ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Elementare Differentialgeometrie an der Universität Konstanz im Wintersemester 2011/12.

INHALTSVERZEICHNIS

Wir benutzen [1, 3].

1. Isometrien des $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1. Eine Abbildung $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ zwischen zwei metrischen Räumen (X_i, d_i) heißt Isometrie, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt und f surjektiv ist.

Lemma 1.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann bildet die Menge der Isometrien $f\colon (X, d) \to (X, d)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.*

Beweis. Isometrien sind injektiv, also auch bijektiv und daher invertierbar mit bijektiver Inversen. Seien f, g Isometrien. Dann folgt aus $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ auch $d(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. Daher ist f^{-1} ebenfalls eine Isometrie. Es gilt

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(g(x), g(y)) = d(x, y),$$

jeweils für alle $x, y \in X$. Die Bijektivität von f und g überträgt sich auf die Komposition $f \circ g$. Die Identität $x \mapsto x$ ist das neutrale Element. $\square$

Theorem 1.3. *Die Isometrien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ sind genau die Abbildungen der Form*

$$f(x) = Ax + b$$

mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Date: 10. Februar 2012.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Beweis. „$\Longrightarrow$": Gelte $f(x) = Ax + b$. Dann rechnet man direkt nach, dass es sich um eine Isometrie handelt.

„$\Longleftarrow$": Sei f eine beliebige Isometrie. Durch Addition eines konstanten Vektors in $\mathbb{R}^n$ dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $f(0) = 0$ gilt. Wir erhalten

$$|f(x)| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = |x|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da f eine Isometrie ist, gilt $|f(x)-f(y)| = |x-y|$. Aufgrund der Polarisationsformel (oder durch direktes Ausmultiplizieren der quadrierten Normen) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\langle f(x), f(y)\rangle &= |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - |f(x) - f(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Somit erhält f auch das Skalarprodukt. Sei $(e_i)_{1\le i\le n}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir erhalten $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Dies besagt, dass auch $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ eine Orthonormalbasis ist. Daher gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(e_i).$$

Somit ist f eine lineare Abbildung. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine lineare Abbildung, die eine Orthonormalbasis auf eine andere Orthonormalbasis abbildet, durch eine orthogonale Matrix dargestellt wird. □

Definition 1.4. Die Isometrien $f(x) = Sx + b$, $S \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ heißen (Euklidische) Bewegungen.

Die Isometrie $f(x) = Sx + b$ heißt orientierungserhaltend oder eigentliche Bewegung, falls $\det S = 1$ für die orthogonale Matrix S gilt.

Definition 1.5. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\sphericalangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|} \in [0, \pi]$$

der Winkel zwischen x und y.

2. Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1.

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\alpha \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \equiv \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, heißt parametrisierte Kurve der Klasse C^k im $\mathbb{R}^n$.

(ii) Eine C^1-Kurve α heißt regulär, falls $\alpha'(t) \ne 0$ für alle $t \in I$ gilt.

(iii) Eine C^k-Kurve $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt C^k-geschlossen, falls

$$\alpha^{(l)}(a) = \alpha^{(l)}(b)$$

für alle $0 \le l \le k$ gilt.

(iv) Eine Kurve α heißt stückweise von der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le N$, mit $I = [a_0, a_N]$ und $\alpha|_{[a_i, a_{i+1}]} \in C^k$ für alle $0 \le i \le N - 1$ gibt.

Definition 2.2 (Bogenlänge)**.** Sei $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist

$$L(\alpha) := \int\limits_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

die Bogenlänge der Kurve α, wobei die Integration jeweils einzeln über Intervalle, auf denen α von der Klasse C^1 ist, ausgeführt wird.

Definition 2.3. Seien $\alpha_i\colon I_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, parametrisierte Kurven. Dann heißt α_2 Umparametrisierung von α_1, falls es eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I_2$ (also einen Diffeomorphismus) gibt, so dass

$$\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$$

gilt.

φ heißt Parametertransformation. Sie heißt richtungstreu, falls $\varphi' > 0$ gilt und richtungsumkehrend, wenn $\varphi' < 0$ gilt.

Lemma 2.4. *Auf der Menge aller parametrisierten Kurven in $\mathbb{R}^n$ ist $\sim$ mit $\alpha \sim \beta$, falls β eine Umparametrisierung von α ist, eine Äquivalenzrelation.*

Beweisidee. Beachte dazu insbesondere, dass die Inverse einer Parametertranformation wieder eine Parametertransformation ist und dass die Verknüpfung von zwei Parametertransformationen (bei geeigneten Definitionsbereichen) ebenfalls eine Parametertransformation ist. □

Lemma 2.5. *Sei α_2 eine Umparametrisierung von α_1, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.*

(i) Dann gilt $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$.

(ii) Der normierte Tangentialvektor $\frac{\alpha_i'}{|\alpha_i'|}$ ist bei einer orientierungserhaltenden Parametertransformation invariant, d. h. es gilt

$$\frac{\alpha_2'}{|\alpha_2'|} = \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1'|} \circ \varphi.$$

(iii) Ist α_1 regulär, so auch α_2.

Beweis.

(i) Sei α_i auf $I_i = [a_i, b_i]$ definiert. Dann erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale

$$L(\alpha_2) = \int_{a_2}^{b_2} |\alpha_2'(t)|\, dt = \int_{a_2}^{b_2} |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_{a_1}^{b_1} |\alpha_1'(\tau)|\, d\tau = L(\alpha_1).$$

Ist $\varphi' < 0$, so wird der Faktor $\frac{|\varphi'|}{\varphi'} = -1$ aufgrund der Integraltransformation durch Vertauschen der Integrationsgrenzen wieder kompensiert.

(ii) Es gilt

$$\frac{\alpha_2'(t)}{|\alpha_2'(t)|} = \frac{\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))}{\left|\frac{d}{dt}\alpha_1(\varphi(t))\right|} = \frac{\alpha_1'(\varphi(t))}{|\alpha_1'(\varphi(t))|} \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

(iii) Dies folgt ebenfalls aus der Kettenregel $\alpha_2'(\varphi(t)) = \alpha_1'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. □

Definition 2.6. Eine C^1-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls $|\alpha'(t)| = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkung 2.7. Ist $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt $L(\alpha) = b - a$.

Theorem 2.8. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^k-Kurve, $k \geq 1$. Dann gibt es eine (orientierungserhaltende) Parametertransformation $\varphi \in C^k(J, I)$, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Definiere die Bogenlängenfunktion $\sigma\colon I \to \mathbb{R}$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ durch

$$\sigma(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)|\, d\tau$$

und setze $J := \sigma(I)$. Wegen $\sigma'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ ist $\sigma \in C^k(I, J)$ invertierbar. Setze $\varphi(s) := \sigma^{-1}(s)$. Wir erhalten aus $\varphi(\sigma(\tau)) = \tau$ zunächst $\varphi'(\sigma(\tau))\sigma'(\tau) = 1$ und $\varphi'(s) = \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))}$. Somit gilt

$$\left|\frac{d}{ds}\alpha(\varphi(s))\right| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1$$

und wir erhalten die Behauptung.

Es ist üblich, s als Parameter für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve zu verwenden. □

Bemerkung 2.9. Sind α_i, $i = 1, 2$, beide nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\alpha_2(t) = \alpha_1(\varphi(t))$, dann folgt

$$1 = |\alpha_2'(t)| = |\alpha_1'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|$$

und daher ist $\varphi(t) = t_0 \pm t$. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist also bis auf eine Isometrie von $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

3. Krümmung von Kurven

3.1. Definition der Krümmung von Kurven in der Ebene.

Definition 3.1. Sei $\alpha \in C^k\left(I, \mathbb{R}^2\right)$, $k \geq 1$, regulär. Wir setzen $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $J^2 = -\mathbb{1}$ und $\langle Jv, w\rangle = \det(v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Identifizieren wir einen Vektor $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $z := a + ib \subset \mathbb{C}$, so ist bezüglich dieser Identifizierung $Jz = iz$.

Definiere den Tangentialvektor von α durch $\tau(t) := \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Dann ist ν mit $\nu(t) := J\tau(t)$ in $C^{k-1}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ und $\tau(t), \nu(t)$ ist ein positiv orientiertes (normiertes) 2-Bein längs α, d. h. $\tau(t)$ ist ein positives Vielfaches von $\alpha'(t)$, $|\tau(t)| = 1$, $|\nu(t)| = 1$ und $\det(\tau(t), \nu(t)) = 1$. ν heißt Normale (Einheitsnormale) an α. (Sie ist eindeutig bestimmt.)

Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die (orientierte) Krümmung $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ von α durch

$$\kappa(s) := \langle \alpha''(s), \nu(s)\rangle.$$

Ist α nicht nach der Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir die Krümmung von α durch

$$\kappa_\alpha := \kappa_{\alpha\circ\varphi} \circ \varphi^{-1},$$

wobei φ eine orientierungserhaltende C^2-Parametertransformation ist, so dass $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Den Beweis, dass die Krümmung einer nicht nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve wohldefiniert ist, lassen wir als Übungsaufgabe.

Lemma 3.2. *Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2-Kurve. Dann gilt*

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Ist α ein Graph, also von der Form $\alpha(x) = (x, u(x))$ mit $u \in C^2(I, \mathbb{R})$, so gilt

$$\kappa(x) = \frac{u''(x)}{\left(1 + (u'(x))^2\right)^{3/2}}.$$

Beweis. Sei $\alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert und gelte $\varphi' > 0$. Wir leiten zunächst Formeln für die Ableitungen von φ her:

$$\begin{aligned}
1 &= |(\alpha\circ\varphi)'(s)| = |\alpha'|_{\varphi(s)}| \cdot \varphi'(s),\\
\varphi'(s) &= \frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|},\\
\varphi''(s) &= -\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|}\cdot 2\cdot\langle\alpha'(\varphi(s)),\alpha''(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\rangle\\
&= -\frac{1}{|\alpha'(\varphi(s))|^4}\langle\alpha'(\varphi(s)),\alpha''(\varphi(s))\rangle,\\
\kappa_\alpha(t) &= \langle(\alpha'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s))', J\alpha'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\rangle|_{s=\varphi^{-1}(t)}\\
&= \langle\alpha''(\varphi(s))\cdot(\varphi'(s))^2+\alpha'(\varphi(s))\cdot\varphi''(s), J\alpha'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\rangle|_{s=\varphi^{-1}(t)}\\
&= \left\langle \alpha''(t)\cdot\left(\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right)^2 - \frac{\langle\tau_\alpha(t),\alpha''(t)\rangle\tau_\alpha(t)}{|\alpha'(t)|^2}, J\alpha'(t)\cdot\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right\rangle\\
&= \frac{1}{|\alpha'(t)|^2}\langle\alpha''(t)-\langle\alpha''(t),\tau_\alpha(t)\rangle\tau_\alpha(t), J\tau_\alpha(t)\rangle\\
&= \frac{\det(\tau_\alpha(t),\alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.
\end{aligned}$$

Im graphischen Fall erhalten wir aus $\alpha(x) = (x, u(x))$ für die Ableitungen $\alpha'(x) = (1, u'(x))$ und $\alpha''(x) = (0, u''(x))$. Mit $|\alpha'(x)| = \sqrt{1+(u'(x))^2}$ folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.3. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $s_0 \in \overset{\circ}{I} = \operatorname{int} I$. Definiere die beiden Halbebenen

$$E^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x-\alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle > 0\right\}$$

und

$$E^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \langle x-\alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle < 0\right\}.$$

Setze $h(s) := \langle\alpha(s)-\alpha(s_0), \nu(s_0)\rangle$. Dann sind $h(s) > 0$ und $\alpha(s) \in E^+$ sowie $h(s) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$ jeweils äquivalent. Es gilt $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle\alpha'(s_0), \nu(s_0)\rangle = 0$ und $h''(s_0) = \langle\alpha''(s_0), \nu(s_0)\rangle = \kappa(s_0)$. Nach Taylor erhalten wir $h(s) = \frac{1}{2}\kappa(s_0)(s-s_0)^2 + o(|s-s_0|^2)$. Somit erhalten wir im Falle $\kappa(s_0) > 0$, dass $\alpha(s) \in E^+$ für $s \neq s_0$ nahe bei s_0 gilt (Linkskurve). Eine entsprechende Aussage gilt für $\kappa(s_0) < 0$ und $\alpha(s) \in E^-$.

Lemma 3.4. *Sei $F(x) = Sx + a$ mit $S \in O(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$ eine starre Bewegung. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Setze $\tilde\alpha := F \circ \alpha$. Dann gelten*

$$\tilde\tau = S\tau, \quad \tilde\nu = \det S \cdot S\nu, \quad \textit{und} \quad \tilde\kappa = \det S\cdot\kappa.$$

Beweis. Wegen $|\tilde\alpha'| = |S\alpha'| = |\alpha'| = 1$ ist $\tilde\alpha$ ebenfalls nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt $\tilde\tau = \frac{S\alpha'}{|\tilde\alpha'|} = S\alpha' = S\tau$. Weiterhin gilt $\langle\tilde\alpha', S\nu\rangle = \langle S\alpha', S\nu\rangle = \langle\alpha', \nu\rangle = 0$, $|S\nu| = |\nu| = 1$ sowie $\det(\tilde\alpha', S\nu) = \det(S\alpha', S\nu) = \det S\cdot\det(\alpha', \nu) = \det S$. Somit ist $\tilde\nu = \det S\cdot S\nu$ die gesuchte Normale längs $F\circ\alpha$. Schließlich gilt

$$\tilde\kappa = \langle\tilde\alpha'', \tilde\nu\rangle = \det S\cdot\langle S\alpha'', S\nu\rangle = \det S\cdot\kappa. \qquad \square$$

Das nachfolgende Lemma erklärt die geometrische Bedeutung der Krümmung einer Kurve.

Lemma 3.5 (Schmiegekreis). *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ regulär, ohne Einschränkung nach Lemma 3.4 und Umparametrisierung (Satz über implizite Funktionen) lokal sogar von der Form $\alpha(x) = (x, u(x))$. Sei $x_0 \in I$.*

(i) Ist $\kappa(x_0) = 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu der Geraden $\beta(x) = (x, u(x_0) + (x - x_0) \cdot u'(x_0))$, d. h. es gilt $|\alpha(x) - \beta(x)| = o(|x - x_0|^2)$ oder $|u(x) - u(x_0) + (x - x_0) \cdot u'(x_0)| = o(|x - x_0|^2)$.

(ii) Ist $\kappa(x_0) \neq 0$, so ist α bis zu zweiter Ordnung asymptotisch zu einem Kreis β mit Mittelpunkt $(x_0, u(x_0)) + \frac{1}{\kappa(x_0)} \frac{(-u', 1)}{\sqrt{1+|u'|^2}}(x_0)$ und Radius $\frac{1}{\kappa(x_0)}$, d. h. es gelten in Graphendarstellung

$$\beta(x) = (x, h(x))$$

mit

$$\begin{aligned} h(x) = &- \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \sqrt{\frac{1}{\kappa(x_0)^2} - \left| x - x_0 + \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \right|^2} \\ &+ u(x_0) + \frac{1}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \end{aligned}$$

und

$$|\alpha(x) - \beta(x)| = o(|x - x_0|^2)$$

oder

$$|u(x) - h(x)| = o(|x - x_0|^2).$$

Sind $\alpha \circ \varphi$ und $\beta \circ \psi$ nach orientierungserhaltenden Parametertransformationen φ bzw. ψ nach der Bogenlänge parametrisiert und ist $\varphi(s_0) = x_0 = \psi(s_0)$, so gilt ebenfalls $|\alpha \circ \varphi(s) - \beta \circ \psi(s)| = o(|s - s_0|^2)$.

Beweis.

(i) Folgt direkt nach Taylor.

(ii) Es gilt mit $\kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1+(u'(x))^2)^{3/2}}$

$$\begin{aligned} h(x_0) &= \underbrace{-\frac{\operatorname{sign} \kappa(x_0)}{|\kappa(x_0)|}}_{= \frac{-1}{\kappa(x_0)}} \sqrt{1 - \frac{(u'(x_0))^2}{1 + (u'(x_0))^2}} + u(x_0) + \frac{1}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \\ &= u(x_0), \\ h'(x) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \frac{-2}{\sqrt{\cdots}} \left(x - x_0 + \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))}} \right), \\ h'(x_0) &= \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{\sqrt{\cdots}} \cdot \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \\ &= \underbrace{|\kappa(x_0)| \cdot \operatorname{sign}(\kappa(x_0))}_{= \kappa(x_0)} \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2} \cdot \frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \\ &= u'(x_0), \\ h''(x_0) &= \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{(\sqrt{\cdots})^3} \cdot \left(\frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}} \right)^2 + \frac{\operatorname{sign}(\kappa(x_0))}{\sqrt{\cdots}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \cdot |\kappa(x_0)|^3 \cdot \left(1 + (u'(x_0))^2\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{u'(x_0)}{\kappa(x_0) \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2}}\right)^2 \\
&\qquad + \operatorname{sign}(\kappa(x_0)) \cdot |\kappa(x_0)| \cdot \sqrt{1 + (u'(x_0))^2} \\
&= \kappa(x_0) \cdot \left(1 + (u'(x_0))^2\right)^{3/2} = u''(x_0).
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt nun ebenfalls nach Taylor.

Wir halten fest, dass $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, $\alpha'(x_0) = \beta'(x_0)$ und $\alpha''(x_0) = \beta''(x_0)$ gelten.

Es gilt $1 = |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s) = |\beta'(\psi(s))| \cdot \psi'(s)$ und daher insbesondere $\varphi'(s_0) = \psi'(s_0)$. Nochmaliges Differenzieren liefert

$$0 = \frac{\langle \alpha'(\varphi(s)), \alpha''(\varphi(s))\rangle}{|\alpha'(\varphi(s))|} (\varphi'(s))^2 + |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi''(s).$$

Da aber $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$, $\alpha'(x_0) = \beta'(x_0) \neq 0$ und $\alpha''(x_0) = \beta''(x_0)$ gelten, folgt auch $\varphi''(s_0) = \psi''(s_0)$. Somit folgt auch die letzte Behauptung mit Taylor. $\square$

Lemma 3.6. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten für $\tau = \alpha'$ und $\nu = J\tau$ die Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
\tau' &= \kappa\nu, \\
\nu' &= -\kappa\tau
\end{aligned}
$$

oder

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa\\ -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus $\langle \tau(s), \tau(s)\rangle = 1$ folgt durch Differenzieren $0 = 2\langle \tau(s), \tau'(s)\rangle$. Damit und nach Definition der Krümmung ($\kappa(s) = \langle \alpha''(s), \nu\rangle$) sowie $\tau(s) = \alpha'(s)$ folgt die erste Gleichheit. Differenzieren von $0 = \langle \tau, \nu\rangle$ liefert $\kappa = \langle \tau', \nu\rangle = -\langle \tau, \nu'\rangle$. Aus $|\nu| = 1$ folgt wie oben, dass $\langle \nu', \nu\rangle = 0$ gilt. Die Behauptung folgt. $\square$

3.2. **Krümmung von Raumkurven.**

Definition 3.7. Sei $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann definieren wir die Krümmung $\kappa(s) \in [0, \infty)$ von α im Punkt s durch

$$\kappa(s) := |\alpha''(s)|.$$

Beispiele 3.8.

(i) Die Kurve $\alpha(s) = r\left(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\right)$, $r > 0$, ist ein nach der Bogenlänge parametrisierter Kreis. Es gilt
$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$
für alle s.

(ii) Eine Gerade $\alpha(s) = x_0 + s \cdot e$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ hat überall die Krümmung Null.

(iii) Seien $r, a \in \mathbb{R}$ und $L > 0$ noch zu wählen. Dann ist die Schraubenlinie
$$\alpha(t) = \left(r\cos\frac{t}{L}, r\sin\frac{t}{L}, a\frac{t}{L}\right)$$
wegen $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}\frac{1}{L}$ genau für $L = \sqrt{r^2 + a^2}$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Somit ist
$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2 + a^2}$$
für alle t.

Definition 3.9. Sei $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Eine Familie $(v_i)_{1\le i\le n}$ von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ heißt ein längs α begleitendes n-Bein, falls

$$v_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \quad \text{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$$

für alle $1 \le i, j \le n$ und alle $t \in I$ gelten.

Man vergleiche das folgende Resultat mit dem Satz der Linearen Algebra, dass jede differenzierbare Familie $A(t)$ orthogonaler Matrizen mit $A(0) = \mathbb{1}$ eine schiefsymmetrische Ableitung $\dot{A}(0)$ besitzt.

Lemma 3.10. *Seien $v_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le n$, und $t_0 \in I$ beliebig. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) $\langle v_i(t), v_j(t)\rangle = \delta_{ij}$ für alle $t \in I$ und alle $1 \le i, j \le n$.

(ii) Es gibt eine t-abhängige Matrix $A = (a_{ij}) \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $A = -A^T$, also $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ für alle $1 \le i, j \le n$,

$$v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \textit{für} \quad 1 \le i \le n \quad \textit{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0)\rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Da die Vektoren v_i eine Orthonormalbasis bilden, lässt sich jeder Vektor (und damit insbesondere auch v_i') hiermit darstellen. Es gilt $v_i' = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j\rangle$. Wir erhalten

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i\rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle'}_{=0} - \langle v_j, v_i'\rangle = -a_{ij}.$$

„(ii) $\Longrightarrow$ (i)“: Definiere $g_{ij} := \langle v_i, v_j\rangle$. Dann gelten $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$\begin{aligned} g_{ij}' &= \langle v_i', v_j\rangle + \langle v_i, v_j'\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, v_j \right\rangle + \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} g_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk} g_{ik}. \end{aligned}$$

Damit lösen die Funktionen $(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ein lineares System von n^2 gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da a_{ij} schiefsymmetrisch ist, löst δ_{ij} dieses System ebenfalls,

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{jk}\delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta_{ij}'.$$

Der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert nun $g_{ij}(t) = \delta_{ij}$. □

Definition 3.11. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann heißt α Frenetkurve. T, N, B mit $T, N, B\colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ heißt Frenet-Dreibein zu α und ist durch

$$T := \alpha' \quad \text{(Tangentenvektor)},$$

$$N := \frac{\alpha''}{|\alpha''|} \quad \text{(Hauptnormalenvektor)}$$

und

$$B := T \times N \equiv \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^2N^3 - T^2N^1 \\ T^3N^1 - T^1N^3 \\ T^1N^2 - T^2N^1 \end{pmatrix} \quad \text{(Binormalenvektor)}$$

definiert. Dabei heißt „$\times$“: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der angegebenen Definition Kreuzprodukt. Wir definieren die Torsion von α, $\tau\colon I \to \mathbb{R}$, durch

$$\tau(s) := \langle N'(s), B(s)\rangle.$$

Lemma 3.12 (Frenetgleichungen)**.** *Sei $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Lemma 3.10 wissen wir, dass die Matrix schiefsymmetrisch sein muss. Nun gilt $T = \alpha'$ und $T'' = \alpha'' = \kappa N$ nach Definition von κ und N. Weiterhin nach Definition gilt $\tau = \langle N', B\rangle$. Somit ist die Matrix eindeutig bestimmt. $\square$

Theorem 3.13. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*

(i) Ist $\kappa \equiv 0$, so ist $\alpha(I)$ Teilmenge einer Geraden.
(ii) Ist $\alpha \in C^3$ und eine Frenetkurve mit $\tau \equiv 0$, so liegt $\alpha(I)$ in einer Ebene.

Beweis.

(i) Aus $\kappa \equiv 0$ erhalten wir $\alpha'' \equiv 0$. Integrieren liefert $\alpha(s) = p + sv$ für $p, v \in \mathbb{R}^3$.
(ii) Nach Annahme und den Frenetgleichungen erhalten wir $B' \equiv 0$. Also gilt $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mit $\alpha' = T \perp B$ erhalten wir $\langle \alpha(s), b\rangle' = \langle \alpha'(s), b\rangle \equiv 0$. Somit ist $\langle \alpha(s), b\rangle$ konstant und wir schließen $\alpha(I) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, b\rangle = a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Theorem 3.14. *Seien $k \in C^1(I)$ mit $k > 0$ und $\omega \in C^0(I)$ gegeben. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ mit Krümmung $\kappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Bis auf eine orientierungserhaltende Euklidische Bewegung ist α eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei T, N, B eine C^1-Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

mit gegebenen Anfangswerten $T(s_0) = e_1$, $N(s_0) = e_2$ und $B(s_0) = e_3$. Diese existiert nach Picard-Lindelöf. Nach Lemma 3.10 bilden diese Vektoren für jedes s eine Orthonormalbasis. Setze $\alpha(s) := \int\limits_{s_0}^{s} T(\sigma)\, d\sigma$. Dann ist $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$, da $T \in C^1$ ist und ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Wir erhalten $\alpha' = T$ und $\alpha'' = T' = kN$. Damit folgt $k = \kappa$ und N ist die Hauptnormale an α. Wegen $k, N \in C^1$ erhalten wir $\alpha \in C^3$. Es gilt $\det(T, N, B) = 1$. Zunächst ist dies für $s = s_0$ klar und folgt dann allgemein aufgrund der Stetigkeit und dass die drei Vektoren stets eine Orthonormalbasis bilden. Somit ist B der Binormalenvektor an die Kurve α. Wegen $\tau = \langle N', B\rangle = \omega$ ist die Torsion wie angegeben.

Zur Eindeutigkeit: Nach einer Euklidischen Bewegung dürfen wir annehmen, dass eine beliebige Lösung β mit $\tilde{T}$, $\tilde{N}$ und $\tilde{B}$ in s_0

$$T = \tilde{T}, \quad N = \tilde{N}, \quad \text{und} \quad B = \tilde{B}$$

erfüllt. Aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt dann überall $(T, N, B) = \left(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\right)$. Nach Integration sehen wir, dass $\beta(s) - \alpha(s) = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ konstant ist. Somit stimmen α und β bis auf eine Euklidische Bewegung überein. $\square$

Definition 3.15. Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ regulär. Sei $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi \colon J \to \mathbb{R}^3$ eine richtungstreue Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Definiere

(i) die Krümmung $\kappa(t) := \tilde{\kappa}(\varphi^{-1}(t))$ von α.
(ii) das Frenetdreibein $T(t) := \tilde{T}(\varphi^{-1}(t))$, $N(t) := \tilde{N}(\varphi^{-1}(t))$, $B(t) := \tilde{B}(\varphi^{-1}(t))$ für $\kappa \neq 0$.
(iii) die Torsion $\tau(t) := \tilde{\tau} \circ \varphi^{-1}(t)$ für $\alpha \in C^3$ und $\kappa \neq 0$.

Lemma 3.16. *T, N, B, κ und τ sind wohldefiniert und es gilt für beliebige richtungstreue („+“) oder richtungsumkehrende („−“) Umparametrisierungen $\beta = \alpha \circ \varphi$ von α*

$$\begin{aligned} &T_\beta = \pm\, T_\alpha \circ \varphi, \quad N_\beta = N_\alpha \circ \varphi, \quad B_\beta = \pm B_\alpha \circ \varphi, \\ &\kappa_\beta = \kappa_\alpha \circ \varphi \quad \textit{und} \quad \tau_\beta = \tau_\alpha \circ \varphi. \end{aligned}$$

Beweis. Jede reguläre C^1-Kurve lässt sich nach Theorem 2.8 nach der Bogenlänge parametrisieren. Daher können wir die Definition 3.15 verwenden.

Seien nun $\varphi_i \colon J_i \to I$ zwei orientierungserhaltende Parametertransformationen, so dass $\alpha_i := \alpha \circ \varphi_i$ jeweils nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Dann sind $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ und $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ jeweils von der Form $s \mapsto s + s_0$, bei nicht orientierungserhaltenden Transformationen auch von der Form $s \mapsto \pm s + s_0$. Die Größen aus Definition 3.15 sind wohldefiniert, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} T(t) &\overset{\text{def.}}{=} (\alpha \circ \varphi_1)'|_{\varphi_1^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'|_{\varphi_1^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_2)'|_{\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}(t)} \cdot \underbrace{\left(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\right)'}_{=\pm 1}|_{\varphi_1^{-1}(t)} \quad \text{(Produktregel)} \\ &= \pm\, (\alpha \circ \varphi_2)'|_{\varphi_2^{-1}(t)} \end{aligned}$$

und analoge Rechnungen funktionieren auch für die anderen Größen.

Sei nun $\beta = \alpha \circ \varphi$ beliebig. Mit zwei orientierungserhaltenden Transformationen φ_α und φ_β können wir annehmen, dass $\beta \circ \varphi_\beta$ und $\alpha \circ \varphi_\alpha$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Ähnlich wie bei der obigen Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} T_\beta(t) &= (\beta \circ \varphi_\beta)'|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\ &= \left(\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta\right)'|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\ &= (\alpha \circ \varphi_\alpha)|_{\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\beta^{-1}(t)} \cdot \underbrace{\left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta\right)'}_{=\pm 1}|_{\varphi_\beta^{-1}(t)} \\ &= \pm\, T_\alpha|_{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

da $\beta \circ \varphi_\beta$ und $\alpha \circ \varphi_\alpha$ nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Wegen $\beta \circ \varphi_\beta = (\alpha \circ \varphi_\alpha) \circ (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_\beta)$ ist der Term in der letzten Klammer wieder von der Form $s \mapsto \pm s + s_0$.

Argumentation für die anderen Größen: Übung. $\square$

Lemma 3.17. *Sei $\alpha \in C^2\left(I,\mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Kurve. Dann gelten für Krümmung, Frenet-Dreibein (im Falle $\kappa \neq 0$) und Torsion (im Falle $\kappa \neq 0$ und $\alpha \in C^3$)*

$$\kappa = \frac{|\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}{|\alpha'|^2} = \frac{\sqrt{|\alpha''|^2 - \langle \alpha'', T\rangle^2}}{|\alpha'|^2},$$

$$T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad N = \frac{\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T}{|\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha'||\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|}$$

und

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha'|^2 \cdot |\alpha'' - \langle \alpha'', T\rangle T|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

Beweis. Sei φ eine richtungserhaltende Parametertransformation, so dass $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\varphi \circ \varphi^{-1}(t)\right)' = \varphi'|_{\varphi^{-1}(t)} \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(t), \\ \varphi'(s) &= \frac{1}{(\varphi^{-1})'(\varphi(s))}, \\ 1 &= |\tilde{\alpha}'(s)| = |(\alpha \circ \varphi)'(s)| = |\alpha'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s), \\ |\alpha'(t)| &= \left(\varphi^{-1}\right)'(t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{\left(\tilde{\alpha} \circ \varphi^{-1}\right)'(t)}{\left(\varphi^{-1}\right)'(t)} = \tilde{\alpha}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) = T(t).$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) &= \frac{\left(\tilde{T} \circ \varphi^{-1}\right)'(t)}{\left(\varphi^{-1}\right)'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\left(\frac{d}{dt}\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\right) \\ &= \frac{\alpha''(t)}{|\alpha'(t)|^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\left(|\alpha'(t)|^2\right)^{-3/2} \cdot 2 \cdot \langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle \\ &= \frac{\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)}{|\alpha'(t)|^2}. \end{aligned}$$

Die Frenetgleichungen liefern, dass

$$\tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) = \tilde{\kappa}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot \tilde{N}\left(\varphi^{-1}(t)\right) = \kappa(t)N(t)$$

gilt und somit erhalten wir aus der Länge des Vektors

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\sqrt{|\alpha''(t)|^2 - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle^2}}{|\alpha'(t)|^2}$$

und

$$N(t) = \frac{\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)}{|\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}.$$

Wegen $0 = \alpha'(t) \times \alpha'(t)$ erhalten wir direkt aus der Definition des Binormalenvektors

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha''(t) - \langle \alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}.$$

Nach Definition der Torsion erhalten wir

$$\tau(t) = \left\langle \tilde{N}'(\varphi^{-1}(t)), \tilde{B}(\varphi^{-1}(t))\right\rangle = \left\langle \frac{\left(\tilde{N} \circ \varphi^{-1}\right)(t)}{(\varphi^{-1})'(t)}, \tilde{T}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \times \tilde{N}\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right\rangle.$$

Aus $T(t) = \tilde{T}\left(\varphi^{-1}(t)\right)$ folgt mit der Kettenregel und den Frenetformeln

$$T'(t) = \tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \tilde{T}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) \cdot |\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|\kappa(t)N(t).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{1}{|\alpha'(t)|}\left\langle \frac{d}{dt}\frac{\alpha''(t) - \langle\alpha''(t), T(t)\rangle T(t)}{|\alpha''(t) - \langle\alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|}, T(t) \times N(t)\right\rangle \\ &= \frac{\langle\alpha'''(t), T(t) \times N(t)\rangle}{|\alpha'(t)| \cdot |\alpha''(t) - \langle\alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|} \\ &= \frac{\langle\alpha''', \alpha' \times \alpha''\rangle}{|\alpha'(t)|^2 \cdot |\alpha''(t) - \langle\alpha''(t), T(t)\rangle T(t)|^2}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus $\langle a \times b, c\rangle = \det(a, b, c)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und

$$|a \times b|^2 = |a|^2 \cdot \left|b - \left\langle b, \tfrac{a}{|a|}\right\rangle \tfrac{a}{|a|}\right|^2,$$

ebenfalls für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ (Übung). $\square$

Lemma 3.18. *Sei $\alpha \in C^2\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ regulär und $F(x) := Sx + a$ eine Euklidische Bewegung mit $S \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\tilde{\alpha} := F \circ \alpha$ ebenfalls regulär und es gilt*

(i) $\tilde{\kappa} = \kappa$,
(ii) $\tilde{T} = ST$, $\tilde{N} = SN$, $\tilde{B} = \det S \cdot SB$,
(iii) $\tilde{\tau} = \det S \cdot \tau$,

wobei α für Aussagen über N und τ sogar eine C^3-Frenetkurve sei.

Beweis. Es genügt, das Lemma für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven zu zeigen. Sei also α ohne Einschränkung nach der Bogenlänge parametrisiert. Es gilt

$$(F \circ \alpha)' = S\alpha', \quad \text{und} \quad (F \circ \alpha)'' = S\alpha''.$$

Mit $S \in O(3)$ und $\kappa = |\alpha''|$ erhalten wir $\tilde{\kappa} = \kappa$ und $\tilde{T} = ST$. Somit ist $\tilde{\alpha}$ eine Frenetkurve, wenn α eine solche ist. Wir erhalten $\tilde{N} = SN$. Somit gilt $\tilde{B} = \pm SB$ und wegen $\det(T, N, B) = 1 \overset{!}{=} \det\left(\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\right)$ erhalten wir aus mit dem Determinantenmultiplikationssatz $\tilde{B} = \det S \cdot SB$. Schließlich folgt nach Definition $\tilde{\tau} = \left\langle \tilde{N}', \tilde{B}\right\rangle = \det S\langle SN', SB\rangle = \det S \cdot \tau$. $\square$

Beispiel 3.19 (Lokale Graphendarstellung einer Kurve)**.** Sei $\beta \in C^3\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ eine Frenetkurve, ohne Einschränkung $0 \in I$. Nach einer orientierungserhaltenden Isometrie des $\mathbb{R}^3$ dürfen wir $T(0) = e_1$, $N(0) = e_2$ und $B(0) = e_3$ sowie $\beta(0) = 0$ annehmen.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es ein $\delta > 0$ und eine Funktion $u\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2$ mit $u(0) = 0$, so dass $\alpha\colon x \mapsto (x, u(x))$ eine Umparametrisierung von β ist (Details: Übung). Es gilt

$$\alpha'(x) = (1, u'(x)), \quad \alpha''(x) = (0, u''(x)), \quad \alpha'''(x) = (0, u'''(x)).$$

Aus $T(x) = \frac{(1, u'(x))}{\sqrt{1 + |u'(x)|^2}}$ erhalten wir $u'(0) = 0$. Für die Krümmung erhalten wir

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{|u''|^2 - \frac{\langle u', u''\rangle^2}{1 + |u'|^2}}}{1 + |u'|^2} = \frac{\sqrt{\left(1 + |u'|^2\right)|u''|^2 - \langle u', u''\rangle^2}}{\left(1 + |u'|^2\right)^{3/2}}.$$

Im Punkt $x = 0$ erhalten wir $\kappa(0) = |u''(0)|$ und $e_2 = N(0) = \frac{\alpha''(0)}{|\alpha''(0)|} = \frac{(0,u''(0))}{\kappa(0)}$. Wir differenzieren die Formel für $\kappa(x)$ und erhalten

$$\kappa'(0) = \frac{\langle u''(0), u'''(0)\rangle}{\kappa(0)} = \left\langle (0, u'''(0))^T, e_2 \right\rangle = \left\langle u'''(0), (1,0)^T \right\rangle.$$

Als Torsion erhalten wir

$$\tau(0) = \frac{\det\left(e_1, \kappa(0)e_2, (0, u'''(0))^T\right)}{\kappa(0)^2} = \frac{\langle u'''(0), (0,1)\rangle}{\kappa(0)} = \frac{\left\langle (0, u'''(0))^T, e_3 \right\rangle}{\kappa(0)}.$$

Sei nun $\alpha \in C^3$ eine Frenetkurve. Aus der Taylordarstellung erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\alpha(x) = (x, u(x)) = xe_1 + \frac{1}{2}x^2\kappa(0)e_2 + \frac{1}{6}x^3\left(\kappa'(0)e_2 + \tau(0)\kappa(0)e_3\right) + o\left(|x|^3\right).$$

3.3. **Längenvergleich und der Satz von Fenchel.** Die folgenden beiden Theoreme sind für den Beweis der Fenchelschen Ungleichung nötig.

Definition 3.20. Ein Großkreis ist der Schnitt einer Ebene durch den Ursprung mit $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Beachte: Durch zwei verschiedene Punkte auf $\mathbb{S}^2$ gibt es genau einen Großkreis.

Theorem 3.21. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ stückweise von der Klasse C^1. Dann gilt*

$$L(\gamma) \ge \sphericalangle(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Bei Gleichheit durchläuft γ einen Großkreisbogen von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ohne Richtungsumkehr.

Beweis. In Polarkoordinaten erhalten wir die Sphäre $\mathbb{S}^2$ als

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \equiv X(\vartheta, \varphi)\colon \vartheta \in [0,\pi], \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto r \cdot X(\vartheta, \varphi)$ für $r > 0$, $0 < \vartheta < \pi$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, gibt es zu jeder C^1-Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine C^1-Kurve $w : I \to (0,\pi) \times \mathbb{R}$ mit $X \circ w = \alpha$, falls $(0,0,\pm 1) \notin \operatorname{im} \alpha$ ist: Beachte dazu dass r, der Abstand zum Ursprung, nicht auftaucht, da dieser stets konstant gleich eins ist. Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen existiert solch eine Abbildung w zunächst nur lokal. Da aber w bis auf Addition von Vielfachen von 2π in der zweiten Komponente wohldefiniert ist, können wir dies korrigieren und erhalten die gesuchte Funktion. Schreibe $w(x) \equiv (\vartheta(x), \varphi(x))$.

Sei ohne Einschränkung $\gamma(a) = (0,0,-1)$, der Südpol. Gelte $\gamma(b) = X(\vartheta_b, \varphi_b)$ mit $\vartheta_b < \pi$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $3\varepsilon < \pi - \vartheta_b$. Da γ jede horizontale Ebene zwischen $\{x^3 = -1\}$ und $\{x^3 = \gamma^3(b)\}$ schneidet, und deren Schnitte mit $\mathbb{S}^2$ zu konstantem ϑ in der Parametrisierung gehören, existieren

$$a_\varepsilon := \sup\{t \in [a,b]\colon \vartheta(t) \ge \pi - \varepsilon\}$$

sowie

$$b_\varepsilon := \inf\{t \in [a,b]\colon \vartheta(t) \le \vartheta_b + \varepsilon\}.$$

Anschaulich ist dann $\gamma_\varepsilon := \gamma|_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]}$ eine stückweise C^1-Kurve, die eine Ebene etwas oberhalb von $\gamma(a)$ mit einer Ebene etwas unterhalb von $\gamma(b)$ verbindet. Da $(0,0,\pm 1) \notin \operatorname{im} \gamma_\varepsilon$ gilt, gibt es stückweise C^1-Funktionen $\vartheta_\varepsilon\colon [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \to [\vartheta_b + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ und $\varphi_\varepsilon\colon [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \to \mathbb{R}$ mit $\gamma_\varepsilon(t) = X(\vartheta_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t))$ für alle $t \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$. $\varepsilon > 0$ ist nötig, weil die Parametrisierung auf der x^3-Achse kein Diffeomorphismus ist und somit die Regularität von ϑ_ε und φ_ε nicht klar wäre. Setze

$$\begin{aligned}\beta_\varepsilon\colon [a_\varepsilon, b_\varepsilon] &\to \mathbb{S}^2,\\ \beta_\varepsilon &:= X(\vartheta_\varepsilon(t), 0).\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma_\varepsilon) &= \int\limits_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left|\frac{d}{dt}X(\vartheta_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t))\right| dt = \int\limits_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left|\frac{\partial X}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta_\varepsilon(t)}{dt} + \frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{d\varphi_\varepsilon(t)}{dt}\right| dt \\ &\geq \int\limits_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left|\frac{\partial X}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta_\varepsilon(t)}{dt}\right| dt = \int\limits_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} \left|\frac{d}{dt}X(\vartheta_\varepsilon(t), 0)\right| dt = L(\beta_\varepsilon), \end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial X}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cdot\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial X}{\partial\varphi}$$

für alle $(\vartheta, \varphi) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ gilt. Wir haben also zwei Kurven, γ_ε und β_ε, die beide die Kreise $\operatorname{im} X(\pi - \varepsilon, \cdot)$ und $\operatorname{im} X(\vartheta_\beta + \varepsilon, \cdot)$ miteinander verbinden. Die obige Abschätzung liefert, dass $L(\gamma_\varepsilon) \geq L(\beta_\varepsilon)$ mit Gleichheit genau dann, wenn γ_ε bereits auf einem Großkreis durch den Südpol $(0, 0, -1)$ verläuft.

Sei $[a, b] \ni t \mapsto \vartheta(t) \in [0, \pi]$ monoton, ohne Einschränkung wachsend. Dann gilt

$$L(X \circ \vartheta) = \int_a^b \left|\frac{\partial X}{\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\right| dt = \int_a^b \frac{d\vartheta}{dt}\, dt = \vartheta(b) - \vartheta(a).$$

Andererseits ist für beliebiges $\varphi_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sphericalangle(X(\vartheta(b), \varphi_0), X(\vartheta(a), \varphi_0)) &= \arccos\langle X(\vartheta(b), \varphi_0), X(\vartheta(a), \varphi_0)\rangle \\ &= \arccos(\sin\vartheta(a)\cdot\sin\vartheta(b) + \cos\vartheta(a)\cdot\cos\vartheta(b)) \\ &= \arccos(\cos(\vartheta(b) - \vartheta(a))) \\ &= |\vartheta(b) - \vartheta(a)| = \vartheta(b) - \vartheta(a). \end{aligned}$$

Auf β_ε angewandt erhalten wir

$$L(\gamma_\varepsilon) \geq L(\beta_\varepsilon) \geq (\pi - \varepsilon) - (\vartheta_b + \varepsilon) = \sphericalangle(\gamma_\varepsilon(a_\varepsilon), \gamma_\varepsilon(b_\varepsilon))$$

mit Gleichheit genau dann, wenn γ_ε mit monotonem ϑ_ε auf einem Großkreis durch den Südpol verläuft. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. Beachte dabei, dass Gleichheit nur für $a_\varepsilon \to a$ und $b_\varepsilon \to b$ für $\varepsilon \searrow 0$ gelten kann oder falls γ auf $[a, a + \zeta]$ oder $[b - \zeta, b]$ für ein $\zeta > 0$ konstant ist. □

Lemma 3.22. *Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene stückweise C^1-Kurve mit $L(\gamma) \leq 2\pi$. Dann liegt γ komplett in einer Halbspäre, d. h. in einer Menge der Form $\{x \in \mathbb{S}^2 : \langle x, e\rangle \geq 0\}$ für ein $e \in \mathbb{S}^2$. Ist $L(\gamma) < 2\pi$, so gibt es ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(t), e\rangle > 0$ für alle $t \in [a, b]$, γ liegt also sogar im Inneren der Halbsphäre.*

Beweis. Wähle $\tau \in [a, b]$ mit $L(\gamma|_{[a,\tau]}) = L(\gamma|_{[\tau,b]}) = L(\gamma)/2$. Setze $p := \gamma(a)$ und $q := \gamma(\tau)$. Ist $\sphericalangle(p, q) = \pi$, so gilt $L(\gamma) \geq 2\pi$, also nach Voraussetzung $L(\gamma) = 2\pi$. Nach Theorem 3.21 liegen daher $\gamma|_{[a,\tau]}$ und $\gamma|_{[\tau,b]}$ auf Großkreisen. Als e kann man eine der Normalen wählen, die zu den Ebenen gehören, auf denen die Großkreise liegen.

Sei daher ab jetzt $\sphericalangle(p, q) < \pi$. Sei ohne Einschränkung $p \neq q$. Sei e der Mittelpunkt des kürzeren Großkreisbogens von p nach q, $e = \frac{p+q}{|p+q|}$. Nach einer Drehung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $e = e_3$ gilt. Dann ist $p = \big(p^1, p^2, p^3\big)$ mit $p^3 > 0$ und $q = \big(q^1, q^2, q^3\big) = \big(-p^1, -p^2, p^3\big)$.

Nun gilt entweder $\langle \gamma(t), e_3\rangle > 0$ für alle $t \in [a, \tau]$ oder es gibt ein $t_0 \in (a, \tau)$ mit $\langle \gamma(t_0), e_3\rangle = 0$. Im zweiten Fall definieren wir $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $S(x^1, x^2, x^3) := (x^1, x^2, -x^3)$ und

$$\tilde\gamma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [a, t_0], \\ S\gamma(t) & \text{für } t \in [t_0, \tau]. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde\gamma$ eine stückweise C^1-Kurve mit $\tilde\gamma(a) = p$ und $\tilde\gamma(\tau) = S(q) = -p$. Nach Theorem 3.21 erhalten wir

$$L(\gamma) = 2L(\gamma|_{[a,\tau]}) = 2L(\tilde\gamma) \geq 2\pi.$$

Wir erhalten $L(\gamma) = 2\pi$ und nochmals nach Theorem 3.21 durchläuft $\tilde\gamma$ einen halben Großkreis von p nach $S(q) = -p$. Also ist $\langle\tilde\gamma(t), e_3\rangle \geq 0$ für $t \in [a, t_0]$ und $\langle\tilde\gamma(t), e_3\rangle \leq 0$ für $t \in [t_0, b]$. Also gilt $\langle\gamma(t), e_3\rangle \geq 0$ für alle $t \in [a, \tau]$. Eine analoge Aussage erhalten wir für $t \in [\tau, b]$. Insgesamt folgt also $\langle\gamma(t), e_3\rangle \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Falls nicht $\langle\gamma(t), e_3\rangle > 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, so folgt aus den obigen Überlegungen, dass Gleichheit maximal in zwei Punkten gilt und dass in diesem Fall im γ in der Nähe dieser Punkte aus jeweils zwei Bögen auf unterschiedlichen Großkreisen besteht. Sind diese beiden Punkte antipodal, so können wir nach Umparametrisierung (über $[a, b]$ hinaus) wie im Fall $\sphericalangle(p, q) = \pi$ argumentieren. Sonst ersetzen wir e durch einen geeigneten Vektor in der Nähe. □

Theorem 3.23 (Fenchel)**.** *Sei $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2-geschlossen. Dann gilt*

$$\int\limits_0^L \kappa(s)\, ds \geq 2\pi$$

mit Gleichheit genau dann wenn α eine ebene einfach geschlossene Kurve ist, die ein konvexes Gebiet berandet. (Die Aussage, dass α ein konvexes Gebiet berandet, werden wir hier nicht beweisen.)

Der Integralausdruck heißt Totalkrümmung der Kurve α.

Eine Kurve heißt einfach geschlossen, wenn α geschlossen ist und $\alpha|_{[0,L)}$ eine injektive Abbildung ist.

Beweis. Sei $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-geschlossene Kurve mit $|\alpha'| \equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, L] &\to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ s &\mapsto \alpha'(s) \end{aligned}$$

eine C^1-geschlossene Kurve. Sei $e \in \mathbb{S}^2$. Es gilt

$$\int\limits_0^L \langle\gamma(s), e\rangle\, ds = \int\limits_0^L \frac{d}{ds}\langle\alpha(s), e\rangle\, ds = \langle\alpha(L), e\rangle - \langle\alpha(0), e\rangle = 0.$$

Somit gibt es keinen Vektor $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(s), e\rangle > 0$ für alle $s \in [0, L]$. Nach Lemma 3.22 gilt daher $L(\gamma) \geq 2\pi$. Wir erhalten also für die Krümmung κ der Kurve α

$$\int\limits_0^L \kappa(s)\, ds = \int\limits_0^L |\alpha''(s)|\, ds = \int\limits_0^L |\gamma'(s)|\, ds = L(\gamma) \geq 2\pi.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Lediglich die Aussagen für den Fall, dass die Totalkrümmung gleich 2π ist, sind noch zu zeigen. Nach Lemma 3.22 gibt es dann ein $e \in \mathbb{S}^2$ mit $\langle\gamma(s), e\rangle \geq 0$ für alle

$s \in [0,L]$. Aus $\int\limits_0^L \langle \gamma(s), e\rangle\, ds = 0$ folgt daher $\langle \gamma(s), e\rangle \equiv 0$ für alle $s \in [0,L]$. Also ist $\frac{d}{ds}\langle \alpha(s), e\rangle = \langle \gamma(s), e\rangle = 0$ und $\operatorname{im}\alpha$ liegt in einer Ebene $\{x\colon \langle x, e\rangle = c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen nun noch, dass $\alpha|_{[0,L)}$ injektiv ist. Falls nicht, so gibt es ohne Einschränkung ein $\tau \in (0,L)$ mit $\alpha(0) = \alpha(\tau)$. Wir behaupten, dass $L(\gamma|_{[0,\tau]}) > \pi$ gilt. Wäre dem nicht so, so könnten wir ein $\sigma \in (0,\tau)$ mit $L(\gamma|_{[0,\sigma]}) = L(\gamma|_{[\sigma,\tau]}) \le \pi/2$ wählen. Wir setzen $e := \gamma(\sigma)$ und erhalten nach Theorem 3.21 $\langle \gamma(s), e\rangle \ge 0$ für alle $s \in [0,\tau]$. Andererseits ist

$$\int\limits_0^\tau \langle \gamma(s), e\rangle\, ds = \langle \alpha(\tau), e\rangle - \langle \alpha(0), e\rangle = 0.$$

Somit ist $\langle \gamma(s), e\rangle \equiv 0$. Dies liefert für $s = \sigma$ einen Widerspruch. Wir schließen, dass

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[0,\tau]}) + L(\gamma|_{[\tau,L]}) > \pi + \pi = 2\pi$$

ist. Dies widerspricht der Annahme $L(\gamma) = 2\pi$. Daher ist $\alpha|_{[0,L)}$ wie behauptet injektiv. □

In [2] verallgemeinert J. Milnor diesen Satz und zeigt, dass eine C^2-geschlossene nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mit $\int\limits_a^b \kappa(s)\, ds \le 4\pi$ „unverknotet" ist.

4. Flächen

4.1. **Induzierte Metriken.** Wir betrachten Flächen zunächst als Abbildungen. Alternativ kann man Flächen auch als Teilmengen betrachten.

Definition 4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $X \in C^k\left(\Omega, \mathbb{R}^l\right)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$, heißt eine (regulär parametrisierte) n-dimensionale Fläche oder n-dimensionale Immersion der Klasse C^k, falls $\operatorname{rang} DX(x) = n$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Wir schreiben auch dX für DX. Die Bedingung an den Rang heißt, dass die Vektoren

$$\frac{\partial X}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(x)$$

für alle $x \in \Omega$ linear unabhängig sind.

Ist $l = n+1$, so heißt $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ Hyperfläche.

Ist $n = 2$, so heißt $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^l$ Fläche.

Der Unterraum

$$\operatorname{im} DX(x) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial X}{\partial x^n}(x) \right\rangle$$

heißt Tangentialraum von X im Punkt x. $X(x) + \operatorname{im} DX(x)$ heißt affiner Tangentialraum.

Betrachte ab jetzt nur noch Hyperflächen, also Abbildungen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine stetige Funktion $\nu\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Einheitsnormale an die Hyperfläche längs X, falls $|\nu(x)| = 1$ und $\nu(x) \perp \operatorname{im} DX(x)$ für alle $x \in \Omega$ gelten.

Betrachte ab jetzt für den Rest des Kapitels lediglich Flächen in $\mathbb{R}^3$. Ist Ω zusammenhängend, so gibt es genau zwei Einheitsnormalen längs X, nämlich

$$\nu^\pm\colon \Omega \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \nu^\pm(x) := \pm \frac{X_1(x) \times X_2(x)}{|X_1(x) \times X_2(x)|},$$

wobei wir die Abkürzungen $X_i(x) := \frac{\partial X}{\partial x^i}(x)$ verwendet haben.

Die Formel für die Normale gilt speziell für Flächen im $\mathbb{R}^3$, da wir das Kreuzprodukt „$\times$" benutzt haben. Alle weiteren Resultate dieses Kapitels lassen sich leicht auf n-dimensionale Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen. Eine Übertragung auf $l > n+1$ ist komplizierter; z. B. ist dann eine Einheitsnormale nicht mehr bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Beispiel 4.2 (Graphen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Sei $u \in C^k$. Dann ist der Graph von u, $\operatorname{graph} u$, das Bild der parametrisierten Fläche

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R}^3, \\ X(x) &= (x, u(x))^T \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt $DX(x) = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$. Die Bedingung $\operatorname{rang} DX(x) = 2$ ist offensichtlicherweise für jede C^1-Funktion u erfüllt. Eine Normale ist durch $\nu(x) = \frac{(Du,-1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ gegeben. Bei Graphen wollen wir stets die „untere" Normale, d. h. die Normale mit $\langle \nu, e_3\rangle < 0$, verwenden. Beachte: Dies ist genau die umgekehrte Wahl des Vorzeichens verglichen mit ebenen graphischen Kurven. Die Unterschiede sind historisch bedingt.

Beispiel 4.3 (Rotationsflächen)**.** Sei $\alpha\colon (a,b) \to \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = 0 \text{ und } x^1 > 0\right\}$ eine Kurve in der „rechten" Halbebene der $x^1 - x^3$-Ebene. Schreibe

$$\alpha(t) = (r(t), 0, h(t)).$$

Durch Rotation um die x^3-Achse erhalten wir eine Fläche $X\colon (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$X(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Übung: Überprüfe, dass dies eine Fläche ist und bestimme eine Normale.

Definition 4.4 (Erste Fundamentalform)**.** Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Fläche ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei offen). Dann heißt die Bilinearform

$$g(x)\langle u, v\rangle := \langle DX(x)\langle v\rangle, DX(x)\langle u\rangle\rangle$$

für $x \in \Omega$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ die erste Fundamentalform von X. Die Schreibweise $u \mapsto DX(x)\langle u\rangle$ soll auf die Linearität der Abbildung hinweisen.

$$g \in C^0\left(\Omega, L^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)\right)$$

ist eine stetige Abbildung von Ω in den Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bezüglich der Standardbasis ist g durch die Koeffizienten(funktionen)

$$\begin{aligned} g_{ij}\colon \Omega &\to \mathbb{R}, \\ g_{ij}(x) &:= \langle X_i(x), X_j(x)\rangle \equiv \langle dX(x)\langle e_i\rangle, dX(x)\langle e_j\rangle\rangle \end{aligned}$$

für $1 \le i, j \le 2$ gegeben. Die zugehörige Matrix $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sei $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ist durch $G(x) := dX(x)^T dX(X)$ gegeben.

Bemerkung 4.5.

(i) Für jedes $x \in \Omega$ ist $g(x)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

a) $g(x)$ ist symmetrisch:

$$g(x)\langle u, v\rangle = \langle dX(x)\langle u\rangle, dX(x)\langle v\rangle\rangle = \langle dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle u\rangle\rangle = g(x)\langle v, u\rangle.$$

Daher ist auch die Matrix $G = (g_{ij})$ symmetrisch: $g_{ij} = g_{ji}$ für alle $1 \le i, j \le 2$.

b) $g(x)$ ist bilinear: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, u \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x)\langle \lambda v_1 + \mu v_2, u\rangle &= \langle dX(x)\langle \lambda v_1 + \mu v_2\rangle, dX(x)\langle u\rangle\rangle \\ &= \langle \lambda dX(x)\langle v_1\rangle + \mu dX(x)\langle v_2\rangle, dX(x)\langle u\rangle\rangle \\ &= \lambda\langle dX(x)\langle v_1\rangle, dX(x)\langle u\rangle\rangle + \mu\langle dX(x)\langle v_2\rangle, dX(x)\langle u\rangle\rangle \\ &= \lambda g(x)\langle v_1, u\rangle + \mu g(x)\langle v_2, u\rangle. \end{aligned}$$

Da $g(x)$ symmetrisch ist, ist es auch in der zweiten Komponente linear.

c) $g(x)$ ist positiv definit: Sei $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$g(x)\langle v, v\rangle = \langle dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle v\rangle\rangle = |dX(x)\langle v\rangle|^2 \geq 0.$$

Im Falle von Gleichheit folgt aus der Dimensionsformel $\dim\ker dX(x) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim\operatorname{im} dX(x) = 0$. Also ist $dX(x)$ injektiv und es folgt $v = 0$.

(ii) Die Abbildung $dX(x)\colon \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to (\operatorname{im} dX(x), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ ist eine Isometrie zwischen Euklidischen Vektorräumen. Es gilt nämlich

$$|dX(x)\langle v\rangle|^2_{\mathbb{R}^3} = g(x)\langle v, v\rangle = \|v\|^2_{g(x)}.$$

(iii) Seien $u, v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Dann erfüllt der Winkel zwischen $dX(x)\langle u\rangle$ und $dX(x)\langle v\rangle$ aufgrund der Isometrieeigenschaft

$$\begin{aligned} \sphericalangle(dX(x)\langle u\rangle, dX(x)\langle v\rangle) &= \arccos \frac{\langle dX(x)\langle u\rangle, dX(x)\langle v\rangle\rangle}{|dX(x)\langle u\rangle| \cdot |dX(x)\langle v\rangle|} \\ &= \arccos \frac{g(x)\langle u, v\rangle}{\|u\|_{g(x)} \cdot \|v\|_{g(x)}} =: \sphericalangle_{g(x)}(u, v). \end{aligned}$$

(iv) Ein Skalarprodukt, das von $x \in \Omega$ abhängt, heißt Riemannsche Metrik auf Ω. Ist klar, an welchem $x \in \Omega$ das Skalarprodukt $g(x)\langle\cdot,\cdot\rangle$ ausgewertet wird, schreibt man häufig $g(u, v)$ statt $g(x)\langle u, v\rangle$.

(v) Statt von der ersten Fundamentalform sprechen wir auch von der (induzierten) Metrik, die aber etwas anderes als die Metrik $d(\cdot,\cdot)$ eines metrischen Raumes ist.

Lemma 4.6. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine (reguläre) Fläche und $\gamma \in C^1(I, \Omega)$ eine Kurve. Dann gilt*

$$L(X \circ \gamma) = \int\limits_I \sqrt{g(\gamma(t))\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\, dt = \int\limits_I \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))}\, dt.$$

Beweis. Da dX eine Isometrie ist, folgt

$$L(X\circ\gamma) = \int\limits_I |(X\circ\gamma)'(t)|\, dt = \int\limits_I |dX(\gamma(t))\langle\gamma'(t)\rangle|\, dt = \int\limits_I \sqrt{g(\gamma(t))\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\, dt.$$

□

Beispiel 4.7 (Erste Fundamentalform von Graphen)**.** Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, ein Graph. Dann erhalten wir $X_i(x) = (e_i, u_i(x))$ und $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + u_i(x)u_j(x)$, also

$$(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} = \begin{pmatrix} 1+u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & 1+u_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ist $\gamma\colon I \to \Omega$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, so folgt

$$L(X\circ\gamma) = \int\limits_I \sqrt{(1+u_1^2)(\xi')^2 + 2u_1u_2\xi'\eta' + (1+u_2^2)(\eta')^2}\, dt.$$

Bemerkung 4.8. Seien $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beliebig. Dann hat das von ihnen aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= |u| \cdot \underbrace{\left| v - \left\langle v, \frac{u}{|u|} \right\rangle \frac{u}{|u|} \right|}_{=\text{Höhe}} \\ &= \sqrt{\left\langle v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u, v|u| - \langle v, u\rangle \frac{1}{|u|} u \right\rangle} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - 2\langle u, v\rangle^2 + \langle u, v\rangle^2} \\ &= \sqrt{|v|^2|u|^2 - \langle u, v\rangle^2}. \end{aligned}$$

Damit das Flächenelement nach Integration für affin lineare Funktionen auf rechteckigen Gebieten den für Parallelogramme bekannten Wert ergibt, setzen wir für $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$

$$\begin{aligned} dA := A(X_1, X_2)\, dx^1 dx^2 &= \sqrt{|X_1|^2|X_2|^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}\, dx \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der damit definierte Flächeninhalt für injektive Immersionen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit dem zweidimensionalen Hausdorffmaß $\mathcal{H}^2(\operatorname{im} X)$ übereinstimmt.

Definition 4.9. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion. Dann definieren wir den Flächeninhalt von X als

$$A(X) := \int\limits_\Omega \sqrt{\det(g_{ij})} =: A_g(\Omega).$$

Beispiel 4.10. Sei X mit $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega$, ein Graph. Dann gilt $\det(g_{ij}) = \det(\delta_{ij} + u_i u_j) = 1 + |Du|^2 = 1 + u_1^2 + u_2^2$. Somit erhalten wir

$$A(X) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2} = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}.$$

Definition 4.11. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Fläche. Dann heißt $\hat{X}\colon \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ Umparametrisierung von X, falls es einen Diffeomorphismus $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ mit

$$\hat{X} = X \circ \varphi$$

gibt.

Der Diffeomorphismus φ ist i. a. nicht eindeutig bestimmt, wenn X nicht bereits injektiv ist. Z. B. stimmen $X(t, \vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, t)$, $(t, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, und $X \circ \varphi_k$ mit $\varphi_k(t, \vartheta) := (t, \vartheta + 2\pi k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ überein.

Auf der Menge der parametrisierten C^1-Flächen ist die Relation

$$X \sim \hat{X} \quad :\Longleftrightarrow \hat{X} \text{ ist eine Umparametrisierung von } X$$

eine Äquivalenzrelation.

Für C^k-Flächen und C^k-Diffeomorphismen verwenden wir analoge Definitionen.

Theorem 4.12 (Transformationsverhalten der Metrik)**.** *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Fläche.*

(i) Sei $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, also $\hat{X} := X \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von X. Dann gilt für die zugehörigen Metriken

$$\hat{g}(x)\langle v, w\rangle = g(\varphi(x))\langle d\varphi\langle v\rangle, d\varphi\langle w\rangle\rangle$$

oder, jeweils äquivalent dazu, mit $G = (g_{ij})$ *und* $\varphi_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}$

$$\hat{G} = (d\varphi)^T (G \circ \varphi)(d\varphi) \quad \textit{oder} \quad \hat{g}_{ij}(x) = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \circ \varphi(x) \varphi_i^k(x) \varphi_j^l(x).$$

(ii) Ist $B \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *eine Euklidische Bewegung und* $\hat{X} = B \circ X$*, so gilt* $\hat{g} = g$.

Beweis.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{g}(v,w) &= \langle d(X \circ \varphi)\langle v\rangle, d(X \circ \varphi)\langle w\rangle\rangle = \langle (dX)|_\varphi d\varphi\langle v\rangle, (dX)|_\varphi d\varphi\langle w\rangle\rangle \\ &= g|_\varphi \langle (d\varphi)\langle v\rangle, (d\varphi)\langle w\rangle\rangle.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\hat{g}_{ij} = \hat{g}(e_i, e_j) = g|_\varphi \langle (d\varphi)\langle e_i\rangle, (d\varphi)\langle e_j\rangle\rangle = g|_\varphi \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl}|_\varphi \varphi_i^k \varphi_j^k.$$

Direkt können wir die Formel für die Metrik $\hat{G}$ auch wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned}\hat{G} &= (d(X \circ \varphi))^T d(X \circ \varphi) = (dX|_\varphi d\varphi)^T dX|_\varphi d\varphi \\ &= d\varphi^T \left((dX|_\varphi)^T (dX|_\varphi)\right) d\varphi = d\varphi^T ((dX)^T (dX))|_\varphi d\varphi = d\varphi^T G|_\varphi d\varphi.\end{aligned}$$

(ii) Wir stellen B in der Form $Bx = Sx + a$ mit $S \in O(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$ dar. Dann gilt $dB(x)\langle y\rangle = Sy$. Also folgt

$$\begin{aligned}\hat{g}(x)\langle v, w\rangle &= \langle d(B \circ X)(x)\langle v\rangle, d(B \circ X)(x)\langle w\rangle\rangle \\ &= \langle SdX(x)\langle v\rangle, SdX(X)\langle w\rangle\rangle = \langle dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle w\rangle\rangle \\ &= g(x)\langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

□

Nun wollen wir herleiten, dass Bogenlänge, Winkel und Flächeninhalt von der Wahl der speziellen Parametrisierung unabhängig sind. Beachte, dass wir dazu lediglich das Transformationsverhalten der Metrik und nicht die Abbildung X benutzen werden.

Korollar 4.13. *Sei* $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ *eine reguläre Fläche. Sei* $\varphi \in C^1\left(\hat{\Omega}, \Omega\right)$ *ein Diffeomorphismus und* $\hat{X} = X \circ \varphi$ *eine Umparametrisierung von* X*. Wir bezeichnen die induzierten Metriken von* X *und* $\hat{X}$ *mit* g *bzw.* $\hat{g}$*. Dann gelten die folgenden Beziehungen für Länge, Winkel und Flächeninhalt:*

(i) $L_g(\varphi \circ \gamma) = L_{\hat{g}}(\gamma)$ *für alle* C^1*-Kurven* $\gamma \colon I \to \hat{\Omega}$.

(ii) $\sphericalangle_{g(\varphi(x))}(d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\hat{g}(x)}(v, w)$ *für alle* $x \in \hat{\Omega}$ *und alle* $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(iii) $A_g(\varphi(E)) = A_{\hat{g}}(E)$ *für alle messbaren Teilmengen* $E \subset \hat{\Omega}$.

Beweis. Nach Theorem 4.12 gilt $g(\varphi(x))\langle d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle\rangle = \hat{g}\langle v, w\rangle$. Somit ist

$$\|d\varphi(x)\langle v\rangle\|_{g(\varphi(x))} = \|v\|_{\hat{g}(x)} \quad \text{und} \quad \sphericalangle_{g(\varphi(x))}(d\varphi(x)\langle v\rangle, d\varphi(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\hat{g}(x)}(v, w).$$

Nach Kettenregel gilt $(\varphi \circ \gamma)'(t) = d\varphi|_{\gamma(t)}\gamma'(t)$. Somit erhalten wir

$$L_g(\varphi \circ \gamma) = \int_I \|d\varphi|_{\gamma(t)}\gamma'(t)\|_{g(\varphi(\gamma(t)))}\, dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\hat{g}(\gamma(t))}\, dt = L_{\hat{g}}(\gamma).$$

Schließlich erhalten wir aus dem Transformationsverhalten der Metrik, der Transformationsformel für Integrale und der Determinantenmultiplikationsformel

$$A_g(\varphi(E)) = \int\limits_{\varphi(E)} \sqrt{\det G} = \int\limits_E \sqrt{\det G \circ \varphi} \cdot |\det d\varphi|$$
$$= \int\limits_E \sqrt{\det((d\varphi)^T (G \circ \varphi) d\varphi)} = A_{\hat{g}}(E). \qquad \square$$

Es gibt folgende spezielle Umparametrisierungen:

Definition 4.14. Eine Fläche $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ heißt

(i) längentreu parametrisiert, falls
$$L(X \circ \gamma) = L_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$$
für alle Kurven $\gamma\colon I \to \Omega$ gilt.

(ii) flächentreu parametrisiert, falls
$$A(X|_V) = A_{\mathbb{R}^2}(V) = |V|$$
für alle messbaren Mengen $V \subset \Omega$ gilt.

(iii) winkeltreu oder konform parametrisiert, falls
$$\sphericalangle(dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle w\rangle) = \sphericalangle_{\mathbb{R}^2}(v, w)$$
für alle $x \in \Omega$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt.

Bemerkung 4.15.

(i) Im allgemeinen gibt es zu einer Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ keine längentreue Umparametrisierung. Ein Gegenbeispiel ist jede Parametrisierung einer offenen Teilmenge von $\mathbb{S}^2$. Dies benötigt jedoch etwas Theorie (Theorema egregium).

(ii) Konforme Parametrisierungen gibt es für Flächen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, im allgemeinen aber nicht für höherdimensionale Hyperflächen. Die Existenz einer solchen Parametrisierung erfordert jedoch Kenntnisse über partielle Differentialgleichungen.

(iii) Flächentreue Parametrisierungen kann man durch das Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen finden.

Lemma 4.16. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine Fäche mit Metrik $G = (g_{ij})_{1\le i,j\le 2}$. Dann gilt*

(i) X ist genau dann längentreu, wenn $G = (\delta_{ij})$ gilt.

(ii) X ist genau dann flächentreu, wenn $\det G = 1$ gilt.

(iii) X ist genau dann winkeltreu oder konform parametrisiert, wenn es eine Funktion $\lambda\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $G = \lambda^2(\delta_{ij})$ gibt.

(iv) Insbesondere ist also X genau dann längentreu, wenn X flächentreu und winkeltreu ist.

Beweis.

(i) „$\Longleftarrow$“: Gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$, so so erhalten wir aus Lemma 4.6 $L(X \circ \gamma) = L_g(\gamma) = L_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$.

„$\Longrightarrow$“: Sei X längentreu. Seien $x_0 \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Betrachte die Kurve $\gamma(t) = x_0 + tv$. Da X längentreu ist, erhalten wir

$$\sqrt{g(x_0)\langle v, v\rangle} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon \sqrt{g(x_0 + tv)\langle v, v\rangle}\, dt = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_g\left(\gamma|_{[0,\varepsilon]}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_{\mathbb{R}^2}\left(\gamma|_{[0,\varepsilon]}\right) = |v|.$$

Mit Hilfe der Polarisationsformel erhalten wir $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(ii) „$\Longleftarrow$“: Dies folgt direkt aus Definition 4.9, da $\det(g_{ij}) = 1$ gilt.
„$\Longrightarrow$“: Sei wiederum $x_0 \in \Omega$ beliebig und $B_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x - x_0| < \varepsilon\right\}$ der übliche Euklidische Ball. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{\det G(x_0)} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} \sqrt{\det G} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A\left(X|_{B_\varepsilon(x_0)}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A_{\mathbb{R}^2}(B_\varepsilon(x_0)) = 1.\end{aligned}$$

(iii) „$\Longleftarrow$“: Dies folgt nach Bemerkung 4.5 (iii), da sich die zusätzlichen Faktoren λ gerade kürzen.
„$\Longrightarrow$“: Wir benutzen nochmals Bemerkung 4.5 (iii) und erhalten

$$\begin{aligned}g_{12} &= g(e_1, e_2) = \|e_1\|_g \cdot \|e_2\|_g \cdot \cos \sphericalangle(dX\langle e_1\rangle, dX\langle e_2\rangle) \\ &= \|e_1\|_g \cdot \|e_2\|_g \cdot \cos \sphericalangle_{\mathbb{R}^2}(e_1, e_2) = 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}g_{11} - g_{22} &= g(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = \|e_1 + e_2\|_g \cdot \|e_1 - e_2\|_g \cdot \cos \sphericalangle_g(e_1 + e_2, e_1 - e_2) \\ &= \|e_1 + e_2\|_g \cdot \|e_1 - e_2\|_t \cdot \cos \sphericalangle_{\mathbb{R}^2}(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0.\end{aligned}$$

Mit $\lambda = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\frac{g_{11}+g_{22}}{2}}$ erhalten wir also die gewünschte Darstellung.

(iv) Ist klar. □

Korollar 4.17. *Sei $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$. Wir wollen angeben, welche Gleichung ein Diffeomorphismus $\varphi \colon \hat{\Omega} \to \Omega$ erfüllen muss, damit wir eine spezielle Parametrisierung für $\hat{X}$ erhalten:*

(i) $\hat{G} = (d\varphi)^T(G \circ \varphi)d\varphi = 1$ *für eine längentreue Parametrisierung,*
(ii) $\det \hat{G} = (\det G) \circ \varphi \cdot (\det d\varphi)^2 = 1$ *für eine flächentreue Parametrisierung und*
(iii) $\hat{G} = (d\varphi)^T(G \circ \varphi)d\varphi \in \mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{1}$ *für eine winkeltreue Parametrisierung.*

Theorem 4.18 (Existenz flächentreuer Parameter)**.** *Sei $X \in C^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine reguläre Fläche und $x_0 \in \Omega$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 und einen Diffeomorphismus $\varphi \colon U \to \varphi(U) \subset \Omega$ mit $\varphi(x_0) = x_0$, so dass $X \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}^3$ flächentreu parametrisiert ist.*

Beweis. Nehme ohne Einschränkung $x_0 = 0$ an. Wir machen für φ den Ansatz

$$\varphi\left(x^1, x^2\right) = \left(x^1, \psi\left(x^1, x^2\right)\right) \quad \text{mit } \psi(0,0) = 0.$$

Es folgt $d\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}$. Wir haben in Korollar 4.17 gesehen, dass $X \circ \varphi$ genau dann flächentreu ist, wenn $\det(G \circ \varphi) \cdot (\det d\varphi)^2 = 1$ gilt. Es genügt also, eine glatte Lösung ψ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det G(x^1, \psi(x^1, x^2))}} \quad \text{mit} \quad \psi(x^1, 0) = 0$$

zu finden. Eine solche Lösung existiert nach Picard-Lindelöf für ein $\varepsilon > 0$ in $B_\varepsilon(0)$ und hängt glatt von $x \in B_\varepsilon(0)$ ab. (Dieses Argument funktioniert auch für $X \in C^2$.) □

5. Zweite Fundamentalform

5.1. **Zweite Fundamentalform und Weingartenabbildung.** Wir weisen auch in diesem Kapitel darauf hin, wenn sich Aussagen nicht direkt auf Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen lassen.

Definition 5.1. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ regulär mit einer Einheitsnormalen $\nu\colon \Omega \to \mathbb{S}^2$ längs X. Dann heißt A mit

$$A(x)\langle v, w\rangle := -\left\langle d^2X(x)\langle v, w\rangle, \nu\right\rangle$$

für $x \in \Omega$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$ zweite Fundamentalform von X bezüglich ν. Wie die Metrik ist auch die zweite Fundamentalform $A \in C^0\left(\Omega, L^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)\right)$ eine stetige Abbildung von Ω in den Raum der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ hat $A = (h_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ die Koeffizienten

$$h_{ij}(x) = -\langle X_{,ij}(x), \nu(x)\rangle$$

für $1 \le i, j \le 2$, wobei $X_{,ij} := \frac{\partial X}{\partial x^i x^j}$ mit dem Komma darauf hinweist, dass es sich um partielle Ableitungen handelt. (Solange noch keine Verwechslungsgefahr mit kovarianten Ableitungen besteht, könnten wir auch X_{ij} schreiben.)

Beispiel 5.2. Sei $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega$ ein Graph. Dann gilt

$$\nu = \frac{(Du, -1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \quad \text{und} \quad g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

Die zweite Fundamentalform ist wegen $X_{,ij} = (0, u_{,ij})$ durch $A = (h_{ij})$ mit

$$h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = \frac{u_{,ij}}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$$

gegeben.

Das folgende Lemma ist eigentlich ein Resultat der Linearen Algebra.

Lemma 5.3. *Sei $g(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt und $B(\cdot, \cdot)$ mit Matrixdarstellung (b_{ij}) eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$B(v, w) = g(v, Sw) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Ist B symmetrisch, so ist S bezüglich $g(\cdot, \cdot)$ selbstadjungiert, d. h. es gilt

$$g(Sv, w) = g(v, Sw) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $\left(g^{ij}\right)$ die inverse Matrix zu (g_{ij}), d. h. gelte $\sum\limits_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ für alle $1 \le i, k \le n$. Wir definieren $S = \left(S^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ durch $S^j_l := \sum\limits_{k=1}^{n} g^{jk} b_{kl}$ für $j, l = 1, \ldots, n$.

Wir rechnen die behauptete Gleichheit für Elemente der Standardbasis nach. Es gilt $Se_l = \sum\limits_{j=1}^{n} S^j_l e_j$ und daher folgt

$$g(e_i, Se_l) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} S^j_l = \sum_{j,k=1}^{n} g_{ij} g^{jk} b_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \delta^k_i b_{kl} = b_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S ist einfach einzusehen. Ist A symmetrisch, so folgt direkt, dass S selbstadjungiert ist. $\square$

Definition 5.4. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine Fläche mit Normale ν längs X. Sei $A = (h_{ij})$ die zweite Fundamentalform von X. Dann heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $S(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A(x)\langle v, w\rangle = g(x)\langle v, Sw\rangle \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2$$

Weingartenabbildung von X. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = \sum_{i=1}^{2} S^i_k(x)e_i \quad \text{mit} \quad S^i_k(x) = \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x)h_{jk}(x).$$

Die Weingartenabbildung $S(x)$ ist für alle $x \in \Omega$ bezüglich $g(x)$ selbstadjungiert.

Bemerkung 5.5. Im Allgemeinen ist $\{e_1, e_2\}$ keine Orthogonalbasis bezüglich der Metrik $g(x)$ und die Matrix von S bezüglich der Standardbasis ist nicht symmetrisch.

Für die Weingartenabbildung S ist die Matrixschreibweise $S = \left(h^i_j\right)_{1\le i,j\le 2}$ mit $h^i_j = \sum\limits_{k=1}^{2} g^{ik}h_{kj}$ üblich. Man sagt, ein Index sei mit Hilfe der Metrik gehoben. Auch bei anderen Größen (genauer: Tensoren) kann man Indices heben und senken. Beispiele hierfür sind

$$\sum_{k=1}^{2} R_{ijkl}g^{km} = R_{ij}{}^{m}{}_{l} \quad \text{oder} \quad \sum_{m=1}^{2} R_{ij}{}^{m}{}_{l}g_{mk} = R_{ijkl}.$$

Weiterhin ist es in der Differentialgeometrie (wie auch in der allgemeinen Relativitätstheorie) üblich, die Einsteinsche Summenkonvention zu verwenden. Dabei wird über doppelt auftretende Indices über alle möglichen Werte summiert. Weiterhin muss ein Index „oben“ und ein Index „unten“ stehen. Die Formel $h^i_j = g^{ik}h_{kj}$ bedeutet also in der bisherigen Summenschreibweise $h^i_j = \sum\limits_{k=1}^{2} g^{ik}h_{kj}$.

Theorem 5.6 (Weingartengleichung)**.** *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ regulär mit zweiter Fundamentalform $A = (h_{ij})$ und Weingartenabbildung $S = \left(h^i_j\right)$ bezüglich der Normalen ν. Dann gilt*

$$D\nu = dX \cdot S \quad \textit{und} \quad A(v, w) = \langle D\nu\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$$

bzw. in Koordinaten

$$\nu_i \equiv \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = h^k_i X_k \quad \textit{und} \quad h_{ij} = \langle \nu_i, X_j\rangle = \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j.$$

Dabei haben wir die Komponenten der Vektoren ν und X, beide im $\mathbb{R}^3$, mit griechischen Indices bezeichnet und die Euklidische Metrik des $\mathbb{R}^3$ mit $\delta_{\alpha\beta}$. Die Einsteinsche Summenkonvention erfordert hier also eine Summation über mehrfache griechische Indices von 1 bis 3, während mehrfache lateinische Indices von 1 bis 2 summiert werden. Es ist üblich, lateinische Indices für Größen im Definitionsgebiet und griechische Indices für Größen im Zielraum zu verwenden. Ausgeschrieben mit Summenzeichen bedeutet also die letzte Gleichheit

$$h_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \nu^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j.$$

In dieser Notation wird $G = (DX)^T DX$ zu

$$g_{ij} = X^\alpha_i \delta_{\alpha\beta} X^\beta_j$$

und aus $0 = \langle dX\langle V\rangle, \nu\rangle$ für alle $V \in \mathbb{R}^2$ wird

$$0 = \nu^\alpha \delta_{\alpha\beta} X^\beta_i V^i.$$

Diese Formel gilt auch ohne V^i. Die Definition der zweiten Fundamentalform wird zu

$$h_{ij} := -X^\alpha_{,ij}\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta$$

und die Transformationsformel für die Metrik zu $\hat{X} = X \circ \varphi$ wird zu

$$\hat{g}_{ij} = g_{kl}\varphi_i^k\varphi_j^l.$$

Beide Schreibweisen haben Vorteile; so erleichtern weniger Indices die Übersicht, wird es jedoch komplizierter, gibt es in Indexnotation weniger mögliche Missverständnisse und die Indexnotation ist bei Rechnungen meist einfacher zu handhaben. Es ist ratsam, beide Notationen zu beherrschen.

Beweis. Aus $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ folgt $0 = \frac{\partial}{\partial x^i}\langle \nu, \nu \rangle = 2\langle \nu, \nu_i \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \nu_j, X_k \rangle &= \frac{\partial}{\partial x^j}\underbrace{\langle \nu, X_k \rangle}_{=0} - \langle \nu, X_{,jk} \rangle = h_{jk} = A(e_j, e_k) \\ &= g(Se_j, e_k) = \langle dX \cdot Se_j, dXe_k \rangle.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\langle D\nu\langle v \rangle, \nu \rangle = 0$, aus der zweiten $\langle D\nu\langle v \rangle, dX\langle w \rangle \rangle = \langle dX \cdot S\langle v \rangle, dX\langle w \rangle \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Die erste Behauptung folgt, da die erste dieser beiden Gleichungen gerade das Skalarprodukt der behaupteten Gleichheit mit ν und die zweite das Skalarprodukt mit $dX\langle w \rangle$ liefert, die Gleichung also beim Test mit einer Orthonormalbasis stimmt.

Zur zweiten Behauptung: Es gilt aufgrund der ersten Behauptung

$$A(v, w) = g(Sv, w) = \langle dX \cdot Sv, dX\langle w \rangle \rangle = \langle D\nu\langle v \rangle, dX\langle w \rangle \rangle.$$

Daraus liest man auch direkt die Formeln in Koordinaten ab.

Wir leiten sie noch einmal unabhängig davon in Koordinatenschreibweise her: Es gilt $1 = \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta$. Differenzieren nach x^i liefert $0 = 2\nu_i^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta$. Jeder Vektor in $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form $a^k X_k + b\nu$ darstellen. Also gibt es Funktionen a_i^k und b_i mit $\nu_i = a_i^k X_k + b_i\nu$. Wir setzen dies in die obige Gleichung ein und erhalten $0 = \nu_i^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta = a_i^k X_k^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta + b_i\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta = 0 + b_i$. Also gilt $\nu_i = a_i^k X_k$. Wir differenzieren $0 = \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\alpha$, $j = 1, 2$, setzen die Gleichung für ν_i ein und erhalten

$$0 = \nu_i^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\beta + \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_{,ji}^\beta = a_i^k X_k^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\beta - h_{ij} = a_i^k g_{kj} - h_{ij}.$$

Wir multiplizieren dies mit g^{jl} und erhalten $a_i^l = a_i^k\delta_k^l = a_i^k g_{kj}g^{jl} = h_{ij}g^{jl} = h_i^l$. Somit gilt $\nu_i = h_i^l X_l$ oder $\nu_i^\alpha = h_i^l X_l^\alpha$.

Weiterhin gilt

$$\nu_i^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\beta = h_i^k X_k^\alpha\delta_{\alpha\beta}X_j^\beta = h_{il}g^{lk}g_{kj} = h_{il}\delta_j^l = h_{ij}.$$

□

Theorem 5.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ mit Normale ν und zweiter Fundamentalform A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ liegt in einer Ebene,
(ii) $A \equiv 0$ und
(iii) ν ist konstant.

Beweis.
„(i)⟹(ii)“: Liegt $X(\Omega)$ in einer affinen Ebene $p + E$, so bilden X_1, X_2 eine Basis von E und ν ist ein Normalenvektor von E. Da auch $X_{,ij}$ in E liegt, folgt $h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu \rangle = 0$.

„(ii)⟹(iii)“: Aus $A = (h_{ij}) \equiv 0$ folgt $S = \left(h_j^i\right) = 0$. Somit ist $D\nu = DX \cdot S = 0$ aufgrund der Weingartengleichung. Da Ω zusammenhängend ist, ist ν konstant.

„(iii)⟹(i)“: Ist ν konstant, so folgt $D\langle X, \nu \rangle = \langle DX, \nu \rangle + \langle X, D\nu \rangle = 0$. Somit ist $\langle X, \nu \rangle$ konstant. Da ν konstant ist, besagt dies, dass $X(x)$ in einer Ebene liegt. □

Theorem 5.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ und $R > 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(\Omega)$ *liegt in einer Späre vom Radius* R *und*
(ii) $A = \pm\frac{1}{R}G$ *bzw.* $S = \pm\frac{1}{R}\mathbb{1}$ *oder, in Koordinaten,* $h_{ij} = \pm\frac{1}{R}g_{ij}$ *bzw.* $h^i_j = \pm\frac{1}{R}\delta^i_j$.

Weiterhin ist die Existenz eines $p \in \mathbb{R}^3$*, so dass in jedem Punkt* $X-p$ *ein Vielfaches von* ν *ist, äquivalent zur Tatsache, dass* $X(\Omega)$ *in einer Späre von nicht spezifiziertem Radius um* p *liegt.*

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Sei $m \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Definiere $f(x) := \frac{1}{2}|X(x) - m|^2$. Dann gilt

$$f_i = \langle X - m, X_i\rangle \quad \text{und} \quad f_{,ij} = \langle X - m, X_{,ij}\rangle + g_{ij}.$$

Sei nun m der Mittelpunkt der Sphäre und $X(\Omega)$ in der Sphäre enthalten. Dann ist f konstant. Wir schließen also, dass $X - m \perp \operatorname{im} dX$ gilt. Somit ist $X - m$ ein Vielfaches von ν. (Dies zeigt die Richtung „$\Longleftarrow$“ für die letzte Behauptung.) Da die Sphäre den Radius R hat, gilt $|X - m| = R$ und wegen $|\nu| = 1$ folgt $X - m = \pm R\nu$. Somit erhalten wir

$$0 = f_{,ij} = \langle \pm R\nu, X_{,ij}\rangle + g_{ij} = \mp R h_{ij} + g_{ij}.$$

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Setze $\rho := X \pm R\nu$. Dann folgt nach Voraussetzung mit Hilfe der Weingartengleichung

$$\rho_j = X_j \pm R\nu_j = X_j \pm R h^k_j X_k = X_j \pm R\left(\pm\frac{1}{R}\delta^k_j\right) X_k = 0.$$

Also ist $\rho \in \mathbb{R}^3$ konstant und aus $X = \rho \mp R\nu$ folgt, dass im X in einer Sphäre vom Radius R um ρ enthalten ist.
„$\Longleftarrow$“: Siehe oben.
„$\Longrightarrow$“: Gelte $X - p = r(x)\nu$. Sei ohne Einschränkung $p = 0$. Setze $f := |X - r_0\nu|^2$ für $r_0 := r(q)$ für ein festes $q \in \Omega$. Es gilt

$$f_i = 2\langle X_i - r_0\nu_i, X - r_0\nu\rangle = 2\langle X_i - r_0 h^k_i X_k, (r(x) - r_0)\nu\rangle = 0$$

für $x \in \Omega$. Somit ist $f \equiv 0$ und die Behauptung folgt. □

Theorem 5.9 (Transformationsverhalten der zweiten Fundamentalform)**.** *Sei* $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ *eine Fäche mit zweiter Fundamentalform* A *(bezüglich der Normalen* ν*).*

(i) Ist $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ *ein* C^2*-Diffeomorphismus und* $\hat{X} := X \circ \varphi$*, so gilt für die zweite Fundamentalform* $\hat{A} = \left(\hat{h}_{ij}\right)$ *von* $\hat{X}$ *bezüglich* $\hat{\nu} = \nu \circ \varphi$

$$\hat{A}(v, w) = A|_\varphi(d\varphi\langle v\rangle, d\varphi\langle w\rangle) \quad \textit{bzw.} \quad \hat{h}_{ij} = h_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j$$

und für die Weingartenabbildung

$$\hat{S} = (d\varphi)^{-1} S|_\varphi d\varphi \quad \textit{bzw.} \quad \hat{h}^i_j = (\varphi^{-1})^i_k h^k_l \varphi^l_j.$$

(ii) Sei $\hat{X} = QX + a$ *mit* $Q \in O(3)$ *und* $a \in \mathbb{R}^3$ *die Fläche verknüpft mit einer Euklidischen Bewegung. Dann gilt* $\hat{A} = A$ *und* $\hat{S} = S$ *bezüglich der Normalen* $\hat{\nu} = Q\nu$.

Beweis. Wir führen den Beweis in Koordinaten.
(i) Nach Ketten- und Produktregel erhalten wir $\hat{X}_i = X_k\varphi^k_i$ und

$$\hat{X}_{,ij} = X_{,kl}\varphi^k_i\varphi^l_j + X_k\varphi^k_{,ij}.$$

Die Definition der zweiten Fundamentalform liefert

$$\hat{h}_{ij} = -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu}\right\rangle = -\varphi^k_i\varphi^l_j\langle X_{,kl}, \nu\rangle = h_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j.$$

Aus $\hat{g}_{ij} = g_{kl}\varphi^k_i\varphi^l_j$ erhalten wir $\hat{g}^{ij} = g^{kl}(\varphi^{-1})^i_k(\varphi^{-1})^j_l$. Somit folgt

$$\hat{h}^i_j = \hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj} = (\varphi^{-1})^i_r g^{rs}(\varphi^{-1})^k_s \cdot \varphi^a_k h_{ab}\varphi^b_j = (\varphi^{-1})^i_r g^{rs} h_{sb}\varphi^b_j = (\varphi^{-1})^i_r h^r_b \varphi^b_j.$$

(ii) Es gilt $\hat{X}_{,ij} = QX_{,ij}$. Wir erhalten

$$\hat{h}_{ij} = -\left\langle \hat{X}_{,ij}, \hat{\nu} \right\rangle = -\langle QX_{,ij}, Q\nu\rangle = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle = h_{ij}.$$

Da wir in Theorem 4.12 bereits gesehen haben, dass $\hat{g}_{ij} = g_{ij}$ gilt, erhalten wir $\hat{h}^i_j = \hat{g}^{ik}\hat{h}_{kj} = g^{ik}h_{kj} = h^i_j$. □

5.2. **Hauptkrümmungen und Krümmungsfunktionen.**

Definition 5.10. Seien g, B symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor von B bezüglich g zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$\lambda g(\cdot, v) = B(\cdot, v)$$

oder, äquivalent dazu, $\lambda g(w, v) = B(w, v)$ für alle $w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Definition 5.11 (Hauptkrümmungen)**.** Sei X eine C^2-Fläche mit Metrik g und zweiter Fundamentalform. Dann heißen die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform $A(x)$ bezüglich $g(x)$ Hauptkrümmungen von X in x.

In Koordinaten ist λ eine Hauptkrümmung, wenn es ein $\xi \neq 0$ mit

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

gibt.

Bemerkung 5.12. Die Hauptkrümmungen sind auf den Äquivalenzklassen von C^2-Flächen mit C^2-Umparametrisierungen wohldefiniert: Sei $\hat{X} = X \circ \varphi$. Aus $\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$ folgt mit $\hat{\xi}^k := (\varphi^{-1})^k_i \xi^i$ nämlich

$$\lambda \hat{g}_{ij}\hat{\xi}^j = \lambda\varphi^a_i g_{ab}\varphi^b_j(\varphi^{-1})^j_k\xi^k = \lambda\varphi^a_i g_{ab}\xi^b = \varphi^a_i h_{ab}\xi^b = \varphi^a_i h_{ab}\varphi^b_j(\varphi^{-1})^j_k\xi^k = \hat{h}_{ij}\hat{\xi}^j,$$

da die Metrik und die zweite Fundamentalform dasselbe Transformationsverhalten haben.

Lemma 5.13. *Sei X eine C^2-Fläche mit Metrik g und zweiter Fundamentalform A. Dann besitzt A bezüglich g zwei bezüglich g orthogonale Eigenvektoren und zwei zugehörige (nicht notwendigerweise verschiedene) Hauptkrümmungen.*

Beweis. Wir wollen mit A und g auch die bezüglich der Standardbasis zugehörigen Matrizen bezeichnen. Da g und g^{-1} symmetrisch und positiv definit sind, gibt es Quadratwurzeln $\sqrt{g}$ und $\sqrt{g^{-1}}$. (Versuchen Sie nicht, das in konsistenter Weise mit oberen und unteren Indices aufzuschreiben.) Da $\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}$ symmetrisch ist, gibt es zwei bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonale Eigenvektoren. Sei

$$\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\hat{\xi} = \lambda\hat{\xi}.$$

Setze $\xi := \sqrt{g^{-1}}\hat{\xi}$. Dann gilt $\hat{\xi} = \sqrt{g}\xi$. Es folgt

$$A\xi = \lambda\sqrt{g}\sqrt{g}\xi = \lambda g\xi.$$

Mit $\hat{\zeta} = \sqrt{g}\zeta$ erhalten wir

$$\left\langle \hat{\xi}, \hat{\zeta} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle \xi, \zeta\rangle_g.$$

Somit folgt die Behauptung. □

Definition 5.14. Elementarsymmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen (λ_i) sind wohldefiniert. Wir setzen

$$H := S_1((\lambda_i)_{1\le i\le 2}) = \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}\left(\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\right) = \operatorname{tr}\left(g^{-1}A\right) = h_i^i$$

und

$$\begin{aligned} K := &S_2((\lambda_i)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det\left(\sqrt{g^{-1}}A\sqrt{g^{-1}}\right) \\ = &\det A \cdot \left(\det \sqrt{g^{-1}}\right)^2 = \det A \cdot \det\left(g^{-1}\right) = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}. \end{aligned}$$

H heißt mittlere Krümmung, K Gaußkrümmung.

Bemerkung 5.15. Wählt man $-\nu$ statt ν als Normale, so ändert sich das Vorzeichen von h_{ij} und H, das von K bleibt unverändert.

Beispiel 5.16 (Hauptkrümmungen von Graphen)**.** Für Graphen gelten $h_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ und $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g^{ij} = &\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}, \\ H = &h_i^i = g^{ij}h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(\delta^{ij}u_{ij} - \frac{u_{ij}u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) \\ = &\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(\Delta u - \frac{D^2u\langle Du, Du\rangle}{1+|Du|^2}\right) \end{aligned}$$

und nach etwa zwei Zwischenschritten

$$= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$$

mit

$$\operatorname{div}(\xi) \equiv \operatorname{div}\left(\left(\xi^i\right)\right) := \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad \nabla u = \left(u^i\right)_{1\le i\le 2} = \left(\delta^{ij}u_j\right)_{1\le i\le 2}.$$

Für die Gaußkrümmung gilt

$$K = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{\det u_{ij}}{1+|Du|^2}\frac{1}{1+|Du|^2} = \frac{\det u_{ij}}{\left(1+|Du|^2\right)^2}.$$

Wir betrachten nun speziell rotationssymmetrische Graphen. Sei

$$X(x) = (x, u(x)) \equiv (x, \varphi(|x|)),$$

$x \in \Omega$, $\Omega = B_R(0) \setminus B_\rho(0)$, $0 \le \rho < R \le \infty$, mit $\varphi \in C^2$ und $\varphi'(0) = 0$ falls $\rho = 0$. Ohne die letzte Bedingung wäre $u(x) = \varphi(|x|)$ im Urspung weder in C^1 noch in C^2. Setze $r := |x|$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_i(x) = &\varphi'(r)\frac{x_i}{|x|}, \\ u_{ij}(x) = &\varphi'(r)\frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + \varphi''(r)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|}, \\ |Du|^2 = &(\varphi')^2, \\ g_{ij} = &\delta_{ij} + u_i u_j = \delta_{ij} + (\varphi')^2\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|}, \\ h_{ij} = &\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}\left(\frac{\varphi'}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + \varphi''\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right). \end{aligned}$$

Eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren von g_{ij} und h_{ij} bezüglich δ_{ij} ist außerhalb des Ursprungs durch $\frac{x}{|x|}$ oder x und eine Basis von $\langle x\rangle^\perp$ gegeben. Für die Eigenwerte gilt

	x	$\langle x\rangle^\perp$
g_{ij}	$1+(\varphi')^2$	1
h_{ij}	$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$	$\frac{\varphi'}{r}\frac{1}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}$

Als Hauptkrümmungen erhalten wir somit einmal $\frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}}$ und sonst (hier auch einmal) $\frac{\varphi'}{r\sqrt{1+(\varphi')^2}}$.

Theorem 5.17 (Lokale Normalform von Flächen)**.** *Sei $\hat{X}\colon \hat{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ eine reguläre C^k-Fläche mit $k\ge 1$ und Normale $\hat{\nu}$. Dann gibt es zu $x_0\in\hat{\Omega}$ eine Euklidische Bewegung $B: x\mapsto Qx+a$ mit $Q\in O(3)$ und $a\in\mathbb{R}^3$ sowie eine offene Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon\Omega\to\varphi(\Omega)\subset\hat{\Omega}$ mit $\varphi(0)=x_0$ und ein $f\in C^k(\Omega,\mathbb{R})$ mit $f(0)=0$ und $Df(0)=0$, so dass $X:=B\circ\hat{X}\circ\varphi$ folgendes erfüllt:*

(i) $X(x)=(x,f(x))$ für alle $x\in\Omega$,

(ii) $f(x)=\frac{1}{2}\hat{\kappa}_1(x_0)\cdot\left(x^1\right)^2+\frac{1}{2}\hat{\kappa}_2(x_0)\cdot\left(x^2\right)^2+o\left(\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2\right)$, falls $k\ge 2$ ist,

wobei $\hat{\kappa}_i$ die Hauptkrümmungen von $\hat{X}$ in $x_0\in\hat{\Omega}$ sind.

Beweis. Seien für $i=1,2$ die Vektoren $\hat{\xi}_i$ Eigenvektoren von $\hat{h}_{ij}$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ zu den Eigenwerten $\hat{\kappa}_i$ im Punkt x_0. (Im Falle $\hat{\kappa}_1(x_0)=\hat{\kappa}_2(x_0)$ seien $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ bezüglich $\hat{g}_{ij}$ orthogonal zueinander gewählt.) Dann bilden $\hat{\nu}(x_0)$, $d\hat{X}(x_0)\left\langle\hat{\xi}_1\right\rangle$ und $d\hat{X}(x_0)\left\langle\hat{\xi}_2\right\rangle$ nach Lemma 5.13 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Somit gibt es eine Euklidische Bewegung B, die $\hat{X}(x_0)$ auf 0, $\hat{\nu}(x_0)$ auf $-e_3$ und $d\hat{X}(x_0)\left\langle\hat{\xi}_i\right\rangle$ auf $\pm e_i$ (Vorzeichen beliebig), $i=1,2$, abbildet (eine Abbildung auf beliebige orthogonale Vektoren in dieser Ebene würde ebenfalls ausreichen). Sei $\pi_{23}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $\langle e_3\rangle^\perp$, wobei wir diesen Raum mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Da $\hat{X}$ regulär ist, ist $\pi_{23}\circ B\circ\hat{X}\colon\hat{\Omega}\to\mathbb{R}^2$ ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von x_0 auf eine Umgebung von 0. Definiere nach Einschränkung auf solche Umgebungen $\psi:=\left(\pi_{23}\circ B\circ\hat{X}|_{\ldots}\right)^{-1}$. Dann hat $Y:=B\circ\hat{X}\circ\psi$ die Form $Y(x)=(x,F(x))$. $F(0)=0$ gilt nach Konstruktion und wegen $B\hat{\nu}(x_0)=-e_3$ ist $DF(0)=0$.

Einfacher als nachzurechnen, dass (ii) erfüllt ist, ist nun folgendes Vorgehen: F erfüllt $F(0)=0$, $DF(0)=0$ und $D^2F(0)$ ist eine Matrix mit Eigenwerten $\hat{\kappa}_1(x_0)$ und $\hat{\kappa}_2(x_0)$, da weder φ noch B die Hauptkrümmungen verändern und $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$ gilt. Durch eine Rotation R in $\mathbb{R}^2$ können wir $D^2(F\circ R)$ auf die gewünschte Diagonalgestalt bringen. Also ist $X:=B\circ\hat{X}\circ\varphi$ mit $\varphi:=\psi\circ R$ wie gewünscht und $f:=F\circ R$ die in (ii) gesuchte Funktion. □

Korollar 5.18. *Sei $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Gaußscher Krümmung K bezüglich einer Normalen ν. Sei $x_0\in\Omega$. Dann gilt*

(i) Ist $K(x_0)>0$, so gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $\langle X(x)-X(x_0),\nu(x_0)\rangle>0$ für alle $x\in U\setminus\{x_0\}$ oder $\langle X(x)-X(x_0),\nu(x_0)\rangle<0$ für alle $x\in U\setminus\{x_0\}$, d. h. im X *liegt lokal auf einer Seite der affinen Tangentialebene in x_0.*

(ii) Ist $K(x_0)<0$, so gibt es in jeder Umgebung U von x_0 Punkte $x_\pm\in U$ mit

$$\langle X(x_+)-X(x_0),\nu(x_0)\rangle>0\quad\text{und}\quad\langle X(x_-)-X(x_0),\nu(x_0)\rangle<0,$$

d. h. im X *liegt selbst lokal auf beiden Seiten der affinen Tangentialebene in x_0.*

Beweis. Benutze die Normalform für Flächen. □

Definition 5.19 (Integration auf Flächen)**.** Sei $X\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Fläche und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\int\limits_\Omega f\, dA_g := \int\limits_\Omega f(x)\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx,$$

falls das rechte Integral als Riemann- oder Lebesgueintegral existiert.

$$dA_g = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

heißt das induzierte Flächenelement.

5.3. **Minimalflächen.**

Lemma 5.20. *Die Integration auf Flächen ist unabhängig von der Parametrisierung.*

Beweis. Sei $\hat{X} = X \circ \varphi$ für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi\colon \hat{\Omega} \to \Omega$. Dann folgt aus dem Transformationssatz für Integrale mit $x = \varphi(y)$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sowie

$$\hat{g}_{ij}(y) = g_{kl} \circ \varphi(y)\varphi^k_i(y)\varphi^l_j(y),$$

dass

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\hat{\Omega}} f \circ \varphi(y)\, dA_{\hat{g}}(y)\\
=&\int\limits_{\hat{\Omega}} f \circ \varphi(y)\sqrt{\det\left(\hat{g}_{ij}\right)(y)}\, dy\\
=&\int\limits_{\Omega} f(x)\sqrt{\det\left((g_{kl})(x)\varphi^k_i(\varphi^{-1}(x))\varphi^l_j(\varphi^{-1}(x))\right)}\cdot\frac{1}{|\det d\varphi(\varphi^{-1}(x))|}\, dx\\
=&\int\limits_{\Omega} f(x)\sqrt{\det(g_{ij})(x)}\, dx = \int\limits_{\Omega} f\, dA_g.
\end{aligned}$$
□

Definition 5.21. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche. Wir definieren den mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}$ durch $\vec{H} := -H\nu$.

Wir bemerken, dass $\vec{H}$ unabhängig von der Wahl der Normalen ν definiert ist. Bei einer Sphäre zeigt er nach innen.

Wir wiederholen ein Lemma aus der linearen Algebra, beweisen es hier aber nur in dem für uns relevanten zweidimensionalen Fall, den wir sehr explizit und daher einfach behandeln können. Im Anhang zu meinem Skript über voll nichtlineare partielle Differentialgleichungen befindet sich ein Beweis in beliebigen Dimensionen.

Lemma 5.22.

(i) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(a_{kl}) = \det(a_{kl})a^{ji},$$

falls (a_{ij}) invertierbar ist und a^{ij} die Inverse ist, d. h. wenn $a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k$ gilt.

(ii) Sei $(a_{ij}(t))$ differenzierbar von t abhängig mit inverser Matrix $\left(a^{ij}(t)\right)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}a^{ij} = -a^{ik}a^{lj}\frac{d}{dt}a_{kl}.$$

Die Determinante ist ein Polynom in ihren Einträgen und daher auch im Falle nicht invertierbarer Matrizen differenzierbar.

Beweis.

(i) Wir zeigen die erste Behauptung nur für (2×2)-Matrizen. Es gilt
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(a_{ij})}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$
Somit ist
$$\det(a_{ij})\cdot\begin{pmatrix} a^{11} & a^{21}\\ a^{12} & a^{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21}\\ -a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}.$$
Differenziert man $\det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, so erhält man gerade die behaupteten Einträge.

(ii) Gelte allgemein $AB = BA = \mathbb{1}$. Dann erhält man durch Differenzieren $\dot AB + A\dot B = 0$, also $A\dot B = -\dot AB$ oder $\dot B = -B\dot AB$. Wegen $B = A^{-1}$ folgt die Behauptung. $\square$

Theorem 5.23 (Erste Variation des Flächeninhaltes)**.** *Sei $X\colon \Omega\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R}^3$ von der Klasse C^2.*

(i) Sei $X(\cdot,0)\colon\Omega\to\mathbb{R}^3$ regulär,
(ii) $A(X(\cdot,0))<\infty$ und
(iii) gebe es eine kompakte Menge $K\subset\Omega$, so dass $X(x,t)$ für $x\in\Omega\setminus K$ von t unabhängig ist.

Dann gibt es ein $\varepsilon>0$, so dass $X(\cdot,t)\colon\Omega\to\mathbb{R}^3$ für alle $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ regulär ist. Mit $\Phi := \frac{\partial X}{\partial t}$ erhalten wir
$$\frac{d}{dt}A(X(\cdot,t)) = -\int\limits_\Omega \left\langle \vec H, \Phi\right\rangle\, dA_g$$
für $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

X heißt Variation von $X(\cdot,0)$.

Beweis. Da für $t=0$
$$\inf_{x\in K}\inf_{v\in\mathbb{S}^2}|dX(x,t)\langle v\rangle|>0$$
ist, gilt dies aus Stetigkeitsgründen auch noch für kleine $\varepsilon>0$ und $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Nun gilt
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(X(\cdot,t)) &= \int\limits_\Omega \frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx = \int\limits_\Omega \frac12\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\det(g_{ij})g^{ij}\dot g_{ij}\,dx\\ &= \int\limits_\Omega \frac12 g^{ij}\cdot 2\left\langle \dot X_{,i}, X_j\right\rangle\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx = \int\limits_\Omega g^{ij}\left\langle \dot X_{,i}, X_j\right\rangle dA_g.\end{aligned}$$
Schreibe nun $\dot X = \varphi\nu + \psi^k X_k$ für C^1_c-Funktionen φ und ψ^k mit kompaktem Träger in Ω. Wir erhalten
$$\dot X_{,i} = \varphi_i\nu + \varphi h^k_i X_k + \psi^k_i X_k + \psi^k X_{,ki}$$
und hieraus mit partieller Integration
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(X(\cdot,t)) &= \int\limits_\Omega g^{ij}\left\langle \varphi h^k_i X_k + \psi^k_i X_k + \psi^k X_{,ki}, X_j\right\rangle dA_g\\ &= \int\limits_\Omega g^{ij}\varphi h^k_i g_{kj} + g^{ij}\psi^k_i g_{kj} + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, dA_g\\ &= \int\limits_\Omega \varphi H + \psi^i_i + \psi^k g^{ij}\langle X_{,ki}, X_j\rangle\, dA_g\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_\Omega -\left\langle \Phi, \vec{H} \right\rangle + \psi^k g^{ij} \langle X_{,ki}, X_j \rangle \, dA_g + \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \psi^i \right) \sqrt{\det(g_{kl})} \, dx \\
&= \int\limits_\Omega -\left\langle \Phi, \vec{H} \right\rangle + \psi^k g^{ij} \langle X_{,ki}, X_j \rangle \, dA_g \\
&\qquad - \int\limits_\Omega \psi^i \frac{\det(g_{kl})}{2\sqrt{\det(g_{kl})}} \cdot g^{kl} \cdot 2 \langle X_{,ki}, X_l \rangle \, dx \\
&= -\int\limits_\Omega \left\langle \Phi, \vec{H} \right\rangle dA_g
\end{aligned}
$$

wie behauptet. □

Korollar 5.24. *Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Sei X eine Variation von Y, d. h. wie in Theorem 5.23 mit $X(\cdot, 0) = Y$. Dann sind die Aussagen*

(i) $H(X(\cdot, 0)) = 0$ und
(ii) $\frac{d}{dt} A(X(\cdot, t))\big|_{t=0} = 0$ für alle solchen Variationen X

äquivalent.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Klar nach Theorem 5.23.

„$\Longleftarrow$“: Nehme an, das $H \not\equiv 0$ gilt. Wähle längs $X(\cdot, 0)$ ein C^2-Vektorfeld $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit kompaktem Träger und $\left\langle \vec{H}, V \right\rangle \geq 0$, aber so, dass nicht überall Gleichheit gilt. Setze $X(x, t) := Y(x) + tV$. Dann ist die erste Variation $\frac{d}{dt} A(X(\cdot, t))\big|_{t=0}$ negativ. Widerspruch. □

Wir wollen $X_{,ij}$ als Linearkombination des Normalenvektors ν und der Tangentialvektoren X_i darstellen. Es gilt das folgende

Lemma 5.25. *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche. Dann ist*

$$X_{,ij} = \Gamma^k_{ij} X_k - h_{ij} \nu$$

mit $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$. Setzt man

$$X_{;ij} := X_{,ij} - \Gamma^k_{ij} X_k,$$

so gilt

$$X_{;ij} = -h_{ij} \nu.$$

Die Größe $X_{;ij}$ wird uns noch als zweite kovariante Ableitung begegnen. Die Ausdrücke Γ^i_{ij} nennt man Christoffelsymbole. Die letzte Gleichung heißt Gaußsche Formel.

Beweis. Die Gaußsche Formel folgt aus der ersten Behauptung direkt nach Definition.

Es ist klar, dass sich $X_{,ij}$ als eine solche Linearkombination darstellen lässt. Der Faktor vor ν stimmt aufgrund unserer Definition $h_{ij} := -\langle X_{,ij}, \nu \rangle$. Sei also X_l ein beliebiger Tangentialvektor. Wir müssen daher noch nachweisen, dass das Skalarprodukt der Gleichung mit X_l auf beiden Seiten denselben Wert ergibt. Es gilt nach Definition von Γ^k_{ij}

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - 2\Gamma^k_{ij} \langle X_k, X_l \rangle \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - 2\tfrac{1}{2} g^{kr} (g_{ir,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r}) g_{kl} \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \\
&= 2\langle X_{,ij}, X_l \rangle - \langle X_{,ij}, X_l \rangle - \langle X_i, X_{,lj} \rangle - \langle X_{,ji}, X_l \rangle - \langle X_j, X_{,li} \rangle \\
&\qquad + \langle X_{,il}, X_j \rangle + \langle X_i, X_{,jl} \rangle
\end{aligned}
$$

$$= 0,$$

da partielle Ableitungen symmetrisch sind. $\square$

Bemerkung 5.26. Wir nennen eine Fläche mit $H = 0$ oder, äquivalent dazu, $\vec{H} = 0$, eine Minimalfläche.

Die Bezeichnung ist leicht irreführend, weil wir gesehen haben, dass die erste Variation des Flächeninhalts einer Minimalfläche verschwindet. Dies besagt natürlich nicht, dass eine Minimalfläche ein (lokales) Minimum des Flächeninhalts ist.

Wir können die Minimalflächengleichung $H = 0$ oder $\vec{H} = 0$ mit Hilfe des folgenden Operators kurz darstellen.

Definition 5.27 (Laplace-Beltrami Operator)**.** Sei $(g_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ eine Riemannsche Metrik auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit inverser Metrik $\left(g^{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}$. Dann definieren wir den Laplace-Beltrami Operator $\Delta_g\colon C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ durch

$$\Delta_g u := \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} u \right).$$

Lemma 5.28. *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine Fläche mit Metrik g und Normalenvektor ν. Dann gilt*

$$\Delta_g X = \vec{H}.$$

Beweis. Wir berechnen mit Lemma 5.25

$$\begin{aligned}
\Delta_g X ={}& \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \cdot g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} X \right) \\
={}& \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{1}{2} \frac{\det(g_{kl})}{\sqrt{\det(g_{kl})}} 2 g^{kl} \langle X_{,ki}, X_l \rangle g^{ij} X_j \\
& - g^{ik} g^{lj} (\langle X_{,ki}, X_l\rangle + \langle X_k, X_{,li}\rangle) X_j + g^{ij} X_{,ij} \\
={}& \underline{g^{kl} \langle X_{,ki}, X_l \rangle g^{ij} X_j} - g^{ik} g^{lj} \langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j - \underline{g^{ik} g^{lj} \langle X_k, X_{,li}\rangle X_j} \\
& + g^{ij} \left(-h_{ij} \nu + \Gamma^k_{ij} X_k \right) \\
={}& - H\nu - g^{ik} g^{lj} \langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j + \tfrac{1}{2} g^{ij} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) X_k \\
={}& \vec{H} - g^{ik} g^{lj} \langle X_{,ki}, X_l\rangle X_j \\
& + \tfrac{1}{2} g^{ij} g^{kl} \Big(\langle X_{,ij}, X_l\rangle + \underline{\langle X_i, X_{,lj}\rangle} + \langle X_{,ji}, X_l\rangle + \underline{\langle X_j, X_{,li}\rangle} \\
& \qquad - \underline{\langle X_{,il}, X_j\rangle} - \underline{\langle X_i, X_{,jl}\rangle} \Big) X_k \\
={}& \vec{H}.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 5.29 (Helikoid)**.** Das Helikoid, parametrisiert durch

$$\mathbb{R}^2 \ni (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)^T,$$

ist eine Minimalfläche.

Beweis. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
X_r &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T, \\
X_{,rr} &= 0, \\
X_\varphi &= (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1)^T, \\
X_{,\varphi\varphi} &= (-r\cos\varphi, -r\sin\varphi, 0)^T, \\
g_{rr} &= 1, \\
g_{r\varphi} &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{\varphi\varphi} &= 1 + r^2, \\
\det g_{ij} &= 1 + r^2, \\
\vec{H} &= \Delta_g X \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{1+r^2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} X \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{1+r^2} \cdot 1 \cdot X_r \right) + \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2} X_\varphi \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+r^2} X_{,\varphi\varphi} \\
&= \frac{r}{1+r^2} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+r^2} \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

Somit ist das Helikoid eine Minimalfläche. □

5.4. **Niveauflächen.** Parametrisierte Flächen sind im Allgemeinen nur immersiert und nicht eingebettet. Dafür muss man eine Parametrisierung angeben. Untermannigfaltigkeiten, Niveauflächen oder eingebettete Flächen dürfen sich hingegen nicht selbst durchdringen. Dafür reicht es, die Fläche als Menge anzugeben. Eine Parametrisierung ist nicht nötig.

Definition 5.30 (Untermannigfaltigkeiten)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, Niveaufläche oder eingebettete Fläche der Klasse C^k für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $f \in C^k(U)$ mit

(i) $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und
(ii) $df(q) \neq 0$ für alle $q \in U$

gibt.

Beispiel 5.31. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u \in C^k(\Omega)$. Dann ist

$$\{(x, u(x)) \colon x \in \Omega\} = \operatorname{graph} u$$

eine zweidimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Zu $p = (x, u(x)) \in M$ können wir stets $U = \Omega \times \mathbb{R}$ und $f \colon U \to \mathbb{R}$ mit $f\left(x^1, x^2, x^3\right) := x^3 - u\left(x^1, x^2\right)$ wählen. □

Beispiel 5.32. Die Sphäre $\mathbb{S}^2 := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| = 1\right\}$ ist eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$: Wähle $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f(x) := |x|^2 - 1$ oder $f(x) := |x| - 1$.

Lokal sind parametrisierte Flächen auch eingebettete Flächen. Global stimmt dies nicht, ein Gegenbeispiel wäre die „8“$\times\mathbb{R}$.

Theorem 5.33. *Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Normale ν. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $\hat{\Omega}$ von x_0, so dass* $\operatorname{im} X|_{\hat{\Omega}}$ *eine eingebettete Fläche ist.*

Beweis. Definiere $F \colon \Omega \times \mathbb{R}$ durch

$$F(x, t) := X(x) + t\nu(x).$$

Dann ist $dF(x_0)$ durch eine invertierbare (3×3)-Matrix dargestellt. Somit gibt es nach dem Satz von der inversen Abbildung eine Umgebung der Form $\hat{\Omega} \times$

$(-\varepsilon,\varepsilon)$ von $x_0 \times \{0\}$, so dass $F|_{\hat\Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild $U := F\left(\hat\Omega \times (-\varepsilon,\varepsilon)\right)$ ist.

Wir behaupten nun, dass im $X\left(\hat\Omega\right)$ eine eingebettete Fläche ist. Es gilt $M := X\left(\hat\Omega\right) = F\left(\hat\Omega \times \{0\}\right) \subset U$. Setze $f := \pi_3 \circ F^{-1} \colon U \to (-\varepsilon,\varepsilon)$, wobei $\pi_3 \colon \hat\Omega \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to (-\varepsilon,\varepsilon)$ durch $\pi_3\left(x^1,x^2,x^3\right) := x^3$ definiert ist. Dann gilt

$$f^{-1}(\{0\}) = \left(\pi_3 \circ F^{-1}\right)^{-1}(\{0\}) = F \circ \pi_3^{-1}(\{0\}) = F \circ \left(\hat\Omega \times \{0\}\right) = M = M \cap U.$$

Da F ein Diffeomorphismus ist, verschwindet auch die Ableitung der dritten Komponente von F^{-1}, also df, nicht. Die Behauptung folgt. □

Lokal sind eingebettete Flächen auch parametrisierte Flächen:

Definition 5.34. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit. Eine lokale Parametrisierung von M nahe $x_0 \in M$ ist eine C^k-Abbildung $X \colon \Omega \to M \subset \mathbb{R}^3$ mit $x_0 \in \operatorname{im} X$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, X injektiv ist und $\operatorname{rang} dX(x) = 2$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Ω heißt Parametergebiet und $V := X(\Omega) \subset M$ heißt das Kartengebiet von X. Die Abbildung $X^{-1} \colon V \to \Omega$ heißt Karte.

Theorem 5.35 (Existenz und Eigenschaften von Karten)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^k mit $k \ge 1$. Dann gelten folgenden Aussagen:*

(i) Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Karte $\varphi \colon V \to \Omega$ mit $p \in V$.
(ii) Ist $X \colon \Omega \to X(\Omega) =: V$ eine lokale Parametrisierung, so ist V relativ offen in M. Die Abbildung $X^{-1} \colon V \to \Omega$ ist stetig und somit ist $X \colon \Omega \to V$ ein Homöomorphismus.
(iii) Seien $\varphi_i \colon V_i \to \Omega_i$, $i = 1,2$, Karten von M. Dann ist

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis.

(i) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist M lokal als Graph darstellbar: Zu $p \in M$ gibt es eine Euklidische Bewegung $B \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $B(p) = 0$, offene Mengen $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $0 \in I \subset \mathbb{R}$ sowie $u \in C^k(\Omega, I)$ mit

$$B(M) \cap (\Omega \times I) = \{(x, u(x)) \colon x \in \Omega\}.$$

Insbesondere folgt $u(0) = 0$. Dann ist $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $X(x) := B^{-1}(x, u(x))$ die gesuchte Parametrisierung und es gilt $X(0) = p \in X(\Omega)$.

(ii) V ist relativ offen, da $F(x,t) := X(x) + t\nu(x)$ ein lokaler Diffeomorphismus nahe $t = 0$ ist. F^{-1} ist ebenfalls ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist die Einschränkung X^{-1} stetig und die Behauptung folgt.

(iii) Betrachte die lokalen Parametrisierungen $X_1 := \varphi_1^{-1}$ und $X_2 := \varphi_2^{-1}$. Deren Fortsetzungen $\hat X_i(x,t) := X_i(x) + t\nu(x)$ sind wiederum lokale Diffeomorphismen. Dies gilt auch für die Verknüpfung $\hat X_2^{-1} \circ \hat X_1$ und daher auch für die Einschränkung auf $t = 0$, also für $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Da Parametrisierungen und damit auch Karten (globale) Homöomorphismen sind, ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ auch ein (globaler) Diffeomorphismus. □

Definition 5.36 (Tangentialebene)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Dann heißt $V \in \mathbb{R}^3$ Tangentialvektor in $p \in M$, falls es eine Kurve $\gamma \colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = V$ gibt. Die Menge aller Tangentialvektoren in p bezeichnen wir mit T_pM.

Theorem 5.37. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Dann ist T_pM ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ und es gilt*

(i) $T_pM = \operatorname{im} dX(x)$ für eine lokale Parametrisierung $X : \Omega \to M$ mit $X(x) = p$.
(ii) $T_pM = \ker df(p)$, falls $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ für eine offene Menge U mit $p \in U$ und für $f \in C^1(U)$ mit $df \neq 0$ in U gilt.

Beweis. Sei $X(x) = p$. Die Inklusionen $\operatorname{im} dX(x) \subset T_pM \subset \ker df(p)$ folgen direkt nach Definition. Wegen $\dim \operatorname{im} dX(x) = 2$ und $\dim \ker df(p) = 2$ gilt jedoch überall Gleichheit. □

Die folgende Bemerkung, Bemerkung 5.38, steht auf einer gesonderten Seite.

Wir wollen nun die zweite Fundamentalform von Untermannigfaltigkeiten ohne Zuhilfenahme einer Parametrisierung bestimmen. Die Wahl des Vorzeichens von ν ist prinzipiell beliebig. Bei dieser Konvention erhalten wir für die Niveauflächendarstellung von schrumpfenden Sphären die äußere Normale.

Lemma 5.39. *Sei $X \in C^2\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$ eine parametrisierte Fläche, $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von $p = X(x)$ und $f \in C^2(U)$ mit $f \circ X \equiv 0$ und $Df \neq 0$ nahe p. Dann gilt*

$$h(x)\langle v, w\rangle = -\frac{D^2f(p)\langle DX(x)\langle v\rangle, DX(x)\langle w\rangle\rangle}{|Df(p)|} \quad \textit{bezüglich} \quad \nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \circ X.$$

Beweis. Wir differenzieren $f \circ X \equiv 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= f_l(X(x))X^l_i(x), \\ 0 &= f_{,kl}(X(x))X^k_i(x)X^l_j(x) + f_l(X(x))X^l_{,ij}. \end{aligned}$$

Wir benutzen $\nu(x) = -\frac{\nabla f(X(x))}{|\nabla f(X(x))|}$ und erhalten aus der Definition der zweiten Fundamentalform

$$h_{ij}(x)|Df(X(x))| = -f_{,kl}f(X(x))X^k_i(x)X^l_j(x).$$

Die Behauptung folgt. □

Dies rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 5.40. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f \in C^2(U)$ mit $Df \neq 0$ in U. Gelte $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. Dann definieren wir die zweite Fundamentalform $\hat{h}$, $M \cap \Omega \ni p \mapsto L^2(T_pM, T_pM; \mathbb{R})$ und die Weingartenabbildung $\hat{S}$, $M \cap \Omega \ni p \mapsto \operatorname{Hom}(T_pM, T_pM)$, durch

$$\hat{h}(p)\langle v, w\rangle = \left\langle v, \hat{S}(p)w\right\rangle = -\frac{D^2f(p)\langle v, w\rangle}{|Df(p)|}$$

für $v, w \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$.

Bemerkung 5.41.

(i) Da wir p auf ein Element in $L^2(T_pM, T_pM; \mathbb{R})$ abbilden und somit der Zielraum von p abhängig ist, erfüllt dies nicht die Definition einer Funktion. Dieses Problem lässt sich auf zwei Arten lösen: Man führt Schnitte im Tangentialbündel ein (siehe nachfolgende Vorlesung) oder man betrachtet $\hat{A}$ als Funktion $M \cap \Omega \to L^2\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}\right)$ und definiert

$$\hat{A}(p)\langle v, w\rangle := -\frac{D^2f(p)\langle \pi(x)\langle v\rangle, \pi(x)\langle w\rangle\rangle}{|Df(p)|},$$

wobei $\pi(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $T_{X(x)}M \subset \mathbb{R}^3$ ist, also $\pi(x)\langle v\rangle := v - \langle v, \nu(x)\rangle\nu(x)$.

Bemerkung 5.38. Wir stellen nun in einer Tabelle im ersten Teil einige Größen „erster Ordnung“ für eingebettete Flächen und dieselben Größen für parametrisierte Flächen einander gegenüber.
Im zweiten Teil haben wir eine analoge Gegenüberstellung für Größen „zweiter Ordnung“, die wir erst später betrachten werden.

	Parametrisierung $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$	Niveaufläche $f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^3$	Relation $X(x) = p$
Tangentialraum	$\operatorname{im} dX(x)$	$\ker df(p)$	T_pM
Tangentialvektor	$dX\langle v\rangle$	$V \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$	$dX(x)\langle v\rangle = V$
Normale	$\nu = \pm\frac{X_1 \times X_2}{\lvert X_1 \times X_2\rvert}$	$\hat{\nu} = -\frac{\nabla f}{\lvert\nabla f\rvert}$	$\nu = \pm\hat{\nu} \circ X$
Metrik	$g(\cdot,\cdot)$	$\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$	$g(x)\langle v, w\rangle = \langle dX(x)\langle v\rangle, dX(x)\langle w\rangle\rangle$
Bogenlänge	$L_g(\gamma)$	$L(\alpha) = L_{\mathbb{R}^3}(\alpha)$	$L_g(\gamma) = L_{\mathbb{R}^3}(X \circ \gamma)$
Winkel	$\sphericalangle_g$	$\sphericalangle = \sphericalangle_{\mathbb{R}^3}$	$\sphericalangle_g(v, w) = \sphericalangle(dX\langle v\rangle, dX\langle w\rangle)$
Flächeninhalt	$A_g(E)$	$\mathcal{H}^2(E)$	$A_g(E) = \mathcal{H}^2(X(E))$
2. Fundamentalform	$h(x)\langle\cdot,\cdot\rangle = -\langle D^2X(x)\langle\cdot,\cdot\rangle, \nu\rangle$	$\hat{h}(p)\langle\cdot,\cdot\rangle = -\frac{D^2f(p)\langle\cdot,\cdot\rangle}{\lvert Df(p)\rvert}$	$h(x)\langle v, w\rangle = \hat{h}(p)\langle dX\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle$
Weingartenabbildung	$h(x)\langle v, w\rangle = g(v, Sw)$	$\hat{h}(p)\langle V, W\rangle = \left\langle X, \hat{S}Y \right\rangle$	$\hat{S} \cdot dX = dX \cdot S$
Hauptkrümmungen	$Sv_i = \kappa_i v_i$	$\hat{S}V_i = \kappa_i V_i$	$V_i = dX\langle v_i\rangle$
Weingartengleichung	$D\nu = DX \cdot S$	$D\hat{\nu} = \hat{S}$	

Die Notation $\hat{\cdot}$ für Größen im Zusammenhang mit Niveauflächen ist eine ad hoc Notation.

(ii) Nach Lemma 5.39 ist $\hat{h}(p)\langle\cdot,\cdot\rangle$ unabhängig von der speziellen Wahl von f definiert.

(iii) Nach Lemma 5.39 folgt

$$\begin{aligned}\langle dX\langle v\rangle, dX\langle Sw\rangle\rangle &= g(v, Sw) = h(v,w) = \hat{h}\langle dX\langle v\rangle, dX\langle w\rangle\rangle \\ &= \left\langle dX\langle v\rangle, \hat{S}\cdot dX\langle w\rangle\right\rangle.\end{aligned}$$

Also folgt

$$\hat{S}\cdot dX = dX\cdot S.$$

Um die Weingartengleichung auch für Niveauflächen formulieren zu können, müssen wir zunächst definieren, wie man eine nur auf einer Untermannigfaltigkeit definierte Funktion ableitet.

Definition 5.42. Sei $M\subset\mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion $f\colon M\to\mathbb{R}$ heißt von der Klasse C^1, falls $f\circ X\in C^1(\Omega)$ für jede lokale C^1-Parametrisierung $X\colon\Omega\to W\subset M$ ist. Sei $p=X(x)$. Wir definieren die Ableitung von f durch

$$\begin{aligned}Df(p)&\colon T_pM\to\mathbb{R},\\ Df(p)\langle DX(x)\langle v\rangle\rangle &:= D(f\circ X)(x)\langle v\rangle.\end{aligned}$$

Bemerkung 5.43.

(i) Die Definition von Df benutzt im $DX(x)=T_pM$, also, dass sich jeder Vektor in T_pM als Bild unter $DX(x)$ schreiben lässt.

(ii) Die Definition ist von der Parametrisierung unabhängig: Sei $\varphi\in C^1\left(\hat{\Omega},\Omega\right)$ ein Diffeomorphismus und $\hat{X}:=X\circ\varphi$. Sei $x=\varphi(y)$. Dann gilt nach Definition einerseits

$$Df(p)\langle DX(x)\langle v\rangle\rangle = D(f\circ X)(x)\langle v\rangle$$

und andererseits

$$Df(p)\left\langle D\hat{X}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\right\rangle = D\left(f\circ\hat{X}\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle.$$

Die Relation zwischen v und w ergibt sich aus

$$\begin{aligned}DX(x)\langle v\rangle &= D\hat{X}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= DX\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)\cdot D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle = DX(x)\cdot D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\end{aligned}$$

aufgrund der Injektivität von $DX(\cdot)$ als $D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle = v$. Also folgt die Wohldefiniertheit mit Hilfe der Kettenregel aus

$$\begin{aligned}D(f\circ X)(x)\langle v\rangle &\overset{!}{=} D\left(f\circ\hat{X}\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= D((f\circ X)\circ\varphi)\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= D(f\circ X)\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)\cdot D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\langle w\rangle\\ &= D(f\circ X)(x)\langle v\rangle.\end{aligned}$$

(iii) Ist $M=\mathbb{R}^k$, so stimmt diese Definition von Ableitung mit der üblichen Definition überein.

Lemma 5.44. *Es gilt die Weingartengleichung für C^2-Untermannigfaltigkeiten*

$$D\hat{\nu}=\hat{S}.$$

Beweis. Nach Definition und mit $\hat{S}\cdot DX = DX\cdot S$ folgt

$$D\hat{\nu}\cdot DX = D(\hat{\nu}\circ X) = D\nu = DX\cdot S = \hat{S}\cdot DX.$$

Wir erhalten die Behauptung. $\square$

$\boxed{\text{Wir erhalten die restlichen Zeilen in der Tabelle in Bemerkung 5.38.}}$

Lemma 5.45. *Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$. Sei $Df \neq 0$ auf $f^{-1}(\{0\})$. Setze $M := f^{-1}(\{0\})$. Sei $p \in M$. Dann ist die mittlere Krümmung $\hat{H}$ von M in p durch*

$$\hat{H}(p) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$$

gegeben.

Beweis. Es gilt $\hat{\nu} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Nun ist

$$\hat{H} = \hat{h}^i_i = \operatorname{tr}_{T_pM}(D\hat{\nu}) = -\operatorname{tr}_{T_pM}\left(D\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) = -\operatorname{tr}_{\mathbb{R}^3}\left(D\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right).$$

Beachte dabei, dass sich sowohl Spur als auch Divergenz, sofern nicht anders angegeben, auf alle 3 Richtungen und nicht nur auf $T_pM \subset \mathbb{R}^3$ beziehen. Da $\left|\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right| = 1$ ist, verschwindet jedoch $\left\langle D\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right\rangle$ und die Behauptung folgt. $\square$

Literatur

1. Ernst Kuwert, *Elementare Differentialgeometrie*, 2006, Skript zur Vorlesung.
2. John W. Milnor, *On the total curvature of knots*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 248–257.
3. Wikipedia, `http://www.wikipedia.org`.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`