.** *Für den Levi-Civita Zusammenhang gilt*
$$g^{ij}{}_{;k} = 0.$$

**Lemma 17.22.** *Sei $a_{ij}$ ein symmetrisches $(0,2)$-Tensorfeld. Sei $a_{ij}$ in dem Sinne nicht singulär, dass es eine Inverse $a^{ij}$ mit $a_{ij}a^{jk} = \delta^k_i$ gibt. Dann können wir in der Definition der Christoffelsymbole die Metrik durch $a_{ij}$ ersetzen und erhalten (in den unteren beiden Indices) symmetrische Zusammenhangskoeffizienten. Auch hier gilt $a_{kl;m} = 0$.*

*Weiterhin gilt*
$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{il}\Gamma^l_{jk} + a_{jl}\Gamma^l_{ik}$$
*und somit verschwinden die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^k_{ij}$ für alle $i, j, k$ genau dann, wenn $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}$ für alle $i, j, k$ verschwindet.*

*Beweis.* Übung. □

### 17.3. **Vertauschen kovarianter Ableitungen.**

Sei $V^h \in C^2$ ein Vektorfeld. Dann vertauschen die zweiten partiellen Ableitungen: $V^h_{,ij} = V^h_{,ji}$. Ziel dieses Kapitels ist es, eine Formel für die Differenz von kovarianten Ableitungen bei unterschiedlicher Differentiationsreihenfolge herzuleiten.

Es ist häufig nötig, Ableitungen zu vertauschen, beispielsweise beim Berechnen der Evolutionsgleichung von $|Du|^2$ unter der Differentialgleichung $\dot{u} = \Delta u$.

**Bemerkung 17.23.** Sei $V^h$ ein $C^2$-Vektorfeld. Dann gilt

$$\begin{aligned}
V^j_{;hk} &\equiv \left(V^j_{;h}\right)_{;k} \equiv \nabla_k\left(\nabla_h V^j\right),\\
V^j_{;h} &= \frac{\partial V^j}{\partial x^h} + \Gamma^j_{lh} V^l,\\
V^j_{;hk} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(V^j_{;h}\right) + \Gamma^j_{mk} V^m_{;h} - \Gamma^l_{hk} V^j_{;l}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial V^j}{\partial x^h} + \Gamma^j_{lh} V^l\right) + \Gamma^j_{mk} V^m_{;k} - \Gamma^l_{hk} V^j_{;l}\\
&= \frac{\partial^2 V^j}{\partial x^h \partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^j_{lh} V^l + \Gamma^j_{lh}\frac{\partial V^l}{\partial x^k} + \Gamma^j_{mk}\frac{\partial V^m}{\partial x^h} + \Gamma^j_{mk}\Gamma^m_{lh} V^l - \Gamma^l_{hk} V^j_{;l}.
\end{aligned}$$

Eine entsprechende Formel erhalten wir mit vertauschten Rollen von $h$ und $k$, also für $V^j_{;kh}$. Da $V \in C^2$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
V^j_{;hk} - V^j_{;kh} = &\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^j_{lh} - \frac{\partial}{\partial x^h}\Gamma^j_{lk}\right) V^l + \left(\Gamma^j_{mk}\Gamma^m_{lh} - \Gamma^j_{mh}\Gamma^m_{lk}\right) V^l\\
&- \left(\Gamma^l_{hk} - \Gamma^l_{kh}\right) V^j_{;l} + \Gamma^j_{lh}\frac{\partial V^l}{\partial x^k} + \Gamma^j_{mk}\frac{\partial V^m}{\partial x^h} - \Gamma^j_{lk}\frac{\partial V^l}{\partial x^h} - \Gamma^j_{mh}\frac{\partial V^m}{\partial x^k}\\
= &K_l{}^j{}_{hk} V^l - T^l_{hk} V^j_{;l},
\end{aligned}$$

wobei

$$K_l{}^j{}_{hk} := \Gamma^j_{lh,k} - \Gamma^j_{lk,h} + \Gamma^j_{mk}\Gamma^m_{lh} - \Gamma^j_{mh}\Gamma^m_{lk}$$

ist und die Terme ohne Klammer sich gegenseitig aufheben. Für den Levi-Civita Zusammenhang (was wir bald stets annehmen werden), so gelten $g_{rj}K_i{}^r{}_{kl} = R_{jilk} = R_{ijkl}$ und $T^l_{hk} = 0$.

Die linke Seite ist als Differenz von zwei zweiten kovarianten Ableitungen eines Tensors wieder ein Tensor. $T^l_{hk} V^j_{;l}$ ist ein Tensor, da die Torsion als Differenz von zwei Zusammenhangskoeffizienten ein Tensor ist. Somit ist auch $K_l{}^j{}_{hk} V^l$ ein Tensor. Da $V^l$ ein beliebiges Vektorfeld ist, sind damit auch $K_l{}^j{}_{hk}$ und $R_{ijkl} = g_{im}R^m{}_{jkl}$ Tensoren. Insbesondere ist daher der Riccitensor $R_{ij}$ ein $(0,2)$-Tensor und die Skalarkrümmung $R$ ein Skalar.

**Bemerkung 17.24.** Ist $\Gamma^k_{ij}$ (in den unteren beiden Indices) symmetrisch, so gelten

$$K_a{}^b{}_{cd} = -K_a{}^b{}_{dc}$$

und

$$K_a{}^l{}_{bc} + K_b{}^l{}_{ca} + K_c{}^l{}_{ab} = 0.$$

*Beweis.* Übung. □

**Lemma 17.25.**

*(i) Sei $\omega_j \in C^2$. Dann gilt*

$$\omega_{j;hk} - \omega_{j;kh} = -K_j{}^l{}_{hk}\omega_l - T^l_{hk}\omega_{j;l}.$$

*(ii) Sei $S \in C^2$ ein $(r,s)$-Tensor. Dann gilt*

$$\begin{aligned}S^{j_1\dots j_r}_{l_1\dots l_s;hk} - S^{j_1\dots j_r}_{l_1\dots l_s;kh} = &\sum_{a=1}^{r} K_m{}^{j_a}{}_{hk} S^{j_1\dots j_{a-1}m\,j_{a+1}\dots j_r}_{l_1\dots l_s} \\ &- \sum_{b=1}^{s} K_{l_b}{}^m{}_{hk} S^{j_1\dots j_r}_{l_1\dots l_{b-1}m\,l_{b+1}\dots l_s} - T^m_{hk} S^{j_1\dots j_r}_{l_1\dots l_s;m}.\end{aligned}$$

*(iii) Wir halten noch zwei Spezialfälle davon fest, die als Ricci-Identitäten bezeichnet werden:*

$$S^{jl}_{;hk} - S^{jl}_{;kh} = K_m{}^j{}_{hk} S^{ml} + K_m{}^l{}_{hk} S^{jm} - T^m_{hk} S^{jl}_{;m}$$

*und*

$$a_{jl;hk} - a_{jl;kh} = - K_j{}^m{}_{hk} a_{ml} - K_l{}^m{}_{hk} a_{jm} - T^m_{hk} a_{jl;m}.$$

*(iv) Insbesondere gelten also für den Levi-Civita Zusammenhang*

$$\begin{aligned}\omega_{j;hk} - \omega_{j;kh} &= R^l{}_{jhk}\omega_l,\\ S^{jl}_{;hk} - S^{jl}_{;kh} &= - R^j{}_{mhk} S^{ml} - R^l{}_{mhk} S^{jm}\end{aligned}$$

*und*

$$a_{jl;hk} - a_{jl;kh} = R^m{}_{jhk} a_{ml} + R^m{}_{lhk} a_{jm}.$$

*Dies wird häufig gebraucht.*

*Beweis.* Übung. □

Hieraus ergibt sich eine weitere Symmetrieeigenschaft des Riemannschen Krümmungstensors.

**Lemma 17.26** (2. Bianchi Identität). *Sei $\Gamma^k_{ij}$ ein (in den unteren beiden Indices) symmetrischer Zusammenhang (mit $T = 0$). Dann gilt die 2. Bianchi Identität*

$$K_j{}^l{}_{hk;p} + K_j{}^l{}_{kp;h} + K_j{}^l{}_{ph;k} = 0.$$

*Beweis.* Sei $Y_j \in C^3$. Dann gilt

$$Y_{j;hkp} - Y_{j;khp} = (-K_j{}^l{}_{hk} Y_l)_{;p} = -K_j{}^l{}_{hk;p} Y_l - K_j{}^l{}_{hk} Y_{l;p}.$$

Diese Formel für das Vertauschen des zweiten und dritten Indexes addieren wir nun mit zyklisch vertauschten Indices und erhalten

$$\begin{aligned}A_{jhkp} :=& (Y_{j;hkp} - Y_{j;khp}) + (Y_{j;kph} - Y_{j;pkh}) + (Y_{j;phk} - Y_{j;hpk})\\ =& -\left(K_j{}^l{}_{hk;p} + K_j{}^l{}_{kp;h} + K_j{}^l{}_{ph;k}\right) Y_l - \underbrace{K_j{}^l{}_{hk} Y_{l;p}}_{\boxed{1}} - \underbrace{K_j{}^l{}_{kp} Y_{l;h}}_{\boxed{2}} - \underbrace{K_j{}^l{}_{ph} Y_{l;k}}_{\boxed{3}}.\end{aligned}$$

Wir gruppieren die Terme nun neu und verwenden die Ricci-Identität zum Vertauschen der Indices an den Stellen drei und vier. Dies ergibt

$$\begin{aligned}A_{jhkp} =& (Y_{j;hkp} - Y_{j;hpk}) + (Y_{j;kph} - Y_{j;khp}) + (Y_{j;phk} - Y_{j;pkh})\\ =& -\underbrace{K_j{}^m{}_{kp} Y_{m;h}}_{\boxed{2}} - K_h{}^m{}_{kp} Y_{j;m} - \underbrace{K_j{}^m{}_{ph} Y_{m;k}}_{\boxed{3}} - K_k{}^m{}_{ph} Y_{j;m}\\ &- \underbrace{K_j{}^m{}_{hk} Y_{m;p}}_{\boxed{1}} - K_p{}^m{}_{hk} Y_{j;m}.\end{aligned}$$

Vergleichen wir nun die beiden Darstellungen von $A_{jhkp}$, so sehen wir, dass sich die Terme mit Ziffern in Kästchen gerade gegenseitig aufheben. Weiterhin verschwinden die anderen drei Terme in der zweiten Darstellung aufgrund der (ersten) Bianchi-Identität. Da $Y_l$ beliebig war, muss auch die Klammer in der ersten Darstellung vor $Y_l$ verschwinden. Dies liefert die Behauptung. □

Das Maximumprinzip lässt sich auch mit kovarianten Ableitungen anwenden.

**Bemerkung 17.27.** Sei $\varphi$ eine skalare Funktion. Dann gelten

(i) In einem Maximum ist $\nabla_i\varphi = \varphi_{;i} = 0$ für alle $i$. Wir schreiben auch $\nabla\varphi = 0$.
(ii) In einem Maximum ist auch $\nabla_j\nabla_i\varphi = \varphi_{;ij} \preccurlyeq 0$, da $\Gamma^k_{ij}\varphi_k = 0$ ist.
(iii) $\nabla_i\nabla_j\varphi = \nabla_j\nabla_i\varphi$ für einen symmetrischen Zusammenhang.
(iv) Gilt $\nabla_i\varphi = 0$ in einer offenen zusammenhängenden Menge, so ist $\varphi$ dort konstant.

## 18. Tangentialbündel

Wir haben die folgende anschauliche Definition.

**Definition 18.1.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann wird der Tangentialraum von $M$ in $x$ von allen Vektoren $\alpha'(0)$ aufgespannt, wobei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$ ist.

**Bemerkung 18.2.** Diesen Vektorraum können wir auch als

$$T_xM := (d\varphi(x))^{-1}\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right)$$

schreiben, wobei $\varphi$ eine Karte des $\mathbb{R}^n$ ist, die zeigt, dass $M^m$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

Wir wollen diese Definition auf abstrakte (= nicht immersierte) Mannigfaltigkeiten $M$ verallgemeinern: Sei $x \in M$. Betrachte alle differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$. Zwei solche Kurven $\alpha$ und $\beta$ heißen äquivalent, wenn es eine Karte $(U, \varphi)$ um $x$ mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

gibt. Gilt diese Relation für eine Karte $(U, \varphi)$, so auch für jede andere Karte $(V, \psi)$ um $x$:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \beta)'(0)\rangle = (\psi \circ \beta)'(0).\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch die Transitiviät dieser Relation.

**Definition 18.3.** Ein Tangentialvektor im Punkt $x$ ist eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$.

Die Menge dieser Äquivalenzklassen heißt Tangentialraum im Punkt $x$: $T_xM$.

**Lemma 18.4.** *Ist $(U, \varphi)$ eine Karte, so ist für alle $x \in U$ durch $\varphi_{*,x}([\alpha]) := (\varphi \circ \alpha)'(0)$ eine bijektive Abbildung $\varphi_{*,x} : T_xM \to \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$, definiert.*

*Für zwei Karten $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ und $x \in U \cap V$ gilt*

$$\psi_{*,x} \circ \varphi_{*,x}^{-1} = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x)) \in GL\left(\mathbb{R}^m\right).$$

*Beweis.* $\varphi_{*,x}([\alpha])$ ist wohldefiniert, denn $\alpha \sim \beta$ ist äquivalent zu $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. $\varphi_{*,x}$ ist injektiv, denn $\varphi_{*,x}([\alpha]) = \varphi_{*,x}([\beta])$ bedeutet $\alpha \sim \beta$.

$\varphi_{*,x}$ ist surjektiv: Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Definiere $\alpha(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)$. Dann ist

$$\varphi_{*,x}([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = \left.\frac{d}{dt}(\varphi(x) + tv)\right|_{t=0} = v.$$

Wir haben bereits gesehen, dass

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle$$

gilt. Nach Definition folgt also

$$\psi_{*,x}([\alpha]) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\left\langle \varphi_{*,x}([\alpha])\right\rangle$$

wie behauptet. $\square$

**Korollar 18.5.** *$T_xM$ besitzt genau eine Vektorraumstruktur, so dass alle $\varphi_{*,x}$ Vektorraumisomorphismen werden: Setze für $v,\, w \in T_xM$ und $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$v + \lambda w := \varphi_{*,x}^{-1}(\varphi_{*,x}(v) + \lambda \varphi_{*,x}(w)).$$

*Nach Lemma 18.4 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte. Bringe $\varphi_{*,x}$ auf die andere Seite und benutze die Linearität der Komposition $\varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1}$:*

$$\begin{aligned}\varphi_{*,x}(v +_\varphi \lambda w) &= \varphi_{*,x}(v) + \lambda \varphi_{*,x}(w)\\ &= \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1} \circ \psi_{*,x}(v) + \lambda \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1} \circ \psi_{*,x}(w)\\ &= \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1}(\psi_{*,x}(v) + \lambda \psi_{*,x}(w))\\ &= \varphi_{*,x}(v +_\psi \lambda w).\end{aligned}$$

**Definition 18.6.** Die (disjunkte) Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

heißt Tangentialbündel von $M$. Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ setze $TU := \bigcup\limits_{p \in U} \{p\} \times T_pM$.

Ist $(U, \varphi)$ eine Karte von $M$, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_* \colon TU &\to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m,\\ (x, v) &\mapsto (\varphi(x), \varphi_{*,x}(v))\end{aligned}$$

die von $(U, \varphi)$ induzierte Karte von $TM$.

**Lemma 18.7.** *Ist $M$ von der Klasse $C^k$, $k \geq 1$, so bilden die von einem Atlas induzierten Karten einen $C^{k-1}$-Atlas der Menge $TM$ im Sinne von Lemma 16.10.*

*Beweis.*

(i) $\varphi_*$ ist bijektiv: Aus $\varphi_*((x,v)) = \varphi_*((y,w))$ folgt $\varphi(x) = \varphi(y)$ und $\varphi_{*,x}(v) = \varphi_{*,y}(w)$ und somit $x = y$ und, nach Lemma 18.4, $v = w$. Die Surjektivität folgt ebenfalls nach Lemma 18.4.

(ii) Aus $M = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} U$ folgt $TM = \bigcup\limits_{(U,\varphi) \in \mathcal{A}} TU$.

(iii) Zur Verträglichkeit: Seien $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ Karten von $M$ mit $z \in \varphi(U \cap V)$ und $z = \varphi(x)$, $v \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt nach Lemma 18.4

$$\begin{aligned}\psi_* \circ \varphi_*^{-1}((z,v)) &= \psi_*\left(\left(x, \varphi_{*,x}^{-1}(v)\right)\right) = \left(\psi(x), \psi_{*,x}\left(\varphi_{*,x}^{-1}(v)\right)\right)\\ &= \left(\psi\left(\varphi^{-1}(z)\right), d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(z)\langle v\rangle\right).\end{aligned}$$

$\psi_* \circ \varphi_*^{-1}$ ist, als Funktion von $(z, v)$, $(k-1)$-mal stetig differenzierbar.

(iv) $TM$ ist mit diesem Atlas und der damit induzierten Topologie Hausdorffsch: Punkte $(x, v)$ und $(y, w)$ lassen sich für $x \neq y$ trennen, da $M$ Hausdorffsch ist und für $w \neq v$, da dies für $\mathbb{R}^m$ der Fall ist. $\square$

**Korollar 18.8.** *Sei $M$ eine $C^k$-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$. Nach Lemma 16.10 besitzt $TM$ genau eine Topologie, die $TM$ zu einer (differenzierbaren) $C^{k-1}$-Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, der aus den von $M$ induzierten Karten besteht, macht.*

*Die natürliche Projektion $p : TM \to M$, $(x, v) \mapsto x$ ist von der Klasse $C^{k-1}$.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "p_1"] & \varphi(U). \end{tikzcd}$$

Wegen $p_1(\varphi_*(x,v)) = p_1((\varphi(x), \varphi_{*,x}(v))) = \varphi(x)$ und $\varphi(p(x,v)) = \varphi(x)$ kommutiert das Diagramm. Aus $p_1 = \varphi \circ p \circ \varphi_*^{-1} \in C^\infty$ erhalten wir $p \in C^{k-1}$. ☐

**Bemerkung 18.9.**

(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir identifizieren $TU$ mit $U \times \mathbb{R}^m$ vermöge
$$[\alpha] \leftrightarrow (\alpha(0), \alpha'(0)).$$

(ii) Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit von $N$. Für jedes $x \in M$ ist $T_xM \subset T_xN$. Also gilt $TM \subset TN$. $TM$ ist sogar eine Untermannigfaltigkeit von $TN$. (Übung.)

Spezialfall $N = \mathbb{R}^n$: $T_xM$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $TM \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

**Definition 18.10** (Induzierte Abbildung der Tangentialbündel)**.** Seien $M$, $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten ($C^k$) und $f\colon M \to N$ eine Abbildung der Klasse $C^k$. Dann definieren wir für $x \in M$ die Abbildung

$$\begin{aligned} f_{*,x} : T_xM &\to T_{f(x)}N, \\ f_{*,x}([\alpha]) &= [f \circ \alpha], \end{aligned}$$

wobei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ differenzierbar ist und $\alpha(0) = x$ gilt. Definiere

$$\begin{aligned} f_* : TM &\to TN, \\ f_*((x,v)) &:= (f(x), f_{*,x}(v)). \end{aligned}$$

**Bemerkung 18.11. Wohldefiniertheit von $f_*$:**

Seien $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ Karten um $x$ bzw. $f(x)$. Seien $\alpha, \beta\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = x$ gegeben. Ist $\alpha \sim \beta$, so folgt $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle(\varphi \circ \beta)'(0)\rangle = (\psi \circ f \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

Somit ist $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$.

**Koordinatendarstellung von $f_*$:** Seien $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ Karten um $x$ bzw. $f(x)$. In Karten hat $f_{*,x}$ die Form $d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))$, wenn wir die Kommutativität des folgenden Diagrammes nachrechnen können:

(18.1)
$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "f_{*,x}"] \arrow[d, "\varphi_{*,x}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & T_{f(x)}N \arrow[d, "\psi_{*,f(x)}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Für $v = [\alpha] \in T_xM$ gilt

$$\begin{aligned} \psi_{*,f(x)} \circ f_{*,x}(v) &= \psi_{*,f(x)}([f \circ \alpha]) = (\psi \circ f \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle\underbrace{(\varphi \circ \alpha)'(0)}_{=\varphi_{*,x}(v)}\rangle. \end{aligned}$$

**Beachte:** In Koordinaten ist $f_*$ somit gerade die Ableitung der Abbildung in Koordinaten.

**Bemerkung 18.12.**
(i) $f_{*,x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ ist linear. (Benutze (18.1).)
(ii) Gelte ohne Einschränkung $f(U) \subset V$ (in der üblichen Notation).

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & TV \arrow[d, "\psi_*"] \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_*"'] & \psi(V) \times \mathbb{R}^n. \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $f_*$ von der Klasse $C^{k-1}$, falls $f$ von der Klasse $C^k$ ist.
(iii) Es gilt die folgende funktorielle Eigenschaft von „$*$“: Sind $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ differenzierbare Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

*Beweis.* Sei $[\alpha] \in T_xL$.
$$(g \circ f)_{*,x}([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_{*,f(x)}([f \circ \alpha]) = g_{*,f(x)}(f_{*,x}([\alpha])).$$
□

**Definition 18.13** (Immersion, Submersion, Einbettung)**.** Seien $M$, $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung.
(i) $f$ heißt immersiv bzw. submersiv im Punkt $x \in M$, falls $f_{*,x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ injektiv bzw. surjektiv ist. $f$ hat in $x \in M$ den Rang $k$, falls dies für $f_{*,x}$ gilt.
(ii) $f$ heißt Immersion bzw. Submersion bzw. eine Abbildung von konstantem Rang $k$, wenn $f$ in allen Punkten immersiv bzw. submersiv ist bzw. den Rang $k$ hat.
(iii) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Einbettung, wenn $f : X \to f(X)$ Homöomorphismus ist, wobei $f(X)$ die Unterraumtopologie trägt.
(iv) Eine differenzierbare Abbildung $f$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbare Einbettung, wenn $f$ Immersion und Einbettung ist.
(v) Sei $f : M \to N$ eine Immersion. $f(M)$ heißt immersierte Mannigfaltigkeit.
Ist $f$ zusätzlich injektiv, dann heißt $\tilde{M} := f(M)$ mit der Topologie und differenzierbaren Struktur, die $f : M \to \tilde{M}$ zu einem Diffeomorphismus macht, eine immersierte Untermannigfaltigkeit von $N$. (Die induzierten Strukturen erhält man wie folgt: $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ ist offen, falls $f^{-1}\big(\tilde{U}\big)$ in $M$ offen ist. Ist $(U, \varphi)$ eine Karte für $M$, so ist $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ eine Karte für $\tilde{M}$.)

**Bemerkung 18.14.** Achtung, eine injektive Immersion ist i. a. keine differenzierbare Einbettung: Sei $M = (-1, 2\pi)$, $N = \mathbb{R}^2$ und
$$f(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{für } -1 < x \le 0, \\ (\cos x, \sin x) & \text{für } 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

**Bemerkung 18.15.** Ist $f : X \to Y$ stetig und injektiv, $X$ kompakt und $Y$ Hausdorffsch, so ist $f$ eine Einbettung.

*Beweis.* Siehe Topologievorlesung [3, Satz 9.12]. □

Das Rangtheorem aus der Analysis [1, Theorem 10.3.1] liefert

**Theorem 18.16.** *Sei $f : M^m \to N^n$ eine Abbildung die in jedem Punkt den Rang $l$ hat. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Karten $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ von $M$ bzw. $N$ mit $p \in U$, $f(p) \in V$ und $f(U) \subset V$, so dass*
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^l, 0, \ldots, 0\right).$$

Ohne Einschränkung können wir auch $\varphi(U) = B_1^m(0)$ und $\psi(V) = B_1^n(0)$ annehmen.

**Theorem 18.17.** *Sei $f\colon M^m \to N^n$ von der Klasse $C^k$, $k \ge 1$.*

*(i) Ist $f$ eine differenzierbare Einbettung, so ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $N$ der Klasse $C^k$ und der Dimension $m = \dim M$.*
*(ii) Ist $y_0 \in N$ und hat $f$ konstanten Rang $l$, so ist $f^{-1}(y_0) \equiv f^{-1}(\{y_0\})$ leer oder eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - l$.*
*(iii) Ist $y_0 \in N$ und $f$ für alle $x \in f^{-1}(y_0)$ submersiv, so ist $f^{-1}(y_0)$ leer oder eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n = \dim M - \dim N$.*

*Beweis.*

(i) Sei $x_0 \in M$, $y_0 := f(x_0)$. Seien $(U,\varphi)$ bzw. $(V,\psi)$ Karten um $x_0$ bzw. $y_0$. Setze $z_0 := \varphi(x_0)$. $f_{*,x_0}$ ist injektiv. Also folgt, dass $L := d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(z_0)$ injektiv ist, insbesondere $m \le n$.

Ergänze eine Basis von $L(\mathbb{R}^m)$ durch $v_{m+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$. Definiere

$$F(z) := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(z^1, \ldots, z^m\right) + \sum_{l=m+1}^{n} z^l v_l, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $dF(z_0, 0)$ bijektiv und es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $F : B_\varepsilon(z_0,0) \to F(B_\varepsilon(z_0,0))$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$F|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}. \tag{18.2}$$

Setze $V_\varepsilon := \psi^{-1}(F(B_\varepsilon((z_0,0))))$. Dann ist $(V_\varepsilon, F^{-1} \circ \psi)$ eine Karte um $y_0$. Da $f^{-1}$ stetig ist, existiert eine offene Umgebung $V_0$ von $y_0$ mit $V_0 \subset V_\varepsilon$ und $f^{-1}(V_0) \subset \varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(z_0,0) \cap \mathbb{R}^m\right)$, wobei wir $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ identifizieren.

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(z_0,0) \cap \mathbb{R}^m\right) \subset U & \xrightarrow{f} & V \supset V_\varepsilon \supset V_0 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ B_\varepsilon(z_0,0) \cap \mathbb{R}^m \subset \varphi(U) & & \psi(V) \supset F(B_\varepsilon(z_0,0)) \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(M) \cap V_0 &= V_0 \cap \left(f \circ \varphi^{-1}\left(B_\varepsilon(z_0,0) \cap \mathbb{R}^m\right)\right) \\ &= V_0 \cap \left(\psi^{-1} \circ F\left(B_\varepsilon(z_0,0) \cap \mathbb{R}^m\right)\right) \qquad \text{nach (18.2).} \end{aligned}$$

(ii) Sei $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $(U,\varphi)$ und $(V,\psi)$ seien Karten um $x_0$ bzw. $y_0$. Gelte ohne Einschränkung $f(U) \subset V$. Für $z \in \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)^{-1}(\psi(y_0)) = \varphi \circ f^{-1}(y_0)$ hat $d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)$ konstanten Rang $l$. Somit ist (ggf. nach Verkleinern von $U$ und $V$) die Menge $\varphi\left(f^{-1}(y_0)\right) \cap \varphi(U)$ nach dem Rangtheorem eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$. Da $\varphi^{-1}$ Diffeomorphismus ist, ist $f^{-1}(y_0) \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von $M$.

(iii) Lokal hat $f$ nahe $f^{-1}(y_0)$ konstanten Rang $n$. Die Behauptung folgt. □

Lokal sind Immersionen stets Einbettungen:

**Theorem 18.18.** *Sei $f : M^m \to N^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ mit $p \in U$, so dass $f|_U$ eine Einbettung ist.*

*Beweis.* Wähle Karten $(U,\varphi)$ und $(V,\psi)$ von $M$ bzw. $N$ mit $p \in U$ und $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ so dass $\hat f := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon B_1^m(0) \to B_1^n(0)$ die Form

$$\hat f\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0\right)$$

hat. Dann ist $\hat{f} : B_1^m(0) \to B_1^n(0)$ eine Einbettung. $\varphi \colon U \to B_1^m(0)$ und $\psi \colon V \to B_1^n(0)$ sind Diffeomorphismen. Daher ist $f|_U : U \to V$ eine Einbettung, wenn $f(U)$ die Unterraumtopologie bezüglich der Menge $V$ trägt. Da aber $V \subset N$ offen ist, ist das dieselbe Topologie wie die Unterraumtopologie bezüglich der Menge $N$. Also ist $f|_U$ eine Einbettung. □

**Theorem 18.19.** *Sei $M$ eine kompakte (differenzierbare) Mannigfaltigkeit der Klasse $C^k$, $0 \le k \le \infty$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ und eine (differenzierbare) Einbettung $f \colon M \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $C^k$.*

*Beweis.* Sei $m = \dim M$. Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine Karte $(V, \varphi)$ mit $\varphi(x) = 0$ und $B_3(0) \subset \varphi(V)$. Da $M$ kompakt ist, gibt es $(V_1, \varphi_1), \ldots, (V_l, \varphi_l)$ aus diesen Karten mit $M = \bigcup\limits_{j=1}^{l} \varphi_j^{-1}(B_1(0))$.

Sei $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\lambda(x) = 1$ für $x \in B_1(0)$ und $\lambda(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^m \setminus B_2(0)$. Definiere $\lambda_j \colon M \to \mathbb{R}$ und $f_j \colon M \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\lambda_j(x) := \begin{cases} \lambda \circ \varphi_j(x), & x \in V_j, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$f_j(x) := \begin{cases} \lambda_j(x)\varphi_j(x), & x \in V_j, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Es gilt $\lambda_j,\ f_j \in C^k$. Definiere $f \colon M \to \mathbb{R}^{(m+1)l}$, $f \in C^k$, durch

$$f(x) := (f_1(x), \lambda_1(x), \ldots, f_l(x), \lambda_l(x)).$$

$f$ ist injektiv: Seien $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$. Da die Mengen $\varphi_j^{-1}(B_1(0))$ die Mannigfaltigkeit $M$ überdecken, gibt es ein $j_0$ mit $\lambda_{j_0}(x) = 1$. Wegen $\lambda_{j_0}(y) = 1$ folgt $x, y \in V_{j_0}$. Wegen $\varphi_{j_0}(x) = \varphi_{j_0}(x)\lambda_{j_0}(x) = f_{j_0}(x) = f_{j_0}(y) = \varphi_{j_0}(y)$ folgt $x = y$. Nach Bemerkung 18.15 ist $f$ eine topologische Einbettung, denn $M$ ist kompakt und $\mathbb{R}^k$ ist Hausdorffsch.

Sei $k \ge 1$. Dann ist $f$ auch eine Immersion, denn für $x \in \varphi_{j_0}^{-1}(B_1(0))$ ist $(f_{j_0})_{*,x} = (\varphi_{j_0})_{*,x}$ injektiv, also auch $f_{*,x}$. Im Fall $k = 0$ liefert Bemerkung 18.15, dass $f$ eine Einbettung ist. □

## 19. Vektorbündel

Vektorbündel verallgemeinern das Tangentialbündel.

**Definition 19.1** (Vektorbündelkarte)**.** Seien $X$, $B$ topologische Räume, $p : X \to B$ stetig und $E$ ein normierter Vektorraum. Eine $E$-Bündelkarte ist ein Paar $(U, \Phi)$, wobei

(i) $U \subset B$ offen ist und $\Phi \colon p^{-1}(U) \to U \times E$ ein Homöomorphismus ist.
(ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times E \arrow[dl, "p_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Für $y \in p^{-1}(x)$ (genauer: $p^{-1}(\{x\})$) erhalten wir

$$\Phi(y) = (p_1\Phi(y), p_2\Phi(y)) \equiv (x, \Phi_x(y)).$$

$p^{-1}(x)$ heißt Faser von $x$; es ist $\Phi(p^{-1}(x)) = \{x\} \times E$. (Äquivalent zur obigen Definition erhalten wir $\Phi_x := p_2 \circ \Phi|_{p^{-1}(x)}$.) $\Phi_x : p^{-1}(x) \to E$ ist ein Homöomorphismus.

**Definition 19.2.** Ein $E$-Bündelatlas $\mathcal{A}$ für $p : X \to B$ ist eine Kollektion von $E$-Bündelkarten, so dass

(i) $B \subset \bigcup\limits_{(U,\Phi)} U$,

(ii) Für $(U, \Phi)$, $(V, \Psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt
   (a) $\Psi_x \circ \Phi_x^{-1} \colon E \to E$ ist ein Isomorphismus normierter Vektorräume,
   (b) $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ ist stetig von $U \cap V$ nach $L(E)$ mit der Operatornorm $\|T\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

**Definition 19.3.**

(i) Ein Vektorbündel $p \colon X \to B$ ist eine Abbildung $p$ wie oben mit einem zugehörigen Bündelatlas $\mathcal{A}$. Wir nennen auch $X$ Vektorbündel. Wir sprechen auch von Bündeln statt von Vektorbündeln. (Es gibt z. B. auch $\mathbb{S}^1$-Bündel. Hier sind aber sämtliche Bündel stets Vektorbündel.)

(ii) Ein Vektorbündel heißt $E$-Bündel, falls $E$ ein normierter Vektorraum ist und die Bilder der Bündelkarten die Form $U \times E$ haben. Ein Linienbündel ist (bei reellen Mannigfaltigkeiten wie hier) ein $\mathbb{R}$-Bündel.

**Bemerkung 19.4.**

(i) Sei $(x, v) \in U \times E$. Wegen $\Psi \circ \Phi^{-1}(x, v) = \big(x, \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)\big)$ und da $\Psi$, $\Phi$ Homöomorphismen sind, ist $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ automatisch stetig, falls $E$ endlichdimensional ist.

(ii) Wie beim Tangentialbündel erhalten die Fasern $p^{-1}(x)$ eine eindeutige Vektorraumstruktur, so dass alle $\Phi_x \colon p^{-1}(x) \to E$ Vektorraumisomorphismen werden: Für $v$, $w \in p^{-1}(x)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzt man

$$v + \lambda w := \Phi_x^{-1}(\Phi_x(v) + \lambda \Phi_x(w)).$$

(iii) Das triviale $E$-Bündel über $B$ ist durch $X = B \times E$, $\Phi(x, v) = (x, v)$ gegeben.

(iv) Das Tangentialbündel ist ein Vektorbündel: Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $TM$. Definiere $p : TM \to B \equiv M$ durch $T_xM \ni v \mapsto p(v) = x \in M$. Ist $(U, \varphi)$ eine Karte von $M$, so definieren wir

$$\Phi \colon T_U M \equiv p^{-1}(U) \to U \times E \equiv U \times \mathbb{R}^m,$$
$$T_x M \ni v \mapsto \Phi(v) = (x, \varphi_{*,x}(v)).$$

$\Psi_x \circ \Phi_x^{-1} = \psi_{*,x} \circ \varphi_{*,x}^{-1}$ ist ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^m$, $m = \dim M$.

**Definition 19.5** (Vektorbündel der Klasse $C^k$)**.** Ist $p : X \to B$ ein Vektorbündel und $B$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $C^k$, so heißt ein Vektorbündelaltlas $\mathcal{A} = \{(U, \Phi)\}$ von der Klasse $C^k$, falls für je zwei Karten $(U, \Phi)$, $(V, \Psi) \in \mathcal{A}$ die Kartenwechselabbildung

$$\Psi \circ \Phi^{-1} \colon (U \cap V) \times E \to (U \cap V) \times E$$

von der Klasse $C^k$ ist.

**Bemerkung 19.6.** Betrachte $E$-Vektorbündel mit $\dim E < \infty$.

(i) Besitze $U \cap V$ eine differenzierbare Struktur. Wegen

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(x, v) = \big(x, \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)\big)$$

und da $\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ ein Vektorraumisomorphismus von $E$ ist, sind $\Psi \circ \Phi^{-1} \in C^k$ und $\big(x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\big) \in C^k$ äquivalent.

(ii) Jedes Vektorbündel der Klasse $C^k$ über einer $C^k$-Mannigfaltigkeit ist auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $C^k$ der Dimension $\dim B + \dim E$: Sei $\mathcal{A} = \{(U, \Phi)\}$ ein Vektorbündelatlas und sei

$\mathcal{B} = \{(V, \varphi)\}$ ein Atlas von $B$. Nehme ohne Einschränkung an, dass für jedes $(U, \Phi) \in \mathcal{A}$ ein $(U, \varphi) \in \mathcal{B}$ existiert; sonst ersetze $U$ durch $U \cap V$. Als Diagramm erhalten wir

$$\begin{tikzcd} X \supset p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times E \arrow[r, "(\varphi,\mathrm{id})"] \arrow[dl, "p_1"] & \varphi(U) \times E \arrow[d, "p_1"] \\ U \arrow[rr, "\varphi"] & & \varphi(U). \end{tikzcd}$$

Die Verträglichkeit der Karten ergibt sich aus

$$(\psi, \mathrm{id}) \circ \Psi \circ \Phi^{-1} \circ (\varphi, \mathrm{id})^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)).$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}} := \{(p^{-1}(U), (\varphi, \mathrm{id}) \circ \Phi)\}$ ein $C^k$-Atlas von $X$.

**Definition 19.7** (Schnitte, Vektorfelder)**.** Sei $p\colon X \to B$ ein Vektorbündel. Ein Schnitt ist eine stetige Abbildung $s : B \to X$ mit $p \circ s = \mathrm{id}$, d. h. $s(x) \in p^{-1}(x)$ für alle $x \in B$. Die Schnitte des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißen Vektorfelder.

$s_0(x) := 0_x \in p^{-1}(x)$ heißt Nullschnitt.

**Bemerkung 19.8.** Sei $\dim E < \infty$. $s_0$ ist eine (differenzierbare) Einbettung, d. h. man kann $B$ mit $s_0(B)$ identifizieren.

$$\begin{tikzcd} s_0(U) \arrow[r, "\Phi"] & U \times \{0\} \subset U \times E \arrow[dl, "p_1"] \\ U. \arrow[u, "s_0"] & \end{tikzcd}$$

$\Phi \circ s_0$ ist die Abbildung $U \ni x \mapsto (x, 0) \in U \times E$, eine Einbettung. Somit ist $s_0 : B \to s_0(B)$ ein lokaler Homöomorphismus bzw. Diffeomorphismus. $s_0$ ist injektiv, da $p \circ s_0 = \mathrm{id}$ ist und $p|_{s_0(B)}$ ist eine stetige Inverse. Die Behauptung folgt.

**Definition 19.9** (Abbildungen von Vektorbündeln)**.** Seien $p_i\colon X_i \to B_i$, $i = 0, 1$, $E_i$-Vektorbündel mit $\dim E_i < \infty$. Eine stetige Abbildung $F : X_0 \to X_1$ heißt eine Vektorbündelmorphismus, wenn $F$ jede Faser von $X_0$ linear in eine Faser von $X_1$ abbildet, d. h. wenn für jedes $x_0 \in B_0$ ein $x_1 \in B_1$ existiert, so dass $F_{x_0} := F|_{p_0^{-1}(x_0)} \to p_1^{-1}(x_1)$ linear ist.

**Bemerkung 19.10.**

(i) Ist $s_0$ der Nullschnitt von $X_0$, so ist $f := p_1 \circ F \circ s_0$ stetig. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & X_1 \arrow[d, "p_1"] \\ B_0 \arrow[r, "f"'] & B_1. \end{tikzcd}$$

(ii) Ist $B_0 = B_1$, $f = \mathrm{id}$ und $F_x$ ein Isomorphismus für jedes $x$, so heißt $F$ Vektorbündelisomorphismus.

(iii) Das Vektorbündel $p\colon X \to B$ heißt trivial, wenn es zum Vektorbündel $B \times E$ isomorph ist.

(iv) Ein Vektorbündel mit $\dim E = n$ ist genau dann trivial, wenn es $n$ linear unabhängige Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ besitzt, d. h. $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ sind für jedes $x$ linear unabhängig.

*Beweis.* „$\Longleftarrow$": Seien $s_1, \ldots, s_n$ die linear unabhängigen Schnitte. Definiere $F\colon B \times \mathbb{R}^n \to X$ durch $F(y, (x^1, \ldots, x^n)) := \sum\limits_{j=1}^{n} x^j s_j(y)$.

„$\Longrightarrow$": Sei umgekehrt $F : B \times \mathbb{R}^n \to X$ ein Vektorbündelisomorphismus und sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Setze $s_j(x) := F(x, e_j)$. $\square$

(v) Die Existenz einer Vektorbündelkarte $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times E$ impliziert, dass $p^{-1}(U)$ trivial ist.

(vi) $T\mathbb{S}^n$ ist für gerades $n > 0$ nichttrivial, da nach dem Satz vom Igel jedes stetige Tangentialfeld auf $\mathbb{S}^n$, $n$ gerade, eine Nullstelle besitzen muss.

$T\mathbb{S}^n$ ist für $n = 0, 1, 3, 7$ trivial. Für alle anderen $n$ ist $T\mathbb{S}^n$ nichttrivial (nichttriviale algebraische Topologie, J. F. Adams).

**Definition 19.11** (Tensoren)**.** Sei $E$ ein normierter Vektorraum, $\dim E < \infty$, und $E'$ der Dualraum von $E$, häufig auch mit $E^*$ bezeichnet. Ein Tensor $T$ der Stufe $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (manchmal wird $(r, s) = (0, 0)$ ausgeschlossen), auf $E$ ist eine Multilinearform auf $(E')^r \times E^s$. Die Menge aller Tensoren einer Stufe $(r, s)$ bilden einen endlich-dimensionalen Vektorraum $E^{(r,s)}$.

Ein $E^{(r,s)}$-Tensor heißt $r$-fach kontravariant und $s$-fach kovariant. Ein $E^{(r,0)}$-Tensor heißt kontravariant, ein $E^{(0,s)}$-Tensor heißt kovariant.

Wichtig wird später bei Tensoren insbesondere der Nachweis, dass die Auswertung nur von den Einträgen in einem Punkt und insbesondere nicht von den Ableitungen der Einträge abhängt.

Gelte ab jetzt stets $\dim E < \infty$.

**Bemerkung 19.12.**

(i) Es gilt $E' = E^{(0,1)}$.

(ii) Ist $E$ normiert, so definiert $\|x'\| := \sup\limits_{\|x\| \le 1} |x'\langle x\rangle|$ eine Norm auf $E'$.

(iii) Auf $E^{(r,s)}$ definiert

$$\|T\| := \sup_{\substack{\|x'_j\| \le 1 \\ \|x_k\| \le 1}} |T\langle x'_1, \ldots, x'_r; x_1, \ldots, x_s\rangle|$$

eine Norm und damit auch eine Topologie auf $E^{(r,s)}$.

(iv) $E$ ist kanonisch isomorph zu $E'' = E^{(1,0)}$ vermöge $x\langle x'\rangle := x'\langle x\rangle$ für $x \in E$, $x' \in E'$. Daher ist $E^{(1,r)}$ kanonisch isomorph zu $L^r(E, E)$, dem Raum der $r$-linearen Abbildungen $E^r \to E$: Seien $x_i \in E$. Dann ist nämlich $e \in E$ durch

$$T\langle \varphi; x_1, \ldots, x_r\rangle = e\langle \varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in E'$$

definiert.

**Definition 19.13** (Transformation von Tensoren)**.** Sei $\varphi\colon E \to F$ ein linearer Vektorraumisomorphismus zwischen normierten endlichdimensionalen Vektorräumen. Definiere $\varphi' : F' \to E'$ durch $\varphi'(y') := y' \circ \varphi$. Definiere $\varphi_\#\colon E^{(r,s)} \to F^{(r,s)}$ für $T \in E^{(r,s)}$ durch

$$\varphi_\#(T)\langle f'_1, \ldots, f'_r; f_1, \ldots, f_s\rangle := T\left\langle \varphi'(f'_1), \ldots, \varphi'(f'_r); \varphi^{-1}(f_1), \ldots, \varphi^{-1}(f_s)\right\rangle.$$

$\varphi_\#(T)$ heißt "push-forward" von $T$.

**Bemerkung 19.14.**

(i) Dies ist (im sich aus der folgenden Rechnung erklärenden Sinne) konsistent mit der Identifikation $E = E^{(1,0)} = E''$: Für $x \in E$ ist $\varphi_\#(x)\langle f'\rangle = x\langle \varphi'(f')\rangle = x\langle f' \circ \varphi\rangle = (f' \circ \varphi)\langle x\rangle = f'\langle \varphi\langle x\rangle\rangle = \varphi(x)\langle f'\rangle$.

(ii) $\varphi_\#\colon E^{(r,s)} \to F^{(r,s)}$ ist linear.

(iii) Sind $\varphi\colon E \to F$ und $\psi\colon F \to G$ Vektorraumisomorphismen, so gilt $(\psi\circ\varphi)_\# = \psi_\# \circ \varphi_\#$, da $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$, $(\psi \circ \varphi)' = \varphi' \circ \psi'$ und aufgrund einer kleinen einfachen Rechnung.

(iv) **Differenzierbarkeit von $\varphi \mapsto \varphi_\#$:** Sei $T \in E^{(r,s)}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in L(F', E')$, $\psi_1, \ldots, \psi_s \in L(F, E)$. Dann ist die Abbildung

$$(T; \varphi_1, \ldots, \varphi_r; \psi_1, \ldots, \psi_s) \mapsto T(\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_r(\cdot); \psi_1(\cdot), \ldots, \psi_s(\cdot)) \in F^{(r,s)}$$

multilinear von $E^{(r,s)} \times L(F', E')^r \times L(F, E)^s$ nach $F^{(r,s)}$ und daher von der Klasse $C^\infty$.

$\varphi \mapsto \varphi^{-1} \in C^\infty(\underbrace{\mathrm{Iso}(E, F)}_{\subset L(E,F)}, \underbrace{\mathrm{Iso}(F, E)}_{\subset L(F,E)})$. $\varphi \mapsto \varphi'$ ist linear und daher in $C^\infty(L(E, F), L(F', E'))$. Aufgrund der Kettenregel ist $(T, \varphi) \mapsto \varphi_\# T$ von der Klasse $C^\infty\left(E^{(r,s)} \times \mathrm{Iso}(E, F), F^{(r,s)}\right)$.

Somit ist $\varphi \mapsto \varphi_\#$ von der Klasse $C^\infty\left(\mathrm{Iso}(E, F), \mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}, F^{(r,s)}\right)\right)$.

Wegen $(\varphi \circ \psi)_\# = \varphi_\# \circ \psi_\#$ und $\mathrm{id}_\# = \mathrm{id}$ ist $\varphi_\#$ stets ein Isomorphismus und es gilt $(\varphi_\#)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_\#$.

**Definition 19.15** (Tensorbündel über einem Vektorbündel)**.** Sei $p : X \to B$ ein Vektorbündel mit allgemeiner Faser $E$, $\dim E < \infty$, und Vektorbündelkarten $(U, \Phi)$, $\Phi\colon p^{-1}(U) \to U \times E$. Sei $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. (Erinnerung: Für $x \in B$ ist $p^{-1}(x)$ ein Vektorraum.) Auf

$$X^{(r,s)} := \bigcup_{x\in B} (p^{-1}(x))^{(r,s)}$$

definieren wir eine Vektorbündelstruktur durch die Projektion

$$\begin{aligned} p^{(r,s)} &: X^{(r,s)} \to B,\\ p^{(r,s)}\left(\left(p^{-1}(x)\right)^{(r,s)}\right) &:= x \end{aligned}$$

und den Vektorbündelatlas

$$\begin{aligned} \Phi_\#\colon \left(p^{(r,s)}\right)^{-1}(U) &\to U \times E^{(r,s)},\\ \Phi_\#(x, T) \equiv \Phi_\#(T) &:= (x, \Phi_{x\#}(T)). \end{aligned}$$

(Erinnerung: Für $v \in p^{-1}(x)$ ist $\Phi(v) = (x, \Phi_x(v))$, wobei $\Phi_x : p^{-1}(x) \to E$ ein Isomorphismus ist.)

**Bemerkung 19.16.**

(i) **Verträglichkeit der Karten:** Sei $(x, T) \in U \times E^{(r,s)}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi_\# \circ (\Phi_\#)^{-1}(x, T) &= \left(x, \Psi_{x\#} \circ (\Phi_{x\#})^{-1}(T)\right) = \left(x, \Psi_{x\#} \circ \left(\Phi_x^{-1}\right)_\# (T)\right)\\ &= \left(x, \left(\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right)_\# (T)\right). \end{aligned}$$

Nach Definition eines Vektorbündels ist $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ stetig (bzw. $\in C^k$) von $U \cap V$ nach $\mathrm{Iso}(E)$. Nach Bemerkung 19.14 (iv) ist

$$(\varphi \mapsto \varphi_\#) \in C^\infty\left(\mathrm{Iso}(E), \mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}\right)\right).$$

Somit ist $x \mapsto \left(\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right)_\#$ stetig (bzw. $C^k$) von $U \cap V$ nach $\mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}\right)$. Nach Lemma 16.10 existiert daher genau eine Topologie auf $X^{(r,s)}$ zu dem festgelegten Atlas, so dass alle $\Phi_\#$ Homöomorphismen werden. Somit ist

$$p^{(r,s)}\colon X^{(r,s)} \to B$$

ein Vektorbündel von der Klasse $C^k$, falls $p\colon X \to B$ von der Klasse $C^k$ ist.

(ii) **Spezialfall Tangentialbündel:** Das Tangentialbündel ist $p : TM \to M$. Die Schnitte von $p^{(r,s)}\colon (TM)^{(r,s)} \to M$ heißen Tensorfelder (oder kurz: Tensoren) auf $M$.

Insbesondere heißt das Bündel $p^{(0,1)}\colon (TM)^{(0,1)} \to M$ Kotangentialbündel auf $M$. Es wird mit $T^*M$ bezeichnet. Die zugehörigen Schnitte heißen 1-Formen und werden häufig mit $\omega$ bezeichnet.

Weiterhin ist $p^{(1,0)}\colon (TM)^{(1,0)} \to M$ (bis auf Isomorphie) das Tangentialbündel.

## 20. Vektorfelder

**Definition 20.1** (Derivation)**.** Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist $C^1(M) = C^1(M, \mathbb{R})$ ein Vektorraum und ein kommutativer Ring mit $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $f \in C^1(M)$. Definiere $vf := f_{*,p}(v)$. Entsprechend setzen wir für ein Vektorfeld $X$ auf $M$

$$(Xf)(p) := vf,$$

falls $X(p) = (p, v)$ (was wir auch als „$X(p) = v$“ schreiben werden).

Die Operation $v\colon C^1(M) \to \mathbb{R}$ erfüllt

(i) $v(f + g) = v(f) + v(g)$,
(ii) $v(fg) = (vf)g(p) + f(p)(vg)$,
(iii) $v(\lambda f) = \lambda v(f)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine Abbildung $\delta : C^1(M) \to \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften heißt Derivation in $p$.

**Bemerkung 20.2.** Ist $v = [\alpha]$, so wird $vf$ nach Definition 18.10 zu $vf = f_{*,x}([\alpha]) = [f\circ\alpha] = (f\circ\alpha)'(0)$, wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen $T_p\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ identifiziert haben. Damit ergeben sich die obigen Eigenschaften für eine Derivation unmittelbar.

**Bemerkung 20.3.**

(i) Ist $\delta$ eine Derivation in $p$, so ist $\delta f = 0$ für alle $f$ mit $f \equiv 0$ in einer Umgebung von $p$.

*Beweis.* Gelte $f \equiv 0$ in $U$. Wähle $g \in C^1(M)$ mit $g(p) = 2$ und $g = 1$ in $M \setminus U$. Dann gilt $f = fg$ und in $p$ folgt $\delta f = \delta(fg) = \delta f 2 + 0$, also $\delta f = 0$. □

(ii) Jede Derivation in $p$ läßt sich von $C^1(M)$ auf $C^1(U)$, $U$ eine beliebige Umgebung von $p$, einschränken: Wähle (z. B. mit Hilfe einer Karte) Umgebungen $V$, $W$ von $p$ mit $\bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset U$ und $h \in C^1(M)$ mit $h = 1$ auf $V$ und $h = 0$ auf $M \setminus \bar{W}$. Definiere für $f \in C^1(U)$

$$\delta(f) := \delta\big(\tilde{f}\big) \quad \text{mit } \tilde{f} = \begin{cases} hf & \text{in } U,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aufgrund des ersten Teiles der Bemerkung ist dies unabhängig von $h, V$ und $W$ wohldefiniert.

**Lemma 20.4.** *Ist $f \in C^k(B_1(0))$, so gibt es Funktionen $f_i \in C^{k-1}(B_1(0))$ mit*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(x).$$

*Beweis.* Es gilt $f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)x^i\,dt$. Setze also $f_i(x) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\,dt$. □

**Korollar 20.5.** *Ist $(U, \varphi)$ eine Karte von $M^n$ mit $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(U) = B_1(0)$, so gibt es zu $f \in C^k(U)$ Funktionen $f_i \in C^{k-1}(U)$ mit $f - f(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^i f_i$.*

*Beweis.* Wir wenden Lemma 20.4 auf $f \circ \varphi^{-1}$ an und erhalten

$$f \circ \varphi^{-1} - f \circ \underbrace{\varphi^{-1}(0)}_{=p} = \sum_{i=1}^{n} x^i \tilde{f}_i.$$

Wende nun „$\circ\varphi$“ an und setze $f_i := \tilde{f}_i \circ \varphi$. □

Derivationen und Vektorfelder entsprechen einander:

**Theorem 20.6.** *Zu jeder Derivation $\delta$ in $p \in M^m$ gibt es genau ein $v \in T_pM$ mit $\delta f = vf$ für alle $f \in C^2(M)$.*

*Beweis.* Zunächst einmal verschwindet $\delta(c)$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, da $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1)$ auch $\delta(1) = 0$ impliziert. Daher folgt nach Korollar 20.5

$$\delta(f) = \underbrace{\delta(f(p))}_{=0} + \sum_{i=1}^{m} \Big( \delta\left(\varphi^i\right) f_i(p) + \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0} \delta(f_i) \Big).$$

Da $\varphi_{*,p} \colon T_pM \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus ist, gibt es genau ein $v \in T_pM$ mit $\varphi_{*,p}(v) = \left(\delta\left(\varphi^1\right), \ldots, \delta\left(\varphi^m\right)\right)$. Dies ist nach Definition äquivalent zu $v\varphi^i = \delta\varphi^i$ für $i = 1, \ldots, m$. Wir erhalten

$$vf = v\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi^i f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(v\varphi^i\right)}_{=\delta\varphi^i} f_i(p) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0}(vf_i) = \delta f.$$ □

**Definition 20.7.** Ein $C^k$-Vektorfeld $V$, $0 \le k \le \infty$, auf einer Mannigfaltigkeit der Klasse $C^{k+1}$ ist eine Abbildung $M \to TM$ der Klasse $C^k$ mit $V(p) \in T_pM \subset TM$, oder, äquivalent dazu, ein $C^k$-Schnitt in $p \colon TM \to M$.

**Definition 20.8** (Lie-Produkt von Vektorfeldern)**.** Seien $X, Y$ Vektorfelder der Klasse $C^1$ auf $M$. Sei $f \in C^2(M)$. Definiere

$$\sigma(f) := X(Yf) - Y(Xf).$$

Wir werden gleich nachrechnen, dass $\sigma$ in jedem Punkt $p \in M$ eine Derivation (für $C^2$-Funktionen) definiert. Nach Theorem 20.6 existiert genau ein Vektorfeld $Z$ mit $\sigma f = Zf$ für alle $f \in C^2(M)$. Wir definieren das Lieprodukt von $X$ und $Y$ durch $[X, Y] := Z$.

**Bemerkung 20.9.**

(i) $\sigma$ ist eine Derivation: Die Linearität ist klar.
**Produktregel:**

$$\begin{aligned} \sigma(fg) &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\ &= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf - YfXg - fYXg - YgXf - gYXf \\ &= f\sigma(g) + g\sigma(f). \end{aligned}$$

(ii) **Koordinatendarstellung von $[X, Y]$:** Sei $(U, \varphi)$ eine Karte von $M$ und sei $(U, \Phi)$ die zugehörige Bündelkarte von $TM$, d. h. gelte $\Phi(x, v) = (x, \varphi_{*,x}(v))$ für $v \in T_xM$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, $E_i(x) = (x, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, seien die entsprechenden Schnitte in $U \times \mathbb{R}^n$. Setze $X_i := \Phi^{-1} E_i$. Dann ist $X_i(x) = \left(x, (\varphi_{*,x})^{-1} e_i\right)$, $i = 1, \ldots, n$. $(X_1, \ldots, X_n)$ heißen die zur

Karte $(U,\varphi)$ gehörenden Standardbasisvektorfelder. Jedes Vektorfeld $X$ besitzt dann in $U$ eine Darstellung $X = \sum\limits_i \lambda^i X_i$ mit Funktionen $\lambda^i$. Für $f \in C^1(U)$ gilt

$$\begin{aligned}X_i f|_p &= f_* X_i|_p = f_*(\varphi_{*,p})^{-1} e_i = f_* \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(p)} e_i = \left(f\circ\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(p)} e_i \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi(p).\end{aligned}$$

Wegen $X_i f = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi$ werden die $X_i$ oft auch als $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bezeichnet. Es folgt für $f\in C^2(U)$

$$\begin{aligned}X_j X_i f &= X_j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\circ\varphi\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\right)\circ\varphi \quad \text{wegen } \varphi\circ\varphi^{-1} = \mathrm{id} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\right)\right)\circ\varphi \quad \begin{array}{l}\text{da partielle Ableitungen}\\ \text{im } \mathbb{R}^n \text{ kommutieren}\end{array} \\ &= X_i X_j f.\end{aligned}$$

Somit ist $[X_i, X_j] = 0$ für die Standardbasisvektorfelder. Seien $X$, $Y$ Vektorfelder, $f,\lambda\in C^2(M)$. Es folgt

$$\begin{aligned}[X,\lambda Y]f &= X(\lambda Y f) - \lambda Y X f = X\lambda Y f + \lambda X Y f - \lambda Y X f \\ &= (X\lambda) Y f + \lambda [X,Y] f,\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}[X,\lambda Y] &= (X\lambda)Y + \lambda[X,Y], \\ [\lambda X, Y] &= -[Y,\lambda X] = -(Y\lambda)X + \lambda[X,Y].\end{aligned}$$

Seien jetzt $X$, $Y$ beliebige Vektorfelder der Klasse $C^l$ auf $U$, $1\le l\le k-1$, $M\in C^k$. Dann besitzen $X$ und $Y$ Darstellungen

$$X = \sum_{i=1}^n a^i X_i \quad\text{und}\quad Y = \sum_{j=1}^n b^j X_j.$$

Es folgt aufgrund der obigen Rechenregeln

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \left[X, \sum b^j X_j\right] = \sum_j \left[X, b^j X_j\right] \\ &= \sum_j \left(\left(X b^j\right) X_j + b^j [X, X_j]\right) = \sum_j X b^j X_j + \sum_{j,\,k} b^j \left[a^k X_k, X_j\right] \\ &= \sum_j X b^j X_j + \sum_{j,\,k}\left(b^j\left(-X_j a^k\right) X_k + b^j a^k \underbrace{[X_k, X_j]}_{=0}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(X b^j - Y a^j\right) X_j.\end{aligned}$$

(iii) Hieraus folgt: Sind $X$, $Y\in C^l$, so ist $[X,Y]\in C^{l-1}$.

(iv) **Jacobi-Identität:** Sind $X$, $Y$, $Z$ drei $C^2$-Vektorfelder auf $M$, dann gilt

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

(v) Ist $M$ von der Klasse $C^\infty$, so wird der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $C^\infty$-Vektorfelder auf $M$ zu einer reellen Lie-Algebra mit dem Produkt $(X,Y)\mapsto[X,Y]$.

Allgemeiner ist eine Lie-Algebra ein Vektorraum $V$ über einem Körper $K$ mit einer Verknüpfung $[\cdot,\cdot]\colon V\times V\to V$, die Lie-Klammer heißt, und die folgenden Axiome erfüllt:

(a) Die Lie-Klammer ist in beiden Argumenten linear, z. B. $[\lambda u+v,w]=\lambda[u,w]+[v,w]$ für alle $\lambda\in K$, $u,v,w\in V$,

(b) es gilt die Jacobi-Identität $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$ für alle $u,v,w\in V$,

(c) $[u,u]=0$ für alle $u\in V$.

**Bemerkung 20.10** (Koordinatenschreibweise)**.**

(i) Für kovariante Tensoren, z. B. für 1-Formen $\omega$, verwenden wir untere Indices: $\omega_i$. Für kontravariante Tensoren, z. B. für Vektorfelder $X$, verwenden wir obere Indices: $X^i$. Für allgemeinere Tensoren in $TM^{(r,s)}$ benutzen wir $r$ obere („kontravariante“) Indices und $s$ untere („kovariante“) Indices.

(ii) Sei $M$ eine Mannigfaltigkeit und seien $(U,\varphi)$ und $(V,\psi)$ verschiedene Karten für $M$ mit Koordinaten $x^i$ bzw. $y^i$ und $U\cap V\neq\emptyset$; genauer: … mit Koordinaten $(x^i)$ …. Sei $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Vektorfeld. Betrachte $y=y(x)=\psi\circ\varphi^{-1}(x)$. Dann gilt nach Lemma 18.4

$$X^i\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}X^i\frac{\partial}{\partial y^j},$$

oder, mit etwas mehr Details,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}(p)&=\varphi^{-1}_{*,p}\langle e_i\rangle=\psi^{-1}_{*,p}\circ\psi_{*,p}\circ\varphi^{-1}_{*,p}\langle e_i\rangle\\ &\overset{\text{Lem. 18.4}}{=}\psi^{-1}_{*,p}\left\langle d\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(p))\langle e_i\rangle\right\rangle\\ &=\psi^{-1}_{*,p}\left\langle\frac{\partial\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(p))}{\partial x^i}\right\rangle\\ &=\psi^{-1}_{*,p}\left\langle\frac{\partial\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)^j(\varphi(p))}{\partial x^i}e_j\right\rangle\\ &\overset{\text{def. }y}{=}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\psi^{-1}_{*,p}\langle e_j\rangle\overset{\text{def.}}{=}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},\end{aligned}$$

wobei wir $\frac{\partial}{\partial x^i}=\left(\varphi^{-1}\right)_*e_i$ und $\frac{\partial}{\partial y^j}=\left(\psi^{-1}\right)_*e_j$ für Basen $e_k$ des $\mathbb{R}^m$ im Bild der Karte $\varphi$ bzw. $\psi$ benutzt haben. Wir schreiben dies auch als

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(iii) Sei $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ in Koordinaten ein Vektorfeld auf $M$ und $f\colon M\to N$ eine Abbildung. Wie in Bemerkung 18.11 seien $\varphi$ und $\psi$ Karten für $M$ bzw. $N$. Definiere $\tilde f:=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$, also $f$ „in Karten“, und $y=\tilde f(x)$. Dann gilt

$$f_*(X)=f_*\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\overset{\text{Bem. 18.11}}{=}X^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Im Spezialfall $f=\mathrm{id}$ werden also aus den Koordinaten $X^i$ in der „$\varphi$-Karte“ die Koordinaten $X^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ in der „$\psi$-Karte“. Wir erhalten dasselbe Ergebnis wie oben oder wie nach Definition 19.13, siehe auch weiter unten.

(iv) Sei $X$ ein Vektor und $\omega$ eine 1-Form. Seien $\varphi$, $\psi$ Kartenabbildungen. Bezeichne mit $dx^1, \ldots, dx^m$ eine zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis, d. h. gelte

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j.$$

(Alternativ: Definiere die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis $d\varphi^1 \equiv dx^1, \ldots, d\varphi^m \equiv dx^m$ durch $d\varphi^i(X) := X\varphi^i$. Hieraus folgt (mit Bemerkung 20.9 (ii) beim zweiten Gleichheitszeichen)

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\varphi^i = \frac{\partial(\varphi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \circ \varphi = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \circ \varphi = \delta^i_j.\Bigg)$$

Entsprechend zu den Basen $dx^1, \ldots$ bezüglich der $\varphi$-Karte definieren wir Basen $dy^1, \ldots$ bezüglich der $\psi$-Karte. Auch hier gilt wieder $dy^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \delta^i_j$. Mit Hilfe geeigneter Koeffizienten $a^i_j$ können wir auch die dualen Basen ineinander Transformieren: $dx^i = a^i_k dy^k$. Wir schreiben $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$, $d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ und bezeichnen die Inverse mit $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$. Die Wahl der Koeffizienten $a^i_k$ ergibt sich dabei aus

$$\delta^i_j = dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = a^i_k dy^k \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^l} = a^i_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.$$

Somit ist $a^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$ und es gilt die Transformationsregel $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$.

(v) Der Ausdruck ist $\omega(X)$ invariant, d. h. kartenunabhängig, definiert; in Karten gilt aufgrund der obigen Rechnung

$$\omega(X) = \omega_i dx^i X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_i X^j \delta^i_j = \omega_i X^i = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k X^j \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^l}.$$

(vi) Sei nun $T$ ein $(1,1)$-Tensorfeld. (Für ein $(r,s)$-Tensorfeld verfährt man mit sämtlichen Einträgen entsprechend.) Wir schreiben in Koordinaten

$$T^j_i := T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right)$$

und erhalten aufgrund der obigen Überlegungen, die wir nach Definition 19.13 auf jedes Argument separat anwenden,

$$T = T^j_i\, dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = T^j_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^l}.$$

(vii) Sei wieder $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Wir beschreiben die Wirkung eines $(1,1)$-Tensors $T$ auf einen Vektor $X$ und einen Kovektor $\omega$, d. h. auf ein Element das punktweise im Dualraum zu $T_pM$ ist, in Koordinaten. Es gilt

$$\begin{aligned}
T^j_i &:= T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right),\\
\left(T^k_l\right)\left((\omega_i),(X^j)\right) &\equiv T\left((\omega_i),(X^j)\right) = T\left\langle \omega_i dx^i, X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\\
&= T^k_l \frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle \omega_i dx^i\right\rangle dx^l \left\langle X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\\
&= T^k_l \omega_k X^l.
\end{aligned}$$

Der Deutlichkeit halber fügen wir nun Indices $x$ bzw. $y$ an um anzuzeigen bezüglich welcher Basen wir die Komponenten bestimmt haben.

Wir transformieren nun nach Definition 19.13 unter Verwendung von $\Phi = \varphi_{\text{Def. 19.13}} = d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$. Die Inverse ist durch $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$ gegeben, die Matrix der dualen Abbildung durch $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$.

$$\begin{aligned}(\Phi_{\#}{}^xT)\left\langle ({}^y\omega_i)\,,({}^yX^j)\right\rangle &= {}^xT\left\langle \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\cdot {}^y\omega_i\right), \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\cdot {}^yX^j\right)\right\rangle \\ &= {}^xT^k_l\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\cdot {}^y\omega_i \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\cdot {}^yX^j \\ &= {}^yT^i_j\cdot {}^y\omega_i\cdot {}^yX^j = {}^xT^k_l\cdot {}^x\omega_k\cdot {}^xX^l,\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile auf zwei unterschiedliche Arten geklammert haben.

Bei einem Koordinatenwechsel transformieren sich die Koordinaten also gerade gemäß der Regel aus Definition 19.13.

(viii) Für die Lie-Klammer gilt in Koordinaten

$$[X,Y]^j = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}Y^j - Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}X^j.$$

**Bemerkung 20.11** (Fluss eines Vektorfeldes)**.** Sei $X \in C^l$, $l \ge 1$, ein Vektorfeld. Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot\alpha = X\circ\alpha$ mit

$$\dot\alpha(t)\langle 1\rangle \equiv \dot\alpha(t) = \alpha_{*,t}\langle 1\rangle, \tag{20.1}$$

wobei $\alpha\colon I\to M$ und $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

Ist $(U,\varphi)$ eine Karte von $M$ mit $\alpha(I)\subset U$, so ist $\dot\alpha = X\circ\alpha$ äquivalent zu

$$\varphi_{*,\alpha(t)}\alpha_{*,t}\langle 1\rangle = \varphi_{*,\alpha(t)}X(\alpha(t)).$$

Wir formen beide Seiten um

$$\varphi_{*,\alpha(t)}\left(\left(X\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(t)))\right) = (\varphi\circ\alpha)_{*,t}\langle 1\rangle = (\varphi\circ\alpha)'(t).$$

$\varphi_*(X\circ\varphi^{-1})$ ist ein Vektorfeld auf $\varphi(U)$ und daher von der Form $\varphi_*X\circ\varphi^{-1}(y) = (y, X_U(y))$. Daher ist $\dot\alpha = X\circ\alpha$ äquivalent zu $(\varphi\circ\alpha)'(t) = X_U(\varphi\circ\alpha(t))$. Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es daher lokal eine Lösung: Zu jedem $p_0\in M$ existiert eine offene Umgebung $U_0$ von $p_0$ und eine offenes Intervall $I\subset\mathbb{R}$, $0\in I$, sowie eine Abbildung $F\in C^l(U_0\times I, M)$, so dass

$$\begin{aligned}F(p,0) &= p\quad \forall p\in U_0,\\ \dot F &= X\circ F,\quad \text{wobei } \dot F(p,t) = F_{*,(p,t)}\langle(0,1)\rangle\end{aligned}$$

ist, d. h. $t\mapsto F(p,t)$ ist eine Integralkurve von $X$ mit Anfangspunkt $p$ für $t=0$. $F$ heißt lokaler Fluss von $X$.

**Lemma 20.12** (Eindeutigkeitssatz)**.** *Seien $\alpha_1,\alpha_2\colon(a,b)\to M$ Integralkurven von $X$ mit $\alpha_1(t_0)=\alpha_2(t_0)$ für ein $t_0\in(a,b)$. Dann gilt $\alpha_1=\alpha_2$.*

*Beweis.* Setze $c_0 := \sup\{c\colon \alpha_1(t)=\alpha_2(t)\,\forall\, t_0\le t\le c\}$. Falls $c_0<b$ ist, folgt $\alpha_1(c_0)=\alpha_2(c_0)$, weil die Kurven $\alpha_i$ stetig sind und $M$ Hausdorffsch ist. Sei $(U,\varphi)$ eine Karte von $M$ mit $\alpha_i(t)\in U$ für $c_0-\varepsilon<t<c_0+\varepsilon$ und $\varepsilon>0$ für $i=1,2$. Dann gilt $(\varphi\circ\alpha_i)'(t) = X_U(\varphi\circ\alpha_i(t))$ für diese Werte von $t$ und $\varphi\circ\alpha_1(c_0)=\varphi\circ\alpha_2(c_0)$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt $\varphi\circ\alpha_1(t)=\varphi\circ\alpha_2(t)$ für $t$ nahe $c_0$. Widerspruch zur Definition von $c_0$. Die Behauptung folgt. □

**Korollar 20.13.** *Für jedes $p\in M$ gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales offenes Intervall $I_p$ mit $0\in I_p$, auf welchem die Integralkurve $\alpha$ mit $\alpha(0)=p$*

*definiert ist, nämlich die Vereinigung aller offenen Intervalle $I$ mit $0 \in I$, so dass $\alpha\colon I \to M$ eine Integralkurve mit $\alpha(0) = p$ ist.*

**Bemerkung 20.14** (Erinnerung: Lebesguesche Zahl)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, $U_i$ offen. Dann existiert $\lambda > 0$, so dass für alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} A < \lambda$ ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$ existiert.

**Theorem 20.15** (Existenzsatz für den maximalen Fluss)**.** *Sei $W := \bigcup\limits_{p\in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$ und für $p \in M$ sei $F(p, \cdot)\colon I_p \to M$ die maximale Integralkurve von $X \in C^l$, $l \geq 1$, mit $F(p, 0) = p$. Dann ist $W$ in $M \times \mathbb{R}$ offen und $F \in C^l(W, M)$. ($F$ heißt maximaler Fluss von $X$.)*

*Beweis.* Sei $(\bar p, \bar t) \in W$, ohne Einschränkung $\bar t > 0$. Nach Definition und Eindeutigkeitssatz folgt

$$F(F(p, s), t) = F(p, s + t), \tag{20.2}$$

da für festes $(p, s)$ auf beiden Seiten die eindeutig bestimmte Integralkurve von $X$ mit Anfangspunkt $F(p, s)$ für $t = 0$ steht. Aufgrund des lokalen Existenzsatzes und aufgrund des Lemmas über die Lebesguesche Zahl, angewandt auf $\left[0, \bar t\right]$, gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ und offene Umgebungen $U_j$ von $F(\bar p, \frac{j}{N}\bar t)$, $j = 0, \ldots, N$, so dass $F$ auf $U_j \times \left(\frac{-2}{N}\bar t, \frac{2}{N}\bar t\right)$ definiert und von der Klasse $C^l$ ist. Wir schreiben $F_t(p) = F(p, t)$ und erhalten aus (20.2)

$$F_{\frac{\bar t}{N}}\left(F_{\frac{j-1}{N}\bar t}(\bar p)\right) = F_{\frac{j}{N}\bar t}(\bar p).$$

Wähle nun induktiv (absteigend) Umgebungen $U_j' \subset U_j$ von $F_{\frac{j}{N}\bar t}(\bar p)$ mit $U_N' := U_N$, $F_{\frac{\bar t}{N}}(U_{j-1}') \subset U_j'$, z. B. $U_{j-1}' = F_{-\frac{\bar t}{N}}(U_j') \cap U_{j-1}$. Für $p \in U_0'$ wollen wir $\alpha(p, t) := F_t(p)$ für $0 \leq t \leq \frac{N+1}{N}\bar t$ definieren. Es gilt für $0 \leq t \leq \frac{N+1}{N}\bar t$ und $0 \leq j \leq N$ mit $\frac{j\bar t}{N} \leq t < \frac{(j+1)\bar t}{N}$

$$\alpha(p, t) = F_{t-\frac{j\bar t}{N}}\Big(\underbrace{F_{\frac{\bar t}{N}}\Big(\ldots\Big(F_{\frac{\bar t}{N}}(p)\Big)\ldots\Big)}_{j\text{-mal iteriert}}\Big).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist $\alpha(p, t)$ eine Integralkurve von $X$ mit $\alpha(p, 0) = p$. Somit ist $F(t, p)$ für alle $p \in U_0'$ und $t \in \left[0, \frac{N+1}{N}\bar t\right]$ wohldefiniert und es gilt

$$F_t(p) = F_{t-\bar t}\Big(\underbrace{F_{\frac{\bar t}{N}}\Big(\ldots\Big(F_{\frac{\bar t}{N}}(p)\ldots\Big)\Big)}_{N\text{-mal}}\Big)$$

für $|\bar t - t| \leq \frac{\bar t}{N}$ und $p \in U_0'$. Daher ist $U_0' \times \left(\bar t - \frac{\bar t}{N}, \bar t + \frac{\bar t}{N}\right) \subset W$ und $F$ ist dort von der Klasse $C^l$. $\square$

## 21. Zusammenhänge

Sei $M$ eine Mannigfaltigkeit der Klasse $C^k$, $k \geq 2$.

Seien $V^l(M)$ die Vektorfelder der Klasse $C^l$, $0 \leq l \leq k-1$ auf $M$. Dann ist $V^l(M)$ ein $C^l(M)$-Modul. Es gilt nämlich für $V, W \in V^l(M)$ und $f, g \in C^l(M)$.

(i) $f(V + W) = fV + fW$,
(ii) $(f + g)V = fV + gV$,
(iii) $(fg)V = f(gV)$,
(iv) $1V = V$

und $C^l(M)$ ist ein Ring.

**Definition 21.1** (Zusammenhang)**.** Ein Zusammenhang auf $M$ (der Klasse $C^l$) ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla : V^l(M) \times V^{l+1}(M) &\to V^l(M),\\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

mit

(i) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,
(ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
(iii) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$ und
(iv) $\nabla_{gX} Y = g\nabla_X Y$,

wobei $X, X_1, X_2 \in V^l(M)$, $Y, Y_1, Y_2 \in V^{l+1}(M)$, $f \in C^{l+1}(M)$ und $g \in C^l(M)$.

**Beispiel 21.2.**

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ ist $\nabla_X Y = DY\langle X\rangle$ ein Zusammenhang.
(ii) Ist $TM$ trivial, dann existieren globale Basisfelder $X_1, \ldots, X_m \in V^{k-1}$. Schreibe $Y \in V^l(M)$, $l \le k - 1$, als $Y = \lambda^j X_j$ mit $\lambda^j \in C^l$. Definiere $\nabla_X Y := (X\lambda^j)X_j$. Es gilt insbesondere $\nabla_X X_j = 0$.
(iii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^k$. Für $x \in M$ sei $P(x) : \mathbb{R}^n \to T_xM$ die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum $T_xM := \{\alpha'(0)|\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \alpha(0) = x\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $P : M \to L(\mathbb{R}^n)$ von der Klasse $C^{k-1}$: Sei $(U, \varphi)$ eine Karte von $\mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$. Dann gibt es Basisfelder $X_1, \ldots, X_n \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^n)$, so dass $X_1, \ldots, X_m$ tangential zu $M$ sind. Nach Orthonormalisierung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $X_1, \ldots, X_n$ eine Orthogonalbasis ist. Dann gilt
$$P(x)Y = \sum_{j=1}^m \langle Y, X_j(x)\rangle_{\mathbb{R}^n} X_j(x).$$
Setze $\nabla_X Y(z) := P(z)\langle dY(z)\langle X(z)\rangle\rangle$, wobei wir das Vektorfeld $Y\colon M \to \mathbb{R}^n$ in eine Umgebung von $M$ fortsetzen. Beachte, dass diese Definition nicht von der Fortsetzung abhängt (kleine Übung).

**Bemerkung 21.3.** Sei $M \in C^k$. Wir wollen die Zusammenhangsabbildung lokal in Karten darstellen. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Standardbasisvektorfeld zu einer Karte $(U, \varphi)$, d. h. aufgrund bisheriger Überlegungen gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x^i} \circ \varphi$.

(i) $\nabla_X Y|_p$ hängt nur vom Wert $X(p)$ ab, d. h. $\nabla_X Y$ ist tensoriell in Bezug auf $X$: Dies ist äquivalent zu $\nabla_X Y|_p = 0$ falls $X(p) = 0$ gilt. Gelte also $X(p) = 0$. Wähle eine Karte $(U, \varphi)$ um $p$ sowie eine Umgebung $V$ von $p$ mit $\bar{V} \subset U$ und $g \in C^k(M)$ mit $g(p) = 1$ und $g = 0$ auf $M \setminus V$. Schreibe $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $U$. Es gilt $g^2 X = \sum (g\lambda^i)\left(g\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Setze
$$\tilde{\lambda}^i = \begin{cases} g\lambda^i & \text{auf } U,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases} \qquad \tilde{X}_i = \begin{cases} g\frac{\partial}{\partial x^i} & \text{auf } U,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$
Dann gilt $g^2 X = \sum \tilde{\lambda}^i \tilde{X}_i$ auf $M$ und $\tilde{\lambda}^i(p) = g\lambda^i(p) = 0$. Es folgt
$$\nabla_X Y|_p = g^2(p)\nabla_X Y|_p = \nabla_{g^2 X} Y|_p = \nabla_{\sum \tilde{\lambda}^i \tilde{X}_i} Y|_p = \sum \underbrace{\tilde{\lambda}^i(p)}_{=0} \nabla_{\tilde{X}_i} Y|_p = 0.$$
Bemerkung: Der vermeintlich einfachere Beweis
$$\nabla_X Y|_p = \sum_i \lambda^i(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y|_p = 0$$
wendet die Eigenschaften eines Zusammenhanges auf $X = \sum\limits_i \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ an, die rechte Seite davon ist jedoch nur lokal definiert.

(ii) Analog zu Bemerkung 20.3 verschwindet $\nabla_X Y|_p$, falls $Y$ in einer Umgebung von $p$ verschwindet; somit hängt $\nabla_X Y|_p$ nur von den Werten von $Y$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $p$ ab.

(iii) Sei $U \subset M$ offen und $p \in U$, so ist $\nabla_v Y|_p$ für $v \in T_pM$ und $Y \in V^{l+1}(U)$ wohldefiniert: Wähle nämlich Vektorfelder $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ auf $M$ mit $\tilde{X}(p) = v$ und $\tilde{Y} = Y$ in einer Umgebung von $p$ und setze $\nabla_v Y|_p := \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$.

(iv) Seien jetzt $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ Standardbasisvektorfelder auf $U$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $\Gamma^k_{ij}$, die Christoffelsymbole des Zusammenhanges, so dass

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

in $U$ gilt. Seien $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\mu^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_i \lambda^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\mu^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_i \lambda^i \sum_j \left\{ \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \mu^j\right) \tfrac{\partial}{\partial x^j} + \mu^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j} \right\} \\
&= \sum_{i,j} \lambda^i \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \mu^j\right) \tfrac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k} \lambda^i \mu^j \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \sum_k \Big( \underbrace{X\mu^k}_{= d\mu^k\langle X\rangle} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \lambda^i \mu^j \Big) \tfrac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

**Bemerkung 21.4** (Vektorfelder längs Abbildungen)**.**
Seien $M$, $N$ Mannigfaltigkeiten. Jede Abbildung $F : N \to TM$ ist von der Form $F(x) = (f(x), Y(x))$ mit $f = p \circ F$, $p : TM \to M$ und $Y(x) \in T_{f(x)}M$. $Y$ heißt Vektorfeld längs $f$.

Ist $Y$ ein Vektorfeld auf $M$ und $f \colon N \to M$ eine Abbildung, so ist $Y \circ f$ ein Vektorfeld längs $f$.

Sei $X \in T_pN$, berechne $\nabla_{f_{*,p}\langle X\rangle} Y|_{f(p)}$. Da $f \colon N \to M$ ist, folgt $f_{*,p} \colon T_pN \to T_{f(p)}M$. Sei $(U, \varphi)$ eine Karte von $M$ mit $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$. Setze $f^i = \varphi^i \circ f$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f_{*,p}\langle X\rangle &= \left(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ f\right)_{*,p} \langle X\rangle = \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} \langle (\varphi \circ f)_{*,p}\langle X\rangle\rangle \\
&= \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} \left\langle \sum_i \left(\varphi^i \circ f\right)_{*,p} \langle X\rangle e_i \right\rangle \\
&= \sum_i \underbrace{\left(f^i\right)_{*,p} \langle X\rangle}_{= Xf^i|_p} \underbrace{\left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} e_i}_{= \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{f(p)}}
\end{aligned}$$

und somit folgt für ein Vektorfeld $Y = \mu^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ auf $M$ (nach „Kettenregel")

$$\nabla_{f_{*,p}\langle X\rangle} Y|_{f(p)} = \big( \underbrace{f_{*,p}\langle X\rangle \mu^k|_{f(p)}}_{= X(\mu^k \circ f)|_p} + \Gamma^k_{ij} \left(Xf^i\right) \mu^j \big) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dabei hängt insbesondere der Ableitungsterm nur von $Y \circ f$ ab.

Definiere daher für $f \colon N \to M$ und beliebige Vektorfelder $Y(x) \in T_{f(x)}M$ mit $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \circ f$ mit Funktionen $\mu^j$ auf $N$ und für Vektorfelder $X$ auf $N$

$$\nabla^f_X Y := \left(X\mu^k + \Gamma^k_{ij} \circ f \cdot \left(Xf^i\right) \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ f.$$

Im Spezialfall $f = \alpha\colon (a,b) \to M$, wenn $f$ also eine Kurve ist und $X = \frac{d}{dt}$ ist, gilt

$$\nabla^\alpha_{\frac{d}{dt}} Y \equiv \nabla^\alpha Y = \left((\mu')^k + \Gamma^k_{ij} \circ \alpha\, (\alpha')^i \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \alpha.$$

Man rechnet nach, dass dies die Eigenschaften eines Zusammenhanges erfüllt, wenn auch die Vektorfelder aus unterschiedlichen Räumen kommen.

**Definition 21.5.** Ein Vektorfeld $Y$ heißt parallel längs einer Kurve $\alpha$, wenn $\nabla^\alpha Y = 0$ gilt.

**Bemerkung 21.6.** Schreiben wir $Y = \mu^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, so ist Parallelität äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\mu' + \Gamma \circ \alpha \langle \alpha', \mu \rangle = 0.$$

**Theorem 21.7.** *Sei $\alpha\colon (a,b) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann bilden die parallelen Vektorfelder längs $\alpha$ einen $m$-dimensionalen Vektorraum: Zu $t_0 \in (a,b)$ und $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $Y$ längs $\alpha$ mit $Y(t_0) = v$.*

*Beweis.* Die Behauptung ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme innerhalb einer Kartenumgebung klar. Beachte, dass bei linearen Systemen Existenz und Eindeutigkeit folgt, sobald die Koeffizienten stetig sind. Ein Fortsetzungsargument liefert dann die Behauptung. □

**Korollar 21.8.** *Sei $\alpha\colon (a,b) \to M$ differenzierbar und seien $t_0, t \in (a,b)$. Definiere eine Abbildung $P_{t_0,t}\colon T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t)}M$ durch*

$$T_{\alpha(t_0)}M \ni v \mapsto Y(t) \in T_{\alpha(t)}M,$$

*wobei $Y$ das längs $\alpha$ parallele Vektorfeld mit $Y(t_0) = v$ ist. $P_{t_0,t}$ ist ein Vektorraumisomorphismus und es gilt $P^{-1}_{t_0,t} = P_{t,t_0}$.*

**Lemma 21.9.** *Sei $Y$ ein Vektorfeld längs $\alpha$. Dann gilt*

$$\nabla^\alpha Y(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (P_{t,t_0} Y(t) - Y(t_0)).$$

*Beweis.* Nach Theorem 21.7 existieren $m$ linear unabhängige parallele Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_m$ längs $\alpha$. Für diese gilt $P_{t,t_0} Y_j(t) = Y_j(t_0)$. Schreibe $Y(t) = \mu^j(t) Y_j(t)$. Es folgt $P_{t,t_0} Y(t) = \mu^j(t) Y_j(t_0)$ und

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (P_{t,t_0} Y(t) - Y(t_0)) &= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(\mu^j(t) - \mu^j(t_0)\right) Y_j(t_0) \\ &= (\mu')^j(t_0) Y_j(t_0) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\nabla^\alpha Y = \nabla^\alpha(\mu^j Y_j) = (\mu')^j Y_j + \mu^j \underbrace{\nabla^\alpha Y_j}_{=0},$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Parallelität der Vektorfelder $Y_j$ gilt. □

**Definition 21.10** (Torsion und Krümmung)**.** Seien $X$, $Y$, $Z$ lokal definierte Vektorfelder. Definiere die Torsion $T$ und die Krümmung $R$ durch

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

und

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

**Bemerkung 21.11.** $T$ und $R$ sind Tensorfelder, d. h. $T(X,Y)|_p$ und $R(X,Y)Z|_p$ hängen für beliebiges $p \in M$ nur von den Werten $X(p)$, $Y(p)$ und $Z(p)$ ab.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass

$$T(fX,Y)=fT(X,Y),\quad R(fX,Y)Z=fR(X,Y)Z,\quad \dots$$

für eine beliebige Funktion $f$ gilt.

Seien nämlich $X$ und $\tilde{X}$ zwei verschiedene Vektorfelder mit $X(p)=\tilde{X}(p)$. $T(X,Y)=T\big(\tilde{X},Y\big)$ in $p$ ist äquivalent zu $T\big(X-\tilde{X},Y\big)=0$ oder $\sum\limits_{i=1}^{n}T\left(\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},Y\right)=0$ für Funktionen $\lambda^i$ mit $\lambda^i(p)=0$.

Wegen $T(X,Y)=-T(Y,X)$ und $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$ genügt es sogar, folgendes nachzuweisen:

(i) $T(fX,Y)=fT(X,Y)$,
(ii) $R(fX,Y)Z=fR(X,Y)Z$,
(iii) $R(X,Y)fZ=fR(X,Y)Z$.

Dies gilt, denn es ist

(i)

$$\begin{aligned}T(fX,Y)&=\nabla_{fX}Y-\nabla_Y(fX)-[fX,Y]\\&=f\nabla_XY-(Yf)X-f\nabla_YX+(Yf)X-f[X,Y]\\&\qquad\text{(nach Bemerkung 20.9)}\\&=fT(X,Y).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}R(fX,Y)Z&=\nabla_{fX}\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_{fX}Z-\nabla_{[fX,Y]}Z\\&=f\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y(f\nabla_XZ)-\nabla_{-(Yf)X+f[X,Y]}Z\\&=fR(X,Y)Z-(Yf)\nabla_XZ+(Yf)\nabla_XZ\\&=fR(X,Y)Z.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}R(X,Y)fZ&=\nabla_X\nabla_Y(fZ)-\nabla_Y\nabla_X(fZ)-\nabla_{[X,Y]}(fZ)\\&=\nabla_X((Yf)Z+f\nabla_YZ)-\nabla_Y((Xf)Y+f\nabla_XZ)\\&\quad-([X,Y]f)Z-f\nabla_{[X,Y]}Z\\&=(XYf)Z+(Yf)\nabla_XZ+(Xf)\nabla_YZ+f\nabla_X\nabla_YZ\\&\quad-(YXf)Z-(Xf)\nabla_YZ-(Yf)\nabla_XZ-f\nabla_Y\nabla_XZ\\&\quad-([X,Y]f)Z-f\nabla_{[X,Y]}Z\\&=fR(X,Y)Z.\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 21.12.** Es ist

$$\begin{aligned}T|_p&:T_pM\times T_pM\to T_pM,\\R|_p&:(T_pM)^3\to T_pM\cong(T_pM)''.\end{aligned}$$

Aufgrund der Identifikation $T_pM\cong(T_pM)''$ können wir die Torsion $T$ als $(1,2)$-Tensorfeld und den Krümmungstensor $R$ als $(1,3)$-Tensorfeld auffassen: Sei $Z'\in(T_pM)'$. Dann ist $T(X,Y)\langle Z'\rangle=Z'\langle T(X,Y)\rangle$.

**Bemerkung 21.13** (Koordinatendarstellung)**.**
Seien $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}$ Standardbasisvektorfelder zu einer Karte $(U,\varphi)$. Dann definieren wir die Komponenten $T_{ij}^k$ und $R_{ij}{}^l{}_k$ durch

$$T\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)=T_{ij}^k\tfrac{\partial}{\partial x^k}$$

und

$$R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k}=R_{ij}{}^l{}_k\tfrac{\partial}{\partial x^l}.$$

Da $T$ und $R$ Tensoren sind, gilt für $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Z=Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}$

$$\begin{aligned}T(X,Y)&=T^k_{ij}X^iY^j\tfrac{\partial}{\partial x^k},\\ R(X,Y)Z&=R_{ij}{}^l{}_kX^iY^jZ^k\tfrac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

Wegen $\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$ folgt

$$\begin{aligned}T\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tfrac{\partial}{\partial x^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^i}=\left(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k},\\ R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k}&=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^m_{jk}\tfrac{\partial}{\partial x^m}\right)-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^m_{ik}\tfrac{\partial}{\partial x^m}\right)\\ &=\tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{jk}\tfrac{\partial}{\partial x^m}+\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\tfrac{\partial}{\partial x^l}-\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik}\tfrac{\partial}{\partial x^m}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\tfrac{\partial}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$R_{ij}{}^l{}_k=\tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk}-\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk}-\Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}.$$

Durch Vertauschen von Indices und mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften sieht man, dass dies mit Definition 14.1 übereinstimmt (Übung).

## 22. Metriken und Levi-Civita Zusammenhänge

Der Einfachheit halber wollen wir ab jetzt unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit stets eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit verstehen.

**Definition 22.1.** Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine pseudo-Riemannsche Metrik auf $M$ ist ein $(0,2)$-Tensorfeld $g$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $g|_x\equiv g_x$ ist für alle $x\in M$ symmetrisch,
(ii) $g_x$ ist für alle $x\in M$ nicht entartet, d. h. aus $g_x(v,w)=0$ für alle $w\in T_xM$ folgt $v=0$.

$g$ heißt Riemannsche Metrik, wenn zusätzlich $g_x(v,v)\ge 0$ für alle $v\in T_xM$ gilt. Damit werden alle Tangentialräume $T_xM$ zu Euklidischen Vektorräumen.

Ist klar, welche Metrik wir betrachten, so schreiben wir

$$\langle v,w\rangle_x\equiv\langle v,w\rangle\equiv g_x(v,w)$$

für $v,w\in T_xM$.

Eine Mannigfaltigkeit $M$ mit einer pseudo-Riemannschen Metrik $g$ heißt pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M,g)$.

Ist die Metrik sogar Riemannsch, so heißt $(M,g)$ Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Bemerkung 22.2.** Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasis zu $(U,\varphi)$. Setze

$$g_{ij}:=\left\langle\tfrac{\partial}{\partial x^i},\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle.$$

Für $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ folgt

$$\langle X,Y\rangle=g_{ij}X^iY^j.$$

(i) Die Symmetrie ist äquivalent zu $g_{ij}=g_{ji}$.
(ii) $g$ ist genau dann nicht entartet, wenn $\operatorname{rang}(g_{ij})=m$ gilt.
(iii) $g$ ist genau dann Riemannsch, wenn $(g_{ij})>0$.

**Beispiele 22.3.**

(i) Für $\mathbb{R}^m$ mit dem Standardskalarprodukt gilt $\langle X,Y\rangle=X^iY^j\delta_{ij}$. Daher ist $M=\mathbb{R}^m$ mit Metrik $g_{ij}=\delta_{ij}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(ii) Sei $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $N$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann wird $N$ mit der auf $TN$ eingeschränkten Metrik eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Dies gilt i. a. nicht für pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

(iii) Minkowski-Raum: $\mathbb{R}^{m+1}$ mit $\langle X,Y\rangle = -X^0Y^0 + \sum\limits_{k=1}^{m} X^kY^K$, wobei $X = (X^0, X^1, \dots, X^m)$ und $Y = (Y^0, Y^1, \dots, Y^m)$. Es ist

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Man schreibt häufiger $\mathbb{L}^{m,1}$.

Der Lichtkegel (ohne Ursprung) ist durch

$$K := \left\{ X : \left(X^0\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} (X^k)^2, X^0 \neq 0 \right\}$$

definiert; Den Ursprung haben wir herausgenommen um eine Untermannigfaltigkeit zu erhalten. Dann ist die Einschränkung der Metrik auf $K$ ausgeartet: Sei speziell $p = (1, 1, 0, \dots, 0)$. Es ist (differenziere $\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = 0$)

$$T_pK = \left\{ X \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \langle p, X\rangle = p^0X^0 - \sum_{k=1}^{m} p^kX^k = 0 \right\}.$$

Seien also $X, Y \in T_pK$, also mit $X^0 = X^1$ und $Y^0 = Y^1$. Dann ist

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=2}^{m} X^kY^k.$$

Dies ist für $m \geq 1$ ausgeartet.

(iv) Ist $g$ pseudoriemannsch, so definieren wir

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} g_x := \max\{\dim V \colon\ & V \subset T_xM \text{ ist ein Unterraum und} \\ & g_x|_{V\times V} \text{ ist negativ definit}\}. \end{aligned}$$

$\operatorname{ind} g_x$ ist lokal konstant, da $x \mapsto \operatorname{ind} g_x$ oberhalbstetig ist, und daher auf jeder Zusammenhangskomponente konstant. Ist $\operatorname{ind} g = 1$, so heißt $g$ Lorentz-Metrik.

**Theorem 22.4.** *Sei $M$ eine $C^k$-Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Dann besitzt $M$ eine Riemannsche Metrik der Klasse $C^{k-1}$.*

**Bemerkung 22.5.** Eine Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie ist parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung von $M$ besitzt eine lokal endliche Verfeinerung, die $M$ ebenfalls überdeckt. Zu dieser Verfeinerung gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Verfeinerung: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Überdeckungen. Dann heißt $\mathcal{A}$ Verfeinerung von $\mathcal{B}$, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $A \subset B$ existiert.

Lokal endlich: Eine Überdeckung $\mathcal{A}$ von $M$ heißt lokal endlich, wenn für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert, so dass $U \cap A \neq \emptyset$ höchstens für endlich viele $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Untergeordnete Zerlegung der Eins: Sei $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von $M$. Dann heißt $(\lambda_A)_{A\in\mathcal{A}}$ eine der Überdeckung $\mathcal{A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, falls folgendes gilt:

(i) $\lambda_A \in C^k$ auf einer $C^k$-Mannigfaltigkeit,

(ii) $0 \le \lambda_A \le 1$,
(iii) $\operatorname{supp} \lambda_A \subset A$,
(iv) $\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} \lambda_A = 1$.

Beachte, dass die Summe lokal endlich ist, da die Überdeckung lokal endlich ist.

**Lemma 22.6.** *Seien $M$ und $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine Immersion. Sei $g$ eine Riemannsche Metrik auf $N$. Dann ist $f^*g$, die zurückgezogene ("pull-back") Metrik, definiert durch*

$$f^*g(X,Y) := g(f_*X, f_*Y) \quad \textit{oder} \quad f^*g(X,Y)(p) = g(f_{*,p}X|_p, f_{*,p}Y|_p)$$

*für Vektorfelder $X,Y$ auf $M$ eine Riemannsche Metrik auf $M$.*

*Beweis.* Übung. □

*Beweis von Theorem 22.4.* Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine Familie von Karten, die $M$ überdecken. Betrachte (ohne Wechsel der Bezeichnung) eine Verfeinerung der Überdeckung durch die Mengen $U_\alpha$, die eine lokal endliche Überdeckung ist. Sei $\lambda_\alpha$ eine der Überdeckung $U_\alpha$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Bezeichne $\delta$ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist $g_\alpha := \varphi_\alpha^*\delta$ nach Lemma 22.6 eine Metrik auf $U_\alpha$. Man rechnet nun leicht nach, dass

$$g := \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot g_\alpha \quad \text{oder} \quad g(p)\langle X(p), Y(p)\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha(p)\cdot \delta\left((\varphi_\alpha)_{*,p}X(p), (\varphi_\alpha)_{*,p}Y(p)\right)$$

eine Riemannsche Metrik auf $M$ definiert. □

**Bemerkung 22.7.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $P_x\colon \mathbb{R}^n \to T_xM$ die orthogonale Projektion. (Erinnerung: Orthogonale Projektoren sind selbstadjungiert, d. h. es gilt $P_x^* = P_x$.) Definiere (siehe auch 21.2)

$$(\nabla_v X)(x) = P_x(dX(x)\langle v\rangle).$$

Dies ist ein Zusammenhang auf $M$ (Übungsaufgabe). Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Seien $X, Y$ (tangentiale) Vektorfelder auf $M$, die wir lokal in eine Umgebung von $M$ fortsetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} v\langle X, Y\rangle &= \langle dX\langle v\rangle, \underbrace{Y}_{=PY}\rangle + \langle \underbrace{X}_{=PX}, dY\langle v\rangle\rangle \\ &= \langle \nabla_v X, Y\rangle + \langle X, \nabla_v Y\rangle, \end{aligned}$$

d. h. für $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\nabla$ gilt die Produktregel.

**Definition 22.8.** Ein Zusammenhang $\nabla$ auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,g)$ heißt pseudo-Riemannscher Zusammenhang oder metrischer Zusammenhang, wenn die Ricci-Identität

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

für alle Vektorfelder $X, Y, Z$ gilt.

**Bemerkung 22.9.** Die Ricci-Identität auf der Zielmannigfaltigkeit überträgt sich auf Vektorfelder längs Abbildungen.

*Beweis.* Sei $f\colon N \to M$ eine Abbildung und $X, Y$ Vektorfelder längs $f$, $Z$ ein Vektorfeld auf $N$. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasis bezüglich einer Karte $(V,\psi)$ von $M$. Wir schreiben $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ f$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \circ f$ und erhalten nach Bemerkung 21.4

$$\nabla^f_Z X = \left(Z\lambda^i\right) \tfrac{\partial}{\partial x^i} \circ f + \lambda^i \left(\nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \circ f,$$

da $f_*\langle Z\rangle = Z^j \frac{\partial f^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$ bzw. $f_{*,p}\langle Z(p)\rangle = Z^j|_p \left.\frac{\partial f^l}{\partial y^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_{f(p)}$ ist und nach Definition der Christoffelsymbole. Für $Y$ erhalten wir eine analoge Formel. Es folgt

$$\begin{aligned} Z\langle X,Y\rangle =& Z\left(\lambda^i\mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f\right)\\ =& \left(Z\lambda^i\right)\mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f + \lambda^i \left(Z\mu^j\right)\left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f\\ &+ \lambda^i\mu^j \left(f_*\langle Z\rangle \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\right)\circ f \end{aligned}$$

(nach Kettenregel und Definition von $f_*\langle Z\rangle$)

$$\begin{aligned} &= \ldots + \ldots + \lambda^i\mu^j \left\langle \nabla_{f_*\langle Z\rangle}\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f + \lambda^i\mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{f_*\langle Z\rangle}\tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f\\ &= \left\langle \nabla^f_Z X, Y\right\rangle + \left\langle X, \nabla^f_Z Y\right\rangle. \end{aligned}$$ □

Hiermit werden wir später sehen, dass $\alpha'$ für Geodätische konstante Länge hat.

**Definition 22.10.** Sei $(M,g)$ eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein torsionsfreier Zusammenhang der die Ricci-Identität erfüllt heißt Levi-Civita Zusammenhang. Es gilt folglich

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$,
(ii) $Z\langle X,Y\rangle = \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$

für alle Vektorfelder $X, Y, Z$ auf $M$.

Der mit Hilfe eines Levi-Civita Zusammenhanges definierte Krümmungstensor heißt Riemannscher Krümmungstensor.

**Bemerkung 22.11.** Der Projektionszusammenhang ist ein Levi-Civita Zusammenhang.

*Beweisidee.* Es fehlt noch der Nachweis, dass der Projektionszusammenhang torsionsfrei ist: $T^k_{ij} = 0$. Dazu stellen wir die Untermannigfaltigkeit lokal als graph $u$ dar, so dass im Ursprung $Du = 0$ gilt. Nimmt man als Karte die orthogonale Projektion auf die entsprechenden Komponenten und benutzt $\frac{\partial}{\partial x^i} = (e_i, u_i)$, konstant in der „Höhe" fortgesetzt, so erhält man im Ursprung $\nabla_Y X = P(dX\langle Y\rangle) = 0$ für diese Standardbasisvektorfelder. Somit folgt dort $T^k_{ij} = 0$ und, da die Torsion ein Tensor ist, überall $T = 0$. □

**Theorem 22.12.** *Sei $(M,g)$ eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf $M$ einen eindeutig bestimmten Levi-Civita Zusammenhang.*

*Beweis.* **Eindeutigkeit:** Sei $\nabla$ ein Zusammenhang mit (i) und (ii) aus Definition 22.10. Dann folgt

$$Z\langle X,Y\rangle \overset{\text{(ii)}}{=} \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{22.1}$$

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &\overset{\text{(ii)}}{=} \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\\ &\overset{\text{(i)}}{=} \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle, \end{aligned}\tag{22.2}$$

$$\begin{aligned} Y\langle Z,X\rangle &\overset{\text{(ii)}}{=} \langle\nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle\\ &\overset{\text{(i)}}{=} \langle\nabla_Z Y, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle [Y,Z], X\rangle + \langle Z, [Y,X]\rangle. \end{aligned}\tag{22.3}$$

Als (22.1) + (22.2) − (22.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} &Z\langle X,Y\rangle + X\langle Y,Z\rangle - Y\langle Z,X\rangle\\ &= 2\langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle - \langle Z, [Y,X]\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\nabla_Z X, Y\rangle =& \tfrac{1}{2}\{Z\langle X,Y\rangle + X\langle Y,Z\rangle - Y\langle Z,X\rangle\}\\ &+ \tfrac{1}{2}\{-\langle Y, [X,Z]\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle + \langle Z, [Y,X]\rangle\}. \end{aligned}\tag{22.4}$$

Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht ausgeartet ist, erhalten wir die Eindeutigkeit von $\nabla$.

**Existenz:** Es genügt, $\nabla$ mit (i) und (ii) auf einer Kartenumgebung $U$ zu konstruieren. Seien nämlich $\nabla^U$ und $\nabla^V$ Zusammenhänge auf $U$ bzw. $V$ mit (i) und (ii), so gilt aufgrund des Eindeutigkeitsteiles $\nabla^U = \nabla^V$ auf $U \cap V$.

Sei $(U, \varphi)$ eine Karte mit Standardbasis $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Auf $U$ ist $\nabla$ nach Bemerkung 21.3 durch die Christoffelsymbole $\Gamma_{ij}^k$ festgelegt. Diese waren über

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

definiert. Aus

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$$

erhalten wir

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle.$$

Aus (22.4) folgt mit $Z = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^l}$

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) = g_{kl} \Gamma_{ij}^k.$$

Hieraus ist $\Gamma_{ij}^k$ eindeutig berechenbar, da $g_{kl}$ vollen Rang besitzt.

Definiere daher den Zusammenhang $\nabla$ auf $U$ wie folgt: Für Vektorfelder $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ setzen wir

$$\nabla_X Y = \left( X\mu^k + \Gamma_{ij}^k \lambda^i \mu^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{22.5}$$

wobei $g_{kl}\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)$ und $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. Nach Definition ist klar, dass $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ gilt. Somit ist nach Bemerkung 21.13 $\nabla$ ein torsionsfreier Zusammenhang und (i) folgt.

Nach (22.5) genügt es nun, noch die Ricci-Identität (ii) für Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} &\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

## 23. Krümmung

**Lemma 23.1** (Symmetrien (Riemannschen) Krümmungstensors)**.** *Der (Riemannsche) Krümmungstensor erfüllt* (23.1) *für alle Zusammenhänge, Gleichung* (23.2) *für torsionsfreie Zusammenhänge und* (23.3) *und* (23.4) *für Levi-Civita Zusammenhänge:*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \tag{23.1}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \quad \textit{(1. Bianchi-Identität)} \tag{23.2}$$

$$\langle R(X,Y)Z, U\rangle = -\langle R(X,Y)U, Z\rangle, \tag{23.3}$$

$$\langle R(X,Y)Z, U\rangle = \langle R(Z,U)X, Y\rangle. \tag{23.4}$$

*Beweis.* (23.1) folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors.

Da $R$ ein Tensor ist, genügt es, (23.2) (wie alle Identitäten hier) für Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachzuweisen. Für diese verschwindet insbesondere die Lieklammer. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} & R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k} + R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i} + R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^j} \\ = & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tfrac{\partial}{\partial x^k} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\tfrac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\tfrac{\partial}{\partial x^i} \\ & + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\tfrac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\tfrac{\partial}{\partial x^j} = 0, \end{aligned}$$

da wir aufgrund der Torsionsfreiheit, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}$, vertauschen dürfen.

Statt der Antisymmetrie in (23.3) können wir auch nachweisen, dass

$$\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0$$

für alle Vektorfelder $X, Y, Z$ gilt. Aus der Ricci-Identität erhalten wir

$$\begin{aligned} Y\langle Z,Z\rangle &= 2\langle \nabla_Y Z, Z\rangle, \\ XY\langle Z,Z\rangle &= 2(\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle), \\ \langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle &= \tfrac{1}{2}(XY\langle Z,Z\rangle - YX\langle Z,Z\rangle) \\ &= \tfrac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = \langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle. \end{aligned}$$

Dies war aber gerade die Behauptung.

Zu (23.4): Es gilt

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle \overset{(23.1)}{=} -\langle R(Y,X)Z,U\rangle \overset{(23.2)}{=} \langle R(X,Z)Y,U\rangle + \langle R(Z,Y)X,U\rangle,$$

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle \overset{(23.3)}{=} -\langle R(X,Y)U,Z\rangle \overset{(23.2)}{=} \langle R(Y,U)X,Z\rangle + \langle R(U,X)Y,Z\rangle.$$

Aufsummieren liefert

$$\begin{aligned} 2\langle R(X,Y)Z,U\rangle = & \langle R(X,Z)Y,U\rangle + \langle R(Z,Y)X,U\rangle \\ & + \langle R(Y,U)X,Z\rangle + \langle R(U,X)Y,Z\rangle. \end{aligned}$$

Durch Umbenennen erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\langle R(Z,U)X,Y\rangle = & \langle R(Z,X)U,Y\rangle + \langle R(X,U)Z,Y\rangle \\ & + \langle R(U,Y)Z,X\rangle + \langle R(Y,Z)U,X\rangle. \end{aligned}$$

Wie man durch Anwenden von (23.1) und (23.3) sieht, stimmen in beiden Gleichungen die Terme rechts überein. Die Behauptung folgt. □

Ab jetzt sei $(M, g)$ stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Levi-Civita Zusammenhang.

Definiere

$$k(X,Y) := \langle R(X,Y)Y,X\rangle = \langle R(Y,X)X,Y\rangle = k(Y,X).$$

Wir möchten $R$ mit Hilfe von $k$ alleine ausdrücken. Es ist

$$\begin{aligned} R(X,Y+Z)(Y+Z) &= R(X,Y)Y + R(X,Y)Z + \underline{R(X,Z)Y} + R(X,Z)Z, \\ R(X+Z,Y)(X+Z) &= R(X,Y)X + R(X,Y)Z + \underline{R(Z,Y)X} + R(Z,Y)Z, \\ 0 &= R(X,Y)Z + \underline{R(Y,X)Z}. \end{aligned}$$

Nach Addition erhalten wir, da sich die unterstrichenen Terme aufgrund der 1. Bianchi-Identität gegenseitig aufheben

$$\begin{aligned} & R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z) \\ = & R(X,Y)Y - R(Y,X)X + 3R(X,Y)Z + R(X,Z)Z - R(Y,Z)Z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3R(X,Y)Z = & R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z) - R(X,Y)Y \\ & + R(Y,X)X - R(X,Z)Z + R(Y,Z)Z. \end{aligned} \tag{23.5}$$

Beachte, dass das zweite und das dritte Argument auf der rechten Seite jeweils übereinstimmen.

Definiere

$$\begin{aligned} q_Z(X,Y) &:= \langle R(X,Z)Z,Y\rangle \overset{(23.4)}{=} \langle R(Z,Y)X,Z\rangle \overset{(23.1),(23.3)}{=} \langle R(Y,Z)Z,X\rangle \\ &= q_Z(Y,X), \end{aligned}$$

wobei sich die Referenzen auf die Symmetrieen in Lemma 23.1 beziehen. Somit ist $q_Z(\cdot,\cdot)$ symmetrisch. Es gilt $q_Z(X,X) = k(X,Z)$. Aufgrund der Polarisationsformel ist

$$\begin{aligned} q_Z(X,Y) &= \tfrac{1}{2}(q_Z((X+Y),(X+Y)) - q_Z(X,X) - q_Z(Y,Y)) \\ &= \tfrac{1}{2}(k(X+Y,Z) - k(X,Z) - k(Y,Z)). \end{aligned}$$

Nach (23.5) folgt

$$\begin{aligned} 3\langle R(X,Y)Z,U\rangle &= q_{Y+Z}(X,U) - q_{X+Z}(Y,U) - q_Y(X,U) \\ &\quad + q_X(Y,U) - q_Z(X,U) + q_Z(Y,U). \end{aligned}$$

Wir können also $\langle R(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot\rangle$ mit Hilfe von $k(\cdot,\cdot)$ schreiben und erhalten insbesondere

**Lemma 23.2.** *Ist $R$ ein $(1,3)$-Tensor mit den Symmetrien aus Lemma 23.1 und ist $k(X,Y) := \langle R(X,Y)Y,X\rangle$, so ist $R$ durch $k$ eindeutig festgelegt. Insbesondere sind $R \equiv 0$ und $k \equiv 0$ äquivalent.*

Um das Verhalten von $k(X_1,X_2)$ unter linearen Transformationen zu bestimmen setzen wir $Y_i = \sum\limits_{j=1,2} c_{ij}X_j$ und erhalten

$$\begin{aligned} k(Y_1,Y_2) &= \langle R(Y_1,Y_2)Y_2,Y_1\rangle \\ &= \langle R(c_{11}X_1 + c_{12}X_2, c_{21}X_1 + c_{22}X_2)c_{21}X_1 + c_{22}X_2, c_{11}X_1 + c_{12}X_2\rangle \\ &= c_{11}^2c_{22}^2\langle R(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle + c_{11}c_{22}c_{21}c_{12}\langle R(X_1,X_2)X_1,X_2\rangle \\ &\quad + c_{12}c_{21}c_{21}c_{12}\langle R(X_2,X_1)X_1,X_2\rangle + c_{12}c_{21}c_{22}c_{11}\langle R(X_2,X_1)X_2,X_1\rangle \\ &= (c_{11}^2c_{22}^2 + c_{12}^2c_{21}^2 - 2c_{11}c_{22}c_{12}c_{21})\langle R(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle \\ &= \det(c_{ij})^2\langle R(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle. \end{aligned}$$

Betrachte $R_1$ und $k_1$ mit

$$\begin{aligned} \langle R_1(X,Y)Z,U\rangle &= \det\begin{pmatrix} \langle X,U\rangle & \langle X,Z\rangle \\ \langle Y,U\rangle & \langle Y,Z\rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle X,U\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,U\rangle \\ &= \langle \underbrace{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y}_{=:R_1(X,Y)Z}, U\rangle, \\ k_1(X,Y) := \langle R_1(X,Y)Y,X\rangle &= \det\begin{pmatrix} \langle X,X\rangle & \langle X,Y\rangle \\ \langle Y,X\rangle & \langle Y,Y\rangle \end{pmatrix} \\ &= \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2. \end{aligned}$$

Symmetrieeigenschaften von $R_1$: Nach Definition folgt direkt

$$R_1(X,Y)Z = -R_1(Y,X)Z, \quad \langle R_1(X,Y)Z,U\rangle = -\langle R_1(X,Y)U,Z\rangle$$

und aus der ausmultiplizierten Form $\langle R_1(X,Y)Z,U\rangle = \langle R_1(Z,U)X,Y\rangle$. Aus

$$R_1(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$$

erhalten wir direkt die 1. Bianchi-Identität:

$$\begin{aligned}R_1(X,Y)Z + R_1(Y,Z)X + R_1(Z,X)Y = &\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\\ &+ \langle X,Z\rangle Y - \langle X,Y\rangle Z\\ &+ \langle X,Y\rangle Z - \langle Y,Z\rangle X = 0.\end{aligned}$$

Somit erfüllt $R_1$ die Symmetrieeigenschaften aus Lemma 23.1. Weiterhin gilt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$k_1(X,Y) = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $X$ und $Y$ linear abhängig sind.

**Definition 23.3** (Schnittkrümmung)**.** Sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere die Schnittkrümmung der von den linear unabhängigen Vektoren $X$, $Y$ aufgespannten Ebene durch

$$K(X,Y) := \frac{k(X,Y)}{k_1(X,Y)} = \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

Da sich $k_1$ und $k$ unter linearen Transformationen gleich transformieren ist die Schnittkrümmung wohldefiniert und hängt nur vom von $X$ und $Y$ erzeugten zweidimensionalen Teilraum ab.

**Lemma 23.4.** *Hängt die Schnittkrümmung $K$ in $p \in M$ nur von $p$ und nicht vom durch $X$ und $Y$ bestimmten zweidimensionalen Vektorraum in $T_pM$ ab, so gilt*

$$R(X,Y)Z = K \cdot R_1(X,Y)Z = K \cdot (\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y).$$

*Beweis.* Setze

$$R_2(X,Y)Z := R(X,Y)Z - K \cdot R_1(X,Y)Z.$$

Dann erfüllt $R_2$ die Symmetriebedingungen aus Lemma 23.1. Für das zugehörige $k_2$ gilt

$$k_2(X,Y) = \langle R_2(X,Y)Y,X\rangle = \langle R(X,Y)Y,X\rangle - K \cdot \underbrace{\langle R_1(X,Y)Y,X\rangle}_{=k_1(X,Y)} \equiv 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 23.2. □

**Lemma 23.5.** *Für eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^3$ stimmen die Schnittkrümmung $K$ und die Gaußsche Krümmung $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ überein.*

*Beweis.* Übung. □

Wir wollen die Symmetrien aus Lemma 23.1 auch noch in Koordinaten aufschreiben.

**Bemerkung 23.6.** Wir hatten

$${R_{ij}}^k{}_l \tfrac{\partial}{\partial x^k} := R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \tfrac{\partial}{\partial x^l}$$

definiert. Setze

$$R_{ijkl} := g_{ka}{R_{ij}}^a{}_l.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij},\\ 0 &= R_{ijkl} + R_{jlki} + R_{likj},\end{aligned}$$

da wir in der ersten Zeile für die letzte Gleichheit noch in jedem Pärchen die Reihenfolge geändert haben. Die Bianchi-Identität gilt aufgrund der obigen Symmetrieeigenschaften auch für zyklische Permutationen von drei beliebigen Indices.

**Definition 23.7** (Ricci- und Skalarkrümmung)**.**
Sei $p \in M$. Dann ist $X \mapsto R(X, U)V$ für feste $U, V \in T_pM$ ein Endomorphismus von $T_pM$. Wir definieren die Riccikrümmung Ric als Spur dieses Endomorphismusses

$$\operatorname{Ric}(U, V) := \operatorname{tr}(X \mapsto R(X, U)V).$$

Zur Darstellung in lokalen Koordinaten: Sei $X_1, \ldots, X_m$ eine Basis von $T_pM$. Sei $T : T_pM \to T_pM$ ein Endomorphismus. Dann gibt es eine Matrix $T_i^j$, so dass $TX_i = T_i^j X_j$ gilt. Nach Definition ist $\operatorname{tr} T = T_i^i$. Um dies auf den Riemannschen Krümmungstensor anwenden zu können, bilden wir das Skalarprodukt der $T_i^j$ definierenden Gleichung mit $X_k$ und erhalten

$$\langle TX_i, X_k\rangle = T_i^j \langle X_j, X_k\rangle = T_i^j g_{jk}.$$

Auch hier wollen wir wieder die Inverse der Metrik mit $(g^{ij})$ bezeichnen. Wir multiplizieren mit $g^{ki}$ und erhalten

$$\langle TX_i, X_k\rangle g^{ik} = T_i^j g_{jk} g^{ki} = T_i^j \delta_j^i = T_i^i = \operatorname{tr} T.$$

Wir erhalten somit für den Riccitensor

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(U, V) &= g^{ik}\langle R(X_i, U)V, X_k\rangle = g^{ik}\langle R(U, X_i)X_k, V\rangle\\ &= g^{ik}\langle R(X_k, V)U, X_i\rangle = \operatorname{Ric}(V, U).\end{aligned}$$

Somit ist Ric symmetrisch und es gilt

$$\begin{aligned}R_{ij} &:= \operatorname{Ric}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\langle R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle g^{kl}\\ &= \left\langle {R_{ki}}^m{}_j \tfrac{\partial}{\partial x^m}, \tfrac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle g^{kl} = {R_{ki}}^m{}_j g_{ml} g^{kl}\\ &= {R_{ki}}^k{}_j = R_{kilj} g^{kl} = R_{ikjl} g^{kl}.\end{aligned}$$

Wir definieren die Skalarkrümmung $R$ als

$$R := R_{ij} g^{ij}.$$

**Bemerkung 23.8.** Multipliziert man einen Tensor mit einem anderen, z. B. mit der Metrik oder ihrer Inversen, und verringert sich so nach Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention die Anzahl der „freien“ Indices, d. h. der Indices, über die nicht summiert wird, so bezeichet man dies als Verjüngen oder Zusammenziehen.

Den Übergang von $R_{ijkl}$ zu ${R_{ij}}^k{}_l$ bezeichnet man als Heben eines Indexes und die umgekehrte Operation als Senken eines Indexes.

**Bemerkung 23.9.** Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt das Universum als vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit pseudo-Riemannscher Metrik. Nach Diagonalisieren von $g_{ij}$ sind drei Einträge der Form $g_{ii}$ positiv und einer negativ.

Die Einsteinschen Feldgleichungen verknüpfen den (symmetrischen) physikalisch gegebenen Energie-Impuls Tensor $T_{ij}$ mit der Geometrie der Mannigfaltigkeit

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}.$$

Eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist eine Mannigfaltigkeit, die diese Gleichungen erfüllt.

**Bemerkung 23.10.** Mit Hilfe des Ricciflusses

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

hat Grigori Perelman 2002/03 u. a. die Poincarévermutung bewiesen:

Eine geschlossene zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit $M$ mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^3$.

Entsprechende Aussagen für $n \geq 5$ wurden von Stephen Smale 1960 und für $n = 4$ von Michael Freedman 1982 mit anderen Methoden gezeigt.

Nach weiterer Vorbereitung wollen wir den folgenden Satz zeigen

**Theorem 23.11** (Schur)**.** *Ist* $\dim M \geq 3$ *und hängt die Schnittkrümmung* $K$ *nur vom Fußpunkt ab, so ist sie lokal konstant.*

**Bemerkung 23.12.**

(i) Wir wollen einen gegebenen Zusammenhang auf beliebige Tensorfelder ausdehnen. Sei zunächst $\omega$ eine 1-Form. Dann soll die folgende Form der Produktregel gelten

$$X(\omega(Y)) \overset{!}{=} (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

Daher definieren wir

$$(\nabla_X\omega)(Y) := X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

An der rechten Seite dieser Formel sieht man, dass $\nabla_X\omega$ (falls es ein Tensor ist) wieder eine 1-Form ist. Wir behaupten, dass $\nabla_X\omega$ dann selbst wieder ein Tensor ist: $(\nabla_X\omega)(Y+Z) = (\nabla_X\omega)(Y) + (\nabla_X\omega)(Z)$ ist klar. Direkt aus der Definition von $\nabla_X\omega$ erhalten wir, dass $\nabla_X\omega$ bezüglich $X$ tensoriell ist, d. h. es gilt

$$\nabla_{fX}\omega = f\nabla_X\omega,$$

und dass $\nabla_X\omega$ bezüglich $\omega$ derivativ ist, d. h. es gilt

$$\nabla_X(f\omega) = (Xf)\omega + f\nabla_X\omega,$$

für jeweils alle Funktionen $f$.

Daher genügt es, für alle (glatten) Funktionen $f$

$$(\nabla_X\omega)(fY) = f\nabla_X\omega(Y)$$

zu zeigen. Dies gilt, da

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(fY) &= X(\omega(fY)) - \omega(\nabla_X(fY)) = X(f\omega(Y)) - \omega(\nabla_X(fY))\\ &= (Xf)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - \omega((Xf)Y + f\nabla_X Y)\\ &= fX(\omega(Y) - f\omega(\nabla_X Y)) = f(\nabla_X\omega)(Y).\end{aligned}$$

Allgemeiner seien $Y_1, \ldots, Y_p$ Vektorfelder, $\omega_1, \ldots, \omega_q$ 1-Formen und $S$ ein $(q,p)$-Tensor. Dann definieren wir $\nabla_X S$ durch die Relation

$$\begin{aligned}&X(S(Y_1, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_q))\\ &= \nabla_X S(Y_1, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_q)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} S(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_q)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{q} S(Y_1, \ldots, Y_p, \omega_1, \ldots, \omega_{j-1}, \nabla_X\omega_j, \omega_{j+1}, \ldots, \omega_q).\end{aligned}$$

Analog zu oben rechnet man nach, dass sich $\nabla_X S$ tensoriell bezüglich $X$ und derivativ bezüglich $S$ verhält.

(ii) Für den Levi-Civita Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M,g)$ gilt $\nabla g = 0$, denn es ist

$$(\nabla_Z g)(X,Y) = Z(g(X,Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0$$

aufgrund der Ricci-Identität.

(iii) Zur Koordinatendarstellung: Sei $\omega = \omega_i dx^i$ eine 1-Form auf $U$. Da sich $\nabla_X \omega$ in $\omega$ derivativ verhält, gilt
$$\nabla_X \omega = (X\omega_i)dx^i + \omega_i \nabla_X dx^i.$$
Somit genügt es, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i$ auszurechnen. Nach Definition ist
$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$
Wir wenden dies mit $\omega = dx^i$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$ an und erhalten
$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \tfrac{\partial}{\partial x^j}\left(dx^i\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - dx^i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^j}(\delta^i_k) - dx^i\left(\Gamma^l_{jk}\tfrac{\partial}{\partial x^l}\right)\\ &= -\Gamma^l_{jk}\delta^i_l = -\Gamma^i_{jk}.\end{aligned}$$
Dies sind die Koeffizienten in einer Darstellung bezüglich der Basis $dx^k$. Somit erhalten wir
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right) dx^k = -\Gamma^i_{jk} dx^k.$$
Also ist
$$\begin{aligned}\nabla_X \omega \equiv \nabla_{X^j \frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\omega_i dx^i\right) &= X^j\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\omega_i\right) dx^i - X^j \omega_i \Gamma^i_{jk} dx^k\\ &= X^j\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\omega_k - \omega_i\Gamma^i_{jk}\right) dx^k.\end{aligned}$$
Da wir stets fordern, dass eine Produktregel gilt, erhalten wir Ableitungsregeln für allgemeine Tensoren, z. B. für $T = T^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} dx^j$
$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(T^i_j \tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j\right) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j + T^i_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j + T^i_j \tfrac{\partial}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} dx^j\\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j + T^i_j \Gamma^l_{ki} \tfrac{\partial}{\partial x^l} dx^j - T^i_j \tfrac{\partial}{\partial x^i}\cdot \Gamma^j_{kl} dx^l.\end{aligned}$$
Wir benutzen auch die Schreibweise $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = \nabla_i X$. Ist klar, dass es sich bei einer Größe wie $T$ um einen Tensor handelt, so schreiben wir auch in Kurzform
$$\nabla_k T^i_j \equiv T^i_{j;k} = \tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{kj} \equiv T^i_{j,k} + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{kj}.$$
Komma und Strichpunkt haben hier dieselbe Bedeutung wie in $X_{,ij}$ und $X_{;ij}$ ganz am Anfang des Kurses. Mit Komma abgetrennte Indices bezeichnen partielle Ableitungen, mit Strichpunkt abgetrennte Indices bezeichnen kovariante Ableitungen, also unter Verwendung eines Zusammenhanges definierte Ableitungen.

Sei $\omega$ eine 1-Form. $\nabla_k \omega = \omega_{i;k} dx^i$ hat die Koordinaten $\omega_{i;k}$. Der Ausdruck ist tensoriell in $k$ wenn wir ein Vektorfeld $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ auf $\omega_{i;k} X^k dx^i$ abbilden. In diesem Sinne erhalten wir durch kovariantes Ableiten aus einem $(0,1)$-Tensor einen $(0,2)$-Tensor und entsprechend aus einem $(r,s)$-Tensor einen $(r, s+1)$-Tensor.

(iv) In einem Koordinatensystem, in dem in einem Punkt $p$ die Christoffelsymbole verschwinden, d. h. $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$ gilt, stimmen kovariante und partielle Ableitungen überein, $T^i_{j;k} = T^i_{j,k}$. (Achtung: Dies gilt nur in einem Punkt. Ein nochmaliges Ableiten führt gerne zu Fehlern.)

(v) Für eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}^k$ schreiben wir $\nabla_i u = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} u = \frac{\partial}{\partial x^i} u$.

Das folgende Lemma charakterisiert, wann es genau Karten gibt, so dass die Christoffelsymbole in einem Punkt verschwinden. Wir werden es nicht beweisen, sondern später (Proposition 24.10) auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Geodätischen Koordinatensysteme konstruieren, in denen die Christoffelsymbole verschwinden. Das folgende Lemma funktioniert insbesondere auch für nicht metrische (= nicht Levi-Civita) Zusammenhänge.

**Lemma 23.13.** *Auf einer Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang verschwindet die Torsion in einem Punkt $p$ genau dann, wenn es ein Koordinatensystem um $p$ gibt, in dem die Christoffelsymbole in $p$ verschwinden.*

**Lemma 23.14** (2. Bianchi-Identität)**.** *Für einen torsionsfreien Zusammenhang gilt*

$$\nabla_X R(Y,Z)U + \nabla_Y R(Z,X)U + \nabla_Z R(X,Y)U = 0.$$

*(Wir schreiben $\nabla_X R(Y,Z)U \equiv (\nabla_X R)(Y,Z)U$.)*

*Beweis.* $\nabla R$ ist ein Tensor. Daher genügt es, die Behauptung für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ und $U = \frac{\partial}{\partial x^l}$ zu zeigen. Wir benutzen bereits, dass wir ein Koodinatensystem wählen können, in dem die Christoffelsymbole in einem festen Punkt verschwinden (Lemma 24.10). Weiterhin benutzen wir, dass in diesem Punkt kovariante und partielle Ableitungen übereinstimmen. Terme, die quadratisch in den Christoffelsymbolen sind, verschwinden dabei. Wir benutzen die Koordinatendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors aus Bemerkung 21.13.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \tfrac{\partial}{\partial x^i} R_{jk}{}^n{}_l + \tfrac{\partial}{\partial x^j} R_{ki}{}^n{}_l + \tfrac{\partial}{\partial x^k} R_{ij}{}^n{}_l \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^i}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^n_{kl}}_{\boxed{1}} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^n_{jl}}_{\boxed{2}}\Big) + \tfrac{\partial}{\partial x^j}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^n_{il}}_{\boxed{3}} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^n_{kl}}_{\boxed{1}}\Big) + \tfrac{\partial}{\partial x^k}\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^n_{jl}}_{\boxed{2}} - \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^n_{il}}_{\boxed{3}}\Big) = 0. \end{aligned}$$

□

*Beweis von Theorem 23.11.* Sei $K$ die Schnittkrümmung. Nach Lemma 23.4 gilt

$$R(Y,Z)U = K \cdot (\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y,Z)U &= \nabla_X(R(Y,Z)U) - R(\nabla_X Y,Z)U - R(Y,\nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U \\ &= (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z) + K(\underbrace{X\langle Z,U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{X\langle Y,U\rangle Z}_{\boxed{2}}) \\ &\quad + K(\underbrace{\langle Z,U\rangle \nabla_X Y}_{\boxed{3}} - \underbrace{\langle Y,U\rangle \nabla_X Z}_{\boxed{4}}) \\ &\quad - K(\underbrace{\langle Z,U\rangle \nabla_X Y}_{\boxed{3}} - \underbrace{\langle \nabla_X Y,U\rangle Z}_{\boxed{2}}) \\ &\quad - K(\underbrace{\langle \nabla_X Z,U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{\langle Y,U\rangle \nabla_X Z}_{\boxed{4}}) \\ &\quad - K(\underbrace{\langle Z,\nabla_X U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{\langle Y,\nabla_X U\rangle Z}_{\boxed{2}}). \end{aligned}$$

Dabei heben sich die Terme $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ aufgrund der Ricci-Identität gegenseitig auf. Also gilt

$$(\nabla_X R)(Y,Z)U = (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z).$$

Die 2. Bianchi-Identität liefert nun

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X R(Y,Z)U + \nabla_Y R(Z,X)U + \nabla_Z R(X,Y)U \\ &= (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z) \\ &\quad + (YK)(\langle X,U\rangle Z - \langle Z,U\rangle X) \\ &\quad + (ZK)(\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y).\end{aligned}$$

Da wir $\dim M \geq 3$ angenommen haben, können wir $X, Y, Z$ in einem beliebigen Punkt als Orthonormalsystem wählen. Setze $U := Z$. Es folgt

$$0 = (XK)Y - (YK)X.$$

Da $X$ und $Y$ linear unabhängig sind, folgt bereits $XK = 0 = YK$. Somit ist $K$ wie behauptet lokal konstant. □

Das folgende Lemma taucht häufig in geometrischen Rechnungen wie z. B. bei Flussgleichungen auf.

**Bemerkung 23.15** (Vertauschen kovarianter Ableitungen)**.** Sei $T$ ein $(1,1)$-Tensor. (Für allgemeinere Tensoren ist auf jeden einzelnen oberen bzw. unteren Index die hier hergeleitete Formel anzuwenden.) Sei $T = \left(T^i_j\right)$. Wir wollen wieder benutzen, dass wir ein Koordinatensystem wählen können, in dem $\Gamma^i_{jk}$ in einem festen Punkt verschwindet. Dafür wollen wir in dieser Bemerkung die ad hoc Notation $\overset{p}{=}$ verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_k T^i_j &\equiv T^i_{j;k} = T^i_{j,k} + T^m_j \Gamma^i_{km} - T^i_m \Gamma^m_{kj}, \\ \nabla_l \nabla_k T^i_j &= \left(T^i_{j;k}\right)_{,l} + T^m_{j;k}\Gamma^i_{lm} - T^i_{m;k}\Gamma^m_{jl} - T^i_{j;m}\Gamma^m_{kl} \\ &\overset{p}{=} T^i_{j,kl} + T^m_j \Gamma^i_{km,l} - T^i_m \Gamma^m_{kj,l}, \\ \nabla_k \nabla_l T^i_j &\overset{p}{=} T^i_{j,lk} + T^m_j \Gamma^i_{lm,k} - T^i_m \Gamma^m_{lj,k}, \\ \nabla_k \nabla_l T^i_j - \nabla_l \nabla_k T^i_j &\overset{p}{=} T^m_j \left(\Gamma^i_{lm,k} - \Gamma^i_{km,l}\right) - T^i_m \left(\Gamma^m_{lj,k} - \Gamma^m_{kj,l}\right) \\ &\overset{p}{=} T^m_j R_{kl}{}^i{}_m - T^i_m R_{kl}{}^m{}_j, \\ \nabla_k \nabla_l T^i_j - \nabla_l \nabla_k T^i_j &\equiv T^i_{j;lk} - T^i_{j;kl} = T^m_j R_{kl}{}^i{}_m - T^i_m R_{kl}{}^m{}_j.\end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt wieder allgemein, d. h. in jedem Koordinatensystem, da nun beide Seiten wieder tensoriell sind. (Das Produkt zweier Tensoren ist wieder ein Tensor, algebraisch das Tensorprodukt $S \otimes T$.)

## 24. Geodätische

Wir orientieren uns an [5].

Sei $(M^m, g)$ stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m$ mit Metrik $g$ und Riemannschem Zusammenhang $\nabla$. Für Definition und erste Eigenschaften benötigt man die Riemannsche Metrik noch nicht.

**Definition 24.1.** Eine Geodätische in $M$ ist eine Kurve $\gamma$, so dass

$$\nabla^\gamma \left(\gamma_* \left\langle \tfrac{d}{dt} \right\rangle\right) \equiv \nabla^\gamma \dot\gamma \equiv \frac{D\dot\gamma(t)}{dt} = 0 \tag{24.1}$$

für $t$ im Definitionsbereich, einem Intervall, gilt.

**Bemerkung 24.2.**

(i) Es gilt

$$\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|^2 \equiv \frac{d}{dt}\langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 2\left\langle \dot\gamma, \frac{D\dot\gamma}{dt}\right\rangle = 0$$

für eine Geodätische $\gamma$. Daher ist $\|\dot\gamma\|$ lokal konstant. Die Bogenlänge einer Kurve ist durch

$$s(t) = \int\limits_0^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau$$

gegeben. Somit ist $s = at + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Manchmal ist es nützlich, $\dot\gamma \neq 0$ vorauszusetzen.

(ii) Seien $(U, \varphi)$ Koordinaten nahe $p \in M$. Dann lautet (24.1) in Koordinaten

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1, \ldots, \gamma^m)\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, m$$

mit $\gamma = (\gamma^i(t))$.

(iii) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, so besagt (24.1), dass $\frac{D\dot\gamma}{dt} = (\ddot\gamma)^T = 0$ ist, d. h. dass der tangentiale Anteil der zweiten partiellen Ableitung verschwindet oder dass die zweite partielle Ableitung orthogonal zu $M$ ist.

(iv) Zu $p \in M$ gibt es eine Umgebung $p \in U \subset M$ und Konstanten $\delta, \varepsilon > 0$, so dass für alle $q \in U$ und alle $X \in T_qM$ mit $\|X\| < \varepsilon$ eine eindeutige Geodätische $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ mit $\gamma(0) = q$ und $\dot\gamma(0) = X$ existiert.

*Beweis.* Da (24.1) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist, besitzt es lokal eine eindeutige Lösung. □

(v) Sei $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^m(t))$ eine Geodätische. Dann ist auch $\alpha(t) = \gamma(\mu t)$ für $\mu > 0$ eine Geodätische. Daher können wir durch Verkleinern von $\varepsilon > 0$ in (iv) (auf $\frac{1}{2}\varepsilon\delta$) auch annehmen, dass alle Geodätischen auf dem Intervall $(-2, 2)$ definiert sind.

(vi) Die Eigenschaft, Geodätische zu sein, ist eine lokale Eigenschaft.

(vii) Die Eigenschaft, Geodätische zu sein, ist unter lokalen Isometrien erhalten, da (24.1) nur vom induzierten Zusammenhang abhängt.

**Beispiel 24.3.**

(i) Im $\mathbb{R}^n$ vereinfacht sich (24.1) zu $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} = 0$. Daher sind affine Geraden $\gamma = at+b$ Geodätische und affine Geraden, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, sind Geodätische.

(ii) Sei $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Dann ist $M$ lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^2$. Zwischen zwei verschiedenen Punkten auf $M$ gibt es unendlich viele Geodätische, sie „winden sich" unterschiedlich oft um den Zylinder herum.

(iii) Eventuell: Wie bestimmt man den Abstand von zwei Punkten auf einer Würfeloberfläche? Antwort: Man vergleiche alle Geraden, die sich durch geeignetes Abrollen des Würfels auf $\mathbb{R}^2$ ergeben, die alle durch Abrollen entstandenen Bilder dieser beiden Punkte verbinden.

(iv) Sei $M = \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Dann sind die Geodätischen gerade die Großkreise: Großkreise sind (nach einer Rotation der Sphäre) durch

$$\gamma : t \mapsto (\cos(at), \sin(at), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad a > 0,$$

gegeben. Es gilt $\ddot\gamma(t) = -a^2\gamma(t)$. Daher sind die zweiten partiellen Ableitungen normal und diese Kurven sind Geodätische. Da es aber zu jedem Anfangspunkt und zu jeder Anfangsrichtung eine solche Kurve gibt, sind dies (aufgrund des lokalen Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen) bereits alle Geodätischen (die nicht mehr erweitert werden können).

(v) Sei $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Dann sind die Geodätischen gerade die Bilder von Geraden in $\mathbb{R}^2$. Bei rationaler Steigung erhalten wir periodische Geodätische, bei irrationaler Steigung ist das Bild der Geodätischen dicht in $\mathbb{R}^2$.

**Definition 24.4.** Sei $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $X \in T_pM$. Sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X$. (Ist $\|X\|$ klein genug, so existiert solch eine Geodätische aufgrund des lokalen Existenzsatzes.) Wir definieren $\exp_p(X) := \gamma(1) \in M$.

**Bemerkung 24.5.**

(i) Sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X$. Dann ist $\gamma(t) = \exp_p(tX)$: Betrachte $\tilde\gamma(t) = \gamma(\alpha t)$. Dann ist $\tilde\gamma$ eine Geodätische. Es gilt $\tilde\gamma(0) = \gamma(0) = p$ und $\dot{\tilde\gamma}(0) = \alpha\dot\gamma(0) = \alpha X$. Somit ist $\exp_p(\alpha X) = \tilde\gamma(1) = \gamma(\alpha)$. Wir setzen $t := \alpha$ und erhalten die Behauptung.

(ii) Die Länge der Geodätischen $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ von $p$ nach $\exp_p(X)$ ist

$$\int\limits_0^1 \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \|\dot\gamma(0)\| = \|X\|,$$

da $\|\dot\gamma\|$ konstant ist.

**Proposition 24.6.**

*(i) Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\exp_p : T_pM \to M$, eingeschränkt auf $\{X \in T_pM : \|X\| < \varepsilon\}$, glatt ist.*

*(ii) Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Abbildung $\Phi : \Omega \to M$, $\Omega \subset TM$ geeignet, definiert durch*

$$\Phi(q, X) = (q, \exp_q X),$$

*ein Diffeomorphismus von einer Umgebung $W$ von $(p, 0) \in TM$ auf eine Umgebung von $(p, p) \in M \times M$.*

*Beweis.*

(i) Dies folgt direkt aus dem lokalen Existenzsatz.

(ii) Zu einer Karte $(U, \varphi)$ für $M$ gibt es eine Karte $(T_UM, \varphi_*)$ für $TM$ mit

$$\varphi_*\colon T_UM \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\varphi_{*,q}\left(\sum_{i=1}^m a^i(q)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_q\right) = (\varphi(q), a^1(q), \ldots, a^m(q)).$$

Daher besitzt $\Phi$ in lokalen Koordinaten die Darstellung

$$\Phi\left(q^1, \ldots, q^m, X^1, \ldots, X^m\right) = \left(q^1, \ldots, q^m, \exp_q^1(X), \ldots, \exp_q^m(X)\right).$$

Wir wollen nun nachweisen, dass $\Phi_{*,(p,0)}$ regulär ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz über implizite Funktionen. Zunächst halten wir dazu $X = 0$ fest und variieren $q$. Da $\exp_q(0) = q$ für alle $q$ gilt, folgt

$$\left(\frac{\partial\Phi^j}{\partial q^i}(p, 0)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le 2m}} = \begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun $q = p$ und $X = te_i = (0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$, da $T_pM \cong \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\exp_p(te_i)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t)\bigg|_{t=0} = e_i,$$

da $\exp_p(te_i)$ eine Geodätische $\gamma$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = e_i$ ist. Folglich erhalten wir

$$\left(\frac{\partial\Phi^j}{\partial X^i}(p, 0)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le 2m}} = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}.$$

Zusammengenommen erhalten wir also

$$\Phi_{*,(p,0)} = \begin{pmatrix}\mathrm{id} & 0\\ \mathrm{id} & \mathrm{id}\end{pmatrix}$$

und die Behauptung folgt.

□

**Theorem 24.7.** *Zu $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U$ von $p$ und $\varepsilon > 0$, so dass folgendes gilt:*

*(i) Für je zwei Punkte $q, q' \in U$ gibt es eine eindeutig bestimmte Geodätische von $q$ nach $q'$ mit einer Länge kleiner als $\varepsilon$.*

*(ii) Diese Geodätische ist durch $t \mapsto \exp_q(tX)$, $0 \le t \le 1$, für ein $X \in T_qM$ mit $\|X\| < \varepsilon$ gegeben und hängt in glatter Weise von $q$ und $q'$ ab.*

*(iii) Für jedes $q \in U$ ist*

$$\exp_q : \{X \in T_qM : \|X\| < \varepsilon\} \to \exp_q\left(\{X \in T_qM : \|X\| < \varepsilon\}\right) \subset M$$

*ein Diffeomorphismus.*

*Beweis.*

(i) Sei $(V, \psi)$ eine Karte um $p$. Sei $W$ die Umgebung aus Proposition 24.6 von $(p, 0) \in TM$. Sei $\pi \colon TM \to M$ die Projektionsabbildung des Tangentialbündels. Indem wir gegebenenfalls $W$ verkleinern, dürfen wir annehmen, dass $\overline{\pi(W)} \subset V$ gilt. Da die Metrik $g$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U' \subset M$ von $p$, so dass

$$W' := \bigcup_{u \in U'} \{(u, X) : X \in T_uM,\ \|X\| < \varepsilon\} \subset W$$

gilt. Die Abbildung $\Phi$ von Proposition 24.6 ist ein Diffeomorphismus von $W'$ auf $\Phi(W')$. $\Phi(W')$ ist eine offene Umgebung von $(p, p)$ in $M \times M$. Somit enthält $\Phi(W')$ insbesondere auch eine Menge $U \times U$, wobei $U$ eine geeignete offene Umgebung von $p$ ist. Daher gibt es zu $(q, q') \in U \times U$ einen eindeutig bestimmten Punkt $(q, X) = \Phi^{-1}(q, q') \in W'$. Somit gilt $q' = \exp_q X$ für ein $X \in T_qM$ mit $\|X\| < \varepsilon$. Die Eindeutigkeit folgt nach Konstruktion, da $\Phi$ ein Diffeomorphismus ist.

(ii) Dies folgt direkt aus dem Beweis von Proposition 24.6.

(iii) Da $\Phi$ ein Diffeomorphismus von $W'$ auf das Bild in $M \times M$ und in der ersten Komponente die Identität ist, ist auch $\exp_q(\cdot)$, die zweite Komponente von $\Phi(q, \cdot)$, ein Diffeomorphismus von $\{X \in T_qM : \|X\| < \varepsilon\}$ auf das Bild in $M$.

□

**Bemerkung 24.8.** Man kann $U$ sogar **geodätisch konvex** wählen, d. h. jede Geodätische aus (i), die $q$ und $q'$ verbindet, liegt auch in $U$. Vergleiche dies mit Kugeln im $\mathbb{R}^m$.

**Bemerkung 24.9.** Mit Hilfe der Exponentialabbildung wollen wir besonders gute Koordinatensysteme konstruieren: Sei $p \in M$. Fixiere $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass $\exp_p$ ein Diffeomorphismus von $\{X \in T_pM : \|X\| < \varepsilon\}$ auf das Bild $U$ ist. Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Orthonormalbasis von $T_pM$. Dann gilt für $X = X^i e_i \in T_pM$, dass $\|X\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(X^i\right)^2$ ist. Wir definieren eine Karte $\varphi$ durch

$$\varphi : \exp_p\left(X^i e_i\right) \mapsto \left(X^1, \ldots, X^m\right).$$

Wir erhalten eine surjektive Abbildung $\varphi : U \to B^m_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$.

Die so definierten Koordinaten heißen Normalkoordinaten.

**Proposition 24.10.** *In Normalkoordinaten um $p \in M$ gilt:*

*(i) Geodätische durch $p$ sind gerade Linien der Form $\gamma^i = b^i t$ mit $b^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.*

*(ii) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$.*

*(iii)* $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ *und* $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$ *für alle* $i, j, k = 1, \ldots, m$.

*Beweis.*
(i) Geodätische durch $p$ sind durch $t \mapsto \exp_p(tX)$ gegeben.
(ii) Dies folgt aus den Rechnungen in Proposition 24.6, da rechts unten in der Matrix die Identität steht.
(iii) Für $a \in \mathbb{R}^m$ ist $t \mapsto ta$ eine Geodätische in Koordinaten. Die Gleichung
$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0$$
liefert dann $\Gamma_{ij}^k(0)a^i a^j = 0$. Da $\Gamma_{ij}^k$ in $i$ und $j$ symmetrisch ist, folgt daraus $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$. Schließlich gilt im Ursprung
$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$
$\square$

**Bemerkung 24.11.** Proposition 24.10 und der Satz von Taylor liefern, dass in einem Normalkoordinatensystem
$$g_{ij} = \delta_{ij} + O\left(|x|^2\right)$$
gilt. Damit ist die Metrik bis zur ersten Ordnung euklidisch. Dies läßt sich auch im allgemeinen nicht auf zweite Ordnung verbessern, da sonst der Riemannsche Krümmungstensor im Ursprung verschwinden würde.

**Lemma 24.12.** *Sei* $(M, g)$ *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist* $M$ *ein metrischer Raum vermöge*
$$d(p, q) := \inf_\gamma L(\gamma),$$
*wobei* $p, q \in M$ *sind und das Infimum über alle stückweisen* $C^1$*-Kurven mit* $\gamma(0) = p$ *und* $\gamma(1) = q$ *gebildet wird.* $L(\gamma)$ *bezeichnet dabei die Länge der Kurve* $\gamma$*:*
$$L(\gamma) = \int\limits_0^1 \|\gamma'\| = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)}\, dt$$
*und* $\gamma' \equiv \dot\gamma$.

*Beweis.*
(i) $d(p, q) = d(q, p)$ ist klar.
(ii) $d(p, q) \ge 0$. Für $p \neq q$ verläßt eine beliebige Kurve $\gamma$, die $p$ mit $q$ verbindet in einer Karte $(U, \varphi)$ eine Kugel $B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(\varphi(p))$. In $B_\varepsilon(0)$ gilt $g_{ij} \ge \delta \cdot \delta_{ij}$ für ein $\delta > 0$. Also folgt wie im $\mathbb{R}^m$, dass $L(\gamma) \ge \varepsilon \cdot \sqrt{\delta}$ ist.
(iii) Dreiecksungleichung: Seien $p, q, r \in M$ und sei $\varepsilon > 0$. Zeige, dass
$$d(p, q) \le d(p, r) + d(r, q)$$
gilt: Sei $\gamma_1$ eine Kurve von $p$ nach $r$ mit $L(\gamma_1) \le d(p, r) + \varepsilon$ und sei $\gamma_2$ eine Kurve von $r$ nach $q$ mit $L(\gamma_2) \le d(r, q) + \varepsilon$. Dann ist
$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
eine stückweise $C^1$-Kurve von $p$ über $r$ nach $q$ und es gilt
$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \le d(p, r) + \varepsilon + d(r, q) + \varepsilon.$$

Wir betrachten nun das Infimum über alle Kurven $\gamma$, die $p$ mit $q$ (nicht notwendigerweise über $r$) verbinden. Es folgt

$$d(p,q) \le d(p,r) + d(r,q) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

□

**Theorem 24.13.** *Sei $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung $U$ von $p$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass zu je zwei Punkten $q, q' \in U$ eine eindeutige Geodätische $\gamma$ von $q$ nach $q'$ existiert, deren Länge kleiner als $\varepsilon$ ist. Es gilt $L(\gamma) = d(q,q')$, wobei $L$ die Länge bezeichnet und $d$ die von der Riemannschen Metrik induzierte Distanzfunktion ist.*

*Sei $\omega$ eine weitere stückweise glatte Kurve, die $q$ und $q'$ verbindet. Dann gilt $L(\omega) \ge L(\gamma)$ und die Ungleichung ist strikt ausser wenn $\omega$ eine Umparametrisierung von $\gamma$ ist.*

*Beweis, Anfang.* Aus Theorem 24.7 folgen die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage. Für den Rest des Beweises benötigen wir noch einige Lemmata. □

**Lemma 24.14.** *Sei $W$ eine offene Umgebung von $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ und $F : W \to M$ eine glatte Abbildung. Dann sind $\frac{\partial F}{\partial u} \equiv F_* \frac{\partial}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ Tangentialvektoren an die Kurven $v =$ konstant und $u =$ konstant (dies ist nur im regulären Falle eine sinnvolle Aussage). Wenn wir mit $\frac{D}{\partial u}$ und $\frac{D}{\partial v}$ die kovarianten Ableitungen entlang dieser Kurven bezeichnen, gilt*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

*Beweis.* Sei $X$ ein Vektorfeld entlang $F(W)$ und gelte

$$X(u,v) = X^i(u,v)\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i(u,v)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{F(u,v)}$$

in Koordinaten. Dann ist nach Bemerkung 21.4

$$\frac{DX}{dv} = \left(\frac{\partial X^k}{\partial v} + \Gamma^k_{ij} X^i \frac{\partial F^j}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Insbesondere folgt also

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 F^k}{\partial u \partial v} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F^i}{\partial u}\frac{\partial F^j}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

□

**Lemma 24.15.** *Unter denselben Voraussetzungen wie eben gilt*

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right] = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt aus einer Übungsaufgabe, da

$$\left[\tfrac{\partial F}{\partial u}, \tfrac{\partial F}{\partial v}\right] = \left[F_* \tfrac{\partial}{\partial u}, F_* \tfrac{\partial}{\partial v}\right] = F_* \left[\tfrac{\partial}{\partial u}, \tfrac{\partial}{\partial v}\right] = 0$$

gilt.

Alternativ: Sind $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ linear lokal unabhängig, so sind es Koordinatenvektorfelder in einem geeigneten Koordinatensystem, für die die Lieklammer verschwindet. Im allgemeinen Fall folgt dies direkt hieraus durch Approximation. □

**Lemma 24.16** (Gaußlemma)**.** *Sei $p \in M$ und $\exp_p$ in $B_\varepsilon(0)$ ein Diffeomorphismus. Dann sind die Geodätischen durch $p$ der Länge $< \varepsilon$ orthogonal zu den geodätischen Sphären*

$$S_r(p) := \{\exp_p X : \|X\| = r\},$$

*falls $0 < r < \varepsilon$.*

*Beweis.* Als diffeomorphes Bild von $\partial B_r(0) \subset T_pM \cong \mathbb{R}^m$ ist $S_r(p)$ eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M$. Jede Kurve in $S_r(p)$ läßt sich in der Form $t \mapsto \exp_p(rX(t))$ darstellen, wobei $t \mapsto X(t)$ eine Kurve in $\{X \in T_pM : \|X\| = 1\}$ ist. Wir haben gesehen, dass jede Geodätische (ggf. nach Reparametrisierung) durch $p$ von der Form $r \mapsto \exp_p(rX)$ für ein $X \in T_pM$ mit $\|X\| = 1$ ist.

Betrachte nun die Abbildung $F(r,t) := \exp_p(rX(t))$, wobei $t \mapsto X(t)$ eine Kurve in $\{X \in T_pM : \|X\| = 1\}$ ist. Dann ist $\frac{\partial F}{\partial t}$ ein Tangentialvektor an $S_r(p)$ und $\frac{\partial F}{\partial r}$ ist ein Tangentialvektor an eine Geodätische durch $p$. Somit genügt es, $\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0$ nachzuweisen: Zunächst einmal gilt $F(0,t) = p$ für alle $t$. Also ist $\frac{\partial F}{\partial t}\big|_{(0,t)} = 0$ und daher gilt auch $\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle\big|_{(0,t)} = 0$. Nach Bemerkung 22.9

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle.$$

Auf der rechten Seite verschwindet der erste Term, denn $r \mapsto F(r,t)$ ist eine Geodätische. Nach Lemma 24.14 erhalten wir für den zweiten Term

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r} \right\rangle = 0,$$

da $\frac{\partial F}{\partial r}$ der Tangentialvektor der Geodätischen $r \mapsto F(r,t)$ ist und damit eine konstante Norm hat. Somit ist $\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0$. Also ist $\left\langle \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle$ konstant und da diese Funktion im Punkte $(0,t)$ verschwindet, verschwindet sie überall. Das Lemma folgt. □

**Lemma 24.17.** *Seien $p, \varepsilon$ und $U$ wie in Theorem 24.7. Sei $\omega : [a,b] \to U \setminus \{p\}$ eine stückweise $C^1$-Kurve. Dann läßt sich $\omega$ eindeutig in der Form*

$$\omega(t) = \exp_p(r(t)X(t))$$

*mit $0 < r(t) < \varepsilon$, $X(t) \in T_pM$ und $\|X(t)\| = 1$ schreiben. Es gilt*

$$L(\omega) = \int\limits_a^b \|\dot\omega(t)\|\,dt \ge |r(b) - r(a)|$$

*und Gleichheit gilt genau dann, wenn $X$ konstant und $r$ monoton ist.*

*Insbesondere ist daher der kürzeste Weg zwischen zwei konzentrischen geodätischen Sphären um $q$ eine radiale Geodätische.*

*Beweis.* Da $\exp_p$ ein Diffeomorphismus ist, ist die eindeutige Darstellbarkeit klar.

Definiere $F(r,t) := \exp_p(rX(t))$. Dann gilt $\omega(t) = F(r(t),t)$ und wir erhalten

$$\dot\omega(t) = \frac{\partial F}{\partial r}\dot r(t) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nach Lemma 24.16 sind $\frac{\partial F}{\partial r}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ orthogonal zueinander. Weiterhin ist $\left\|\frac{\partial F}{\partial r}\right\| = 1$, da dies für $r = 0$ gilt und da $\left\|\frac{\partial F}{\partial r}\right\|$ für Geodätische konstant ist. Somit gilt

$$\|\dot\omega(t)\|^2 = |\dot r(t)|^2 + \left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2 \ge |\dot r(t)|^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ und damit also $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$ ist. Hieraus folgt

$$\int\limits_a^b \|\dot\omega(t)\|\,dt \ge \int\limits_a^b |\dot r(t)|\,dt \ge |r(b) - r(a)|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $r$ monoton und $X$ konstant ist. □

*Beweis von Theorem 24.13, Ende.* Sei $\omega$ ein stückweise glatter Weg von $q$ nach $q' = \exp_q(rX)$ mit $0 < r < \varepsilon$, $X \in T_qM$ and $\|X\| = 1$. Dann gibt es zu jedem $\delta \in (0, r)$ eine Einschränkung der Kurve, die die geodätische Sphäre $S_\delta(q)$ mit der geodätischen Sphäre $S_r(q)$ verbindet. Wir betrachten eine solche Einschränkung, bei der sich die Kurve ausschließlich zwischen diesen beiden Sphären befindet. Nach Lemma 24.17 hat dieser Teil mindestens die Länge $r - \delta$. Mit $\delta \searrow 0$ erhalten wir $L(\omega) \geq r = L(\gamma)$. Falls $\omega$ nicht bis auf Umparametrisierung mit der verbindenden Geodätischen $\gamma$ übereinstimmt, erhalten wir eine strikte Ungleichung. □

**Korollar 24.18.** *Sei $\gamma : [0, T] \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und nehme an, dass für jede andere Kurve $\omega$, die $\gamma(0)$ mit $\gamma(T)$ verbindet, $L(\gamma) \leq L(\omega)$ gilt. Dann ist $\gamma$ eine Geodätische.*

*Beweis.* Wähle einen beliebigen Punkte $p$ im Bild von $\gamma$. In der Nähe von $p$ minimiert $\gamma$ die Länge. Da $\gamma$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, liefert Theorem 24.13, dass $\gamma$ in einer Umgebung von $p$ eine Geodätische ist. Da $p$ ein beliebiger Punkt auf dem Bild von $\gamma$ ist, ist $\gamma$ eine Geodätische. □

**Bemerkung 24.19.**

(i) Wir haben in Korollar 24.18 gesehen, dass eine längenminimierende Kurve zwischen zwei Punkten eine Geodätische ist. Im allgemeinen gibt es in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen zwei Punkten keine längenminimierende Kurve. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Seien $p = (-1, 0)$ und $q = (1, 0)$. Dann ist $d(p, q) = 2$, aber jede Kurve in $M$, die $p$ mit $q$ verbindet hat eine Länge strikt größer als 2, da sie den Ursprung nicht im Bild enthalten kann.

Die negative $x^1$-Achse ist eine Geodätische, die sich aber nicht fortsetzen läßt.

(ii) Im allgemeinen minimieren Geodätische die Länge nicht global, beispielsweise auf der Sphäre oder auf einem Zylinder.

Wir wollen uns damit beschäftigen, wann es zwischen zwei Punkten auf einer Mannigfaltigkeit stets eine kürzeste Geodätische gibt und wann eine Geodätische sich fortsetzen läßt.

**Definition 24.20.** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt **geodätisch vollständig**, wenn jede Geodätische $\gamma : [0, T] \to M$ sich zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Geodätischen fortsetzen läßt.

**Theorem 24.21** (Hopf-Rinow)**.** *Sei $M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(i) $M$ ist geodätisch vollständig.*

*(ii) Für alle $p \in M$ ist $\exp_p$ auf ganz $T_pM$ definiert.*

*(iii) $M$ mit induzierter Metrik $d$ ist ein vollständiger metrischer Raum.*

*Ist $M$ zusammenhängend, so impliziert jede dieser Aussagen*

*(iv) Zwei beliebige Punkte $p, q \in M$ lassen sich durch eine Geodätische $\gamma$ verbinden, so dass $L(\gamma) = d(p, q)$ gilt.*

*Beweis.*
(i) $\Longrightarrow$ (iv): Seien $p, q \in M$. Setze $r := d(p, q)$. Nach Theorem 24.13 gibt es ein $\delta > 0$, so dass jeder Punkt von $\partial B_\delta(p) := \{x \in M : d(p, x) = \delta\}$ mit $p$ durch eine eindeutig bestimmte minimierende Geodätische verbunden werden kann. (Falls $r \leq \delta$ ist, liefert dieses Theorem bereits die Behauptung und wir sind fertig.) Die Funktion $d(q, \cdot)$ ist stetig. Da $\partial B_\delta(p)$ kompakt ist, gibt es einen Punkt $p_0 \in \partial B_\delta(p)$, so dass sie, eingeschränkt auf $\partial B_\delta(p)$, dort ihr Minimum annimmt. Sei $\gamma : t \mapsto \exp_p(tX)$, $\|X\| = 1$, $0 \leq t \leq \delta$, die Geodätische von $p$ nach $p_0$.

Wir behaupten nun, dass

$$d(\gamma(t), q) = r - t \quad \text{für} \quad \delta \le t \le r \quad \text{gilt.} \tag{24.2}$$

Dies zeigt dann, dass $p$ und $q$ sich durch eine kürzeste Geodätische verbinden lassen. Also folgt aus (24.2), dass (i) $\Longrightarrow$ (iv). Die Behauptung (24.2) ist für $t = \delta$ wahr. („$\ge$" gilt nach Dreiecksungleichung, für „$\le$" betrachte man eine Folge von Kurven, die zeigen, dass $d(p,q) = r$ gilt und benutzt, dass diese $\partial B_\delta(p)$ schneiden müssen.) Aufgrund der Stetigkeit ist sie auch für das Supremum $t_0$ aller der $t$'s wahr, für die sie wahr ist. Nehme daher an, dass $t_0 < r$ gilt. Ähnlich wie oben finden wir ein $\delta' > 0$, so dass es von $\gamma(t_0)$ eine eindeutig bestimmte minimierende Geodätische zu einem beliebigen Punkt in $\partial B_{\delta'}(\gamma(t_0))$ gibt. (Analog zu oben nehmen wir an, dass $t_0 + \delta' \le r$ ist.) Sei $p_0' \in \partial B_{\delta'}(\gamma(t_0))$ ein Punkt, so dass $d(q, \cdot)$ das Minimum über $\partial B_{\delta'}(\gamma(t_0))$ in $p_0'$ annimmt. Dann folgt (wie oben)

$$d(\gamma(t_0), q) = \delta' + d(p_0', q).$$

Dies impliziert wegen (24.2) und der Definition von $t_0$

$$d(p_0', q) = d(\gamma(t_0), q) - \delta' = (r - t_0) - \delta'.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung erhalten wir also

$$d(p, p_0') \ge d(p,q) - d(p_0', q) = r - [(r - t_0) - \delta'] = t_0 + \delta'.$$

Betrachte nun die „gebrochene" Geodätische, die aus der Geodätischen von $p$ nach $\gamma(t_0)$ und der längenminimierenden Geodätischen von $\gamma(t_0)$ nach $p_0'$ besteht. Deren Länge ist gerade $t_0 + \delta'$. Somit ist sie eine längenminimierende Verbindung von $p$ nach $p_0'$ und daher aufgrund von Korollar 24.18 nicht nur eine gebrochene, sondern sogar eine (richtige) Geodätische. Sie stimmt also mit der oben definierten Geodätischen $\gamma$ überein, also ist $\gamma(t_0 + \delta') = p_0'$. Somit erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von $t_0 < r$. Die Behauptung folgt.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist offensichtlich.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $M$. Dann ist $x_n$ beschränkt, also gibt es $\Lambda > 0$, so dass $d(x_n, x_0) \le \Lambda$ ist. Aufgrund des obigen Beweises ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in A := \exp_{x_0}\{X \in T_{x_0}M : \|X\| \le \Lambda\}.$$

Die Menge $A$ ist das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung und daher selber wieder kompakt. Also besitzt die Folge $(x_n)$ einen Häufungspunkt in $A$ und dieser Punkt gehört ebenfalls zu $A$. Also ist $M$ als metrischer Raum vollständig.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $\gamma : [0, t_0) \to M$, $0 < t_0 < \infty$, eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, die sich nicht über $t_0$ hinaus fortsetzen läßt. Wähle $t_n \in [0, t_0)$ mit $t_n \uparrow t_0$, $n \in \mathbb{N}$, und setze $p_n := \gamma(t_n)$. Da $d(p_m, p_n) \le |t_m - t_n|$ gilt, ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $M$. Aufgrund der metrischen Vollständigkeit von $M$ gibt es daher ein $q \in M$, so dass $p_n \to q$. Wir möchten nun nachweisen, dass sich $\gamma$ so fortsetzen läßt, dass es $q$ erreicht. Nach Theorem 24.13 gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, so dass sich zwei beliebige Punkte in $B_\delta(q)$ mit einer eindeutig bestimmten Geodätischen der Länge kleiner als $\varepsilon$ verbinden lassen. Auf $p_m$ und $p_n$ angewandt heißt das, dass es ein $N$ gibt, so dass für alle $m, n \ge N$ auch $d(p_m, p_n) = |t_m - t_n|$ gilt. Wir fixieren nun $n$ und lassen $m \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit von $d$ erhalten wir $d(q, p_n) = t_0 - t_n$. Für $m > n \ge N$ gilt also

$$d(q, p_n) = t_0 - t_n = (t_0 - t_m) + (t_m - t_n) = d(q, p_m) + d(p_m, p_n).$$

Damit ist die gebrochene Geodätische von $p_n$ nach $p_m$ und weiter nach $q$ längenminimierend und daher nach Korollar 24.18 eine glatte Geodätische. Man kann sie also verwenden um die Geodätische $\gamma$ bis $t_0$ fortzusetzen. Der lokale Existenzsatz erlaubt uns nun, die Geodätische über $t_0$ hinaus fortzusetzen. $\square$

**Korollar 24.22.** *Jede geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit ist geodätisch vollständig.*

*Beweis.* Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig. □

**Bemerkung 24.23.** Aussage (iv) in Theorem 24.21 ist zu den anderen Aussagen nicht äquivalent. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$ ist ein Gegenbeispiel.

## Literatur

1. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
2. David Lovelock and Hanno Rund, *Tensor, differential forms, and variational principles*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1975, Pure and Applied Mathematics.
3. Oliver C. Schnürer, *Topologie*, 2007, Skript zur Vorlesung.
4. Friedrich Tomi, *Differentialgeometrie I*, 1997, Lecture Notes.
5. John Urbas, *Introduction to Differential Geometry*, 2004, Lecture Notes.
6. Wikipedia, `http://www.wikipedia.org`.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

*E-mail address*: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`