Oliver Schnürer, Marcello Sani Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 1

Aufgabe 1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion. Man zeige, dass der Graph von f,

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \Omega\},$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+n}$ ist.

Aufgabe 1.2. Sei $M \subset \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$M := \{(x, 0) | -1 < x < 1\} \cup \{(0, y) | -1 < y < 1\}.$$

Man beweise, dass M keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, dass aber $M \setminus \{0\}$ eine (nicht zusammenhängende) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 1.3. Sei $\mathbb{S}^n$ die n-Sphäre. Man zeige:

a) $\mathbb{S}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.
b) $\mathbb{S}^n$ ist eine Mannigfaltigkeit. Jeder Atlas besteht aus mindestens zwei Karten. Erkläre, wieso eine einzige Karte nicht hinreichend ist.

Aufgabe 1.4. Man beweise:

a) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von N und N eine Untermannigfaltigkeit von L. Dann ist M eine Untermannigfaltigkeit von L.
b) Sei M_1 eine Untermannigfaltigkeit von N_1 und M_2 eine Untermannigfaltigkeit von N_2. Dann ist $M_1 \times M_2$ eine Untermannigfaltigkeit von $N_1 \times N_2$.
Bemerkung: Daraus folgt zum Beispiel, dass $\mathbb{S}^n \times \ldots \times \mathbb{S}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ für N genügend gross ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 2.11.2010.

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 2

Aufgabe 2.1.

a) Sei $GL(n)$ der Raum aller regulären Matrizen mit reellen Einträgen. Man beweise, dass $GL(n)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2 ist.

b) Sei $M(m \times n)$ der Vektorraum der reellen $(m \times n)$-Matrizen und $M_r(m \times n)$ der Unterraum der Matrizen von Rang r. Dann ist $M_r(m\times n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M(m\times n)$ der Kodimension $(n-r)\cdot(m-r)$, für $r \le \min\{m, n\}$.
Hinweis: Ein typisches Kartengebiet um einen Punkt aus $M_r(m \times n)$ bildet die Menge $U \subset M(m \times n)$ der Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ D & DB + C \end{pmatrix}, \qquad A \in M(r \times r), \qquad \det(A) \neq 0.$$

Eine solche Matrix liegt genau dann in $M_r(m \times n)$, wenn $C = 0$ ist.

Aufgabe 2.2. Man betrachte $\mathbb{R}$ versehen mit der üblichen differenzierbaren Struktur, gegeben durch die Karte $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ (man kann sich überzeugen, dass diese reicht, um ein Atlas zu definieren). Definiere eine andere differenzierbare Struktur durch die Karte $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$. Man zeige, dass diese beiden differenzierbaren Strukturen nicht äquivalent sind, d.h. dass die Karten nicht verträglich sind, dass $(\mathbb{R}, \varphi)$ und $(\mathbb{R}, \psi)$ jedoch diffeomorph sind.

Aufgabe 2.3. Sei N eine kompakte, M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, beide der Dimension n und nicht leer. Sei $f : N \to M$ eine Einbettung. Zeige, dass f ein Diffeomorphismus ist.
Hinweis: Eine Einbettung $f : N \to M$ ist eine Immersion, die zusätzlich auch ein Homöomorphismus von N auf ihr Bild $f(N) \subset M$ ist.

Aufgabe 2.4. Beschreibe eine Einbettung $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ mit elementaren Funktionen.

Abgabe: Bis Dienstag, 9.11.2010.

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 3

Aufgabe 3.1.

a) Sei $Sym(n)$ der Raum aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Man beweise, dass $Sym(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

b) Sei $O(n)$ der Raum aller orthogonalen Matrizen mit reellen Einträgen. Man beweise:

- **i)** $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- **ii)** $O(n)$ besteht aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten.
- **iii)** **Zusatzaufgabe**: $O(n)$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.
  Hinweis: Gram-Schmidtsche Orthonormalisierung.

Aufgabe 3.2.

a) Seien M eine analytische zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ eine analytische Funktion. Sei $\Sigma \subset M$ die Menge der kritischen Punkte. Falls $\Sigma \neq M$, dann ist $f^{-1}(f(\Sigma))$ eine Nullmenge.

b) Dasselbe gilt nicht, falls f nur C^∞ ist.

Aufgabe 3.3. Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes und

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Man zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn die Restriktionen $f|_{A_i}$ für alle i stetig sind.

Aufgabe 3.4. Man lese und verstehe das Theorem 3.4 aus dem Buch M. Hirsch: *Differential Topology*, so dass man den Beweis in der Übung präsentieren kann.

Abgabe: Bis Dienstag, 16.11.2010.

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 4

Aufgabe 4.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge. Man zeige, dass jede Umgebung $U \subset M$ von K eine abgeschlossene Umgebung von K enthält, deren Rand eine Untermannigfaltigkeit von M ist.

Hinweis: Man betrachte $\lambda^{-1}([y,1])$, wobei $\lambda : M \to [0,1]$ eine Abbildung mit $\lambda|_K \equiv 1$ und Träger in U ist, und y ein regulärer Wert von λ ist.

Aufgabe 4.2. Man beweise: Seien X ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, dann ist f abgeschlossen. Ist f injektiv, so ist f eine topologische Einbettung.

Hinweis: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen X und Y. f heisst:

- **i)** *Abgeschlossen*, falls für alle abgeschlossene Teilmengen $A \subset X$ das Bild $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist;
- **ii)** *Topologische Einbettung (von X in Y)*, falls f ein Homöomorphismus von X auf $f(X)$, versehen mit der Unterraumtopologie, ist.

Aufgabe 4.3. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Man betrachte alle differenzierbaren Kurven
$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad \text{mit} \quad \alpha(0) = x.$$
Zwei solche Kurven α und β heissen äquivalent, wenn es eine Karte (U, φ) um x mit
$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$
gibt. Gilt diese Relation für eine Karte (U, φ), so auch für jede andere Karte (V, ψ) um x:
$$(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0).$$
Ein *Tangentialvektor im Punkt x* ist eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$. Die Menge T_xM dieser Äquivalenzklassen heisst *Tangentialraum im Punkt x*. Die Vereinigung aller Tangentialräume
$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$
heisst *Tangentialbündel von M*. Zeigen Sie, dass TM eine Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4.4. Man lese und verstehe das Theorem 3.5 aus dem Buch M. Hirsch: *Differential Topology*, so dass man den Beweis in der Übung präsentieren kann.

Abgabe: Bis Dienstag, 23.11.2010.

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 5

Aufgabe 5.1. Seien $(\mathbb{R}, \varphi)$ und $(\mathbb{R}, \psi)$ die Karten von $\mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$. Man zeige: Falls eine Funktion $f : (\mathbb{R}, \psi) \to (\mathbb{R}, \varphi)$ bzgl. der durch ψ erzeugten differenzierbaren Struktur differenzierbar ist, dann ist $f : (\mathbb{R}, \varphi) \to (\mathbb{R}, \varphi)$ auch bzgl. der durch φ erzeugten Struktur differenzierbar.

Aufgabe 5.2. Man klassifiziere alle zusammenhängenden 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und alle zusammenhängenden 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Hinweis: Ein Hausdorff-Raum M heisst *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand*, falls jeder Punkt von M eine Umgebung besitzt, die zu einer relativ offenen Teilmenge der abgeschlossenen oberen Halbebene $V \subset \mathbb{H}^n$ homöomorph ist. Eine differenzierbare (C^k-)Struktur auf M definiert man wie im Fall von Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

Aufgabe 5.3. Die *Grassmann-Mannigfaltigkeit* $G_{n,k}$ ist der Raum aller k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Sei E ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und $E^\perp$ das orthogonale Komplement von E. Es ist möglich $\mathbb{R}^n$ mit $E \times E^\perp$ zu identifizieren. Jeder k-dimensionale Unterraum, der nah genügend am E ist, ist Graph einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $E \to E^\perp$. Damit wird eine Umgebung von $E \in G_{n,k}$ auf eine offene Teilmenge des Vektorraums der linearen Abbildungen $E \to E^\perp$ homöomorph abgebildet.

a) Man beweise, dass $G_{n,k}$ eine $k(n-k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.
b) Die Abbildung $G_{n,k} \to G_{n,n-k}$, $E \mapsto E^\perp$ ist ein C^ω-Diffeomorphismus.

Aufgabe 5.4.

a) Man zeige, dass $T(M \times N)$ diffeomorph zu $TM \times TN$ ist.
b) Seien M, N_1, N_2 drei C^r-Mannigfaltigkeiten. Man beweise, dass eine Abbildung $f : M \to N_1 \times N_2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ genau dann in C^r ist, wenn jede der Abbildungen $f_i : M \to N_i$, $i = 1, 2$, in C^r ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 30.11.2010.
Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 6

Aufgabe 6.1. Man zeige, dass ein Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ existieren, so dass das Bild $\varphi(N)$ von N unter diesem Homöomorphismus strikt positives Mass hat.

Hinweis: Man benutze die Cantorfunktion C (vgl. auch Wikipedia: Absolute continuity) und definiere $\varphi(x) := C(x) + x$.

Aufgabe 6.2. Man beweise:

a) Auf $\mathbb{S}^1$ gibt es ein nicht verschwindendes stetiges Vektorfeld.
b) Auf $\mathbb{S}^3$ gibt es drei nicht verschwindende in jedem Punkt linear unabhängige stetige Vektorfelder.

Aufgabe 6.3. Die Mannigfaltigkeit aller orientierten 2-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^4$ ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Aufgabe 6.4. Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine nicht negative Funktion mit $\operatorname{supp} \eta \subset \overline{B_1(0)}$, die $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$ erfüllt. Dann heisst η *(Friedrichsscher) Mollifier*.

a) Man zeige, dass für
$$\eta(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$
die Funktion
$$x \longmapsto \frac{\eta(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(y) dy}$$
ein Mollifier ist.

b) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und η ein Mollifier und $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f_\varepsilon = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy$. Man beweise:

- **i)** $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$;
- **ii)** Sei f stetig in $K \subset \Omega$, K kompakt $\Longrightarrow f_\varepsilon \to f$ gleichmäßig in K;
- **iii)** $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \operatorname{supp} f + \varepsilon$;
- **iv)** $f \in C^m(\Omega) \Longrightarrow D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \quad \forall\, |\alpha| \leq m$ und $\|f - f_\varepsilon\|_{C^m(\Omega')} \to 0 \quad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega$;
- **v)** $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $\Longrightarrow \|f - f_\varepsilon\|_{L^p} \to 0$;
- **vi)** $f \in L^\infty(\Omega) \Longrightarrow \|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

Abgabe: Bis Dienstag, 7.12.2010.
Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 7

Aufgabe 7.1. Sei A ein einfach zusammenhängend (d.h. A ist wegzusammenhängend und jeder geschlossene Weg in A ist nullhomotop), dann ist $\pi_n(A)$ eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 7.2.

a) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ definiert. Man zeige: Für alle hinreichend großen Werte von R gilt

$$d\Big(f, (-R, R), 0\Big) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \operatorname{sgn}(a_n) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

b) Sei $B_R(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ und $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n. Man beweise, dass

$$\lim_{R \to \infty} d\left(f, B_R\left(0\right), 0\right)$$

existiert und man berechne diesen Wert. Man folgere daraus den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 7.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex analytisch und auf $\bar{\Omega}$ stetig fortsetzbar, sowie $a \notin f(\partial\Omega)$. Man zeige: Der Grad von f bezüglich a ist die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl der a-Stellen von f.

Aufgabe 7.4. Es sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $|f(x)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$ und $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ für $|x| \geq R$ für ein $R > 0$. Man zeige, dass f surjektiv ist.
Hinweis: Man benutze die Homotopieinvarianz des Grades.

Abgabe: Bis Dienstag, 14.12.2010.
Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 8

Aufgabe 8.1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, K eine kompakte Teilmenge von Ω, $U \subset \Omega$ eine Umgebung von K und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass es dann eine Funktion $f_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $f_\varepsilon = f$ in $\Omega \setminus U$, $f_\varepsilon \to f$ in Ω, falls $\varepsilon \to 0$, und $f_\varepsilon|_K \in C^\infty$ gelten.

Aufgabe 8.2. Seien $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung und $y \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert. Man beweise:

a) $f^{-1}(\{y\})$ besteht aus einer geraden Anzahl von Punkten.
b) Falls $f^{-1}(\{y\})$ aus $2k$ Punkten besteht, hat f mindestens $2k$ kritische Punkte.
c) Seien $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung und $y \in g(\mathbb{S}^2)$ ein regulärer Wert. Falls $g^{-1}(\{y\})$ aus k Zusammenhangskomponenten besteht, dann hat g mindestens $k+1$ kritische Punkte.
Hinweis: Man benutze den Jordanschen Kurvensatz.

Aufgabe 8.3. Sei $F : M \times [0,1] \longrightarrow N$ stetig und seien M und N kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand mit $\dim M = \dim N$. Sei y ein regulärer Wert von $f_0 := F(\cdot, 0)$ und $f_1 := F(\cdot, 1)$, wobei beide Abbildungen glatt sind. Man beweise, dass $\# f_0^{-1}(\{y\})$ und $\# f_1^{-1}(\{y\})$ endlich sind und

$$\# f_0^{-1}(\{y\}) = \# f_1^{-1}(\{y\}) \pmod 2$$

gilt.
Hinweis: Man benutze Ideen aus dem Beweis von Lemma 4.4.

Aufgabe 8.4. Man zeige für $f \in C^0(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1})$:

a) Ist der Grad von f ungleich 0, so ist f surjektiv.
b) $\deg(f^m) = (\deg(f))^m$.

Abgabe: Bis Dienstag, 21.12.2010.
Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html

Oliver Schnürer, Marcello Sani Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 9

Aufgabe 9.1. Seien $A_1, \ldots, A_n$ beschränkte messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Man zeige, dass eine Hyperebene existiert, die die Volumen aller diesen Teilmengen gleichzeitig halbiert.

Hinweis: Für $x \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiere man $H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, x\rangle = x^{n+1}\}$ und $H_x^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, x\rangle > x^{n+1}\}$. Dann ist $f : \partial B_1(0) \to \mathbb{R}^n$, $f_i(x) = \lambda_n(A_i \cap H_x^+)$, stetig, wobei λ_n das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 9.2. Seien y und z reguläre Werte von $f : M \longrightarrow N$, wobei M und N kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind und N zusammenhängend ist. Sei ferner $\dim M = \dim N$ und $f \in C^\infty(M, N)$. Man beweise, dass

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \qquad (\text{mod } 2)$$

gilt.
Wir definieren den Abbildungsgrad (mod 2) als diese Zahl. Sie hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

Aufgabe 9.3. Sei $p \geq 0$. Für jede C^1-Fläche M vom Geschlecht p gibt es eine C^1-Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{R}$, welche genau 3 kritische Punkte besitzt.

Aufgabe 9.4. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T], \mathbb{R}^n)$ mit $f(x, 0) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$. Ferner werde angenommen, dass die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt} u(x, t) = f(u(x, t), t), \qquad u(x, 0) = x$$

auf $[0, T]$ existieren und dass $u(x, t) \in \Omega$ für $x \in \bar{\Omega}$ und $t \in (0, T]$ gilt.
Man zeige für $t > 0$:

$$d(\mathrm{Id} - u(\cdot, t), \Omega, 0) = d(-f(\cdot, 0), \Omega, 0).$$

Abgabe: Bis Dienstag, 11.1.2011.
Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 10

Aufgabe 10.1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C(\bar{\Omega})$, $f(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ und $f(x) = x$ auf $\partial\Omega$. Man beweise, dass $f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ gilt.

Aufgabe 10.2.

a) Sei M eine zusammenhängende, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Man beweise:
- **i)** Eine konstante Abbildung hat einen geraden Abbildungsgrad (mod 2).
- **ii)** Die identische Abbildung hat einen ungeraden Abbildungsgrad (mod 2).
- **iii)** Aus **i)** und **ii)** folgt, dass die Identität und eine konstante Abbildung auf M nicht homotop sind.

b) Man zeige: **a)** impliziert, dass es keine Retraktion $f : D^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ gibt.
Hinweis: Man betrachte die Homotopie
$$F : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n \quad \text{mit} \quad F(x,t) = f(tx).$$

Aufgabe 10.3. Sei $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ein Torus. Man zeige, dass jede C^2-Abbildung $f : T^2 \to \mathbb{R}$ mindestens 3 kritische Punkte besitzt.

Hinweis: Falls f ein einziges Maximum p_+ und ein einziges Minimum p_- hat, betrachte man eine einfach zusammenhängende Umgebung U von p_-. Sei $\varphi_t : T^2 \to T^2$, $t \in \mathbb{R}$, der Gradientenfluss von f. Dann kann man zeigen, dass $T^2 \setminus \{p_+\} = \bigcup_{t>0} \varphi_t(U)$ gilt. Damit ist $T^2 \setminus \{p_+\}$ einfach zusammenhängend.

Aufgabe 10.4. Es sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x) \to -\infty$ für $|x| \to \infty$ und $\nabla\varphi(x) \neq 0$ für $|x| \geq R$, $R > 0$. Man zeige:
$$d(\nabla\varphi, B_r(0), 0) = (-1)^n$$
für $r \geq R$.

Hinweis: Vgl. Aufgabe 9.4.

Abgabe: Bis Dienstag, 25.1.2011.
Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html

Übungen zur Vorlesung Differentialtopologie

Blatt 11

Aufgabe 11.1. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit und sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit nur zwei nicht degenerierten kritischen Punkten. Man beweise: M ist homöomorph zu $\mathbb{S}^m$.

Aufgabe 11.2. Mit Hilfe der Morsetheorie kann man eine Fläche vom Geschlecht zwei als Vereinigung von Zellen darstellen. Man visualisiere dies mit Hilfe von Skizzen analog zu den Skizzen für den Torus in der Vorlesung. Man führe dies für zwei Morsefunktionen durch, so dass sich die dadurch induzierten Zerlegungen in Zellen unterscheiden.

Aufgabe 11.3. Sei $U = D^m \times D^n \subset \mathbb{R}^{m+n}$, wobei $D^m := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le 1\}$ ist. Seien $P : U \to D^m$ und $Q : U \to D^n$ die natürlichen Projektionen. Man beweise: Ist $f : (D^l, \partial D^l) \to (\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{m+n} \setminus U)$ stetig, $l < m$ und $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen mit $\bar{V} \subset U$, so lässt sich f beliebig gut durch stetige Abbildungen

$$f_0 : (D^l, \partial D^l) \to \left(\mathbb{R}^{m+n} \setminus \left(V \cap P^{-1}(0)\right), \mathbb{R}^{m+n} \setminus U\right)$$

mit $f|_{\partial D^l} = f_0|_{\partial D^l}$ approximieren. Insbesondere ist f homotop zu solchen f_0 bei festen Randwerten.

Aufgabe 11.4. Sei M_0 eine Teilmenge eines metrischen Raumes M und $\Gamma_0 \subset C^0(M_0, \mathbb{R}^n)$. Definiere

$$\Gamma := \{\gamma \in C^0(M, \mathbb{R}^n) : \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Nimm an, dass $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Bedingung

$$a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) < \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) =: c < \infty$$

erfüllt. Seien $\varepsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right)$, $\delta > 0$ und $\gamma \in \Gamma$ mit $\sup\limits_M \varphi \circ \gamma \le c + \varepsilon$.

Man beweise, dass es ein $u \in \mathbb{R}^n$ mit

- **i)** $c - 2\varepsilon \le \varphi(u) \le c + 2\varepsilon$,
- **ii)** $\operatorname{dist}(u, \gamma(M)) \le 2\delta$,
- **iii)** $|\varphi'(u)| \le \dfrac{8\varepsilon}{\delta}$.

gibt.

Hinweis: (i) und (ii) lassen sich stets erfüllen. Falls sich (iii) nicht erfüllen lässt, erhält man mit Hilfe des Deformationslemmas einen Widerspruch. Betrachte zunächst $M = [0, 1]$ und $M_0 = \{0, 1\}$.

Aufgabe 11.5. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine eigentliche C^1-Abbildung, x_0 und x_1 strikt lokale Minima. Man zeige: Es gibt einen kritischen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ von φ mit

$$\varphi(y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

wobei $\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$ ist.

Hinweis: Man suche z_i mit

$$|d\varphi(z_i)| \to 0 \text{ und } \varphi(z_i) \to \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)).$$

Aufgabe 11.6. Sei y ein kritischer Punkt wie in der Aufgabe 11.5. Man zeige, dass der Index von φ in y maximal 1 ist.

Aufgabe 11.7. (**Präsenzaufgabe**) Wie lassen sich die vorherigen Aufgaben 11.3, 11.4 und 11.5 auf $M = D^k := \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \le 1\}$ und $M_0 = \partial D^k$ verallgemeinern?

Webseite: http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/difftopo10-11.html