FUNKTIONALANALYSIS

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Skript zur Vorlesung.

Inhaltsverzeichnis

1.	Topologische Grundlagen	2
1.1.	Topologische Räume	2
1.2.	Stetige Abbildungen	5
1.3.	Kompaktheit $\star$	5
1.4.	Vervollständigung	8
2.	Normierte Räume und Hilberträume	12
2.1.	Normierte Räume	12
2.2.	Lineare Abbildungen	13
3.	L^p-Räume	17
3.1.	Dreiecksungleichung und Folgenräume	17
3.2.	Vollständigkeit $\star$	20
3.3.	Approximierbarkeit $\star$	21
3.4.	Der Satz von Radon-Nikodym $\star$	23
3.5.	Dualraum $\star$	28
4.	Der Satz von Hahn-Banach	33
4.1.	Der Satz von Hahn-Banach	33
5.	Hilberträume	36
5.1.	Hilberträume	36
5.2.	Projektion auf konvexe Teilmengen	40
6.	Der Bairesche Kategoriesatz	43
6.1.	Der Bairesche Kategoriesatz	43
6.2.	Anwendungen des Baireschen Kategoriesatzes	44
7.	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen	47
7.1.	Dicht definierte Operatoren	47
7.2.	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen	48
8.	Das Wichtigste zu schwacher Konvergenz	49
8.1.	Definition und erste Resultate	49
8.2.	Schwache Folgenkompaktheit	51
9.	Divergenzsatz	53
9.1.	Zerlegung der Eins	53
9.2.	Integration über Untermannigfaltigkeiten	54
9.3.	Divergenzsatz	57
9.4.	Transformationssatz	58
10.	Überblick Sobolevräume	59
10.1.	Schwache Ableitung und Definition	59

Date: 8. April 2021.

Vielen Dank an Jonas Blessing, Olaf Schnürer und Andrey Zakharov für Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

Eingesetzt in Konstanz: Sommer 2012, 2016 und 2021.

10.2. Approximierbarkeit und Randwerte 59
10.3. Einbettungssätze 61
11. Schwache Konvergenz und Reflexivität 63
11.1. Schwache Konvergenz 63
11.2. Reflexivität 66
12. Sobolevräume 69
12.1. Definition und grundlegende Eigenschaften 69
12.2. Approximierbarkeit 75
12.3. Fortsetzbarkeitssätze 77
12.4. Spuren von Sobolevfunktionen 79
13. Sobolevungleichungen und Einbettungssätze 82
13.1. Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung 82
13.2. Morreyungleichung 85
13.3. Kompaktheitssätze 89
13.4. Differenzenquotienten ⋆ 93
14. Spektralsatz 94
14.1. Spektrum 94
14.2. Selbstadjungierte Operatoren 95
14.3. Kompakte Operatoren 98
14.4. Projektoren 99
14.5. Orthonormalbasen 103
14.6. Spektralsatz 104
Anhang A. Einige Mathematiker aus diesem Skript ⋆ 106
A.1. Historisches 106
Literatur 107

Mit ⋆ markierte Abschnitte bezeichnen Zusatzmaterial.

Aufteilung: Ohne Zusatzmaterial und den Stoff von Funktionalanalysis II, also mit den Befehlen

```
\long\def\weg#1{} \long\def\faii#1{}
```

etwa in Zeile 30 der `tex`-Datei erhält man 37 mathematische Seiten Skript, was 2,75 Seite/Woche entspricht. Daran orientiert sich die Aufteilung.

In dieser Vorlesung geht es hauptsächlich um unendlich dimensionale Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen ihnen. Ein weiteres großes Thema sind Räume von Funktionen, Sobolevräume, die eine schwache Ableitung besitzen. Wir folgen [2, 4, 7] und benutzen weiterhin [3, 5, 8, 11, 17, 18].

Mo 12.04.2021

1. Topologische Grundlagen

1.1. Topologische Räume.

Definition 1.1.1. ⋆ Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}X$ heißt **Topologie** auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,

(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, I eine beliebige (Index-)Menge, folgt auch $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, n$, folgt auch $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$.

(Es genügt hier für $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ zu fordern.)

$(X, \mathcal{O})$ (oder auch X) heißt topologischer Raum.

Eine Menge $A \subset X$ heißt offen, falls $A \in \mathcal{O}$ gilt. $B \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus B \in \mathcal{O}$ gilt.

Definition 1.1.2. $\star$ Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) Sei $x \in X$. Dann heißt $U \subset X$ **Umgebung** von x, falls es ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt.
(ii) $x \in X$ heißt **Berührpunkt** von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.
(iii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt **Abschluss** (oder **abgeschlossene Hülle**) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.
(iv) Ein Punkt x ist ein **innerer Punkt** von A, falls A eine Umgebung von x ist.
(v) Das **Innere** von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\mathring{A}$ bezeichnet, der einfacheren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.
(vi) Ein Punkt x heißt **Randpunkt**, $x \in \partial A$, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Definition 1.1.3. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) $\star$ Sei $A \subset X$. Dann ist $(A, \mathcal{O}_A)$ mit
$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \colon O \in \mathcal{O}\}$$
ein topologischer Raum. $\mathcal{O}_A$ heißt **induzierte Topologie** (oder **Relativtopologie** oder **Spurtopologie**).
Beispiel: $(1/2, 1]$ ist in $[0, 1]$ offen.
(ii) Sei $A \subset X$. Dann heißt A **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$ gilt.
Sei $A \subset B \subset X$. Dann heißt A dicht in B, falls A dicht in $(B, \mathcal{O}_B)$ ist.
(iii) X heißt **separabel**, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\overline{A} = X$ gibt.
(iv) $B \subset \mathcal{O}$ heißt **Basis der Topologie** $\mathcal{O}$, falls sich jedes $O \in \mathcal{O}$ als Vereinigung von Elementen von B schreiben lässt.
(v) Sei $S \subset \mathcal{P}X$. Dann heißt die kleinste Topologie auf X, die S enthält, die von S **erzeugte Topologie**. S heißt **Subbasis** dieser Topologie.
Bemerkung: Die von S erzeugte Topologie besteht genau aus Mengen der Form
$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} U_{ij}$$
mit $U_{ij} \in S$, $n_i \in \mathbb{N}$ und einer Indexmenge I. Denn diese Mengen gehören zu jeder Topologie, die S enthält. Beliebige Vereinigungen solcher Mengen sind ebenfalls von dieser Form. Wegen $\left(\bigcup_i A_i\right) \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_{i,j} A_i \cap B_j$ sind auch Schnitte von zwei Mengen dieser Form wieder von dieser Form.
(vi) $\star$ Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien auf X. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ **gröber** als $\mathcal{O}_2$, falls $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ gilt. Gilt $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_1$ **feiner** als $\mathcal{O}_2$.

Bemerkung 1.1.4. $\star$ Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Setze $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(y, x) < \varepsilon\}$. Dann ist
$$\mathcal{O} := \{A \subset X \colon \forall\, x \in A\ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A\}$$
eine Topologie auf X. Auf metrischen Räumen werden wir stets diese von der Metrik induzierte Topologie verwenden. (Beweis: Analysis-Vorlesung.)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt metrisierbar, wenn es eine Metrik d auf X gibt, die die vorgegebene Topologie induziert.

Der Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist nicht metrisierbar, falls X mehr als zwei Punkte enthält, da es dann Mengen $B_\varepsilon(x) \neq X$ gibt.

Definition 1.1.5. Zwei **Metriken** heißen **äquivalent**, falls sie die gleiche Topologie induzieren.

Definition 1.1.6. $\star$ Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $x_n \in B_r(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.
(ii) Eine Menge $A \subset X$ heißt **beschränkt**, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $A \subset B_r(x_0)$ gibt.

Lemma 1.1.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Metrik auf X, die zu d äquivalent ist, so dass X in dieser Metrik beschränkt ist.*

Beweis. Setze $\hat{d}(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. □

Beispiel 1.1.8. Sei $X = C^0([0, 1])$. Dann definieren $\|f\|_{L^1([0,1])} := \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx$ und $\|f\|_{L^\infty([0,1])} := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ Normen auf X. Sie induzieren Metriken auf X vermöge $d_1(f, g) := \|f - g\|_{L^1([0,1])}$ und $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_{L^\infty([0,1])}$. Wir wollen zukünftig stets annehmen, dass die Metrik auf einem normierten Raum die von der Norm induzierte Metrik ist.

Dann ist $\mathrm{id}\colon (X, d_\infty) \to (X, d_1)$ stetig, denn es gilt

$$\|f\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty([0,1])},$$

also auch $d_1(f, g) \le d_\infty(f, g)$. Die Umkehrung $\mathrm{id}\colon (X, d_1) \to (X, d_\infty)$ ist jedoch nicht stetig, denn für $f_n(x) := x^n$ gilt

$$\|f_n\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \quad \text{aber} \quad \|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1.$$

Also erhalten wir $d_1(f_n, 0) \to 0$, aber $d_\infty(f_n, 0) \not\to 0$.

Definition 1.1.9. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) $\star$ Sei $A \subset X$. Dann heißt U **Umgebung** von A, falls U Umgebung für alle Punkte von A ist.
(ii) Eine Familie $\mathcal{U}$ heißt **Umgebungsbasis** von x, falls jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Umgebung von x ist und wenn für jede Umgebung V von x ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ existiert.
(iii) $\star$ X heißt **Hausdorffraum**, falls je zwei (verschiedene) Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. (Trennungsaxiom T_2)
(iv) X heißt **normal**, falls X ein Hausdorffraum ist und Trennungsaxiom T_4 gilt, d. h. disjunkte abgeschlossene Mengen disjunkte Umgebungen besitzen.

Definition 1.1.10. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt $x_0 \in X$

(i) **Häufungspunkt** der Folge, falls in jeder Umgebung von x_0 unendlich viele Folgeglieder enthalten sind.
(ii) **Grenzwert** der Folge, falls außerhalb jeder Umgebung von x_0 nur endlich viele Folgeglieder liegen.

1.2. Stetige Abbildungen.

Definition 1.2.1. $\star$ Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$, topologische Räume. Sei $f\colon X_1 \to X_2$ eine Abbildung.

(i) Dann heißt f **stetig**, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_2$ auch $f^{-1}(U)$ in X_1 offen ist.
(ii) f heißt **offen**, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_1$ auch $f(U)$ in X_2 offen ist.
(iii) f heißt **Homöomorphismus**, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.
(iv) f heißt in $x_0 \in X_1$ **stetig**, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$ gibt.

Definition 1.2.2. Sei $F = \{f_i\colon X \to Y_i\colon i \in I\}$ eine Familie von Abbildungen von X in topologische Räume $(Y_i, \mathcal{O}_i)$. Dann heißt die gröbste Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, stetig sind, die **F-schwache Topologie** auf X.

Beispiel 1.2.3. Die Produkttopologie auf dem kartesischen Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Projektionen $\pi_i\colon X \to X_i$ stetig sind. Mengen der Form $\prod_{i\in I} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und $A_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ bilden eine Basis der Topologie von X.

Definition 1.2.4. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Dann heißt die Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ **Isometrie**, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt. Eine bijektive Isometrie heißt **isometrischer Isomorphismus**. (Achtung: Manchmal verlangt man bei Isometrien auch gleich die Bijektivität.)

Theorem 1.2.5. *Sei $\mathbb{R}^n$ der euklidische Raum, d. h. der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik oder Standardmetrik (wie immer, wenn wir die Metrik des $\mathbb{R}^n$ nicht explizit angeben). Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann gilt $f(x) = Ax + b$ für eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Der Nachweis, dass Abbildungen dieser Form isometrische Isomorphismen sind, ist einfach. Der Beweis der umgekehrten Implikation findet sich in meinem Skript über Elementare Differentialgeometrie [15]. □

1.3. Kompaktheit $\star$.

Definition 1.3.1.

(i) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X **(überdeckungs-)kompakt** oder **quasikompakt**, falls jede Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} A_i$$

durch offene Mengen A_i, $i \in I$, d. h. eine offene Überdeckung, eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} A_{i_j}$$

besitzt.

(In der Topologie heißt ein überdeckungskompakter T_2-Raum **kompakt**.)

(ii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ **relativ kompakt**, wenn $\overline{A} \subset X$ kompakt ist.
(iii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X **(folgen-)kompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iv) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann heißt X **präkompakt** (oder **totalbeschränkt**), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_i \in X$, $1 \le i \le N$, mit
$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$$
gibt.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, falls A mit von X induzierter Metrik bzw. Topologie kompakt ist.

Wir wollen ebenso einen Teilraum $A \subset X$ vollständig, beschränkt, präkompakt, ... nennen, falls dies für A mit der von X induzierten Topologie oder Metrik gilt.

Theorem 1.3.2. *Seien X, Y topologische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ (überdeckungs-)kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist auch $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Sei ohne Einschränkung $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{1\le i\le N}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist $(U_i)_{1\le i\le N}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$. □

Theorem 1.3.3. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist (überdeckungs-)kompakt.
(ii) X ist folgenkompakt.
(iii) X ist präkompakt und vollständig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Definiere
$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}.$$
Die Mengen F_n sind abgeschlossen, $U_n := X \setminus F_n$ ist also offen. Wir behaupten, dass es ein $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gibt. Dies ist dann der gesuchte Häufungspunkt der Folge. Falls es kein solches a gibt, ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, was äquivalent zu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ ist. Somit ist $(U_n)_n$ eine offene Überdeckung von X und endlich viele der Mengen U_n überdecken bereits X, ohne Einschränkung gelte $\bigcup\limits_{n=1}^{N} U_n = X$. Dies ist äquivalent zu $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = \emptyset$. Es gilt aber $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = F_N \neq \emptyset$. Widerspruch.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Da X folgenkompakt ist, ist X auch vollständig.

Falls X nicht präkompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) \subsetneq X$ für alle $x_i \in X$ und alle N gilt. Fixiere nun $x_0 \in X$ beliebig und wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$ beliebig. Es gilt stets $d(x_i, x_j) \ge \varepsilon$ für $i \neq j$. Somit besitzt $(x_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Nehme an, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ ohne endliche offene Teilüberdeckung gibt. $n = 0$: Da X präkompakt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln vom Radius $1 = 2^{-0}$, die X überdecken. Mindestens eine davon, $B_{2^{-0}}(x_0)$, wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt.

Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bereits definiert. Dann wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdeckt. Mindestens eine davon, $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$, wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt. Wir können dabei $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1}) \cap B_{2^{-n}}(x_n) \neq \emptyset$ annehmen. (Sonst würden nämlich alle Bälle vom Radius $2^{-(n+1)}$

mit nichtleerem Schnitt mit $B_{2^{-n}}(x_n)$ endlich durch Mengen in $\mathcal{U}$ überdeckt und das würde somit auch für $B_{2^{-n}}(x_n)$ gelten. Widerspruch.) Also gilt $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-(n+1)} + 2^{-n} < 2^{-(n-1)}$ und somit für $p \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+p}) < 2^{-(n-1)} + 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+p-2)} < 2^{-(n-2)}.$$

Daher ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X, konvergiert also gegen ein $x \in X$ und wir erhalten $d(x_n, x) \le 2^{-(n-2)}$ durch Grenzübergang $p \to \infty$. x liegt aber in einer offenen Menge aus $\mathcal{U}$. Dies gilt auch für $B_\varepsilon(x)$. Nach Dreiecksungleichung gilt aber $B_{2^{-n}}(x_n) \subset B_{2^{-(n-2)}+2^{-n}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ für große Werte von n. Widerspruch zur Wahl von x_n. □

Definition 1.3.4. Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in X_1 : \, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.5. *Seien X, Y metrische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Falls nicht, gibt es $\varepsilon > 0$ und Punkte $a_n, b_n \in X$ mit $d_X(a_n, b_n) < 1/n$ aber $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \ge \varepsilon$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der a_n, ohne Einschränkung gelte also $a_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Nach Dreiecksungleichung gilt $d_X(a, b_n) \le d_X(a, a_n) + d_X(a_n, b_n)$, also gilt auch $b_n \to a$ für $n \to \infty$. Da aber f in a stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ gilt. Sei n so groß, dass $a_n, b_n \in B_\delta(a)$ gilt. Wir erhalten dann $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \le d_Y(f(a_n), f(a)) + d_Y(f(a), f(b_n)) < \varepsilon$. Widerspruch. □

Theorem 1.3.6. *Sei Y ein metrischer Raum. Sei $X \subset Y$ kompakt. Dann ist X*

(i) beschränkt,
(ii) abgeschlossen sowie
(iii) separabel.

Nur für die Abgeschlossenheit ist der umgebende Raum wichtig.

Beweis.
(i) Folgt aus der Präkompaktheit.
(ii) Folgt aus der Folgenkompaktheit.
(iii) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele Kugeln mit Radius $1/n$, die X überdecken. Sei X_n die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte. Dann ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ die gesuchte höchstens abzählbare dichte Teilmenge. □

Definition 1.3.7. Seien (X, d), (Z, D), metrische Räume und sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i\colon X \to Z$.

(i) $(f_i)_{i \in I}$ heißt **gleichgradig stetig**, falls

$$\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall i \in I \, \forall y \in X\colon d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

(ii) $(f_i)_{i \in I}$ heißt **gleichmäßig gleichgradig stetig**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall i \in I \, \forall x, y \in X\colon d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.8 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge, ohne Einschränkung $(f_n)_n$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert: $f_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Analysisvorlesung.

Beweisidee: Mit einem Diagonalfolgenargument erhalten wir eine Teilfolge, die auf einer dichten Teilmenge konvergiert. Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit konvergiert die Teilfolge überall.

Die gleichmäßige Konvergenz weist man nach, indem man die gleichmäßige Konvergenz in einer genügend großen endlichen Menge und erneut die gleichgradige Stetigkeit benutzt. □

Bemerkung 1.3.9. Im $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge kompakt. In metrischen Räumen gilt dies i. a. nicht mehr: In $l^2(\mathbb{N})$ (siehe folgendes Kapitel) ist $\overline{B_1(0)}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, da die Vektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ für $i \neq j$ die Gleichheit $d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ erfüllen.

1.4. **Vervollständigung.**

Definition 1.4.1. ⋆ Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **Cauchyfolge**, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall\, n, m \geq N \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(ii) X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Lemma 1.4.2. *Sei $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ gleichmäßig stetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_1. Dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_2.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass
$$d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
gilt. Da $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X_1 ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_1(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Zusammengenommen folgt $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. □

Lemma 1.4.3. *Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Sei X_2 vollständig. Sei $X \subset X_1$ dicht. Sei $f\colon X \to X_2$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $g\colon X_1 \to X_2$. g ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $x \in X_1$, $x_n \to x$ eine Cauchyfolge mit $x_n \in X$. Setze
$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$
Nach Lemma 1.4.2 existiert der Grenzwert auf der rechten Seite für eine feste Cauchyfolge. g ist wohldefiniert, denn für zwei Cauchyfolgen $x_n \to x$ und $y_n \to x$ ist auch
$$z_n := \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{für gerades } n, \\ y_{\frac{n+1}{2}} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$
eine Cauchyfolge. Da konstante Cauchyfolgen zugelassen sind, ist g eine Fortsetzung von f.

Zur gleichmäßigen Stetigkeit: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass $d_1(a, b) < 3\delta \Longrightarrow d_2(f(a), f(b)) < \varepsilon/3$ für alle $a, b \in X$ gilt. Seien $x, y \in X_1$. Wähle Cauchyfolgen $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$ mit $x_n, y_n \in X$. Dann gilt für $d_1(x, y) < \delta$
$$d_2(g(x), g(y)) \leq \underbrace{d_2(g(x), f(x_n))}_{<\varepsilon/3} + d_2(f(x_n), f(y_n)) + \underbrace{d_2(f(y_n), g(y))}_{<\varepsilon/3},$$
falls n groß ist. Aus $d_1(x, y) < \delta$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $d_1(x_n, y_n) < 3\delta$ für $n \gg 1$. Somit erhalten wir für den mittleren Term aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f die Abschätzung $d_2(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/3$.

Sei h eine weitere stetige Fortsetzung und $x_n \to x$ mit $x_n \in X$. Dann gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x).$$

Somit ist die Fortsetzung von f eindeutig bestimmt. $\square$

Definition 1.4.4 (Vervollständigung)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine **Vervollständigung** von (X,d) ist ein Tripel $\left(\hat{X},\hat{d},\iota\right)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\left(\hat{X},\hat{d}\right)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(ii) $\iota\colon X \to \hat{X}$ ist eine Isometrie mit dichtem Bild.
(iii) Sei Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder gleichmäßig stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$, so dass $\hat{f}\circ\iota = f$ gilt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & \hat{X} \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Später nennt man auch laxerweise $\left(\hat{X},\hat{d}\right)$ die Vervollständigung von (X,d) oder sagt, dass $\hat{X}$ die Vervollständigung von X sei.

Wir nennen $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f, da wir X vermöge ι als Teilmenge von $\hat{X}$ auffassen können. Wir schreiben später nach Identifizierung von X und $\iota(X)$ auch $X \subset \hat{X}$.

Zwei Vervollständigungen $\left(\hat{X},\hat{d},\iota\right)$ und $\left(\tilde{X},\tilde{d},\jmath\right)$ heißen isometrisch isomorph, falls es einen isometrischen Isomorphismus $f\colon \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\jmath = f\circ\iota$ gibt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\jmath"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \tilde{X} \\ & \hat{X} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 1.4.5. $\star$ Die Forderung nach $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ kann man auch durch die Forderung nach einer eindeutigen Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ ersetzen und erhält eine äquivalente Definition.

Beweis.

(i) Ist $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, so ist $\hat{f}$ wegen $\hat{f}\circ\iota = f$ auf einer dichten Teilmenge eindeutig vorgegeben. Da $\hat{f}$ stetig ist, ist die Abbildung also eindeutig bestimmt.
(ii) Ist $\overline{\iota(X)} \subsetneq \hat{X}$, so gibt es $x_0 \in \hat{X}$ und $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subset \hat{X} \setminus \overline{\iota(X)}$. Sei $Y = [0,1]$. Dann gibt es Lipschitz stetige und damit insbesondere gleichmäßig stetige Funktionen $\hat{f}_i\colon \hat{X} \to Y$ mit $\hat{f}_i\left(\overline{\iota(X)}\right) = \{0\}$ und $\hat{f}_i(x_0) = i$, $i = 0, 1$, nämlich $\hat{f}_0 \equiv 0$ und $\hat{f}_1$ mit

$$\hat{f}_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{d(x,x_0)}{\varepsilon} & \text{für } x \in B_\varepsilon(x_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist die Fortsetzung der Nullabbildung $f\colon X \to Y$ nicht eindeutig bestimmt. $\square$

Mo 19.04.2021

Theorem 1.4.6 (Vervollständigung)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Vervollständigung $\left(\hat{X},\hat{d},\iota\right)$.*

Die Vervollständigung $\left(\hat{X},\hat{d},\iota\right)$ ist bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Die doppelte Vervollständigung $\left(\hat{\hat{X}},\hat{\hat{d}},\hat{\iota}\circ\iota\right)$ ist ebenfalls isometrisch isomorph zu $\left(\hat{X},\hat{d},\iota\right)$.

Wie im folgenden Beweis kann man aus $\mathbb{Q}$ auch $\mathbb{R}$ konstruieren.

Beweis.

(i) Existenz: Auf dem Raum der Cauchyfolgen in X definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch
$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0.$$
Es ist mit Hilfe der Dreiecksungleichung leicht zu sehen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Mit $[(x_n)_n]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $(x_n)_n$. Sei
$$\hat{X} := \{[(x_n)_n] : (x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge in X}\}.$$
Auf $\hat{X}$ definieren wir eine Metrik $\hat{d}\colon \hat{X}\times\hat{X}\to\mathbb{R}_+\equiv\mathbb{R}_{\ge 0}$ durch
$$\hat{d}([(x_n)_n],[(y_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n).$$
Man rechnet direkt nach, dass $\hat{d}$ wohldefiniert und eine Metrik ist. Die Dreiecksungleichung folgt dabei aus
$$d(x_n,z_n) \le d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n),$$
indem man den Grenzwert $n\to\infty$ betrachtet. Die behaupteten Eigenschaften von $\left(\hat{X},\hat{d}\right)$ werden wir noch nachweisen.

(ii) Definiere $\iota\colon X\to\hat{X}$ durch
$$x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}],$$
wir bilden x also auf die Äquivalenzklasse der konstanten Cauchyfolge ab. Dies ist eine Isometrie.

(iii) $\iota(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$: Sei $[(x_n)_n]\in\hat{X}$. Sei $\varepsilon>0$. Wähle $N\in\mathbb{N}$, so dass $d(x_n,x_m)<\varepsilon/2$ für $n,m\ge N$ gilt. Es ist $[(x_N)_n]\in\iota(X)$ und es gilt
$$\hat{d}([(x_N)_n],[(x_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_N,x_n)}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$
für $n\ge N$.

(iv) Vollständigkeit: Sei $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Gelte $x_k=(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu jedem $k\in\mathbb{N}$ ein $N_k\in\mathbb{N}$ mit $d(x_{k,n},x_{k,m})<1/k$ für $n,m\ge N_k$. Wir definieren $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ durch $y_l := x_{l,N_l}$. Wir wollen nachweisen, dass $y:=(y_l)_l$ eine Cauchyfolge in X ist und dass $[x_k]\to[y]$ in $\left(\hat{X},\hat{d}\right)$ gilt.

(v) $(y_l)_l$ ist eine Cauchyfolge in X: Zunächst ist
$$\hat{d}(\iota(x_{i,N_i}),[x_i]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_{i,N_i},x_{i,n})}_{\le 1/i \text{ für } n\ge N_i} \le \frac{1}{i}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} d(y_k, y_l) &\le d(y_k, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + d(x_{l,m}, y_l) \\ &\le \tfrac{1}{k} + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + \tfrac{1}{l} \quad \forall\, m \ge \max\{N_k, N_l\} \\ &\le \tfrac{1}{k} + \hat{d}([x_k], [x_l]) + \left| \hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m}) \right| + \tfrac{1}{l} \\ &\qquad \forall\, m \ge \max\{N_k, N_l\}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Daher können wir $k, l \in \mathbb{N}$ mit $1/k + 1/l \le \varepsilon/3$ und $\hat{d}([x_k], [x_l]) \le \varepsilon/3$ fixieren. Benutze die Definition von $\hat{d}$ und wähle m so groß, dass

$$\left| \hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m}) \right| \le \varepsilon/3$$

gilt. Wir erhalten somit $d(y_k, y_l) \le \varepsilon$. Daher ist $(y_l)_l$ eine Cauchyfolge.

(vi) $[x_k] \to [y]$: Es gilt

$$\begin{aligned} d(x_{k,l}, y_l) &\le d(x_{k,l}, x_{k,N_k}) + d(x_{k,N_k}, y_l) \\ &\le \tfrac{1}{k} + d(y_k, y_l) \quad \text{für } l \ge N_k. \end{aligned}$$

Lasse nun $k, l \to \infty$ mit $l \ge N_k$. Somit folgt $\hat{d}([x_k], [y]) \to 0$ für $k \to \infty$.

Ausführlicher: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y_i, y_j) < \varepsilon/2$ für $i, j \ge N$. Wähle $k \ge N$ so groß, dass $1/k < \varepsilon/2$ gilt. Wähle nun $l \ge \max\{N, N_k\}$. Dann folgt $d(x_{k,l}, y_l) < \varepsilon$. Mit $l \to \infty$ erhalten wir also $\hat{d}([x_k], [y]) \le \varepsilon$.

(vii) Fortsetzbarkeit: Sei Y ein vollständiger metrischer Raum und sei $f\colon X \to Y$ gleichmäßig stetig. Definiere $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ durch

$$\hat{f}([(x_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Die Wohldefiniertheit, Eindeutigkeit und gleichmäßige Stetigkeit von $\hat{f}$ folgen aus Lemma 1.4.3, da $\hat{f}$ die Fortsetzung der gleichmäßig stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f \circ \iota^{-1}\colon \iota(X) &\to Y, \\ [(x)_n] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ist.

(viii) Eindeutigkeit: Sei $\left(\tilde{X}, \jmath, \tilde{d}\right)$ eine weitere Vervollständigung von (X, d). Sei $\hat{\jmath}$ die Fortsetzung von $\jmath$, also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\jmath"'] & & \hat{X} \arrow[dl, "\hat{\jmath}"] \\ & \tilde{X} & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm. Da $\jmath \circ \iota^{-1}\colon \iota(X) \to \tilde{X}$ eine Isometrie mit dichtem Bild in $\tilde{X}$ ist, ist $\hat{\jmath}$ ein isometrischer Isomorphismus.

(ix) Doppelte Vervollständigung: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\hat{\iota}\circ\iota"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "f"'] & & \hat{\hat{X}}, \arrow[ddl, "\hat{\hat{f}}"] \\ & \hat{X} \arrow[ur, "\hat{\iota}"'] \arrow[d, "\hat{f}"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

wobei $\hat{\imath}\colon \hat{X} \to \hat{\hat{X}}$ die Inklusionsabbildung ist. Zunächst existiert $\hat{f}$ zu f, da $\hat{X}$ eine Vervollständigung zu X ist. Dann existiert $\hat{\hat{f}}$ zu $\hat{f}$, da $\hat{\hat{X}}$ eine Vervollständigung zu $\hat{X}$ ist. An den äußeren Pfeilen des Diagramms lesen wir ab, dass $\hat{\hat{X}}$ auch eine Vervollständigung von X ist, falls $\hat{\imath} \circ \iota(X) \subset \hat{\hat{X}}$ dicht liegt.

Sei also $\varepsilon > 0$. Da das Bild von $\hat{\imath}$ in $\hat{\hat{X}}$ dicht ist, gibt es zu $x_2 \in \hat{\hat{X}}$ ein $x_1 \in \hat{X}$ mit $\hat{\hat{d}}(\hat{\imath}(x_1), x_2) < \varepsilon/2$. Ebenso gibt es ein $x_0 \in X$ mit $\hat{d}(\iota(x_0), x_1) < \varepsilon/2$. Da $\hat{\imath}$ eine Isometrie ist, folgt

$$\hat{\hat{d}}(\hat{\imath} \circ \iota(x_0), x_2) \le \hat{\hat{d}}(\hat{\imath} \circ \iota(x_0), \hat{\imath}(x_1)) + \hat{\hat{d}}(\hat{\imath}(x_1), x_2) < \hat{d}(\iota(x_0), x_1) + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Also sind $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$ und $\left(\hat{\hat{X}}, \hat{\hat{d}}, \hat{\imath} \circ \iota\right)$ Vervollständigungen von (X, d) und somit aufgrund der gerade gezeigten Eindeutigkeit isometrisch isomorph. $\square$

2. Normierte Räume und Hilberträume

2.1. Normierte Räume.

Bemerkung 2.1.1. $\star$ Wir sagen, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sei, wenn V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ ist.

Definition 2.1.2. $\star$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ **Norm**, wenn $\|\cdot\|$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\|v\| \ge 0$ für alle $v \in V$.
(ii) $\|v\| = 0$ gilt genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$.
(iv) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$. (Dreiecksungleichung)

Lemma 2.1.3. $\star$ *Sei V ein normierter Raum. Dann ist $V \ni x \mapsto \|x\|$ stetig.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\|:$$

Gelte $x_n \to x$. Dann konvergiert die rechts Seite gegen Null, somit folgt auch $\|x_n\| \to \|x\|$. $\square$

Bemerkung 2.1.4. $\star$

(i) Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum vermöge $d(x, y) := \|x - y\|$. Wenn nicht anders angegeben, wollen wir auf normierten Räumen stets diese induzierte Metrik betrachten. (Details: Analysisvorlesung.)
(ii) Einen vollständigen normierten Raum nennen wir Banachraum.
(iii) Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird auf
$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2)\colon v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2\}$$
durch $\|(v_1, v_2)\|_{V_1 \oplus V_2} := \|v_1\|_{V_1} + \|v_2\|_{V_2}$ eine Norm definiert. Wie beim Nachweis, dass die „Taxinorm" eine Norm ist, rechnet man auch hier nach, dass man eine Norm erhält.
(iv) Seien $(V_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I$, normierte Räume. Dann ist
$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(v_i)_{i \in I}\colon v_i \in V_i,\, \|(v_i)_{i \in I}\| < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|(v_i)_{i \in I}\| := \sum_{i \in I} \|v_i\|_{V_i}$$
ein normierter Raum.
(v) Auf den direkten Summen gibt es auch weitere Normen, z. B. l^p-Normen, vergleiche den nächsten Abschnitt.

(vi) Sind die normierten Räume sogar Banachräume, so sind die oben definierten direkten Summen ebenfalls Banachräume.

Benutzt man, dass die Räume V_i Banachräume sind, so kann man beim Beweis wie bei l^1 vorgehen.

(vii) Ist I unendlich, so gilt automatisch für höchstens abzählbar viele $i \in I$ die Ungleichung $v_i \neq 0$.

Bei Quotientenräumen muss man sich im Gegensatz zur linearen Algebra auf abgeschlossene Teilmengen beschränken um wieder einen Banachraum zu erhalten. Das folgende Theorem ist falsch, wenn wir aus den stetigen Funktionen mit C^0-Norm auf $[0,1]$ den (nach Stone-Weierstraß dichten) Unterraum der Polynome herausdividieren, der Quotientenraum ist nicht einmal normiert, da die positive Definitheit verloren geht.

Theorem 2.1.5 (Quotientenräume von Banachräumen)**.** *Sei X ein Banachraum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist der Quotientenraum X/M mit*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

ein Banachraum.

Mo 26.04.2021

Beweis. Wir beschränken uns auf die nichttrivialen Nachweise.

(i) $\|[x]\|$ ist unabhängig vom Vertreter aus $x + M$ wohldefiniert.

(ii) Da M abgeschlossen ist, ist $\|[x]\| \neq 0$ für $[x] \neq M$.

(iii) Dreiecksungleichung: Sei $\varepsilon > 0$. Seien $x, y \in X$ und $a, b \in M$ mit $\|x - a\| \leq \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon$ sowie $\|y - b\| \leq \operatorname{dist}(y, M) + \varepsilon$. Dann folgt

$$\inf_{z \in M} \|x+y-z\| \leq \|x+y-a-b\| \leq \|x-a\| + \|y-b\| \leq \operatorname{dist}(x, M) + \operatorname{dist}(y, M) + 2\varepsilon.$$

Die Dreiecksungleichung folgt.

(iv) X/M ist vollständig: Sei $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|[x_n] - [x_{n+1}]\| < 2^{-n}$ gilt. Wir wollen nun Vertreter wählen, die in X eine Cauchyfolge bilden. Wähle $z_0 \in [x_0]$ beliebig. Dann finden wir induktiv $z_{n+1} \in [x_{n+1}]$ mit

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \|[x_{n+1} - x_n]\| + 2^{-n} = \|[x_{n+1}] - [x_n]\| + 2^{-n}.$$

Die z_n bilden eine Cauchyfolge in X, da

$$\begin{aligned} \|z_{n+m} - z_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|z_{i+1} - z_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \left(\|[x_{i+1}] - [x_i]\| + 2^{-i}\right) \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} 2 \cdot 2^{-i} \leq 2^{-n+1} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots\right) = 2^{-n+2}. \end{aligned}$$

Setze $z := \lim\limits_{n \to \infty} z_n$. Wir erhalten

$$\|[x_n] - [z]\|_{X/M} = \|[z_n] - [z]\|_{X/M} \leq \|z_n - z\| \to 0$$

für $n \to \infty$. Also gilt $[x_n] \to [z]$ in X/M. □

2.2. **Lineare Abbildungen.** Ist T eine lineare Abbildung so schreiben wir wie in der Linearen Algebra auch Tu statt $T(u)$.

Definition 2.2.1. $\star$ Wir schreiben $R(T) = \operatorname{im}(T)$ für das **Bild** von T und $N(T)$ für den **Kern** von T.

Definition 2.2.2. $\star$ Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann heißt T **beschränkt**, falls es ein $c \geq 0$ mit

$$\|Tv\|_W \leq c \cdot \|v\|_V$$

für alle $v \in V$ gibt.

Wir definieren die **Operatornorm** von T, $\|T\|$, durch

$$\|T\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|Tv\|.$$

Bemerkung 2.2.3. $\star$ Äquivalent zur Beschränktheit für lineare Abbildungen sind:

(i) T bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab.
(ii) $\sup\limits_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq c$.

Es gilt

$$\|T\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

Theorem 2.2.4. $\star$ *Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T ist beschränkt,
(ii) T ist in allen Punkten stetig,
(iii) T ist im Ursprung stetig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Gelte $u_n \to u$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$\|Tu - Tu_n\| = \|T(u - u_n)\| \leq \|T\| \cdot \|u - u_n\| \to 0$$

für $n \to \infty$.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Klar.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Falls T unbeschränkt ist, gibt es Vektoren $v_n \in V$, ohne Einschränkung mit $\|v_n\| = 1$, und $\|Tv_n\| =: r_n \to \infty$, ohne Einschränkung $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $u_n := \frac{v_n}{r_n}$. Dann folgt $u_n \to 0$ und es gilt

$$\|Tu_n\| = \frac{\|Tv_n\|}{r_n} = 1$$

im Widerspruch zur Stetigkeit von T. □

Definition 2.2.5.

(i) $\star$ Seien V, W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Definiere $L(V, W)$ als den Raum der **stetigen linearen Abbildungen** T von V nach W. $L(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Operatornorm $\|T\|$ zu einem normierten Raum (einfache Rechnung).
(ii) Seien V, W normierte Räume. Dann heißen V und W **isomorph**, falls es eine stetige, bijektive lineare Abbildung $T\colon V \to W$ mit stetiger Inverser gibt. T heißt dann Isomorphismus (zwischen normierten Räumen). Gilt zusätzlich noch $\|T(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so heißt T **normtreuer Isomorphismus**.
(iii) Elemente aus $L(V, \mathbb{K})$ heißen **Formen**.

Lemma 2.2.6. *Ist W ein Banachraum, so auch $L(V, W)$.*

Beweis.

(i) Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L(V, W)$ und $u \in V$. Wir definieren T durch $Tu := \lim\limits_{n \to \infty} T_n u$. Der Grenzwert existiert, da $(T_n u)_n$ eine Cauchyfolge ist; es gilt nämlich $\|T_n u - T_m u\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|$. Da W vollständig ist, ist T wohldefiniert. Die Linearität von T ist klar.

(ii) T ist stetig: Wir benutzen, dass aus $u_n \to u$ auch $\|u_n\| \to \|u\|$ folgt. Da $A \mapsto \|A\|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung Lipschitzstetig (mit Lipschitzkonstante eins) ist und $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, ist auch $\|T_n\|$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher in $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\|Tu\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n u\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|u\|,$$

wobei wir rechts den Limes superior nachträglich wieder als Limes schreiben dürfen. Es folgt $\|T\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

(iii) $T_n \to T$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt. Sei nun $u \in V$ beliebig. Es gilt

$$\|Tu - T_n u\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m u - T_n u\| \leq \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\| \cdot \|u\| \leq \varepsilon \cdot \|u\|$$

für alle $n \geq N$. Somit erhalten wir $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. □

Definition 2.2.7. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir setzen $V^* := L(V, \mathbb{K})$, den Raum der **stetigen linearen Funktionale** auf V. ($V' = V^*$ ist eine weitere verbreitete Bezeichnung. In manchen Quellen unterscheiden sich diese Räume; einmal ist dann die Stetigkeit nicht gefordert.) Sei $\varphi \in V^*$, $u \in V$. Statt $\varphi(u)$ schreiben wir auch $\langle u, \varphi\rangle$. Mit der Operatornorm oder dualen Norm auf V^* gilt

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_{V^*} \cdot \|u\|_V.$$

Theorem 2.2.8. *Sei V ein normierter Raum, $\hat{V}$ seine Vervollständigung als metrischer Raum. Dann kann man $\hat{V}$ auf genau eine Art zu einem Banachraum machen, so dass die Einbettung $\iota\colon V \to \hat{V}$ linear und normtreu ist.*

Beweis. Wir identifizieren V mit $\iota(V)$.

(i) $u+v$: Seien $u, v \in \hat{V}$. Gelte $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ sowie $V \ni v_n \to v \in \hat{V}$. Dann ist $u_n + v_n$ eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $v + u := \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n)$. (Da in einem Banachraum für Cauchyfolgen $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$ stets $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ gilt, müssen wir die Addition so definieren.) Der Grenzwert ist unabhängig von der Auswahl der Cauchyfolgen.

(ii) λu: Für $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist λu_n eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $\lambda u := \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$. Auch diese Definition ist von der Wahl der Cauchyfolge unabhängig.

(iii) $\|\cdot\|$: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist auch $\|u_n\|_V$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchyfolge. Wir definieren $\|u\|_{\hat{V}} := \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_V$. Man rechnet leicht nach, dass dies eine Norm ist.

(iv) Vollständigkeit: $\|\cdot\|_{\hat{V}}$ induziert eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\hat{V}$. Wir müssen nachweisen, dass $\tilde{d} = \hat{d}$ gilt. Nach Definition ist mit Bezeichnungen wie oben

$$\tilde{d}(u, v) = \|u - v\|_{\hat{V}} = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_V = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \hat{d}(u, v).$$

Die Behauptung folgt. □

Theorem 2.2.9 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei V ein normierter Raum, W ein Banachraum und $T \in L(V, W)$. Dann besitzt T genau eine Fortsetzung $\hat{T} \in L(\hat{V}, W)$ und es gilt $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

Dies folgt auch direkt aus Lemma 1.4.3 mit (ii) und (iii) aus dem folgenden Beweis.

Beweis.

(i) Existenz: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist Tu_n eine Cauchyfolge, da $\|Tu_n - Tu_m\| \le \|T\| \cdot \|u_n - u_m\|$ gilt. Wir setzen $\hat{T}u := \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Cauchyfolge. $\hat{T}$ ist linear und eine Fortsetzung von T.

(ii) Stetigkeit: Es gilt
$$\left\|\hat{T}u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Tu_n\| \le \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|T\| \cdot \|u\|.$$
Somit ist $\left\|\hat{T}\right\| \le \|T\|$.

(iii) Gleichheit der Normen: Für $u \in V \subset \hat{V}$ gilt $\|Tu\| = \left\|\hat{T}u\right\| \le \left\|\hat{T}\right\| \cdot \|u\|$. Wir bilden nun das Supremum über alle u mit $\|u\| = 1$ und erhalten $\|T\| \le \left\|\hat{T}\right\|$. Zusammen mit der Stetigkeit folgt also $\|T\| = \left\|\hat{T}\right\|$.

(iv) Eindeutigkeit: Seien $\hat{T}$ und $\tilde{T}$ zwei solche Fortsetzungen. Sei $u \in \hat{V}$ und sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $u_n \in V$ und $u_n \to u$. Dann erhalten wir aufgrund der Stetigkeit
$$\hat{T}u = \lim_{n\to\infty} \hat{T}u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}u_n = \tilde{T}u. \qquad \square$$

Für multilineare Abbildungen gibt es eine ähnliche Charakterisierung der Stetigkeit wie bei linearen Abbildungen.

Proposition 2.2.10. ⋆ *Seien E_i, $1 \le i \le n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ multilinear. Dann ist A genau dann stetig, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass*
$$\left\|A\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right\| \le c \cdot \left\|x^1\right\| \cdot \ldots \cdot \|x^n\|$$
für alle $\left(x^1, \ldots, x^n\right) \in E$ gilt.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Widerspruchsbeweis. Nehme an, dass A stetig ist, die Abschätzung aber nicht gilt. Dann gibt es Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_k^i\right)_{\substack{1\le i\le n\\ k\in\mathbb{N}}}$ in E mit
$$\|A(x_k)\| > k \cdot \left\|x_k^1\right\| \cdot \ldots \cdot \|x_k^n\|.$$
Setze $y_k^i := \frac{1}{k^{1/n}} \frac{x_k^i}{\left\|x_k^i\right\|}$. Dann gilt $y_k \to 0$ für $k \to \infty$ aber $\|A(y_k)\| > 1$. Widerspruch zur Stetigkeit von A.

„$\Longleftarrow$“: Nehme die Abschätzung an. Gelte $x_k \to y$. Dann gibt es ein $C > 0$ so dass $\left\|x_k^i\right\| \le C$ für alle $1 \le i \le n$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt
$$\begin{aligned}
&\left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^n\right) - A\left(y^1, \ldots, y^n\right)\right\| \\
\le{}& \left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^n\right) - A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}, y^n\right)\right\| \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-2}, x_k^{n-1}, y^n\right) - A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-2}, y^{n-1}, y^n\right)\right\| + \ldots \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1, y^2, \ldots, y^n\right) - A\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right)\right\| \\
\le{}& \left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}, x_k^n - y^n\right)\right\| + \left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-2}, x_k^{n-1} - y^{n-1}, y^n\right)\right\| + \ldots \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1 - y^1, y^2, \ldots, y^n\right)\right\| \\
\le{}& c \cdot C^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left\|x_k^i - y^i\right\| \to 0
\end{aligned}$$
für $k \to \infty$. Somit ist A stetig. $\square$

Definition 2.2.11. $\star$ Seien E_i, $1 \le i \le n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ **multilinear** und stetig. Dann heißt

$$\|A\| := \sup_{\|x^1\|,\ldots,\|x^n\|=1} \left\|A\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right\|$$

die Norm der multilinearen Abbildung.

Bemerkung 2.2.12. $\star$

(i) Die Menge aller stetigen multilinearen Abbildungen $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ zwischen normierten Räumen, die wir mit $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ bezeichnen, ist mit der in Definition 2.2.11 eingeführten Norm ein normierter Raum.

(ii) Ist F zusätzlich vollständig, so ist $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ ein Banachraum.

(iii) Seien E, F, G normierte Räume. Dann ist die Abbildung

$$A \in L(E,F;G) \to L(E, L(F,G)) \ni \tilde{A}$$

mit $A(x,y) = \big(\tilde{A}(x)\big)(y)$ eine normtreuer Isomorphismus.

Analog erhält man einen normtreuen Isomorphismus

$$L(E_1,\ldots,E_n;F) \to L(E_1, L(E_2,\ldots,L(E_n,F)\ldots)).$$

Details: Übung.

3. L^p-Räume

3.1. **Dreiecksungleichung und Folgenräume.**

Der Beweis der Hölderschen und der Minkowskischen Ungleichung ist quasi derselbe wie in [12] für Folgenräume.

Theorem 3.1.1 (Höldersche Ungleichung, Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $1 < p < \infty$. Dann heißt q mit $1 < q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ der zu p konjugierte (Hölder-)Exponent. Sei μ ein Maß und Ω eine μ-messbare Menge. Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gelten die Höldersche Ungleichung*

$$\int\limits_\Omega |f \cdot g|\, d\mu \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}$$

und die Minkowskische Ungleichung

$$\left(\int\limits_\Omega |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Mit der Norm $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$ (es ist noch nachzuweisen, dass es sich hierbei um eine Norm handelt) können wir die Ungleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q},$$
$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Dieselben Resultate gelten auch für $(p,q) = (1,\infty)$ oder $(p,q) = (\infty,1)$, die Beweise sind anders, aber einfacher (Übung). Mo 03.05.2021

Beweis.

(i) Höldersche Ungleichung: Setze $A := \|f\|_{L^p}$ und $B := \|g\|_{L^q}$. Die Fälle $A \in \{0,\infty\}$ oder $B \in \{0,\infty\}$ sind einfach (Übung). Sei also $0 < A, B < \infty$. Wir setzen $F := |f|/A$ und $G := |g|/B$. Dann gilt $\|F\|_{L^p} = \|G\|_{L^q} = 1$. Betrachte $x \in \Omega$ mit $0 < F(x), G(x) < \infty$. Dazu gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^{s/p}$ und $G(x) = e^{t/q}$. Nun gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Somit erhalten wir aus der Konvexität der Exponentialfunktion
$$F(x)G(x) = e^{s/p+t/q} \le \tfrac{1}{p}e^s + \tfrac{1}{q}e^t = \tfrac{1}{p}F(x)^p + \tfrac{1}{q}G(x)^q.$$
Die Ungleichung zwischen der linken und der rechten Seite gilt für beliebige $x \in \Omega$. Wir integrieren die Ungleichung und erhalten
$$\int\limits_\Omega FG\,d\mu \le \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$
Nach Umstellung erhalten wir daraus gerade die Höldersche Ungleichung.

(ii) Minkowskische Ungleichung: Wir wollen wieder ohne Einschränkung annehmen, dass die linke Seite der behaupteten Ungleichung strikt positiv und die Terme auf der rechten Seite der Ungleichung endlich sind. Aus der Konvexität von $[0,\infty) \ni t \to t^p$ erhalten wir
$$\left(\frac{|f+g|}{2}\right)^p \le \tfrac{1}{2}\left(|f|^p + |g|^p\right).$$
Somit gilt $\|f+g\|_{L^p} < \infty$.

Mit der Hölderschen Ungleichung und $p + q = pq$ erhalten wir
$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p}^p &= \int |f+g|^p = \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\
&\le \|f\|_{L^p} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|g\|_{L^p} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \cdot \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \cdot \|f+g\|_{L^p}^{p/q}.
\end{aligned}$$
Umordnen liefert die Behauptung. $\square$

Korollar 3.1.2. ⋆ $\mathbb{R}^n$ *mit der* p*-Norm* $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ *ein Banachraum.*

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist gerade die Minkowskische Ungleichung für Funktionen, die auf den Intervallen $[0,1)$, $[1,2)$, $\ldots$, $[n-1,n)$ konstant sind. Die übrigen Eigenschaften einer Norm sind elementar.

Sei $x_i = (x_{i,k})_{1\le k\le n}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_{i,k} - x_{j,k}| \le \|x_i - x_j\|_p$ für alle $1 \le k \le n$ bilden auch die k-ten Komponenten eine Cauchyfolge. Setze $x := (x_k)_{1\le k\le n}$ mit $x_k := \lim\limits_{i\to\infty} x_{i,k}$. Dann folgt $\|x_i - x\|_p \to 0$ für $p \to \infty$, da sämtliche Komponenten konvergieren. $\square$

Definition 3.1.3. ⋆ Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann heißen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent**, wenn es eine Konstante $c > 0$ mit
$$\tfrac{1}{c}\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le c \cdot \|u\|_1$$
für alle $u \in X$ gibt.

Theorem 3.1.4. *Auf* $\mathbb{R}^n$ *sind je zwei Normen äquivalent.*

Dieser Satz gilt auch für beliebige endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Die nachfolgend definierten Normen $l^p(\mathbb{N})$ sind für verschiedene Werte von p keine äquivalenten Normen auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Wir folgen [10].

Beweis. Sei $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$ mit der Standardbasis $\{e_i\}_i$ des $\mathbb{R}^n$. Bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine fixierte andere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen nur die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$. Für beliebige Normen folgt die Aussage dann aufgrund der Transitivität in der Definition der Äquivalenz von Normen.

(i) Es gilt

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right| \cdot \|e_i\| \le c \cdot \|x\|_\infty \quad \text{mit} \quad c := \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|.$$

(ii) Falls es kein $c > 0$ mit $c \cdot \|x\|_\infty \le \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, finden wir eine Folge $(x_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\|x_k\|_\infty > k$. Definiere die Folge $(y_k)_k$ durch $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$. Diese Folge ist bezüglich der Supremumsnorm beschränkt. Somit sind die Komponenten y_k^i, $1 \le i \le n$, $k \in \mathbb{N}$, gleichmäßig beschränkt. Ohne Einschränkung dürfen wir also nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, dass $y_k^i \to y^i$ für $k \to \infty$ konvergiert. Wir erhalten $\|y_k - y\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Somit gilt nach (i) auch $\|y_k - y\| \to 0$ für $k \to \infty$. Nun gilt $\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} = \frac{1}{\|x_k\|_\infty} \to 0$ für $k \to \infty$. Wir erhalten $y = 0$. Weiterhin folgt $1 = \|y_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Widerspruch. □

Theorem 3.1.5. ⋆ *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist der Raum*

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{ (x^n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p}$$

ein Banachraum.

Allgemeiner definiert man Räume $l^p(A)$ für Funktionen $f \colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{l^p(A)} := \left(\sum_{x\in A} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung und die Vollständigkeit:

Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in l^p(\mathbb{N})$ Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}^k$ mit der entsprechenden Norm $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} |x^n|^p \right)^{1/p}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{N} |x^n + y^n|^p \right)^{1/p} &\le \left(\sum_{n=1}^{N} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y^n|^p \right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^n|^p \right)^{1/p} = \|x\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|y\|_{l^p(\mathbb{N})}.\end{aligned}$$

Somit ist $x + y$ mit komponentenweiser Addition wieder in $l^p(\mathbb{N})$ und mit $N \to \infty$ erhalten wir die Dreiecksungleichung.

Vollständigkeit: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $l^p(\mathbb{N})$. Dann folgt für $k \le N$ aus

$$\left|x_i^k - x_j^k\right| \le \left(\sum_{l=1}^N \left|x_i^l - x_j^l\right|^p\right)^{1/p} \le \|x_i - x_j\|_{l^p(\mathbb{N})},$$

dass auch $\left(x_i^k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge ist. Definiere $x = (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $x^k := \lim\limits_{i\to\infty} x_i^k$. Wir lassen $j \to \infty$ und erhalten

$$\left(\sum_{k=1}^N \left|x_i^k - x^k\right|^p\right)^{1/p} \le f(i)$$

mit $f(i) \to 0$ für $i \to \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $i \gg 1$ mit $f(i) \le \varepsilon$. Lasse nun $N \to \infty$ und erhalte $\|x_i - x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \varepsilon$. Es folgt $\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \|x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|x - x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} < \infty$. Somit ist $x \in l^p(\mathbb{N})$ und $l^p(\mathbb{N})$ ist vollständig. □

3.2. Vollständigkeit $\star$.

Bemerkung 3.2.1. Sei in diesem Kapitel stets μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ und Ω eine μ-messbare Menge.

Um den Raum der messbaren Funktionen zu einem normierten Raum zu machen, betrachten wir Äquivalenzklassen von Funktionen und identifizieren Funktionen (ohne dies später explizit hervorzuheben), die fast überall übereinstimmen.

Sei $1 \le p < \infty$. Für alle messbaren Funktionen f auf Ω setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \equiv \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

und definieren $L^p(\Omega,\mu)$ als den Raum aller messbaren Funktionen f mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty.$$

Im Fall $p = \infty$ verfahren wir genauso, benutzen aber $\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} := \sup\limits_\Omega |f|$, das wesentliche Supremum von f, genauer:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} \equiv \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{\alpha \ge 0 : |f| \le \alpha \text{ fast überall}\}.$$

Theorem 3.2.2. *Seien μ (ein Radonmaß) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $1 \le p \le \infty$. Dann ist $L^p(\Omega) \equiv L^p(\Omega,\mu)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei zunächst $1 \le p < \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega,\mu)$. Gelte (nach Auswahl einer Teilfolge ohne Einschränkung) $\|f_{i+1} - f_i\|_{L^p} < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$g_k := \sum_{i=0}^k |f_{i+1} - f_i| \quad \text{und} \quad g := \sum_{i=0}^\infty |f_{i+1} - f_i|.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt $\|g_k\|_{L^p} < 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Fatou ($\int \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int f_n$ für $f_n \ge 0$), angewandt auf g_k^p, folgt $\|g\|_{L^p} \le 2$. Somit gilt fast überall $g(x) < \infty$. Also konvergiert

$$f_1(x) + \sum_{i=1}^\infty (f_{i+1}(x) - f_i(x))$$

für fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren $f(x)$ als diesen Grenzwert für diese x und sonst $f(x) := 0$. Somit gilt fast überall

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x).$$

Das Supremum und der Limes superior messbarer Funktionen sind selbst wieder messbar. Somit ist auch f messbar. Wir wollen nun zeigen, dass f_i auch in L^p gegen

f konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{L^p} < \varepsilon$ für $m, n \geq N$. Sei $m > N$. Dann folgt mit Fatou

$$\int\limits_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int\limits_\Omega |f_i - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p.$$

Hieraus folgt $f - f_m \in L^p(\Omega, \mu)$, also auch $f \in L^p(\Omega, \mu)$. Weiterhin folgt hieraus $\|f - f_m\|_{L^p} \to 0$ für $m \to \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Definiere

$$A_k := \{x \in \Omega \colon |f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty}\}$$

und

$$B_{m,n} := \{x \in \Omega \colon |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_n - f_m\|_{L^\infty}\}.$$

Setze $E := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} B_{m,n}$. Dann ist E als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst wieder eine Nullmenge. In $\Omega \setminus E$ konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Funktion, die wir f nennen, auf E setzen wir $f(x) := 0$. Es folgt $f \in L^\infty$ sowie $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$ für $n \to \infty$. □

Im Verlauf des Beweises haben wir auch das folgende Resultat mitbewiesen:

Theorem 3.2.3. *Seien μ (ein Radonmaß) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega, \mu)$ mit Grenzwert f. Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$ für fast alle $x \in \Omega$ konvergiert.*

3.3. **Approximierbarkeit ⋆.** Wir wollen untersuchen, wie sich L^p-Funktionen approximieren lassen. Auch hier sei μ wiederum stets ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ und Ω eine μ-messbare Menge.

Theorem 3.3.1. *Seien μ (ein Radonmaß) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei S die Menge aller endlichen messbaren Treppenfunktionen s (= (endliche) Linearkombination von charakteristischen Funktionen messbarer Teilmengen) auf Ω mit $\mu(\{x \colon s(x) \neq 0\}) < \infty$. Ist $1 \leq p < \infty$, dann ist S dicht in $L^p(\Omega, \mu)$.*

Beweis. Sei $f \in L^p$ und gelte ohne Einschränkung $f \geq 0$. Dann gibt es (z. B. punktweises Abrunden auf das nächste Vielfache von 2^{-n} und Betrachten von $\min(\cdot, n)$) Treppenfunktionen s_n mit

- $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$,
- $s_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ in Ω.

Aus $0 \leq s_n \leq f$ folgt $s_n \in L^p$ und daher gilt $s_n \in S$. Wegen $|f - s_n|^p \leq f^p$ folgt nach dem Satz über die dominierte Konvergenz $\|f - s_n\|_{L^p} \to 0$ für $n \to \infty$. Somit ist $f \in \overline{S}^{L^p}$. □

Lemma 3.3.2. *Seien μ (ein Radonmaß) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(\Omega) < \infty$ gegeben. Ist $f \in L^\infty(\Omega)$, so gibt es Treppenfunktionen f_k mit $\|f - f_k\|_{L^\infty} \to 0$ für $k \to \infty$.*

Der Beweis funktioniert analog auch für $\mathbb{K}^n$-wertige Funktionen statt für reellwertige Funktionen.

Beweis. Setze $R := \|f\|_{L^\infty}$. Zerlege $[-R, R]$ für $k \in \mathbb{N}$ in endlich viele (ohne Einschränkung nichtleere) Intervalle A_i, $1 \leq i \leq n_k$, mit $\operatorname{diam} A_i \leq \frac{1}{k}$. Wähle $a_i \in A_i$. Wir erhalten

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n_k} \chi_{f^{-1}(A_i)} a_i \right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}.$$

Die Behauptung folgt. □

Wir erinnern an das aus den Übungen bekannte Lemma von Urysohn im Spezialfall metrischer Räume:

Theorem 3.3.3 (Lemma von Urysohn)**.** *Seien A, B disjunkte abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes E. Dann gibt es eine stetige Funktion $f\colon E \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit $A = f^{-1}(\{0\})$ und $B = f^{-1}(\{1\})$.*

Beweis. Die Funktion $f\colon E \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,A)}{\operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(x,B)}$$

leistet das Gewünschte. □

Um mit stetigen Funktionen approximieren zu können, benötigen wir noch ein vorbereitendes Resultat. Die folgenden Resultate gelten nicht nur im $\mathbb{R}^k$, siehe [11], wir beschränken uns jedoch auf diesen wichtigsten Fall:

Theorem 3.3.4 (Lusin)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und μ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^N$. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Sei $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$ und gelte $f = 0$ außerhalb von A. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $g \in C_c^0(\Omega)$ (stetig mit kompaktem Träger) mit*

$$\mu(\{x \in \Omega \colon f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\Omega} |g(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Beweis. Die Supremumsschranke werden wir erst ganz am Schluss beweisen.

Nehme zunächst an, dass A kompakt ist und $0 \le f \le 1$ gilt. Sei s_n eine approximierende Folge wie im Beweis von Theorem 3.3.1. Setze $t_0 := s_0$, $t_n := s_n - s_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist $2^n t_n$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $T_n \subset A$ und es gilt $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Fixiere eine offene Menge V mit $A \subset V$, so dass $\overline{V} \subset \Omega$ kompakt ist. Dann gibt es (z. B. [14, Lebesguesches Maß], [11, Theorem 2.17]) kompakte Teilmengen K_n und offene Teilmengen V_n mit $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ und $\mu(V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es stetige Funktionen h_n mit $h_n = 1$ in K_n und $h_n = 0$ außerhalb von V_n. Definiere nun $g(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h_n(x)$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist g stetig. Weiterhin gilt $\operatorname{supp} g \subset \overline{V}$. Nun gilt $2^{-n} h_n(x) = t_n(x)$ außerhalb von $V_n \setminus K_n$. Also erhalten wir $f = g$ außerhalb von $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (V_n \setminus K_n)$. Diese Ausnahmemenge hat jedoch höchstens Maß 2ε. Dies zeigt die Behauptung, falls A kompakt ist und $0 \le f \le 1$ gilt.

Als nächstes gilt die Behauptung auch, wenn A nicht kompakt ist, da es zu A eine kompakte Menge K mit $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ gibt.

Gelte nun auch nicht mehr notwendigerweise $0 \le f \le 1$. Definiere $B_n := \{x \in \Omega \colon |f(x)| > n\}$. Es gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Wir erhalten $\mu(B_n) \to 0$, da die Funktionen $f_n = \chi_{\{x\in A\colon |f(x)|<n\}}$ monoton gegen die integrierbare Funktion χ_A konvergieren. Außer auf B_n gilt $f = (1 - \chi_{B_n})f$ und $(1 - \chi_{B_n})f$ ist beschränkt. Daher folgt auch der allgemeine Fall.

Falls g die Supremumsabschätzung nicht erfüllt, ersetze g durch

$$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } |g(x)| \le \sup |f|, \\ \frac{g(x)}{|g(x)|} \cdot \sup |f| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $\hat{g}$ stetig. Die Behauptung folgt. □

Theorem 3.3.5. *Sei $1 \le p < \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und μ das Lebesguemaß. Dann gilt*

$$\overline{C_c^0(\Omega)}^{L^p(\Omega,\mu)} = L^p(\Omega,\mu).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei s wie in Theorem 3.3.1. Da solche Treppenfunktionen dicht in $L^p(\Omega, \mu)$ liegen, genügt es, s bis auf $\varepsilon > 0$ in $L^p(\Omega, \mu)$ zu approximieren. Nach Lusin gibt es eine Funktion $g \in C_c^0(\Omega)$ mit $g(x) = s(x)$ außerhalb einer Menge vom Maß kleiner als ε mit $\|g\|_{L^\infty} \le \|s\|_{L^\infty}$. Somit folgt

$$\|g - s\|_{L^p} \le 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_{L^\infty}.$$

Somit folgt die Behauptung. □

3.4. **Der Satz von Radon-Nikodym $\star$.** Wir folgen [11, Theorem 6.10]. Eine ähnliche Darstellung findet sich in [2, Satz 4.11].

Bemerkung 3.4.1. Wir bezeichnen hier auch eine auf einer σ-Algebra definiertes Prämaß $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ als Maß. Ein Maß in unserem bisherigen Sinne erhalten wir dann, wenn wir die Carathéodory-Hahn-Erweiterung von μ betrachten, die wir hier auch wieder mit μ bezeichnen wollen.

Bemerkung 3.4.2.
(i) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Ein komplexes Maß ist eine Funktion $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu(E) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i),$$

wobei die Mengen $E_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind und $E = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$ gilt, die Mengen $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bilden also eine Partition von $E \in \mathcal{A}$. (Die Summe muss absolut konvergieren, da wir auch umordnen könnten.)
(ii) Wir bezeichnen ein Maß mit Werten in $[0, \infty]$ auch als positives Maß um den Unterschied zu betonen.
(iii) Wir möchten ein positives Maß λ mit $|\mu(E)| \le \lambda(E)$ für alle $E \in \mathcal{A}$ finden. Gibt es solch ein Maß λ, so muss

$$\lambda(E) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(E_i) \ge \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

für alle Partitionen $\{E_i\}_i$ von E mit $E_i, E \in \mathcal{A}$ gelten. Dies legt die folgende Definition nahe.

Definition 3.4.3. Sei μ ein komplexes Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann definieren wir für $E \in \mathcal{A}$

$$|\mu|(E) := \sup \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(E_i)|,$$

wobei wir das Supremum über alle Partitionen $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von E mit $E_i \in \mathcal{A}$ bilden. $|\mu|$ heißt das **totale Variationsmaß** oder die **totale Variation** von μ.

Obwohl wir $|\mu|$ bereits als Maß bezeichnet haben, ist noch zu zeigen, dass $|\mu|$ tatsächlich ein Maß ist.

Theorem 3.4.4. *Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist das totale Variationsmaß $|\mu|$ ein positives (Prä-)maß auf $\mathcal{A}$.*

Beweis.
- Sei $\{E_i\}_i$ eine Partition von $E \in \mathcal{A}$, $E_i \in \mathcal{A}$. Seien $t_i \in \mathbb{R}$ mit $t_i < |\mu|(E_i)$. Nach Definition des totalen Variationsmaßes gibt es daher für alle i Partitionen $\{A_{ij}\}_j$ von E_i mit

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mu(A_{ij})| > t_i.$$

Da $\{A_{ij}\}_{i,j}$ eine Partition von E ist, erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{\infty} t_i \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E).$$

Wir können nun auf der linken Seite zum Supremum über alle möglichen t_i's übergehen und erhalten

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E).$$

- Sei umgekehrt $\{A_j\}_j$ eine Partition von E, $A_j \in \mathcal{A}$. Dann ist $\{A_j \cap E_i\}_i$ eine Partition von A_j und $\{A_j \cap E_i\}_j$ ist eine Partition von E_i. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} |\mu(A_j)| &= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\mu|(E_i).\end{aligned}$$

Da dies für jede Partition $\{A_j\}_j$ von E gilt, dürfen wir auf der linken Seite zum Supremum übergehen und erhalten $|\mu|(E) \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty} |\mu|(E_i)$.

Diese beiden Ungleichungen liefern die σ-Additivität. □

Lemma 3.4.5. *Seien $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Teilmenge $S \subset \{1, \dots, N\}$ mit*

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

Beweis. Wir schreiben $z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Für ϑ mit $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ definieren wir

$$S(\vartheta) := \{k\colon\, \cos(\alpha_k - \vartheta) \geq 0\}.$$

Es folgt

$$\left| \sum_{k \in S(\vartheta)} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S(\vartheta)} e^{-i\vartheta} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{k \in S(\vartheta)} e^{-i\vartheta} z_k = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos_+(\alpha_k - \vartheta).$$

Sei ϑ_0 so gewählt, dass die rechte Seite dieser Abschätzung, die in ϑ stetig ist, für dieses ϑ maximal wird und definiere $S = S(\vartheta_0)$. Dieses Maximum ist mindestens der Durchschnittswert über $\vartheta \in [-\pi, \pi]$. Wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos_+(\alpha - \vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}$$

unabhängig von α ist dieser Durchschnitt nach unten durch $\frac{1}{\pi} \sum\limits_{i=1}^{N} |z_k|$ abgeschätzt und wir erhalten die Behauptung. □

Theorem 3.4.6. *Sei μ ein komplexes Maß auf einer σ-Algebra über X. Dann gilt $|\mu|(X) < \infty$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass es ein $E \in \mathcal{A}$ mit $|\mu|(E) = \infty$ gibt. Wir definieren $t = \pi(1 + |\mu(E)|)$ mit $|\cdot|$ weiter außen als oben. Wegen $|\mu|(E) > t$ gibt es eine Partition $\{E_i\}_i$, $i \geq 1$, von E, $E_i \in \mathcal{A}$, mit $\sum\limits_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$ für ein genügend großes $N \in \mathbb{N}$. Wir wenden nun Lemma 3.4.5 auf $z_i = \mu(E_i)$ an und erhalten mit $A = \bigcup_{i \in S} E_i$

$$|\mu(A)| > \frac{t}{\pi} > 1.$$

Für $B := E \setminus A$ erhalten wir daher

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

Wir haben also $E = A \dot\cup B$ mit $|\mu(A)| > 1$ und $|\mu(B)| > 1$. Da $|\mu|$ ein σ-additives Maß ist, folgt $|\mu|(A) = \infty$ oder $|\mu|(B) = \infty$.

Ist nun $|\mu|(X) = \infty$, so können wir nach Obigem X als $X = A_1 \dot\cup B_1$ mit $|\mu(A_1)| > 1$ und $|\mu|(B_1) = \infty$ aufteilen. Ebenso erhalten wir $B_1 = A_2 \dot\cup B_2$ mit $|\mu(A_2)| > 1$ und $|\mu|(B_2) = \infty$. Induktiv erhalten wir disjunkte Mengen $\{A_i\}_i$ mit $|\mu(A_i)| > 1$ für $i \geq 1$. Die σ-Additivität von μ impliziert nun

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Die Summe auf der rechten Seite kann aber wegen $|\mu(A_i)| > 1$ nicht konvergieren. Widerspruch. □

Bemerkung 3.4.7. Die komplexen Maße auf einer gemeinsamen σ-Algebra $\mathcal{A}$ bilden mit $(\mu + \lambda)(E) := \mu(E) + \lambda(E)$ und $(c\mu)(E) := c\mu(E)$ für $E \in \mathcal{A}$ und $c \in \mathbb{K}$ einen Vektorraum. Mit $\|\mu\| := |\mu|(X)$ wird dies zu einem normierten Raum.

Bemerkung 3.4.8 (und Definition)**.** Sei μ ein reelles Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, d. h. ein komplexes Maß, das nur reelle Werte annimmt. μ wird auch als ein signiertes Maß bezeichnet. Für $|\mu|$ wie oben setzen wir

$$\mu^+ := \tfrac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad \text{und} \quad \mu^- := \tfrac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Dann sind $\mu^\pm$ positive (kleine Übung) und nach Theorem 3.4.6 beschränkte Maße auf $\mathcal{A}$. Es gelten $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. μ^+ heißt die positive Variation von μ, μ^- die negative.

Definition 3.4.9 (absolutstetig)**.** Seien μ ein positives Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und λ ein weiteres positives, reell- oder komplexwertiges Maß auf $\mathcal{A}$.

(i) Dann heißt λ **absolutstetig** bezüglich μ, $\lambda \ll \mu$, falls aus $\mu(E) = 0$ auch $\lambda(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{A}$ folgt.
(ii) Gibt es $A \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ für alle $E \in \mathcal{A}$, so heißt λ auf A **konzentriert**.
(iii) Gibt es disjunkte Mengen $L, M \in \mathcal{A}$, so dass λ auf L und μ auf M konzentriert sind, so heißen λ und μ **wechselseitig singulär zueinander**, $\lambda \perp \mu$.

Es gelten die folgenden einfach einzusehenden Eigenschaften:

Proposition 3.4.10. *Seien $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ positive oder komplexe Maße und sei μ ein positives Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gelten:*

(i) Ist λ auf A konzentriert, so auch $|\lambda|$.
(ii) Aus $\lambda_1 \perp \lambda_2$ folgt $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.
(iii) Aus $\lambda_1 \perp \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu$ folgt $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.
(iv) Aus $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \ll \mu$ folgt $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.
(v) Aus $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu$ folgt $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
(vi) Aus $\lambda \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu$ folgt $\lambda = 0$.

Beweis. Übung. □

Als technisches Lemma im Beweis des Satzes von Radon-Nikodym benötigen wir

Lemma 3.4.11. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Dann gibt es eine Funktion $w \in L^1(\mu)$ mit $0 < w(x) < 1$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(E_n) < \infty$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Wir definieren $w_n \colon X \to \mathbb{R}$ durch $w_n := \frac{\chi_{E_n}}{2^{n+1}(1+\mu(E_n))}$. Dann leistet $w := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ das Gewünschte. □

Die zweite Aussage des folgenden Theorems wird wir als Satz von Radon-Nikodym bezeichnet.

Theorem 3.4.12 (Radon-Nikodym)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und λ ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$.*

(i) Dann gibt es komplexe Maße λ_a und λ_s auf $\mathcal{A}$ mit $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ und $\lambda_s \perp \mu$. (Lebesguezerlegung)
(ii) Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $h \in L^1(\mu)$ mit

$$\lambda_a(E) = \int\limits_E h\, d\mu$$

für alle $E \in \mathcal{A}$.

Bemerkung 3.4.13.

(i) Die Funktion h heißt Radon-Nikodym Ableitung von λ_a bezüglich μ. Wir schreiben $d\lambda_a = h\, d\mu$ oder $h = \frac{d\lambda_a}{d\mu}$.
(ii) Die Zerlegung in λ_a und λ_s im Satz von Radon-Nikodym folgt im Falle eines σ-endlichen positiven Maßes λ aus dem endlichen Fall. λ_a und λ_s sind ebenfalls σ-endliche positive Maße. Ist λ ein endliches Maß, so auch λ_a und λ_s.
(iii) Ist X lediglich σ-endlich für das Maß λ, so schreiben wir $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit $\lambda(X_n) < \infty$ für disjunkte Mengen $X_n \in \mathcal{A}$. Dann können wir den Satz von Radon-Nikodym auf die Maße $E \mapsto \lambda(E \cap X_n)$ anwenden und erhalten nach Aufsummieren eine Lebesguezerlegung von λ sowie eine messbare Funktion h mit

$$\lambda_a(E) = \int\limits_E h\, d\mu$$

für alle $E \in \mathcal{A}$. Es gilt $h \in L^1\left(\bigcup\limits_{i=0}^N X_n, \mathbb{R}, \mu\right)$ für beliebige $N \in \mathbb{N}$, jedoch im Allgemeinen nicht mehr $h \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$.
(iv) Zur Eindeutigkeit der Lebesguezerlegung von λ bezüglich μ: Sei (λ'_a, λ'_s) eine weitere solche Zerlegung. Dann folgen $\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s$, $\lambda'_a - \lambda_a \ll \mu$ und $\lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$. Somit erhalten wir nach Proposition 3.4.10 $\lambda'_a - \lambda_a = 0 = \lambda_s - \lambda'_s$.
(v) Zur Eindeutigkeit der Radon-Nikodym Ableitung: Seien h_1 und h_2 zwei solche Ableitungen. Dann ist $\{x \in X : h_1(x) - h_2(x) > 0\} \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge (Details: Übung). Durch Vertauschen der Rollen von h_1 und h_2 erhalten wir die Eindeutigkeit.

Der folgende Beweis geht auf John von Neumann zurück.

Beweis von Theorem 3.4.12. Sei λ zunächst ein positives endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Wir definieren durch $d\varphi := d\lambda + w\, d\mu$ mit w wie in Lemma 3.4.11 vermöge

$$\int\limits_X f\, d\varphi := \int\limits_X f\, d\lambda + \int\limits_X fw\, d\mu$$

für charakteristische Funktionen $f = \chi_E$ ein positives endliches Maß φ auf $\mathcal{A}$. (Wir hätten φ auch direkt als Maß definieren können, indem wir $w := \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i\chi_{E_i}$ schreiben und $\varphi(A) := \lambda(A) + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i\mu(E_i \cap A)$ definieren.) Die Integralgleichheit überträgt sich auf einfache Funktionen f und auf beliebige nichtnegative messbare Funktionen f.

Sei nun $f \in L^2(\varphi)$ beliebig. Dann erhalten wir aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\int\limits_X f\,d\lambda\right| \le \int\limits_X |f|\,d\lambda \le \int\limits_X |f|\,d\varphi \le \left(\int\limits_X |f|^2\,d\varphi\right)^{1/2} \cdot \underbrace{(\varphi(X))^{1/2}}_{<\infty}.$$

Somit ist $f \mapsto \int\limits_X f\,d\lambda$ ein beschränktes lineares Funktional auf $L^2(\varphi)$. Daher gibt es nach dem Satz von Riesz ein (eindeutig bestimmtes) $g \in L^2(\varphi)$ mit

$$\int\limits_X f\,d\lambda = \int\limits_X fg\,d\varphi$$

für alle $f \in L^2(\varphi)$. Den Satz von Riesz werden wir zwar erst als Theorem 5.2.8 behandeln, jedoch ist der Beweis dort unabhängig von diesem Kapitel.

Sei $E \in \mathcal{A}$ mit $0 < \varphi(E) < \infty$. Wir wenden diese Identität auf $f = \chi_E$ an und erhalten wegen $0 \le \lambda \le \varphi$

$$0 \le \frac{1}{\varphi(E)} \int\limits_E g\,d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \le 1 = \frac{1}{\varphi(E)} \int\limits_E 1\,d\varphi.$$

Somit folgt $g(x) \in [0,1]$ für fast alle $x \in X$ (Details: Übung). Ohne Einschränkung dürfen wir daher $g(x) \in [0,1]$ für alle $x \in X$ annehmen. Unter Benutzung der Definition von φ erhalten wir

$$\int\limits_X f\,d\lambda = \int\limits_X fg\,d\varphi = \int\limits_X fg\,d\lambda + \int\limits_X fgw\,d\mu$$

und somit

$$\int\limits_X (1-g)f\,d\lambda = \int\limits_X fgw\,d\mu. \tag{3.1}$$

Wir definieren nun Mengen

$$A := \{x \in X : 0 \le g(x) < 1\} \quad \text{und} \quad B := \{x \in X : g(x) = 1\}$$

sowie Maße λ_a und λ_s durch

$$\lambda_a(E) := \lambda(A \cap E) \quad \text{sowie} \quad \lambda_s(E) := \lambda(B \cap E)$$

für alle $E \in \mathcal{A}$.

Wir benutzen nun (3.1) mit $f = \chi_B$ und erhalten $0 = \int\limits_B w\,d\mu$. Wegen $w(x) > 0$ für alle $x \in X$ erhalten wir $\mu(B) = 0$. Somit folgt $\lambda_s \perp \mu$.

Nun verwenden wir (3.1) mit $f = (1 + g + \ldots + g^n)\chi_E$, wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $E \in \mathcal{A}$ sind, und erhalten

$$\int\limits_E 1 - g^{n+1}\,d\lambda = \int\limits_E g(1 + g + \ldots + g^n)w\,d\mu.$$

In B gilt $g = 1$ und somit $1 - g^{n+1} = 0$. In A gilt $g^{n+1} \searrow 0$ für $n \to \infty$. Aufgrund des Satzes über monotone Konvergenz folgt für die linke Seite

$$\int\limits_E 1 - g^{n+1}\, d\lambda \to \lambda(A \cap E) = \lambda_a(E).$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist nichtnegativ und in n monoton wachsend. Sei h der punktweise monotone Grenzwert für $n \to \infty$. Dann folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int\limits_E g(1 + g + \ldots + g^n) w\, d\mu \to \int\limits_E h\, d\mu$$

für $n \to \infty$. Also folgt

$$\lambda_a(E) = \int\limits_E h\, d\mu$$

für alle $E \in \mathcal{A}$. Wählen wir insbesondere $E = X$, so folgt aus der Endlichkeit von λ bzw. λ_a auch $h \in L^1(\mu)$.

$\lambda_a \ll \mu$ ist wegen $\lambda_a(E) = \int\limits_E h\, d\mu$ klar.

Ist λ komplexwertig, so zerlegen wir $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ mit reellwertigen Maßen λ_i und wenden das obige Argument auf die positiven und negativen Variationen $\lambda_i^\pm$ von λ_i an. □

Das nachfolgende Theorem erklärt, warum wir von Absolutstetigkeit sprechen.

Theorem 3.4.14. ⋆ *Seien λ, μ endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $\lambda \ll \mu$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $E \in \mathcal{A}$ die Implikation $\mu(E) < \delta \implies \lambda(E) < \varepsilon$ gilt.

Beweis.

- „(ii) $\implies$ (i)“: Klar.
- „(i) $\implies$ (ii)“: Angenommen, (ii) wäre falsch. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Gegenbeispielfolge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(E_n) < 2^{-n}$ und $\lambda(E_n) \ge \varepsilon$. Wir setzen

$$A_n := \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \quad \text{und} \quad A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Dann folgt $\mu(A_n) < 2^{-n+1}$ und $A_n \supset A_{n+1}$. Also ist $\mu(A) = 0$ aufgrund der Stetigkeit des Maßes von oben. Weiterhin gilt aufgrund der Stetigkeit des Maßes von oben und der Endlichkeit

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \ge \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) \ge \varepsilon.$$

Dies widerspricht jedoch $\lambda \ll \mu$ und wir erhalten die Behauptung. □.

3.5. **Dualraum** ⋆. Die Aussage von Theorem 3.5.1 ist kein Zusatzstoff.

Aus Theorem 3.5.2 folgt der wichtige Spezialfall:

Theorem 3.5.1. *Sei $\mu = \mathcal{L}^n$ das n-dimensionale Lebesgemaß und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien $1 \le p < \infty$ und $1 < q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $(L^p(\Omega))^* \cong L^q(\Omega)$. Der Isomorphismus ist dadurch gegeben, dass wir $f \in L^q(\Omega)$ vermöge*

$$g \mapsto \int\limits_\Omega f \cdot g\, d\mathcal{L}^n \quad \text{für } g \in L^p(\Omega)$$

als Element des Dualraumes von $L^p(\Omega)$ auffassen.

Beweis. Trivialer Teil. Aufgrund der Hölderschen Ungleichung ist

$$|f(g)| \le \|f\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Daher ist das Integral wohldefiniert und $\int\limits_\Omega f \cdot \square \, d\mathcal{L}^n \in L\left(L^p(\Omega), \mathbb{R}\right)$. □

Theorem 3.5.2. *Seien μ (ein Radonmaß) und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $1 \le p < \infty$. Sei $q \in (1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $f \in L^q(\Omega)$. Definiere $J\colon L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ durch*

$$(J(f))(g) := \int\limits_\Omega g\bar{f} \quad \text{für } g \in L^p(\Omega).$$

Dann ist J ein konjugiert linearer isometrischer Isomorphismus.

Siehe [2, Satz 4.12] für eine allgemeinere Formulierung des Satzes mit σ-endlichen Maßräumen, d. h. der Raum ist abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes.

Der Dualraum von L^∞ ist nicht L^1 sondern größer: Auf $C^0\left(\overline{\Omega}\right) \subset L^\infty(\Omega)$ definieren wir $\delta_x(f) := f(x)$. Dies ist ein stetiges lineares Funktional auf C^0 mit der Supremumsnorm. Dann lässt sich dies nach dem Satz von Hahn-Banach, Theorem 4.1.3, zu einem stetigen linearen Funktional auf L^∞ fortsetzen.

q heißt der zu p konjugierte oder duale Exponent. Er wird auch mit p' bezeichnet.

Beweis.

(i) Nach der Hölderschen Ungleichung gilt $\|J(f)\| \le \|f\|_{L^q}$. Somit ist J wohldefiniert. Klar ist, dass J konjugiert linear ist.

(ii) J ist injektiv: Dies folgt aus dem Lemma von Du Bois Reymond, siehe 12.1.4, oder explizit wie folgt: Aus $J(f) = 0$ folgt im Fall $p > 1$ mit $g := |f|^{q-2} f \in L^p(\Omega)$ (da $|g|^p = |f|^q \in L^1$ ist) $(J(f))(g) = \int\limits_\Omega |f|^q = 0$ Somit ist $f = 0$ und wir erhalten die Injektivität für $p > 1$. Im Fall $p = 1$ ist mit $f \in L^\infty$ die Funktion $g := \chi_{\Omega_i} f \in L^1$, wobei $\Omega_i \nearrow \Omega$ eine Ausschöpfung von Ω durch Mengen von endlichem Maß ist. Somit folgt aus $0 = Jf$ auch $0 = (J(f))(g) = \int\limits_{\Omega_i} |f|^2$ und daher $f = 0$ (fast überall) in Ω_i. Mit $i \to \infty$ erhalten wir $f = 0$.

(iii) J ist normtreu: Für $p > 1$ gelten mit $g := |f|^{q-2} f$

$$\|g\|_{L^p} = \left(\int |f|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\int |f|^q\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^q\right)^{\frac{q-1}{q}} = \|f\|_{L^q}^{q-1}$$

und

$$|(Jf)(g)| = \int |f|^q = \|f\|_{L^q}^q = \|f\|_{L^q} \cdot \|f\|_{L^q}^{q-1} = \|f\|_{L^q} \cdot \|g\|_{L^p}.$$

Also ist $\|Jf\| \ge \|f\|_{L^q}$.

Ohne Einschränkung dürfen wir $f \not\equiv 0$ annehmen. Im Fall $p = 1$ wählen wir zu $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \subset \Omega$ sodass ohne Einschränkung $|f| \ge \sup|f| - \varepsilon \equiv M - \varepsilon > 0$ in A und $0 < |A| < \infty$ gelten. Setze

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f}{M \cdot |A|} & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gelten $1 \geq \|g\|_{L^1} \geq \frac{M-\varepsilon}{M}$ und

$$|(Jf)(g)| \geq \int \frac{f\bar{f}}{M \cdot |A|}\chi_A \geq \int \frac{(M-\varepsilon)^2}{M}\frac{\chi_A}{|A|} = \int\limits_A \frac{(M-\varepsilon)^2}{M} \underbrace{\frac{M}{|f|}}_{\geq 1} \underbrace{\frac{|f|\chi_A}{M \cdot |A|}}_{=g}$$

$$\geq \frac{(M-\varepsilon)^2}{M} \cdot \|g\|_{L^1} \to M \cdot \|g\|_{L^1} = \sup |f| \cdot \|g\|_{L^1}$$

für $\varepsilon \to 0$. Also erhalten wir $\|Jf\| \geq \|f\|_{L^\infty}$.

(iv) Sei $F \in (L^p(\Omega))^*$. Wir behaupten, dass es ein $f \in L^q(\Omega)$ mit

$$F = J(f) \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^q} \leq \|F\|_{(L^p)^*}$$

gibt. Die zweite Behauptung folgt zwar bereits aus der ersten und dem, was wir bereits oben gezeigt haben, sie ist jedoch im Beweis trotzdem nützlich.

(v) Sei zunächst $|\Omega| < \infty$. Wir wollen nachweisen, dass ν, durch $\nu(E) := F(\chi_E)$ für messbare Mengen definiert, die Voraussetzungen des Satzes von Radon-Nikodym erfüllt. Betrachte dazu disjunkte messbare Mengen $E_1, \ldots, E_m \subset \Omega$ mit $\nu(E_i) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m |\nu(E_i)| &= \sum_{i=1}^m \sigma_i \nu(E_i), \quad \text{wobei } \sigma_i := \frac{\overline{\nu(E_i)}}{|\nu(E_i)|} \text{ ist,} \\
&= F\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i \chi_{E_i}\right) \leq \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \left\|\sum_{i=1}^m \sigma_i \chi_{E_i}\right\|_{L^p} \\
&= \|F\| \cdot \left(\sum_{i=1}^m |E_i|\right)^{1/p}, \quad \text{da } |\sigma_i| = 1, \\
&\leq \|F\| \cdot |\Omega|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Somit ist die totale Variation von ν ein endliches Maß: $|\nu|(\Omega) < \infty$. Daher ist auch ν ein endliches Maß.

Seien nun $E_i \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, messbar mit $E_i \subset E_{i+1}$ und gelte $E = \bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i$. Wir erhalten

$$|\nu(E) - \nu(E_i)| = |F(\chi_{E \setminus E_i})| \leq \|F\|_{(L^p)^*} \cdot |E \setminus E_i|^{1/p} \to 0$$

für $i \to \infty$ aus dem Satz von der dominierten Konvergenz. Dies ist äquivalent zur σ-Additivität für disjunkte Mengen A_k, denn es gilt

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) - \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^i \nu(A_k) = \lim_{i\to\infty} \left\{\nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) - \nu\left(\bigcup_{k=1}^i A_k\right)\right\} = 0.$$

Somit ist ν σ-additiv und daher ein Maß. Die Absolutstetigkeit ist klar.

Somit können wir den Satz von Radon-Nikodym anwenden und erhalten $f \in L^1(\Omega)$ mit

$$\nu(E) = F(\chi_E) = \int\limits_\Omega \chi_E \bar{f}$$

für alle messbaren Mengen E. Nach Lemma 3.3.2 lassen sich Funktionen $g \in L^\infty(\Omega)$ durch endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen χ_E mit messbaren Mengen $E \subset \Omega$ in L^∞ approximieren. Es gilt $L^\infty \subset L^p$. Somit ist F auch auf L^∞ stetig und wir erhalten

$$F(g) = \int\limits_\Omega g\bar{f} \tag{3.2}$$

für alle $g \in L^\infty$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le Q < \infty$. Wir setzen

$$A_m := \{x \in \Omega \colon 0 < |f(x)| \le m\}$$

und

$$g := \chi_{A_m} |f|^{Q-2} f.$$

Dann ist $g \in L^\infty$ und wir erhalten aus (3.2)

$$\int\limits_{A_m} |f|^Q = F(g) \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \|g\|_{L^p} = \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \left(\int\limits_{A_m} |f|^{p(Q-1)} \right)^{1/p}.$$

Ist $p > 1$, so verwenden wir $Q = q$. Dann folgt $p(Q-1) = q$. Also folgt durch Kürzen

$$\left(\int\limits_{A_m} |f|^q \right)^{1/q} \le \|F\|_{(L^p)^*}.$$

Lasse nun $m \to \infty$. Dann folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz $f \in L^q(\Omega)$ und $\|f\|_{L^q(\Omega)} \le \|F\|$.

Ist $p = 1$, so wählen wir $Q \in \mathbb{N}$ und erhalten per Induktion

$$\int\limits_{A_m} |f|^Q \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \int\limits_{A_m} |f|^{Q-1} \le \|F\|^Q_{(L^p)^*} \cdot |A_m|.$$

Hieraus folgt

$$\|\chi_{A_m} f\|_{L^Q(\Omega)} = \left(\int\limits_{A_m} |f|^Q \right)^{1/Q} \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot |A_m|^{1/Q} \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot |\Omega|^{1/Q}.$$

Mit $Q \to \infty$ folgt $\|\chi_{A_m} f\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|F\|_{(L^p)^*}$. Mit $m \to \infty$ folgt $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|F\|_{(L^p)^*}$ wie behauptet.

Die Gleichung (3.2) gilt für $g \in L^\infty(\Omega)$. Da solche Funktionen dicht in $L^p(\Omega)$ liegen, siehe z. B. Theorem 3.3.5, können wir auf beiden Seiten eine gegebene Funktion $g \in L^p(\Omega)$ durch $g_k \in L^\infty(\Omega)$ approximieren und erhalten, da die rechte Seite aufgrund der L^q-Abschätzung für f nach Hölder stetig ist, $F = J(f)$:

$$F(g) \leftarrow F(g_k) = \int\limits_\Omega g_k \bar{f} \to \int\limits_\Omega g \bar{f}.$$

Dies zeigt die Behauptung im Fall $|\Omega| < \infty$.

(vi) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. (Dieser Teil ist im Euklidischen technisch einfacher als der Beweis für allgemeine σ-endliche Maßräume.) Wähle eine Ausschöpfung von Ω durch Mengen Ω_m, $m \in \mathbb{N}$, mit $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$ sowie $|\Omega_m| < \infty$. (Bis auf die Endlichkeit des Maßes wird dies auch mit $\Omega_m \nearrow \Omega$ abgekürzt.) Wir definieren $F_m(g) := F(\chi_{\Omega_m} g)$ für $g \in L^p(\Omega_m)$ (ohne Notationsänderung durch 0 nach $\Omega \setminus \Omega_m$ fortgesetzt; die charakteristische Funktion steht nur der Deutlichkeit halber da) und erhalten $\|F_m\|_{(L^p(\Omega_m))^*} \le \|F\|_{(L^p(\Omega))^*}$, da $L^p(\Omega_m) \subset L^p(\Omega)$ vermöge dieser Fortsetzung. Somit ist $F_m \in (L^p(\Omega_m))^*$. Nach Teil (v) existiert somit für jedes $m \in \mathbb{N}$

genau ein $f_m \in L^q(\Omega_m)$ (das wir ohne Notationsänderung ebenfalls durch 0 fortsetzen) mit

$$F_m(g) = \int\limits_{\Omega} g\overline{f_m} = \int\limits_{\Omega_m} g\overline{f_m}$$

für alle $g \in L^p(\Omega_m)$. Ebenfalls nach (v) gilt $\|f_m\|_{L^q(\Omega_m)} = \|F_m\|_{(L^p(\Omega_m))^*}$. Wie beim Beweis der Injektivität sieht man, dass $f_m = f_k$ fast überall in $\Omega_m \cap \Omega_k$ gilt. Somit erhalten wir $|f_m| \le |f_k|$ für $\Omega_m \subset \Omega_k$. Weiterhin folgt in diesem Fall

$$\|f_m\|_{L^q(\Omega)} \le \|f_k\|_{L^q(\Omega)} = \|F_k\|_{(L^p(\Omega_k))^*} \le \|F\|_{(L^p(\Omega))^*} < \infty.$$

Wir definieren

$$f(x) := f_m(x) \quad \text{für ein } m \text{ mit } x \in \Omega_m.$$

Es folgt $\|f\|_{L^q(\Omega)} \le \|F\|_{(L^p)^*} < \infty$ nach dem Satz über die dominierte Konvergenz.

Sei nun $g \in L^p(\Omega)$ beliebig. Wir setzen $g_m := \chi_{\Omega_m} g$ und erhalten $g_m \to g$ für $m \to \infty$ in L^p, da $p < \infty$. Es gilt

$$F(g_m) = F_m(g_m) = \int\limits_{\Omega_m} g_m\overline{f_m} = \int\limits_{\Omega} g_m \bar{f} = (J(f))(g_m).$$

Lasse nun $m \to \infty$. Da $f \in L^q(\Omega)$ ist, konvergieren beide Seiten der Gleichung. Somit gilt $F(g) = (J(f))(g)$ für alle $g \in L^p(\Omega)$. Also folgt $F = J(f)$ mit $f \in L^q(\Omega)$.

Wir haben bereits ganz am Anfang nachgewiesen, dass J eine Isometrie ist, also $\|F\|_{(L^p)^*} = \|J(f)\|_{(L^p)^*} = \|f\|_{L^q}$ gilt. □

Korollar 3.5.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann sind für $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in L^p(\Omega)$

(ii) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *und es gibt ein* $c > 0$ *mit* $\left|\int\limits_{\Omega} \zeta f\right| \le c \cdot \|\zeta\|_{L^q(\Omega)}$ *für alle* $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ist eine dieser beiden Aussagen erfüllt, so gilt $c \ge \|f\|_{L^p(\Omega)}$.

Beweis. Die Aussage über c folgt aus dem ersten Teil („(i)$\Longrightarrow$(ii)") für $1 < p < \infty$, da in der Hölderschen Ungleichung Gleichheit gilt, wenn f^p und g^q (in der dortigen Notation) Vielfache voneinander sind: Mit $g := |f|^{p/q}\frac{\bar{f}}{|f|}$ und als 0 definiert, falls der Nenner verschwindet erhalten wir stets mit Gleichheit

$$\left|\int\limits_{\Omega} fg\right| = \int\limits_{\Omega} |f| \cdot |f|^{p/q} = \|f\|_{L^p} \cdot \left\||f|^{p/q}\right\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Dies zeigt die Behauptung, falls zufälligerweise $g \in C_c^\infty$ gilt. Sonst approximieren wir g durch C_c^∞-Funktionen bezüglich der L^q-Norm. Bis auf einen kleinen Fehler gilt die obige Gleichheit dann auch für die approximierenden Funktionen und wir erhalten die Behauptung über c.

Für $p = 1, \infty$ lassen wir das als einfache Übung.

„(i)$\Longrightarrow$(ii)": Aus der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\left|\int\limits_{\Omega} \zeta f\right| \le \|\zeta\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Nach Voraussetzung ist F mit $F(\zeta) := \int\limits_\Omega \zeta f$ auf $C_c^\infty(\Omega)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$ stetig. Ist $p > 1$, so gilt $q < \infty$ und $C_c^\infty(\Omega)$ liegt nach Theorem 3.3.5 und Glättung bezüglich $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$ dicht in L^q. Also lässt sich F nach Theorem 2.2.9 eindeutig zu einem stetigen Funktional $\tilde F$ auf $L^q(\Omega)$ fortsetzen. Dieses läßt sich nach Theorem 3.5.2 mit $\tilde f \in L^p(\Omega)$ als $\tilde F(g) = \int\limits_\Omega g\tilde f$ für alle $g \in L^q(\Omega)$ darstellen. Dabei durften wir die komplexe Konjugation auch weglassen. Es gilt $\int\limits_\Omega gf = \int\limits_\Omega g\tilde f$ für alle $g \in C_c^\infty(\Omega)$. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, Lemma 12.1.4, folgt daher $f = \tilde f$ fast überall.

Sei nun $p = 1$. Wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{für } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $D \Subset \Omega$ und $(\eta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Standard Diracfolge wie bei Glättungen. Für kleines $\varepsilon > 0$ gilt $\zeta_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_D g) \in C_c^\infty(\Omega)$. Nach Voraussetzung folgt

$$\left|\int\limits_\Omega \zeta_\varepsilon f\right| \le c \cdot \|\zeta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le c.$$

Aus der L^1-Konvergenz $\zeta_\varepsilon \to \chi_D g$ folgt, dass eine Teilfolge punktweise fast überall konvergiert. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir hieraus

$$\int\limits_D |f| = \left|\int\limits_D gf\right| \le c.$$

□

4. Der Satz von Hahn-Banach

4.1. **Der Satz von Hahn-Banach.** Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass sich ein lineares Funktional normerhaltend fortsetzen lässt. Der Beweis benutzt das Zornsche Lemma.

Lemma 4.1.1 (Zornsches Lemma, Erinnerung $\star$)**.** *Sei M eine nichtleere Menge mit einer Teilordnung $\le$. Nimm an, dass jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) eine obere Schranke $b \in M$ besitzt, d. h. dass $x \le b$ für alle $x \in \Lambda$ gilt. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d. h. ein Element $x_0 \in M$, so dass aus $x \le x_0$ bereits $x = x_0$ folgt. (Beachte, dass x_0 i. a. nicht eindeutig bestimmt ist.)*

Für einen Beweis aus dem Auswahlaxiom verweisen wir auf Literatur oder Veranstaltungen zur Logik. Das Zornsche Lemma wurde bereits beim Beweis, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, benutzt.

Wir zeigen zwei Varianten des Satzes von Hahn-Banach. Zunächst behandeln wir die etwas allgemeinere Version mit einer konvexen Funktion.

Theorem 4.1.2 (Satz von Hahn-Banach (mit einer konvexen Funktion))**.** *Sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ linear. Sei $p\colon E \to \mathbb{R}$ konvex und gelte $\varphi \le p$ auf W. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\tilde\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ von φ mit $\tilde\varphi \le p$, d. h. eine lineare Abbildung $\tilde\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde\varphi|_W = \varphi$ und $\tilde\varphi \le p$.*

Beweis.

(i) Sei $x_0 \notin W$. Wir wollen φ zunächst auf $W \oplus \langle x_0\rangle$ fortsetzen. Jedes Element $x \in W \oplus \langle x_0\rangle$ läßt sich in der Form $x = w + \lambda x_0$ mit $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen. Sei ψ eine lineare Fortsetzung von φ. Dann folgt

$$\psi(x) = \psi(w) + \lambda\psi(x_0) = \varphi(w) + \lambda\psi(x_0).$$

Können wir $\psi(x_0)$ so wählen, dass $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in W \oplus \langle x_0\rangle$ gilt, so ist ψ die gesuchte Fortsetzung auf $W \oplus \langle x_0\rangle$.

Somit ist zu zeigen, dass $\psi(x_0)$ so gewählt werden kann, dass $\varphi(w) + \lambda\psi(x_0) \le p(w + \lambda x_0)$ für alle $\lambda \neq 0$ und alle $w \in W$ gilt. Dies ist (nach Unterscheidung für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$) äquivalent zu

$$\sup_{\substack{w\in W\\ \mu>0}} \frac{\varphi(w) - p(w - \mu x_0)}{\mu} \le \psi(x_0) \le \inf_{\substack{z\in W\\ \lambda>0}} \frac{p(z + \lambda x_0) - \varphi(z)}{\lambda}.$$

Dazu wollen wir nachweisen, dass für alle $w, z \in W$ und alle $\lambda, \mu > 0$

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{p(z+\lambda x_0)}{\lambda} + \frac{p(w-\mu x_0)}{\mu}\right) \ge \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\varphi(w)}{\mu} + \frac{\varphi(z)}{\lambda}\right)$$

gilt. Der zusätzliche Vorfaktor erleichtert nun die Rechnungen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\lambda+\mu}p(z+\lambda x_0) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}p(w-\mu x_0)\\
\ge{}& p\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}x_0 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w - \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}x_0\right)\\
={}& p\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w\right) \ge \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w\right)\\
={}& \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(z) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(w).
\end{aligned}$$

Somit läßt sich φ wie gewünscht auf $W \oplus \langle x_0\rangle$ fortsetzen.

(ii) Die Fortsetzung auf ganz E erhalten wir mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Betrachte dazu die Menge $\mathcal{M}$ aller linearen Fortsetzungen ψ von φ mit $\psi \le p$, d. h. die Menge aller Tupel (ψ, U), wobei $U \subset E$ ein Unterraum mit $W \subset U$ ist, $\psi|_W = \varphi$ und $\psi \le p$ in U gelten. (φ, W) ist selber eine Fortsetzung von φ, also ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Auf $\mathcal{M}$ definieren wir eine Halbordnung durch $(\psi, U) \le \big(\tilde\psi, V\big)$, falls $U \subset V$ und $\tilde\psi|_U = \psi$ gelten. Sei also $\Lambda \subset \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$, $\Lambda = \{(\psi_i, U_i) \colon i \in I\}$ für eine geeignete Indexmenge. Dann ist durch (ψ, U) mit $U := \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ und $\psi(x) := \psi_i(x)$ für $x \in U_i$ eine obere Schranke gegeben: $U \subset E$ ist ein Unterraum, ψ ist wohldefiniert, linear, stimmt auf W mit φ überein und erfüllt $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in U$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Element. Dieses muss auf ganz E definiert sein, denn sonst könnte man es nach den obigen Überlegungen auf $U \oplus \langle x_0\rangle$ für ein $x_0 \in E\setminus U$ fortsetzen. Dies widerspräche der Maximalität. □

Theorem 4.1.3 (Satz von Hahn-Banach)**.** *Sei E ein normierter Raum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi \in W^*$. Dann gibt es eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde\varphi \in E^*$ von φ, d. h. eine Abbildung $\tilde\varphi \in E^*$ mit $\tilde\varphi|_W = \varphi$ und $\|\tilde\varphi\| = \|\varphi\|$.*

Beweis.

(i) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt dies gerade aus dem Satz von Hahn-Banach mit einer konvexen Funktion: Die Norm ist wegen

$$\|tx + (1-t)y\| \le \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\|$$

für alle $x, y \in E$ und $t \in [0, 1]$ konvex. Sei ohne Einschränkung $\|\varphi\| = 1$. Setze $p(x) := \|x\|$. Dann gilt $\varphi(x) \le \|x\|$. Für die Fortsetzung $\tilde\varphi$ erhalten wir

$$\pm\tilde\varphi(x) = \tilde\varphi(\pm x) \le p(\pm x) = \|x\|,$$

also $\|\tilde\varphi\| \le 1$ und

$$\|\tilde\varphi\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|\tilde\varphi(x)\| \ge \sup_{\substack{x\in W\\ \|x\|=1}} \|\tilde\varphi(x)\| = \sup_{\substack{x\in W\\ \|x\|=1}} \|\varphi(x)\| = 1.$$

Somit ist $\|\tilde{\varphi}\| = 1$. Mo 10.05.2021

(ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wir fassen E als reellen Vektorraum auf und bezeichnen diesen mit $E_\mathbb{R}$. Sei $\varphi \in E^*$. Es gilt $\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i \operatorname{Im}\varphi$. Wegen

$$\operatorname{Re}\varphi(ix) + i \operatorname{Im}\varphi(ix) = \varphi(ix) = i\varphi(x) = i \operatorname{Re}\varphi(x) - \operatorname{Im}\varphi(x)$$

gilt $\operatorname{Re}\varphi(ix) = -\operatorname{Im}\varphi(x)$. $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ sind reelle Formen auf $E_\mathbb{R}$. Daher können wir jede komplexe Form φ als

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) - i \operatorname{Re}\varphi(ix) \tag{4.1}$$

für $x \in E$ schreiben. Umgekehrt sei ψ eine reellwertige Form auf $E_\mathbb{R}$. Dann wird durch

$$\varphi(x) := \psi(x) - i\psi(ix)$$

eine komplexe Form auf E definiert, es gilt nämlich insbesondere $\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = i\psi(x) - i^2\psi(ix) = i\varphi(x)$. Für die Norm gilt $\|\varphi\| = \|\psi\|$, denn es gilt einmal $|\varphi(x)| = \sqrt{|\psi(x)|^2 + |\psi(ix)|^2} \geq |\psi(x)|$. Andererseits gibt es zu $x \in E$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi(x)| = e^{it}\varphi(x) = \varphi\left(e^{it}x\right)$. Da ψ reellwertig ist und $|\varphi(x)| \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$|\varphi(x)| = \psi\left(e^{it}x\right) \leq \|\psi\| \cdot \|x\|$$

für alle $x \in E$.

Sei also $\varphi \in W^*$. Setze $\psi := \operatorname{Re}\varphi \in (W_\mathbb{R})^*$. Dann besitzt ψ eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\psi}$ nach $E_\mathbb{R}$. Somit ist

$$\tilde{\varphi}(x) := \tilde{\psi}(x) - i\tilde{\psi}(ix)$$

für $x \in E$ eine normerhaltende Fortsetzung von φ auf E. Wegen (4.1) handelt es sich um eine Fortsetzung. $\square$

Korollar 4.1.4. *Sei E ein normierter Raum und E^* sein Dualraum. Sei $x \in E$. Dann gilt*

$$\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in E^*,\\ \|\varphi\|=1}} |\langle x, \varphi\rangle|.$$

Das Supremum wird angenommen, d. h. es gibt ein $\varphi \in E^*$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\|x\| = |\langle x, \varphi\rangle|$.

Beweis. Aus $|\langle x, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|$ folgt $\sup\limits_{\substack{\varphi \in E^*,\\ \|\varphi\|=1}} |\langle x, \varphi\rangle| \leq \|x\|$.

Sei $x \in E$ beliebig mit $x \neq 0$, ohne Einschränkung gelte $\|x\| = 1$. Dann definieren wir $\varphi\colon \langle x\rangle \to \mathbb{K}$ durch $\varphi(\lambda x) := \lambda$. Aus $|\varphi(\lambda x)| = |\lambda| = |\lambda| \cdot \|x\|$ folgt $\|\varphi\| = 1$. Sei $\tilde{\varphi}$ die normerhaltende Fortsetzung von φ auf E. Dann folgt

$$\|x\| = 1 = \langle x, \tilde{\varphi}\rangle \leq \sup_{\substack{\varphi \in E^*,\\ \|\varphi\|=1}} |\langle x, \varphi\rangle|. \qquad \square$$

Korollar 4.1.5. *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein linearer Teilraum, d. h. Unterraum, und $x_0 \in X$. Setze $d := \inf\limits_{y \in M} \|x_0 - y\|$. Sei $d > 0$. Dann gibt es $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x_0) = d$ und $\varphi|_M = 0$.*

Beweis. Definiere λ auf $M \oplus \langle x_0\rangle$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$ für $y \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda\| &= \sup_{\substack{y+\alpha x_0 \neq 0\\ y \in M,\, \alpha \in \mathbb{K}}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K}\\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K}\\ z \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|-\alpha z + \alpha x_0\|}\\ &= \sup_{z \in M} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf\limits_{z \in M} \|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1.\end{aligned}$$

Eine normtreue Fortsetzung φ aus dem Satz von Hahn-Banach liefert die Behauptung. $\square$

Theorem 4.1.6 (Trennungssatz)**.** *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Sei $x_0 \in \complement M$. Dann gibt es ein $\varphi \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{Re} \varphi(x) \le \alpha \quad \textit{für } x \in M \quad \textit{und} \quad \operatorname{Re} \varphi(x_0) > \alpha.$$

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei ohne Einschränkung $0 \in \mathring{M}$. (Durch Verschiebung können wir ohne Einschränkung $0 \in M$ annehmen. Zeigen wir dann die Behauptung für $\tilde{M} := \overline{\bigcup\limits_{x \in M} B_r(x)}$ für ein kleines $r > 0$, so folgt die Behauptung.) Definiere das Minkowski-Funktional

$$p(x) := \inf \left\{ r > 0 \colon \frac{x}{r} \in M \right\}$$

für $x \in X$. Wegen $0 \in \mathring{M}$ gilt $0 \le p(x) < \infty$ für alle $x \in X$. Es ist $p \le 1$ in M, $p(x_0) > 1$ und $p(0) = 0$. Für $\lambda \ge 0$ gilt $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Sind $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in M$ mit $r, s > 0$, so folgt aufgrund der Konvexität auch $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s} \frac{x}{r} + \frac{s}{r+s} \frac{y}{s} \in M$. Somit erhalten wir $p(x+y) \le p(x) + p(y)$. Hieraus folgt, dass p eine konvexe Funktion ist. Definiere $f \colon \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ durch $f(\lambda x_0) := \lambda p(x_0)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt $f(\lambda x_0) = p(\lambda x_0)$ für $\lambda \ge 0$ und $f(\lambda x_0) \le 0 \le p(\lambda x_0)$ für $\lambda \le 0$. Somit gibt es nach Hahn-Banach eine lineare Fortsetzung $F \colon X \to \mathbb{R}$ von f mit $F \le p$. Es gilt $F \le p \le 1$ in M. Daher ist F stetig, Details dazu siehe weiter unten. Weiterhin gilt $F(x_0) = f(x_0) = p(x_0) > 1$.

Da es ein $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(0)} \subset M$ gibt, erhalten wir $\frac{x}{\frac{1}{\rho}\|x\|} \in M$ für beliebiges $x \in X$, also $p(x) \le \frac{1}{\rho}\|x\|$ und damit $F(x) \le \frac{1}{\rho}\|x\|$. Ebenso folgt $-F(x) = F(-x) \le \frac{1}{\rho}\|x\|$. Somit ist F stetig und wir erhalten die Behauptung mit $\alpha = 1$ und $\varphi = F$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so fassen wir X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und erhalten ein $F_\mathbb{R} \in X^*_\mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Wie beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach erhält man die Aussage für $\varphi(x) = F(x) := F_\mathbb{R}(x) - iF_\mathbb{R}(ix)$. $\square$

5. Hilberträume

5.1. Hilberträume.

Definition 5.1.1. $\star$ Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf H ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle u, u \rangle \ge 0$ für alle $u \in H$; $\langle u, u \rangle = 0$ gilt genau dann, wenn $u = 0$ ist,
(ii) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ sowie $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ für alle $u, v, w \in H$,
(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in H$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$,
(iv) $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$.

Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum H mit einem Skalarprodukt nennen wir **Skalarproduktraum** oder **Prähilbertraum**.

Beispiele 5.1.2. $\star$

(i) Auf $H = \mathbb{K}^n$ mit $x = \left(x^i\right)_{1 \le i \le n}, y \in H$ ist
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i \overline{y^i}$$
ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $H = L^2(\Omega)$ ist
$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \overline{g}$$
ein Skalarprodukt.

Beachte, dass das Integral aufgrund der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert ist, es gilt nämlich

$$\left|\int_\Omega f\overline{g}\right| \le \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int |g|^2\right)^{1/2}.$$

(iii) Analog sieht man, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit $\left\langle \left(x^i\right), \left(y^i\right)\right\rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i \overline{y^i}$ ein Prähilbertraum ist.

Theorem 5.1.3. ⋆ *Sei H ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ eine Norm auf H.*

Auf Skalarprodukträumen wollen wir stets diese Norm verwenden.

Beweis. Lineare Algebra. □

Theorem 5.1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** ⋆ *Sei H ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$ für alle $u, v \in H$.*

Beweis. Lineare Algebra. □

Definition 5.1.5. ⋆ Ist ein Skalarproduktraum H mit der induzierten Norm bzw. Metrik vollständig, so nennen wir H einen **Hilbertraum**.

Bemerkung 5.1.6. Sei H ein Skalarproduktraum und $\hat{H}$ seine Vervollständigung als metrischer Raum. Seien $H \ni u_n \to u \in \hat{H}$ sowie $H \ni v_n \to v \in \hat{H}$. Dann lässt sich das Skarprodukt auf genau eine Art und Weise stetig nach $\hat{H}$ fortsetzen, sodass $\hat{H}$ ein Hilbertraum wird, nämlich durch

$$\langle u, v\rangle_{\hat{V}} := \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle_V.$$

Lemma 5.1.7 (Parallelogrammgleichung)**.** *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

für alle $u, v \in H$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Lemma 5.1.8 (Polarisationsformel)**.** *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2$$

für $\mathbb{R}$-Vektorräume und

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \equiv \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2$$

für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum und alle $x, y \in H$.

Mit der Polarisationsformel kann man aus der Norm eines Skalarproduktraumes das Skalarprodukt rekonstruieren.

Weiterhin folgt aufgrund der Stetigkeit der Norm, dass die Abbildung $H \times H \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Beweis. Direktes Nachrechnen. Im komplexen Fall ergeben die Terme mit i gerade den Imaginärteil. □

Definition 5.1.9. ⋆ Sei H ein Prähilbertraum.

(i) Zwei Vektoren $u, v \in H$ heißen **orthogonal**, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt. Wir schreiben $u \perp v$.

(ii) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Vektoren heißt **orthonormal**, falls $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$ gilt.

(iii) Zwei Unterräume $U_1, U_2 \subset H$ stehen **orthogonal** aufeinander, $U_1 \perp U_2$, falls $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt.

(iv) Sei $U \subset H$ beliebig. Dann ist das **orthogonale Komplement** $U^\perp$ durch

$$U^\perp := \{v \in H : \langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

definiert.

Lemma 5.1.10. *Sei H ein Hilbertraum, $M \subset H$ beliebig.*

(i) Dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

(ii) Es gilt $M^\perp = (\overline{M})^\perp = \langle M\rangle^\perp$. Auch mehrfaches Bilden der linaren Hülle oder Abschließen verändert das Ergebnis nicht mehr.

(iii) Es gilt $M \cap M^\perp \subset \{0\}$.

(iv) Es gilt $M^{\perp\perp} = \overline{\langle M\rangle}$.

Beweis.

(i) Sei $y \in H$. Definiere f durch $x \mapsto \langle x, y\rangle$. Da f stetig ist, ist $\{y\}^\perp = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Wegen $M^\perp := \bigcap\limits_{y\in M} \{y\}^\perp$ ist auch $M^\perp$ abgeschlossen.

Der Nachweis, dass $M^\perp$ ein Unterraum ist, ist einfach.

(ii) Aus $A \subset B$ folgt stets $A^\perp \supset B^\perp$. Also ist nur $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$ und $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$ zu zeigen.

(a) $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \overline{M}$. Dann ist $\langle x, y\rangle = 0$ zu zeigen. Zu y gibt es $y_n \in M$ mit $y_n \to y$. Da das Skalarprodukt stetig ist, folgt aus $0 = \langle x, y_n\rangle$ auch $0 = \langle x, y\rangle$.

(b) $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \langle M\rangle$. Dann gibt es endlich viele $m_i \in M$ und $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le N$, mit $y = \sum\limits_{i=1}^N \lambda^i m_i$. Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle m_i, x\rangle = \langle y, x\rangle.$$

Die Inklusion folgt.

(iii) Sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann folgt $0 = \langle x, x\rangle$, also $x = 0$. (Ist M ein Unterraum, so gilt Gleichheit.)

(iv) Übung. ☐

Mo 17.05.2021

Proposition 5.1.11 (Pythagoras)**.** *Sei H ein Skalarproduktraum. Sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Sei $x \in H$. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2.$$

Beweis. Schreibe

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_1} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_2}.$$

Dann gilt $u_1 \perp u_2$. Also folgt $\|x\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ durch direktes Ausmultiplizieren. Aufgrund der Orthogonalität der $(x_i)_i$ erhalten wir weiterhin

$$\|u_1\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2.$$

Somit folgt die behauptete Gleichheit. ☐

Korollar 5.1.12 (Besselsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Prähilbertraum und sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Dann folgt

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2$$

für alle $x \in H$.

Aufgrund der Monotonie der Summe und der gleichmäßigen oberen Schranke $\|x\|^2$ gilt die Ungleichung auch für beliebige, d. h. nicht notwendigerweise endliche, orthonormale Familien in H.

Definition 5.1.13.

(i) Seien H_1, H_2 Prähilberträume. Dann heißt $U \in L(H_1, H_2)$ **Isometrie**, falls

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H_1$ gilt.

(ii) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann heißt eine surjektive Isometrie **Hilbertraumisomorphismus** oder **unitär**. Gibt es einen Hilbertraumisomorphismus $U \in L(H_1, H_2)$, so heißen H_1 und H_2 **isomorph**.

Definition 5.1.14 (Direkte Summe)**.**

(i) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann definieren wir die **direkte Summe** als den Vektorraum $H_1 \oplus H_2 := \left\{\left(x^1, x^2\right) : x^1 \in H_1,\, x^2 \in H_2\right\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \left(x^1, x^2\right), \left(u^1, u^2\right)\right\rangle := \left\langle x^1, u^1\right\rangle + \left\langle x^2, u^2\right\rangle.$$

(ii) Seien $(H_i)_{i\in I}$ Hilberträume. Dann definieren wir

$$\bigoplus_{i\in I} H_i := \left\{\left(x^i\right)_{i\in I} : x^i \in H_i \,\forall\, i \in I \text{ und } \sum_{i\in I} \left\|x^i\right\|_{H_i}^2 < \infty\right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \left(x^i\right), \left(y^i\right)\right\rangle := \sum_{i\in I} \left\langle x^i, y^i\right\rangle.$$

Bemerkung 5.1.15.

(i) Die direkte Summe von Hilberträumen ist wieder ein Hilbertraum. Bei der unendlichen direkten Summe geht man dabei analog zum Beweis für $l^2(\mathbb{N})$ vor um die Vollständigkeit nachzuweisen.

(ii) In der (Linearen) Algebra fordert man, dass nur in endlich vielen Komponenten ein von Null verschiedener Eintrag stehen darf. Hier bekommt man mit einer solchen Forderung aber i. a. keinen vollständigen Raum. Nach Definition können aber höchstens abzählbar viele Einträge von Null verschieden sein; sonst konvergiert die Summe nicht.

(iii) Den Nachweis, dass die unendliche Summe, mit der wir das Skalarprodukt definieren, existiert, führt man wie bei l^2 oder L^2.

(iv) Versieht man die l^2-Norm mit Gewichten, betrachtet also $\sum\limits_{i\in I} a_i\langle x_i, y_i\rangle$ für $a_i > 0$, so bekommt man i. a. keine Isometrie $x \mapsto x$ zwischen solchen Hilberträumen mit unterschiedlichen Gewichten, die beiden Normen sind i. a. nicht einmal äquivalent.

5.2. **Projektion auf konvexe Teilmengen.**

Definition 5.2.1 (Konvexität)**.** $\star$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $K \subset V$ **konvex**, falls für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0,1]$ auch

$$tx + (1-t)y \in K$$

gilt.

Theorem 5.2.2 (Projektion auf konvexe Teilmengen)**.**
Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $y_0 \in H$. Dann gibt es genau ein nächstes Element $x_0 \in K$, d. h. ein $x_0 \in K$ mit $\|x_0 - y_0\| \le \|x - y_0\|$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wir benutzen die sogenannte direkte Methode der Variationsrechnung. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Minimalfolge für die Funktion $K \ni x \mapsto \|x - y_0\|$, gelte also $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_0\| = \inf\limits_{x\in K} \|x - y_0\| =: d$. Zunächst wollen wir nachweisen, dass x_n eine Cauchyfolge ist. Aufgrund der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n - y_0\|^2 + 2\|x_m - y_0\|^2 - 4\Bigg\| \underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in K} - y_0 \Bigg\|^2 \\ &\le 2\|x_n - y_0\|^2 + 2\|x_m - y_0\|^2 - 4d^2 \to 0 \end{aligned}$$

für $\min\{m,n\} \to \infty$. Da K als abgeschlossene Teilmenge von H vollständig ist, existiert $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in K. Da die Norm auf H stetig ist, folgt $\|x_0 - y_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_0\| = d$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\hat{x}_0 \in K$ ein weiteres nächstes Element. Da wir gezeigt haben, dass jede Minimalfolge eine Cauchyfolge ist, gilt dies auch für die Folge

$$z_n := \begin{cases} x_0 & \text{für gerades n,} \\ \hat{x}_0 & \text{für ungerades n.} \end{cases}$$

Somit erhalten wir $x_0 = \hat{x}_0$. $\square$

Bemerkung 5.2.3. $\star$

(i) Da H möglicherweise unendlichdimensional ist, konnten wir hier keine Kompaktheit von $\overline{B_1(0)}$ nutzen.
(ii) Die Eindeutigkeit hängt mit strikter Konvexität der Einheitskugeln $B_1(0)$ zusammen und ist in $\ell^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ nicht mehr gegeben: $K = \overline{B_1(0)}$ und $y_0 = (0,3)$.

Als Vorbereitung für den Nachweis der Stetigkeit von π zeigen wir

Lemma 5.2.4. *Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere konvexe Teilmenge. Seien $x \in H$ und $p \in K$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $\|x - p\| = \inf\limits_{q\in K} \|x - q\|$ *und*
(ii) $\operatorname{Re}\langle x - p, k - p\rangle \le 0$ *für alle* $k \in K$.

Beweis. Wir lassen den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ als leichte Übung. Dazu füge man im folgenden Beweis fünfmal einen Realteil ein. Sei also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- „(i) $\implies$ (ii)“: Sei $k \in K$ beliebig. Dann gilt $p + \lambda(k - p) \in K$ für alle $0 \le \lambda \le 1$. Nach Voraussetzung gilt die erste Ungleichung in
$$\begin{aligned} \|x - p\|^2 \le \|x - (p + \lambda(k - p))\|^2 &= \|(x - p) - \lambda(k - p)\|^2 \\ &= \|x - p\|^2 - 2\lambda\langle x - p, k - p\rangle + \lambda^2\|k - p\|^2. \end{aligned}$$
Für $\lambda > 0$ erhalten wir $2\langle x - p, k - p\rangle \le \lambda\|k - p\|^2$ und somit im Grenzwert $\lambda \downarrow 0$ die Behauptung.

- „(ii) $\implies$ (i)": $\star$ (Diesen Teil der Äquivalenz benötigen wir später nicht mehr.) Ohne Einschränkung dürfen wir $x \neq p$ annehmen, denn sonst sind beide Aussagen trivialerweise erfüllt.

  Sei $k \in K$ beliebig. Dann erhalten wir mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (ii)
$$\begin{aligned}\|x-k\| &\overset{\text{CSU}}{\geq} \left\langle x-k, \frac{x-p}{\|x-p\|}\right\rangle \\ &= \left\langle x-p-(k-p), \frac{x-p}{\|x-p\|}\right\rangle \\ &= \|x-p\| - \frac{1}{\|x-p\|}\langle k-p, x-p\rangle \\ &\overset{\text{(ii)}}{\geq} \|x-p\|\end{aligned}$$
  wie behauptet. $\square$

Als Folgerung erhalten wir daraus

Theorem 5.2.5. *Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $\pi\colon H \to K$ die nach Therem 5.2.2 wohldefinierte Abbildung, die $x \in H$ den Punkt $p \in K$ mit $\|x-p\| = \inf\limits_{q\in K} \|x-q\|$ zuordnet. Dann ist π stetig; es gilt sogar $\|\pi(x)-\pi(y)\| \leq \|x-y\|$ für alle $x, y \in H$.*

Beweis. Wir beschränken uns wieder auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und lassen den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ als leichte Übung.

Seien $x, y \in H$ beliebig. Aus Lemma 5.2.4 (ii) erhalten wir wegen $\pi(y) \in K$
$$\langle x-\pi(x), \pi(y)-\pi(x)\rangle \leq 0,$$
woraus
$$\langle \pi(x), \pi(x)-\pi(y)\rangle \leq \langle x, \pi(x)-\pi(y)\rangle$$
folgt und ebenso mit $\pi(x) \in K$ aus $\langle y-\pi(y), \pi(x)-\pi(y)\rangle \leq 0$ oder aus Symmetriegründen
$$\langle -\pi(y), \pi(x)-\pi(y)\rangle \leq \langle -y, \pi(x)-\pi(y)\rangle.$$
Durch Aufsummieren erhalten wir daraus die erste Ungleichung und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die zweite Ungleichung in
$$\begin{aligned}\|\pi(x)-\pi(y)\|^2 &= \langle \pi(x)-\pi(y), \pi(x)-\pi(y)\rangle \\ &\overset{\text{s. o.}}{\leq} \langle x-y, \pi(x)-\pi(y)\rangle \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x-y\| \cdot \|\pi(x)-\pi(y)\|.\end{aligned}$$
Dies liefert die Behauptung im Fall $\pi(x) \neq \pi(y)$ und auch im (trivialen) Fall $\pi(x) = \pi(y)$. $\square$

Bemerkung 5.2.6. $\star$ Die Beweise von Lemma 5.2.4 und Theorem 5.2.5 sind geometrisch durch Überlegungen im $\mathbb{R}^2$ motiviert, die aber auch in beliebigen Hilberträumen gelten.

(i) Lemma 5.2.4: Wir nehmen an, dass (i) gilt. Die Bedingung $\langle x-p, k-p\rangle \leq 0$ definiert einen abgeschlossenen Halbraum, dessen Rand p enthält, in dem Punkte $k \in K$ liegen dürfen. Gibt es einen Punkt $k \in K$ außerhalb dieses Halbraums, so liegt auch die konvexe Verbindung zwischen k und p in K. Diese hat dann aber nahe p einen nichttrivialen Schnitt mit der offenen Kreisscheibe mit Radius $\|x-p\|$ um x. Dies widerspricht der Tatsache, dass p auf dem Rand der Kreisscheibe den Abstand zu x minimiert.

(ii) Theorem 5.2.5: Sei $\pi(x) \neq \pi(y)$. Sei $S := \{tx + (1-t)y \colon 0 \le t \le 1\}$ die Verbindungsstrecke zwischen x und y, $P := \{t\pi(x) + (1-t)\pi(y) \colon 0 \le t \le 1\}$ die Verbindungsstrecke zwischen $\pi(x)$ und $\pi(y)$ sowie $G := \{t\pi(x) + (1-t)\pi(y) \colon t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch $\pi(x)$ und $\pi(y)$. Dann haben wir nachgewiesen, dass die orthogonale Projektion von S auf G länger ist als P. Die verwendeten Ungleichungen besagen sogar, dass die orthogonale Projektion von S auf G die Strecke P umfasst. Beachte dazu, dass die orthogonale Projektion $p(x)$ von x auf G durch

$$p(x) := \left\langle x - \pi(y), \frac{\pi(x)-\pi(y)}{\|\pi(x)-\pi(y)\|} \right\rangle \frac{\pi(x)-\pi(y)}{\|\pi(x)-\pi(y)\|} + \pi(y)$$

gegeben ist. Dann ergibt sich auf G die folgende Anordnung der vier Punkte: $p(x), \pi(x), \pi(y), p(y)$, gegebenenfalls mit Gleichheit oder in umgedrehter Anordnung. In Formeln drückt sich dies durch

$$\langle p(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y)\rangle \ge \langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y)\rangle$$

aus. Durch Einsetzen von $p(x) - \pi(y)$ sehen wir nach ein wenig Vereinfachung, dass dies äquivalent zu

$$\langle x - \pi(y), \pi(x) - \pi(y)\rangle \ge \langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y)\rangle$$

oder $\langle x, \pi(x) - \pi(y)\rangle \ge \langle \pi(x), \pi(x) - \pi(y)\rangle$ ist. Somit ergibt sich gerade eine der im Beweis verwendeten Ungleichungen. Die andere ist symmetrisch dazu.

(iii) Ähnliche Argumente führen zur Aussage, dass für zwei konvexe Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \mathbb{R}^2$ mit Rändern aus endlich vielen Geradenstücken für die Längen $L(\partial K_1) \le L(\partial K_2)$ gilt. Entsprechendes gilt auch für beliebige Mengen im $\mathbb{R}^n$.

Di 25.05.2021

Zu Theorem 5.2.2 erhalten wir

Korollar 5.2.7. *Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann können wir jeden Vektor $z \in H$ eindeutig als $z = x + y$ mit $x \in M$ und $y \in M^\perp$ schreiben, d. h. es gilt $H = M \oplus M^\perp$.*

Aus der Konstruktion und Theorem 5.2.5 erhalten wir, dass (x, y) stetig von z abhängt.

Im nachfolgenden Beweis und gegebenenfalls später notieren wir manchmal nur den Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn sich der Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ leicht aus dem Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ablesen lässt.

Beweis. Sei $z \in H$. Sei $x \in M$ der Punkt in M mit minimalem Abstand zu z. Solch ein x existiert nach Theorem 5.2.2. Setze $y := z - x$.

Wir behaupten, dass $y \in M^\perp$ ist. Nach Definition von x folgt

$$\|z-x\|^2 \le \|z - x + \lambda u\|^2 = \|z-x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle u, z-x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $u \in M$. Aus $0 \le \operatorname{Re}(\lambda\langle u, z-x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$ folgt für reelle λ, dass $0 = \operatorname{Re}(\langle u, z-x\rangle)$ und für $\lambda = -it$, $t \in \mathbb{R}$, dass $0 = \operatorname{Im}(\langle u, z-x\rangle)$ gilt. Also ist $y \in M^\perp$.

Zur Eindeutigkeit: Gelte $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ mit $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M^\perp$. Dann folgt $M \ni x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M^\perp$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ erhalten wir hieraus $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. □

Theorem 5.2.8 (Riesz). *Sei X ein Hilbertraum und $T \in X^*$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T\rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|x_T\|$. Die Abbildung $I\colon X^* \to X$ mit $T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d. h. bis auf komplexes Konjugieren von Skalaren linear).

Beweis.

(i) Konstruktion von x_T: $M := N(T) = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen. Also ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Theorem 5.2.7. Im Falle $M = X$ setzen wir $x_T := 0$. Gelte daher ab jetzt $M \neq X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dann folgt $Ty \neq 0$. Definiere $x_T := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Wir erhalten $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|} \neq 0$ und damit $Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2 \neq 0$.

Behauptung: Es gilt $Tx = \langle x, x_T\rangle$ für alle $x \in X$. Wir schreiben

$$x = \frac{Tx}{Tx_T} x_T + \left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T\right) =: x_\perp + x_M.$$

Die Notation legt nahe, dass $x_\perp \in M^\perp$ und $x_M \in M$ gelten. Die erste Behauptung ist klar, die zweite folgt aus

$$Tx_M = T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T\right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = 0$$

nach Definition von M. Wir erhalten aus den obigen Rechnungen

$$\langle x, x_T\rangle = \langle x_\perp + x_M, x_T\rangle = \frac{Tx}{Tx_T}\|x_T\|^2 + 0 = \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = Tx.$$

(ii) $I\colon T \mapsto x_T$ ist eine Isometrie: Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |Tx| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |\langle x, x_T\rangle| \le \|x_T\|$ sowie $\|T\| \ge \left|T\left(\frac{x_T}{\|x_T\|}\right)\right| = \|x_T\|$ aufgrund der obigen Rechnungen.

(iii) x_T ist eindeutig bestimmt: Für ein weiteres $\tilde{x}_T$ mit $Tx = \langle x, x_T\rangle = \langle x, \tilde{x}_T\rangle$ für alle x folgt $0 = \langle x, x_T - \tilde{x}_T\rangle$ für alle x; wir wählen $x = x_T - \tilde{x}_T$ und erhalten $x_T = \tilde{x}_T$.

(iv) I ist konjugiert linear: Für $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ erhalten wir

$$Tx = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x = \lambda_1\langle x, x_{T_1}\rangle + \lambda_2\langle x, x_{T_2}\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda_1} x_{T_1} + \overline{\lambda_2} x_{T_2}\right\rangle$$

und daher $IT = x_T = \overline{\lambda_1} x_{T_1} + \overline{\lambda_2} x_{T_2} = \overline{\lambda_1} IT_1 + \overline{\lambda_2} IT_2$.

(v) I ist surjektiv: Zu $y \in X$ ist durch $Tx := \langle x, y\rangle$ ein lineares Funktional mit $IT = y$ definiert.

(vi) I ist injektiv, da $\|T\| = \|x_T\|$ gilt. □

6. Der Bairesche Kategoriesatz

6.1. **Der Bairesche Kategoriesatz.**

Definition 6.1.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Eine Menge $A \subset E$ heißt **nirgends dicht**, falls $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.

(ii) Eine Menge $A \subset E$, die sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben läßt, heißt von **erster Kategorie** oder **mager**.

(iii) Eine Menge $A \subset E$, die nicht von erster Kategorie ist, heißt von **zweiter Kategorie** oder **fett**.

Beispiele 6.1.2.

(i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist von erster Kategorie.

(ii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ ist aufgrund des (nachfolgend bewiesenen) Baireschen Kategoriesatzes von zweiter Kategorie, denn sonst wäre $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen darstellbar.

Theorem 6.1.3 (Bairescher Kategoriesatz)**.** *Sei $E \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset E$ mager. Dann ist $E \setminus A$ dicht in E. Insbesondere ist E eine Menge zweiter Kategorie.*

Beweis.

(i) Da A eine Menge erster Kategorie ist, gibt es Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{mit} \quad \mathring{\overline{A_n}} = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass alle Mengen A_n abgeschlossen sind, sonst ersetzen wir sie durch $\overline{A_n}$. Definiere $G_n := E \setminus A_n \equiv \complement A_n$. Dann sind die Mengen G_n offen. Setze

$$G := \complement A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Sei nun $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen. Wir behaupten, dass $G \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Wir konstruieren eine Folge von nichtleeren offenen Kugeln B_n mit $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \subset \overline{B_n} \subset \Omega \cap G_n$ für alle n mit $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Aus der Vollständigkeit von E folgt dann

$$\emptyset \neq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_k} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \cap G_n \subset \Omega \cap G.$$

Hieraus erhalten wir den Baireschen Kategoriesatz.

(iii) Konstruktion der Kugeln B_n: Da jede der Mengen A_n abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist der Schnitt einer beliebigen nicht leeren offenen Menge mit G_n offen und nicht leer.

Somit gibt es zur offenen Menge Ω eine Kugel B_0 mit $\operatorname{diam} B_0 < 1/0 = \infty$ und $\overline{B_0} \subset \Omega \cap G_0$. Zu B_0 gibt es eine Kugel B_1 mit $\operatorname{diam}(B_1) < 1/1$ und $\overline{B_1} \subset B_0 \cap G_1$. ... Zu B_i gibt es eine Kugel B_{i+1} mit $\operatorname{diam}(B_{i+1}) < \frac{1}{i+1}$ und $\overline{B_{i+1}} \subset B_i \cap G_{i+1}$. ... Somit sind die oben verwendeten Kugeln konstruiert. □

Korollar 6.1.4. *Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von dichten offenen Teilmengen von E wieder dicht in E.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es $r > 0$ und $x \in E$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \complement \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Die Mengen $C_n := \complement A_n \cap \overline{B_r(x)}$ sind abgeschlossen und erfüllen $\mathring{C}_n = \emptyset$. Aus $\overline{B_r(x)} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ erhalten wir einen Widerspruch zum Baireschen Kategoriesatz. □

6.2. **Anwendungen des Baireschen Kategoriesatzes.**
Die Bezeichnungen „Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit“ und „Satz von Banach-Steinhaus“ sind in der Literatur nicht klar getrennt.

Theorem 6.2.1 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie in $L(E, F)$, die punktweise beschränkt ist, d. h. es gibt für alle $x \in E$ ein $c(x) > 0$ mit*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| \le c(x).$$

Dann ist die Familie gleichmäßig beschränkt, d. h. es gibt ein $C > 0$ mit

$$\sup_{i\in I} \|A_i\| \le C.$$

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$W_n := \left\{ x \in E \colon \sup_{i\in I} \|A_i x\| \le n \right\} = \bigcap_{i\in I} \underbrace{\{x \in E \colon \|A_i x\| \le n\}}_{= \text{ abgeschlossen}}.$$

W_n ist als Schnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen. Nach Voraussetzung gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz gibt es somit ein W_n mit $\mathring{W}_n \neq \emptyset$. Also gibt es $x_0 \in E$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x_0) \subset W_n$ und

$$\sup_{i\in I} \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| \le n.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $i \in I$

$$n \ge \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| = \sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i(y+x_0)\| \ge \underbrace{\sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i y\|}_{=\rho\|A_i\|} - \underbrace{\|A_i x_0\|}_{\le c(x_0)}.$$

Umordnen liefert die behauptete in $i \in I$ gleichmäßige Schranke für $\|A_i\|$. □ Mo 07.06.2021

Als direkte Folgerung erhalten wir

Theorem 6.2.2 (Banach-Steinhaus)**.** *Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $A_i \in L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist. Dann ist $(A_i)_{i\in I}$ gleichgradig stetig (d. h. δ in der üblichen Definition von Stetigkeit hängt nur von ε und x_0 und nicht von i ab). (Aufgrund der Linearität ist die Familie sogar gleichmäßig gleichgradig stetig, d. h. δ hängt auch nicht mehr von x_0 ab.)*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $i \in I$ und alle $x, y \in E$ mit $\|x-y\| < \delta$ auch $\|A_i x - A_i y\| < \varepsilon$ gilt. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es ein $c > 0$ mit $\|A_i\| \le c$ für alle i. Aus $\|A_i x - A_i y\| = \|A_i(x-y)\| \le \|A_i\| \cdot \|x-y\| \le c \cdot \|x-y\|$ sehen wir, dass die Behauptung folgt, wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$ wählen. □

Eine weitere Folgerung ist

Proposition 6.2.3. *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(E,F)$. Sei $A\colon E \to F$ eine Abbildung. Nehme an, dass $A_n x \to Ax$ für $n \to \infty$ gilt. (Die A_n's konvergieren also punktweise gegen A.) Dann ist $A \in L(E,F)$ und es gilt*

$$\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| < \infty.$$

Beweis. Es ist einfach zu sehen, dass A wieder eine lineare Abbildung ist. Wir benutzen die punktweise Konvergenz, die punktweise Beschränktheit impliziert und den Satz über die gleichmäßige Beschränktheit und erhalten

$$\liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Weiterhin gilt

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt $\|A\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$. □

Beispiel 6.2.4. ⋆ Wir definieren Abbildungen $A_n\colon l^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ durch $e_n \mapsto 1$ und $e_i \mapsto 0$ für $i \neq n$. Dann gelten $A_n x \to Ax$ für $n \to \infty$ mit $A = 0$, $\|A\| < \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$ sowie $\|A_n - A\| \not\to 0$.

Theorem 6.2.5 (Satz von der offenen Abbildung)**.**
Seien E, F Banachräume. Dann ist jede surjektive Abbildung $A \in L(E,F)$ offen.

Elementar einzusehen ist, dass jede offene Abbildung $A \in L(E,F)$ auch surjektiv ist.

Beweis.

(i) Wir bezeichnen Kugeln in E mit $B_r^E(x)$, Kugeln in F mit $B_r^F(y)$. Zunächst wollen wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ mit $B_r^F(0) \subset \overline{A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)}$ gibt: Fixiere $\varepsilon > 0$. Dann gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nB_\varepsilon^E(0)$. Da A surjektiv ist, gilt

$$F = A(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA\left(B_\varepsilon^E(0)\right).$$

Da F ein Banachraum ist, ist F ein Raum zweiter Kategorie. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{\overline{n_0 A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} = n_0 \overset{\circ}{\overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} \neq \emptyset$. Also gilt auch $\overset{\circ}{\overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} \neq \emptyset$. Es gibt also $x_0 \in B_\varepsilon^E(0)$ und $r > 0$ mit $B_r^F(0) + Ax_0 \equiv B_r^F(Ax_0) \subset \overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}$. Es folgt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$B_r^F(0) = B_r^F(Ax_0) - \underbrace{Ax_0}_{\in A(B_\varepsilon^E(0))} \subset \overline{A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)}.$$

Schön wäre es nun, noch den Abschluss auf der rechten Seite loszuwerden.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_i := \frac{\varepsilon}{2^i}$ für $i \in \mathbb{N}^+$. Dann gibt es nach Teil (i) eine Folge $r_i > 0$ mit $B_{r_i}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_i}^E(0)\right)}$. Ohne Einschränkung können wir r_i als (monotone) Nullfolge wählen. Wir behaupten, dass $B_{r_1}^F(0) \subset A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)$ gilt:

Sei $y \in B_{r_1}^F(0)$. Wegen $y \in B_{r_1}^F(0)$ und $B_{r_1}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_1}^E(0)\right)}$ gibt es ein $x_1 \in B_{\varepsilon_1}^E(0)$ mit $\|y - Ax_1\| < r_2$ (statt r_2 könnte man dies auch mit jeder anderen positiven Zahl erreichen). Nun ist $y - Ax_1 \in B_{r_2}^F(0)$ und $B_{r_2}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_2}^E(0)\right)}$. Somit gibt es $x_2 \in B_{\varepsilon_2}^E(0)$ mit $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < r_3$. Iterativ finden wir x_i's mit

$$\left\| y - A\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\| < r_{n+1}$$

für $n \geq 1$. Wegen $\|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$ ist die Reihe $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i =: x$ absolut konvergent und es gilt $\|x\| < \varepsilon$. Außerdem gilt $y = Ax$. Die Behauptung folgt.

(iii) Sei $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon^E(x_0) \subset \Omega$ gilt. Wir haben gezeigt, dass es $r > 0$ mit $B_r^F(0) \subset A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)$ gibt. Somit erhalten wir

$$B_r^F(Ax_0) = Ax_0 + B_r^F(0) \subset Ax_0 + A\left(B_\varepsilon^E(0)\right) = A\left(B_\varepsilon^E(x_0)\right) \subset A(\Omega).$$

Die Behauptung folgt, da Ax_0 ein beliebiger Punkt in $A(\Omega)$ ist. □

Korollar 6.2.6 (Satz von der inversen Abbildung)**.**
Seien E, F Banachräume. Sei $A \in L(E, F)$ bijektiv. Dann ist A ein Homöomorphismus. (Damit ist A auch ein Banachraumisomorphismus, d. h. A und A^{-1} sind linear, bijektiv und stetig.)

Zu Korollar 6.2.6 erhalten wir

Korollar 6.2.7. *Seien $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$$

für alle $x \in X$ und ein $c > 0$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d. h. es gibt $C > 0$ mit $\frac{1}{C}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $X_2 \ni x \mapsto x \in X_1$ stetig. Die Behauptung folgt also aus Korollar 6.2.6. □

7. Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

7.1. Dicht definierte Operatoren.

Bemerkung 7.1.1. Sei $X := C^0([0, 2\pi])$. Definiere auf $C^1([0, 2\pi]) \equiv D(\partial) \subset X$ den Ableitungsoperator $\partial\colon D(\partial) \to X$. Wegen $\|\partial(x \mapsto 1/n \sin(nx))\|_{C^0} = 1$ ist $\partial\colon D(\partial) \to X$ nicht stetig. Daher betrachtet man in der Funktionalanalysis auch Operatoren, die nicht auf dem gesamten Banachraum, sondern lediglich auf einer dichten Teilmenge definiert sind.

Wir schreiben $D(T)$ für den Unterraum, auf dem ein linearer Operator T definiert ist.

Definition 7.1.2. Seien X, Y normierte Räume, $D(T) \subset X$ ein linearer Teilraum und $T\colon D(T) \to Y$ linear.

(i) Dann heißt $G(T) := \{(x, Tx)\colon x \in D(T)\}$ der **Graph** von T.
(ii) T heißt **abgeschlossen**, falls $G(T) \subset X \oplus Y$ abgeschlossen ist.
(iii) T heißt **abschließbar**, falls es einen Operator $\overline{T}$ mit $G\left(\overline{T}\right) = \overline{G(T)}$ gibt.

Lemma 7.1.3. *Seien X, Y normierte Räume.*

(i) Sei $T\colon D(T) \to Y$ ein (auf einem linearen Teilraum $D(T)$ definierter) linearer Operator. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $x_n \in D(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ für ein $y \in Y$ folgt, dass $x \in D(T)$ und $Tx = y$ gelten.
(ii) Sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T abgeschlossen.

Beweis.

(i) Klar.
(ii) Sei $x_n \to x$ eine Folge mit $Tx_n \to y$. Dann gilt $Tx_n \to Tx$ aufgrund der Stetigkeit, also $Tx = y$. Somit ist T nach (i) abgeschlossen. □

Lemma 7.1.4. *Seien X, Y Banachräume und $T\colon D(T) \to Y$ ein auf einem linearen Teilraum $D(T) \subset X$ definierter linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

*auf $D(T)$ eine Norm, die **Graphennorm**. Der Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator T abgeschlossen ist.*

Beweis.
„$\Longleftarrow$“: Sei T abgeschlossen. Sei $x_n \in D(T)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_T$. Dann sind x_n und Tx_n Cauchyfolgen in X bzw. Y, es gibt also – da X und Y Banachräume sind – $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ und $Tx_n \to y$ bezüglich $\|\cdot\|_Y$. Nach Lemma 7.1.3 erhalten wir $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Somit folgt $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_T$, $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist also ein Banachraum.

„$\Longrightarrow$“: Sei $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum. Sei (x_n, Tx_n) eine Cauchyfolge in $G(T)$. Wegen $\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y$ ist x_n eine Cauchyfolge in $(D(T), \|\cdot\|_T)$, besitzt also einen Grenzwert $x \in D(T)$ mit $\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$ für $n \to \infty$. Somit gilt $(x_n, T_n x) \to (x, Tx) \in G(T)$, $G(T)$ ist also abgeschlossen. □

Als Vorbereitung für das nächste Resultat benötigen wir

Lemma 7.1.5. *Sei X ein Banachraum, sei Y ein normierter Raum und sei*

$$T\colon X \to Y$$

ein Isomorphismus normierter Räume, d. h. T ist linear, bijektiv und die Operatoren T und T^{-1} sind stetig. Dann ist auch Y ein Banachraum.

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Dann ist aufgrund der Stetigkeit auch $(T^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Also gibt es $x \in X$ mit $T^{-1}y_n \to x$. Nochmals aufgrund der Stetigkeit folgt $y_n \to Tx \in Y$. Somit ist Y ein Banachraum. □

Lemma 7.1.6. *Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein Unterraum und der lineare Operator $T\colon D(T) \to Y$ sei abgeschlossen. Dann sind die Aussagen*

(i) es gibt ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \ge c\|x\|$ für alle $x \in D(T)$ und
(ii) T ist injektiv und $R(T) = \operatorname{im}(T)$ ist abgeschlossen

äquivalent.

Mo 14.06.2021

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Wir benutzen die Graphennorm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ für $x \in X$.

Der Operator $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ mit $\tilde{T}x := Tx$ ist nach Definition surjektiv und nach (i) injektiv. Es gilt $\|Tx\|_Y \le \|x\|_X + \|Tx\|_Y \equiv \|x\|_T$ für alle $x \in D(T)$. Somit ist $\tilde{T}$ stetig mit Operatornorm $\left\|\tilde{T}\right\| \le 1$. $\tilde{T}^{-1}$ existiert und ist nach (i) wegen $2\|Tx\|_Y \ge c\|x\|_X + \|Tx\|_Y \ge \min\{c, 1\}\cdot\|x\|_T$ stetig. Somit ist $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Isomorphismus normierter Räume. Nach Lemma 7.1.4 ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum, da T nach Voraussetzung abgeschlossen ist. Nach Lemma 7.1.5 ist also auch $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum und damit insbesondere als Teilmenge von Y abgeschlossen.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Folgt direkt aus Theorem 7.1.7 (ii), angewandt auf $\hat{T}\colon D(T) \to R(T)$ mit $\hat{T}x := Tx$. □

Theorem 7.1.7 (Stetigkeit der Inversen)**.** *Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein linearer Teilraum. Sei $T\colon D(T) \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator.*

(i) Sei T surjektiv. Dann ist T eine offene Abbildung.
(ii) Ist T bijektiv, so ist $T^{-1}\colon Y \to D(T)$ stetig.

Beweis.

(i) Da T abgeschlossen ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ nach Lemma 7.1.4 ein Banachraum. Wegen $\|Tx\|_Y \le \|Tx\|_Y + \|x\|_X \equiv \|x\|_T$ ist $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $\tilde{T}x := Tx$ stetig mit Operatornorm ≤ 1.

Sei nun $U \subset D(T)$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ offen. Da $\|\cdot\|_T$ auf $D(T)$ eine feinere Topologie als $\|\cdot\|_X$ erzeugt, ist $U \subset D(T)$ auch bezüglich $\|\cdot\|_T$ offen. Somit ist $\tilde{T}U = TU \subset Y$ nach dem Satz von der offenen Abbildung, Theorem 6.2.5, offen.

(ii) Die Offenheit impliziert gerade, dass T^{-1} stetig ist. □

7.2. **Der Satz vom abgeschlossenen Graphen.**

Theorem 7.2.1 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist A genau dann stetig, wenn* $\operatorname{graph} A \subset E \times F$ *abgeschlossen ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: (Dies haben wir bereits in Lemma 7.1.3 (ii) gezeigt.) Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\operatorname{graph} A$. Es gilt $y_n = Ax_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Cauchyfolge. Da E ein Banachraum ist, gibt es ein $x \in E$ mit $x_n \to x$. Da A stetig ist, folgt $y_n = Ax_n \to Ax$. Somit folgt $(x_n, y_n) \to (x, Ax) \in \operatorname{graph} A$ und $\operatorname{graph} A$ ist abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$“: $G := \operatorname{graph} A \equiv G(A) \subset E \oplus F$ ist ein linearer Teilraum. Da G abgeschlossen ist, ist G mit der von $E \oplus F$ induzierten Norm ein Banachraum. Seien $\pi_E\colon E \times F \to E$ und $\pi_F\colon E \times F \to F$ die (stetigen) Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Die Einschränkung $\pi_E|_G\colon G \to E$ ist linear und stetig. $\pi_E|_G$

ist die Abbildung $(x, Ax) \mapsto x$. Daher ist $\pi_E|_G$ bijektiv und somit nach Korollar 6.2.6 ein Homöomorphismus. Daher ist $A = \pi_F \circ (\pi_E|_G)^{-1}$ stetig. $\square$

Theorem 7.2.2 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und*

$$T: X \to X$$

ein linearer Operator. Gelte

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

für alle $x, y \in X$. Dann ist T stetig.

Derselbe Beweis funktioniert auch, wenn es einen linearen Operator $S: X \to X$ mit $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ gibt.

Beweis. Wir weisen nach dass $G(T) \subset X \oplus X$ abgeschlossen ist. Dann folgt die Stetigkeit aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Gelte $G(T) \ni (x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Zeige, dass $(x, y) \in G(T)$ ist. Sei $z \in X$ beliebig. Dann folgt, da das Skalarprodukt stetig ist,

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Tz\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\right\rangle \\ &= \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle.\end{aligned}$$

Aus $\langle Tx - y, z\rangle = 0$ für alle $z \in X$ folgt mit $z = Tx - y$ dass $Tx = y$ gilt. $\square$

8. Das Wichtigste zu schwacher Konvergenz

Dieses Kapitel stellt die wichtigsten Definitionen, Resultate und Methoden zu schwacher Konvergenz am Beispiel des Hilbertraumes und später für den speziellen Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ dar und ist insbesondere für diejenigen gedacht, die nur den ersten Teil der Vorlesung Funktionalanalysis hören. Die anderen sollten auch die Inhalte von Kapitel 11 kennen.

In diesem Kapitel sei H stets ein reeller Hilbertraum.

8.1. **Definition und erste Resultate.**

Nach dem Satz von Riesz, Theorem 5.2.8, ist H isomorph zu H^*. Somit wird aus Definition 11.1.1

Definition 8.1.1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Folge. Dann **konvergiert** die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **schwach** gegen $x \in H$, $x_n \rightharpoonup x$, falls für alle $z \in H$

$$\langle z, x_n\rangle \to \langle z, x\rangle$$

für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 8.1.2. Um den Unterschied zu schwacher Konvergenz zu betonen, bezeichnet man die übliche Konvergenz auch häufig als **Normkonvergenz** oder **starke Konvergenz**.

Beispiel 8.1.3. Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ mit $e_n^k = \delta_n^k$ konvergiert schwach gegen Null, $e_n \rightharpoonup 0$, aber sie konvergiert nicht stark gegen Null, $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis.

(i) Sei $z \in \ell^2(\mathbb{N})$ beliebig. Aus $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(z^k\right)^2 < \infty$ folgt $z^k \to 0$ für $k \to \infty$. Nun gilt $\langle z, e_n\rangle = z^n \to 0$ für $n \to \infty$.

(ii) Andererseits gilt $\|e_n - 0\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = 1$. Somit liegt keine starke Konvergenz vor.

$\square$

Das Verhältnis zwischen starker und schwacher Konvergenz beschreibt

Lemma 8.1.4. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ und sei $x \in H$.*

(i) Aus $x_n \to x$ folgt $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$.

(ii) Der schwache Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.
(iii) Gilt $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$, so kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stark gegen einen anderen Grenzwert als x konvergieren, muss aber nicht konvergieren.

Beweis.
(i) Sei $z \in H$. Dann gilt
$$|\langle z, x_n\rangle - \langle z, x\rangle| = |\langle z, x_n - x\rangle| \le \|z\| \cdot \|x_n - x\|.$$
Hieraus folgt die Behauptung.
(ii) Angenommen, es gibt $x, y \in H$ mit $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$ für $n \to \infty$. Nach der Definition von schwacher Konvergenz erhalten wir für alle $z \in H$
$$\langle z, x_n\rangle \to \langle z, x\rangle \quad \text{und} \quad \langle z, x_n\rangle \to \langle z, y\rangle.$$
Somit gilt $\langle z, x\rangle = \langle z, y\rangle$ für alle $z \in H$. Wir wählen nun speziell $z = x - y$ und erhalten $0 = \langle z, x - y\rangle = \|x - y\|^2$. Somit folgt $x = y$ wie behauptet.
(iii) Dies folgt direkt aus (i) und (ii). Dass keine Konvergenz vorliegen muss, wissen wir bereits aus Beispiel 8.1.3. □

Für die Normen bei schwacher Konvergenz erhalten wir

Theorem 8.1.5. *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ und $x \in H$ mit $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$.*
(i) Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
(ii) Es gilt
$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Beweis.
(i) Nach Definition konvergiert $(\langle z, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $z \in H$. Daher gilt
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle z, x_n\rangle| \le c(z) < \infty.$$
Betrachten wir $x_n \in H$ vermöge $x_n(z) := \langle z, x_n\rangle$ als Abbildungen $x_n : H \to \mathbb{R}$, so folgt aus dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit, Theorem 6.2.1, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{L(H,\mathbb{R})} < \infty$. Wegen
$$\|x_n\|_{L(H,\mathbb{R})} = \sup_{z\in H\setminus\{0\}} \frac{\langle z, x_n\rangle}{\|z\|} \le \sup_{z\in H\setminus\{0\}} \frac{\|z\|_H \cdot \|x_n\|_H}{\|z\|_H} = \|x_n\|_H,$$
wobei sogar Gleichheit gilt (nehme $z = x_n$ im Falle $x_n \neq 0$), folgt die Behauptung.
(ii) Sei $z \in H$. Dann folgt
$$|\langle z, x\rangle| \leftarrow |\langle z, x_n\rangle| \le \|z\| \cdot \|x_n\|.$$
Somit erhalten wir
$$|\langle z, x\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|z\| \cdot \|x_n\|.$$
Wir wählen nun speziell $z = x$. Dann folgt $\|x\|^2 \le \|x\| \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Hieraus folgt die Behauptung im Falle $x \neq 0$ und sie gilt trivialerweise auch im Fall $x = 0$. □

Für die Kombination von starker und schwacher Konvergenz gilt

Lemma 8.1.6. *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $x_n \rightharpoonup x$ und $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Dann folgt*
$$\langle x_n, z_n\rangle \to \langle x, z\rangle.$$

Beweis. Es gilt
$$|\langle x_n, z_n\rangle - \langle x, z\rangle| \le |\langle x_n, z_n\rangle - \langle x_n, z\rangle| + |\langle x_n, z\rangle - \langle x, z\rangle|$$

$$\leq \|x_n\| \cdot \|z_n - z\| + |\langle x_n - x, z\rangle|.$$

Der erste Term konvergiert gegen Null, da schwach konvergente Folgen nach Theorem 8.1.5 beschränkt sind und der zweite Term konvergiert aufgrund der schwachen Konvergenz ebenfalls gegen Null. Somit folgt die Behauptung. □

Mo 21.06.2021

Lemma 8.1.7. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $x_n \to x$ *für* $n \to \infty$,

(ii) $\|x_n\| \to \|x\|$ *und* $x_n \rightharpoonup x$ *für* $n \to \infty$.

Beweis. Übung. Betrachte $\|x_n - x\|^2$. □

8.2. **Schwache Folgenkompaktheit.** Im $\mathbb{R}^n$ liegen beschränkte Folgen in einer kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$ und enthalten daher eine konvergente Teilfolge. In $\ell^2(\mathbb{N})$ zeigt Beispiel 8.1.3, dass dies dort im Allgemeinen nicht mehr richtig zu sein braucht.

Wie im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Folgeglieder x^k eines Elementes $x = \left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ als Komponenten und definieren

Definition 8.2.1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ und sei $x \in \ell^2(\mathbb{N})$. Dann **konvergiert** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **komponentenweise** gegen X, falls für alle $k \in \mathbb{N}$

$$x_n^k \to x^k$$

für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 8.2.2. Komponentenweise Konvergenz ist gerade schwache Konvergenz mit den Testvektoren $e_0, e_1, \ldots$ statt mit beliebigem $z \in H$.

Es gilt die folgende Beobachtung

Lemma 8.2.3. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ beschränkt. Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komponentenweise konvergente Teilfolge mit komponentenweisem Grenzwert x. Es gelten $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ und*

$$\|x\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})}.$$

Beweis.

(i) Der erste Teil des Beweises funktioniert analog zum Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli. Wir führen ihn der Vollständigkeit halber trotzdem nochmals aus.

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es $C \geq 0$ mit $\|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq C$. Somit gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\left|x_n^k\right|^2 \leq C^2$. Insbesondere gilt also $\left|x_n^0\right| \leq C$. Daher finden wir eine Teilfolge $(x_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass x_{0n}^0 für $n \to \infty$ gegen ein dadurch definiertes $x^0 \in [-C, C]$ konvergiert.

Sei $i \in \mathbb{N}$. Induktiv finden wir nun eine Teilfolge $(x_{(i+1)n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $x_{(i+1)n}^{i+1}$ für $n \to \infty$ gegen ein dadurch definiertes $x^{i+1} \in [-C, C]$ konvergiert. Als Teilfolge aller vorher betrachteten Teilfolgen erfüllt $(x_{(i+1)n})_{n\in\mathbb{N}}$ auch $x_{(i+1)n}^k \to x^k$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, i+1\}$.

Wir betrachten nun die Diagonalfolge $(x_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist $(x_{nn})_{n\in\mathbb{N}_{\geq k}}$ eine Teilfolge von $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}_{\geq k}}$. Somit folgt $x_{nn}^k \to x^k$ für $n \to \infty$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert $(x_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$ komponentenweise gegen x.

(ii) Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass die gesamte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komponentenweise gegen eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Gelte weiterhin $\|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir behaupten, dass auch $\|x\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \le C$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Es genügt der Nachweis, dass für beliebiges $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} \left(x^k\right)^2 \le C^2 + \varepsilon$$

gilt. Dann folgt nämlich auch

$$C^2 + \varepsilon \ge \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(x^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k\right)^2 = \|x\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})}$$

und somit, da $\varepsilon > 0$ beliebig war, schließlich die Behauptung.

Sei also $N \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert. Aufgrund der komponentenweisen Konvergenz gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\left(x_n^k\right)^2 - \left(x^k\right)^2\right| \le \frac{\varepsilon}{N+1}$$

(ohne Einschränkung sogar für alle größeren Indices als n). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \left(x^k\right)^2 &= \sum_{k=0}^{N} \left\{\left(x_n^k\right)^2 + \left(x^k\right)^2 - \left(x_n^k\right)^2\right\} \\
&\le \sum_{k=0}^{N} \left(x_n^k\right)^2 + \sum_{k=0}^{N} \left|\left(x^k\right)^2 - \left(x_n^k\right)^2\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_n^k\right)^2 + \sum_{k=0}^{N} \frac{\varepsilon}{N+1} \\
&= \|x_n\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} + (N+1)\frac{\varepsilon}{N+1} \\
&\le C^2 + \varepsilon
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Definition 8.2.4. Sei $X \subset H$ eine Menge. Dann heißt X **schwach folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Teilfolge besitzt, die schwach konvergiert und deren schwacher Grenzwert ebenfalls in X liegt.

Bemerkung 8.2.5. $\star$ Als unendlichdimensionalen Ersatz des Satzes von Heine-Borel, dass beschränkte abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ kompakt sind, erhalten wir, dass beschränkte abgeschlossene konvexe Teilmengen eines Hilbertraumes H schwach folgenkompakt sind. Vergleiche dazu das Lemma von Mazur, Lemma 11.2.6.

Wir zeigen hier lediglich

Theorem 8.2.6. *Sei $R > 0$. Dann ist $\overline{B_R(0))} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_R(0)}$ beliebig. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir nach Lemma 8.2.3 ohne Einschränkung annehmen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komponentenweise gegen ein $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ konvergiert und $\|x\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \le R$ gilt.

Wir behaupten, dass $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$ gilt. Sei dazu $z \in \ell^2(\mathbb{N})$ beliebig. Sei auch $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $z \in \ell^2(\mathbb{N})$ gibt es $k_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \left(z^k\right)^2 \le \frac{\varepsilon}{2R}$. Nun folgt

$$|\langle z, x_n\rangle - \langle z, x\rangle| = |\langle z, x_n - x\rangle|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \left|z^k \cdot \left(x_n^k - x^k\right)\right| + \sum_{k=k_0}^{\infty} \left|z^k \cdot \left(x_n^k - x^k\right)\right|.$$

Da z fixiert ist, gibt es aufgrund der komponentenweisen Konvergenz ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left|z^k \cdot \left(x_n^k - x^k\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2k_0}$ für alle $k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$.

Wenden wir nun auf die Endstücke $\left(x^k\right)_{k \geq k_0}$ und $\left(x_n^k - x^k\right)_{k \geq k_0}$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\langle z, x_n - x\rangle| &\leq k_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2k_0} + \left\langle \left(z^k\right)_{k \geq k_0}, \left(x_n^k - x^k\right)_{k \geq k_0} \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \left(z^k\right)_{k \geq k_0} \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \cdot \left\| \left(x_n^k - x^k\right)_{k \geq k_0} \right\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2R} \cdot \|x_n - x\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2R} \cdot \left(\|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{N})} + \|x\|_{\ell^2(\mathbb{N})}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2R} \cdot 2R = \varepsilon
\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Aus dem Beweis von Theorem 8.2.6 erhalten wir

Lemma 8.2.7. *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ eine beschränkte Folge und sei $x \in H$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *für* $n \to \infty$.

(ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert komponentenweise gegen* x.

Bemerkung 8.2.8. Diese Äquivalenz gilt auch ohne vorgegebenen Grenzwert. Dieser ergibt sich aus den vorangegangenen Resultaten nämlich ohnehin.

Beweis von Lemma 8.2.7.

- „(i) $\implies$ (ii)“: Dies folgt direkt aus Bemerkung 8.2.2.
- „(ii) $\implies$ (i)“: Dies ergibt sich aus dem Beweis von Theorem 8.2.6. □

Bemerkung 8.2.9. $\star$ Mit ähnlichen Ideen erhält man Konvergenzresultate im Fall **reflexiver** Banachräume (Bidualraum ist isomorph zum Vektorraum, siehe Definition 11.2.1). Insbesondere gilt für $1 < p < \infty$:

(i) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ eine beschränkte Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ mit $\varphi(x_{k_l}) \to \varphi(x)$ für $l \to \infty$ für jedes $\varphi \in (\ell^p(\mathbb{N}))^* \cong \ell^q(\mathbb{N})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und ein $u \in L^p(\Omega)$ mit $\int u_{k_l}\varphi \to \int u\varphi$ für $l \to \infty$ für jedes $\varphi \in L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

9. Divergenzsatz

9.1. **Zerlegung der Eins.**

Definition 9.1.1. Sei X ein topologischer Raum.

(i) Eine Familie $(\eta_i)_{i \in I}$ stetiger Funktionen $\eta_i \colon X \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ heißt **Zerlegung der Eins**, falls $\sum\limits_{i \in I} \eta_i(x) = 1$ für alle $x \in X$ gilt.

(ii) Eine **endliche** Zerlegung der Eins ist eine Zerlegung $(\eta_i)_{i \in I}$ der Eins mit endlicher Indexmenge I.

(iii) Eine Zerlegung der Eins heißt **lokal endlich**, falls es für jedes $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, so dass nur endlich viele Funktionen $(\eta_i|_U)_{i \in I}$ von der Nullfunktion verschieden sind.

(iv) Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von X. Dann heißt eine Zerlegung der Eins $(\eta_i)_{i\in I}$ der Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ **untergeordnet**, falls für alle $i \in I$ ein $j \in J$ mit $\operatorname{supp} \eta_i \subset U_j$ existiert.

Mo 28.06.2021

Lemma 9.1.2. *Sei $r > 0$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Funktion $\eta = \eta_{x_0,r} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ in $B_r(x_0)$ und $\eta = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}(x_0)$.*

Beweis.

(i) Die Funktion $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$
ist von der Klasse C^∞, insbesondere an der Stelle $x = 0$ (Übung, siehe auch Lemma 9.1.3), und erfüllt $\psi = 0$ für $x \le 0$ sowie $\psi > 0$ für $x > 0$. (Dies ist die Standardfunktion an dieser Stelle, aber $\exp(-1/x)$ tut es auch schon.)

(ii) Man sieht leicht ein, dass $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := \frac{\psi(2-x)}{\psi(x-1)+\psi(2-x)}$ die folgenden Eigenschaften hat:
   (a) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, (da der Nenner stets positiv ist)
   (b) $0 \le \varphi \le 1$, (Zähler $\le \psi(x-1) + \psi(2-x)$)
   (c) $\varphi = 0$ in $[2, \infty)$ und
   (d) $\varphi = 1$ in $(-\infty, 1]$. (dort ist $\psi(x-1) = 0$)

(iii) Nun leistet $\eta(x) := \varphi\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)$ das Gewünschte. Beachte dazu insbesondere, dass aus $\eta(x) = 1$ in $B_r(x_0)$ die Glattheit im Punkt x_0 folgt. □

Wir erinnern an einen eindimensionalen Hebbarkeitssatz.

Lemma 9.1.3. ⋆ *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in \Omega$. Seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und f in $\Omega \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar mit $f' = g$ in $\Omega \setminus \{0\}$. Dann ist f in ganz Ω stetig differenzierbar und es gilt dort $f' = g$.*

Beweis. Siehe [13]. □

Wir benötigen untergeordnete Zerlegungen der Eins in folgendem einfachen Fall.

Lemma 9.1.4. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine endliche Zerlegung der Eins auf der Menge K, die dieser Überdeckung untergeordnet ist.*

Beweis. Zu jedem Punkt $x \in K$ gibt es einen Radius $r(x) > 0$ mit $B_{3r(x)}(x) \subset U_j$ für ein $j \in J$. Offensichtlicherweise gilt $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} B_{r(x)}(x)$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N$ mit $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N B_{r(x_i)}(x_i)$. Wir definieren $\eta_i := \eta_{x_i, r(x_i)}$ in der Bezeichnung von Lemma 9.1.2. Wir definieren weiterhin die Summe $s(x) := \sum\limits_{i=1}^N \eta_i(x)$. Dann ist $(\eta_i/s)_{1\le i\le N}$ eine endliche Zerlegung der Eins wie gesucht. □

9.2. **Integration über Untermannigfaltigkeiten.**

Definition 9.2.1.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Einbettung (oder eine Immersion, die bis auf eine n-dimensionale Lebesgue-Nullmenge injektiv ist). Dann definieren wir eine **Metrik** $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ (im Sinne der Differentialgeometrie und nicht im Sinne der Analysis I) auf Ω durch

$$g_{ij}(x) := \langle X_i(x), X_j(x)\rangle_{\mathbb{R}^{n+k}}.$$

Wir setzen $M := \operatorname{im} X = X(\Omega)$. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ oder $f\colon M \to E$ eine Funktion. Ist $x \mapsto f(X(x)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(x))}$ über Ω integrabel, so definieren wir

$$\int\limits_M f := \int\limits_\Omega f(X(x)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx.$$

(ii) Sei $M = M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine (lokal endliche) offene Überdeckung von M. Seien weiterhin $X_i\colon \Omega_i \to \mathbb{R}^{n+k}$ Einbettungen mit $\operatorname{im} X_i = M \cap A_i$. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ oder $f\colon M \to E$, beispielsweise mit Hilfe einer untergeordneten Zerlegung der Eins, zerlegt als $f = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i$ mit $\operatorname{supp} f_i \subset A_i$.

Dann definieren wir

$$\int\limits_M f := \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{A_i\cap M} f_i,$$

falls sämtliche Integrale auf der rechten Seite existieren und die Summe sinnvoll ist.

(iii) Wir definieren $L^p(M,\mathbb{R})$ bzw. $L^p(M,E)$, $1 \le p < \infty$, als den Raum derjenigen Funktionen, für die alle Funktionen $f \circ X_i$ messbar sind und

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int\limits_M \|f\|^p\right)^{1/p} < \infty$$

gilt. L^∞ wird als der Raum der auf M wesentlich beschränkten Funktionen definiert. Wir erhalten Banachräume mit den Normen $\|\cdot\|_{L^p}$ bzw. $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Lemma 9.2.2. *Das Integral über eine Untermannigfaltigkeit ist unabhängig von den speziellen Wahlen in der Definition 9.2.1 definiert.*

Beweis.

(i) Wir zeigen, dass das Integral nicht von der Wahl der Einbettung abhängt und lassen den Rest als Übung.

(ii) Seien $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+k}$ und $Y\colon \Omega' \to \mathbb{R}^{n+k}$ zwei Einbettungen mit $\operatorname{im} X = \operatorname{im} Y$. Dann sind die Abbildungen $Y^{-1}\circ X$ und $X^{-1}\circ Y$ C^1-Diffeomorphismen. Dies sehen wir, indem wir die Abbildungen wie unten zu $\tilde X$ bzw. $\tilde Y$ fortsetzen und dann den Satz über die inverse Funktion anwenden. Aufgrund des Transformationssatzes für Integrale gilt mit $\Phi = Y^{-1}\circ X$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega'} f(Y(y)) \cdot \sqrt{\det\langle Y_i(y), Y_j(y)\rangle}\, dy\\ =&\int\limits_{\Omega} f(Y\circ\Phi(x)) \cdot \sqrt{\det\langle Y_i(\Phi(x)), Y_j(\Phi(x))\rangle} \cdot |\det D\Phi(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Wegen $Y\circ\Phi(x) = X(x)$ genügt der Nachweis, dass

$$\sqrt{\det\langle Y_i(\Phi(x)), Y_j(\Phi(x))\rangle} \cdot |\det D\Phi(x)| = \sqrt{\det\langle X_i(x), X_j(x)\rangle} \tag{9.1}$$

gilt. In dieser Situation können wir den Determinantenmultiplikationssatz nicht anwenden, da $(X_i^\alpha)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le\alpha\le n+k}}$ keine quadratische Matrix ist. Dies wollen wir nun korrigieren.

(iii) Fixiere dazu $x \in \Omega$ und setze $y = \Phi(x)$. Sei $\{a_1, \ldots, a_k\}$ eine Orthogonalbasis von $\langle X_1(x), \ldots, X_n(X)\rangle^\perp = \langle Y_1(y), \ldots, Y_n(y)\rangle^\perp$, wobei wir die letzte Gleichheit sehen, indem wir Kurven in $\operatorname{im} X$ betrachten. Wir definieren die Abbildungen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ auf $\Omega \times \mathbb{R}^k$ bzw. $\Omega' \times \mathbb{R}^k$ durch

$$\tilde{X}(u, v) := X(u) + \sum_{m=1}^{k} v^m a_m$$

bzw.

$$\tilde{Y}(u, v) := Y(u) + \sum_{m=1}^{k} v^m a_m.$$

Es gelten $D\tilde{X} = (DX, a_1, \ldots, a_k)$ sowie $D\tilde{Y} = (DY, a_1, \ldots, a_k)$. Weiterhin folgt in x

$$\left(\left\langle \tilde{X}_I, \tilde{X}_J \right\rangle\right)_{1 \le I,J \le n+k} = \begin{pmatrix} \langle X_i, X_j\rangle_{1 \le i,j \le n} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_k \end{pmatrix}.$$

Eine analoge Formel gilt für $\tilde{Y}$.

(iv) Wir behaupten, dass nahe $(x, 0)$ die Identität $\tilde{Y}^{-1} \circ \tilde{X} = (\Phi, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k})$ gilt: Nach dem Satz über die inverse Funktion ist $\tilde{Y}$ nahe y ein lokaler C^1-Diffeomorphismus. Es genügt daher, zu zeigen, dass $\tilde{X} = \tilde{Y} \circ (\Phi, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k})$ gilt. Es ist

$$\tilde{Y} \circ (\Phi, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k})(u, v) = \tilde{Y}\left(Y^{-1} \circ X(u), v\right) = Y \circ Y^{-1} \circ X(u) + \sum_{m=1}^{k} v^m a_m.$$

Daher folgt die Zwischenbehauptung.

(v) Da Resultat folgt nun, indem wir in (9.1) zunächst X durch $\tilde{X}$, Y durch $\tilde{Y}$ und Φ durch $(\Phi, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}) \equiv \tilde{\Phi}$ ersetzen und dann den Determinantenmultiplikationssatz anwenden. ☐

Bemerkung 9.2.3. ⋆ Man kann zeigen, dass $\int\limits_M f = \int\limits_M f \, d\mathcal{H}^n$ ist, dass wir also gerade bezüglich des n-dimensionalen Hausdorffmaßes integrieren. Dies ist klar, falls M^n eine Teilmenge einer n-dimensionalen Hyperebene ist, da dort $\mathcal{H}^n$ und $\mathcal{L}^n$ übereinstimmen.

Lokal kann man stets annehmen, dass eine C^1-Untermannigfaltigkeit als Graph einer Funktion gegeben ist. Insbesondere erhalten wir im Fall $k = 1$ das folgende Lemma, das auch für Lipschitzstetige oder stückweise C^1-Funktionen gilt:

Lemma 9.2.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Sei $u \in C^1(\Omega)$ und $M := \operatorname{graph} u$. Dann gilt*

$$\int\limits_M f = \int\limits_\Omega f(x, u(x)) \cdot \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx$$

für Funktionen f, für die der Integrand auf der rechten Seite integrabel ist.

Beweis. Wir verwenden die Einbettung $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $X(x) = (x, u(x))$ und erhalten $X_i = e_i + u_i e_n$ und somit $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$. Folglich wissen wir aus der linearen Algebra, dass $\det(g_{ij}) = 1 + |Du|^2$ gilt und erhalten die Behauptung. ☐

Mo 05.07.2021

Lemma 9.2.5 (Normale)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und sei $u \in C^1(\Omega)$. Dann ist die* ***Normale*** *$\nu \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\nu(x) = \pm\frac{(\nabla u, -1)^T}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ senkrecht zu allen Tangentialvektoren $\frac{\partial X}{\partial x^i}(x)$ und hat Länge 1.*

Beweis. Die Orthogonalität folgt aus

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}(x), \nu(x) \right\rangle = \left\langle \left(e_i, \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) \right)^T, (\nabla u(x), -1)^T \right\rangle = \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = 0.$$

Dir Normierung ist klar. □

9.3. **Divergenzsatz.**

Theorem 9.3.1 (Divergenzsatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1, $\xi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \xi = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu \rangle.$$

Beweis.

a) Wir schreiben $x = (\hat{x}, x^n)$ mit $\hat{x} = (x^1, \ldots, x^{n-1})$. Sei $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Es gilt für $i < n$

$$D_i \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} f(\hat{x}, x^n)\, dx^n = \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} D_i f(\hat{x}, x^n)\, dx^n + f(\varphi(\hat{x}), x^n) D_i \varphi(\hat{x}).$$

b) $\operatorname{div} \xi := D_i \xi^i$ ist unter linearen invertierbaren Transformationen und Translationen invariant.

Dies ist für Translationen klar.

Sei $\tilde{x}^j = a^j_i x^i$ eine lineare Transformation. Dann gilt $\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} = a^j_i$ und $\tilde{\xi}^j = a^j_i \xi^i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{\xi}^i &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(a^i_l \xi^l \right) \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} a^i_l \frac{\partial}{\partial x^k} \xi^l, \quad \text{da } a^i_k \text{ ortsunabhängig} \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} \xi^l \\
&= \delta^k_l \frac{\partial}{\partial x^k} \xi^l \quad \text{(Kettenregel)} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k} \xi^k = \operatorname{div} \xi.
\end{aligned}$$

c) Überdecke $\overline{\Omega}$ durch (endlich viele) offene Mengen V_j, so dass jede dieser Mengen entweder ganz in Ω liegt oder in einer Menge U wie folgt enthalten ist:

Nach einer geeigneten Rotation gibt es ein offenes und beschränktes $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so dass $U = \Sigma \times (0, 2)$. Es gibt $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $\frac{1}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}$, mit $\{(\hat{x}, x^n) : x^n < \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = U \cap \Omega$, $\{(\hat{x}, x^n) : x^n = \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = \operatorname{graph} \varphi|_\Sigma = U \cap \partial\Omega$, $\{(\hat{x}, x^n) : x^n > \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = U \cap \complement\Omega$.

d) Sei $(\eta_i)_{1 \le i \le N}$ eine endliche, $\{V_j\}_j$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf $\overline{\Omega}$, vgl. Lemma 9.1.4.

e) Reduktion auf Vektorfelder ξ mit Träger in einem V_i:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \xi &= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \left(\xi \sum_{i=1}^N \eta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\xi \eta_i) = \sum_{i=1}^N \int\limits_{V_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\xi \eta_i).
\end{aligned}$$

Nehme nun an, dass der Divergenzsatz auf Gebieten U wie oben schon gezeigt sei. Dann folgt, da $\xi\eta_i$ auf $(\partial\Sigma\times[0,2])\cup(\Sigma\times\{0\})\cup(\Sigma\times\{2\})$ verschwindet,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \operatorname{div}\xi &= \sum_{i=1}^N \int\limits_{V_i\cap\partial\Omega} \langle\xi\eta_i,\nu\rangle\\ &= \int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^N \eta_i\langle\xi,\nu\rangle = \int\limits_{\partial\Omega}\langle\xi,\nu\rangle.\end{aligned}$$

f) Wir dürfen also annehmen, dass ξ kompakten Träger in U hat. Wir benutzen schließlich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass das Volumenmaß auf $\partial\Omega$ lokal durch $\sqrt{1+|D\varphi|^2}d\hat{x}$ gegeben ist, dass $\frac{(-D\varphi,1)}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist und $\operatorname{supp}\xi\Subset U$.

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \operatorname{div}\xi &= \int\limits_\Omega D_i\xi^i\\ &= \int\limits_\Sigma \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} D_i\xi^i\,dx^n\,d\hat{x}\\ &= \int\limits_\Sigma \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} \sum_{i=1}^{n-1} D_i\xi^i\,dx^n\,d\hat{x} + \int\limits_\Sigma \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} D_n\xi^n\,dx^n\,d\hat{x}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_\Sigma \left\{D_i\int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} \xi^i(\hat{x},x^n)\,dx^n - \xi^i(\hat{x},\varphi(\hat{x}))D_i\varphi(\hat{x})\right\}d\hat{x}\\ &\quad+\int\limits_\Sigma \xi^n(\hat{x},\varphi(\hat{x})) - 0\,d\hat{x}\\ &= \int\limits_\Sigma -\sum_{i=1}^{n-1}\xi^i(\hat{x},\varphi(\hat{x}))D_i\varphi(\hat{x}) + \xi^n(\hat{x},\varphi(\hat{x}))\,d\hat{x}\\ &= \int\limits_\Sigma \left\langle \xi(\hat{x},\varphi(\hat{x})),\frac{(-D\varphi,1)}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}}\right\rangle\sqrt{1+|D\varphi|^2}\,d\hat{x}\\ &= \int\limits_{\partial\Omega\cap U}\langle\xi,\nu\rangle = \int\limits_{\partial\Omega}\langle\xi,\nu\rangle.\end{aligned}$$

□

9.4. **Transformationssatz.**

Theorem 9.4.1 (Transformationssatz / Transformationsformel). *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi\colon\Omega\to\Phi(\Omega)$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

(i) Sei $f\colon\Omega\to[0,\infty]$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Funktion. Dann gilt

$$\int\limits_{\Phi(\Omega)} f\,d\mathcal{L}^n = \int\limits_\Omega (f\circ\Phi)\cdot|\det D\Phi|\,d\mathcal{L}^n.$$

(ii) Eine $\mathcal{L}^n$-messbare Funktion $f\colon\Phi(\Omega)\to\mathbb{R}$ ist genau dann $\mathcal{L}^n$-integrierbar, wenn $(f\circ\Phi)\cdot|\det D\Phi|\colon\Omega\to\mathbb{R}$ eine $\mathcal{L}^n$-integrierbare Funktion ist. In diesem Falle gilt die obige Integraltransformationsformel.

Beweis. Ein Beweis findet sich im herauskommentierten Teil von [14]. (Im affin linearen Fall haben wir eine verwandte Aussage für das Jordanmaß ohne den Nachweis $m_A = |\det A|$ gemacht.) □

10. Überblick Sobolevräume

Sobolevräume behandeln wir hier nur extrem kurz und genauer im zweiten Teil der Vorlesung.

10.1. **Schwache Ableitung und Definition.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C^1(\Omega)$ und $\varphi \in C^1_c(\Omega)$. Wir schreiben Indices für partielle Ableitungen und erhalten mit partieller Integration

$$\int\limits_\Omega u(x)\varphi_i(x)\,dx = -\int\limits_\Omega u_i(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int\limits_\Omega u \cdot D\varphi = -\int\limits_\Omega Du \cdot \varphi. \tag{10.1}$$

Ausgehend von dieser Motivation sagen wir, dass $Du = v$ gilt und v die schwache Ableitung von u ist, falls $\int uD\varphi = -\int v\varphi$ für alle $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ gilt. Dabei lassen wir $u, v \in L^1(\Omega)$, dem Raum aller Lebesgue-integrablen Funktionen, zu. Schwache Differenzierbarkeit verallgemeinert die klassische Differenzierbarkeit. Gilt $u, v \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, so schreiben wir $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Mit $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$ wird $W^{1,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. $W^{1,p}$ heißt Sobolevraum.

Auf $\Omega = (-1, 1)$ ist $u(x) = \max\{x, 0\}$ ein Beispiel für eine schwach, aber nicht klassisch differenzierbare Funktion. Es gilt nämlich

$$\int\limits_{-1}^{1} uD\varphi = \int\limits_0^1 xD\varphi(x)\,dx = -\int\limits_0^1 1 \cdot \varphi(x)\,dx + x \cdot \varphi(x)\big|_0^1 = -\int\limits_{-1}^{1} \chi_{(0,1)}(x)\varphi(x)\,dx.$$

10.2. **Approximierbarkeit und Randwerte.** Sei nun stets $1 < p < \infty$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Mittels Glättung mit einem Friedrichschen Glättungskern η_ε erhalten wir, dass glatte Funktionen existieren, die $W^{1,p}(\Omega)$-Funktionen auf kompakten Teilmengen von Ω in $W^{1,p}(\Omega)$ approximieren.

(ii) Sobolevfunktionen auf glatten beschränkten Gebieten lassen sich mit kontrollierter Norm auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen: $\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C(n, p, \Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

(iii) Auf beschränkten C^1-Gebieten Ω können wir $W^{1,p}(\Omega)$-Funktionen Randwerte zuweisen (obwohl der Rand eine Nullmenge ist). Dies drückt man dadurch aus, dass $T \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ (englisch "trace") ein linearer stetiger Operator ist, der auf stetigen Funktionen mit $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ übereinstimmt. Wir definieren $W^{1,p}_0(\Omega) := T^{-1}(\{0\})$ als den Teilraum der Sobolevfunktionen mit Randwerten Null. Hier können wir wie bei klassisch differenzierbaren Funktionen mit Randwerten Null partiell integrieren. Mo 12.07.2021

Wir wollen einen Beweiseinblick in die glatte Approximierbarkeit geben.

Beweiseinblick in (i). Wir betrachten den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ und globale Approximation. Sei $1 \le p < \infty$ und sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

(a) **L^p-Schranke:** Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\eta \in C^\infty_c(B_1(0))$ ein Friedrichscher Glättungskern (glatt, kompakter Träger, rotationssymmetrisch, nichtnegativ, Integral gleich eins) und

$$u_\varepsilon(x) := \int\limits_{B_1(0)} \eta(z)u(x - \varepsilon z)\,dz.$$

Dann erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^n$ wegen $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ mit der Hölderschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x)| &\le \int\limits_{B_1(0)} \eta(z)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \eta(z)^{\frac{1}{p}} \cdot |u(x-\varepsilon z)|\,dz \\
&\le \left(\int\limits_{B_1(0)} \eta(z) \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{B_1(0)} \eta(z) \cdot |u(x-\varepsilon z)|^p\,dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 1 \cdot \left(\int\limits_{B_1(0)} \eta(z) \cdot |u(x-\varepsilon z)|^p\,dz \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Wir integrieren die p-te Potenz davon nochmals und erhalten mit Fubini

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x)|^p\,dx &\le \int\limits_{B_1(0)} \eta(z) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x-\varepsilon z)|^p\,dx\,dz \\
&\le 1 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p\,dy.
\end{aligned}
$$

Also folgt $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

(b) L^p**-Konvergenz:** Sei $\delta > 0$ vorgegeben. Als Folgerung aus dem Satz von Lusin (in der Variante aus den Übungen), siehe auch Theorem 3.3.5, gibt es $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \delta$. Aufgrund der obigen Abschätzungen erhalten wir $\|u_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \delta$. Betrachte nun

$$
\|u-u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u-g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g-g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
$$

Wir haben bereits gesehen, dass der erste und der dritte Term durch δ unabhängig von $\varepsilon > 0$ nach oben abgeschätzt sind. Da g stetig ist und Glättungen stetige Funktionen in C^0 approximieren, ist auch der zweite Term für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ durch δ nach oben abgeschätzt. Somit gibt es zu $u \in L^p(\Omega)$ für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ mit $\|u-u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \delta$ (auch für kleinere $\varepsilon > 0$).

(c) **Differenzierbarkeit:** Aufgrund der Transformationsformel für Integrale mit $z = \frac{x-y}{\varepsilon}$ oder Fubini und Approximation mit stetigen Funktionen erhalten wir für festes $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int\limits_{B_1(0)} \eta(z) u(x-\varepsilon z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\varepsilon^{-n}\,dy \\
&\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\,dy
\end{aligned}
$$

mit $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Wir schreiben auch $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u = u * \eta_\varepsilon$ und bezeichnen die Operation „$*$“ als **Faltung**. Für die Differenzierbarkeit nach x betrachten wir für $0 \neq h \to 0$ und $1 \le i \le n$ die Differenzenquotienten

$$
\frac{u_\varepsilon(x+he_i) - u_\varepsilon(x)}{h} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{1}{h}\left(\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)\right)}_{\to \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)} u(y)\,dy.
$$

Mit der Majorante $\|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty}|u|$ und dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir im Grenzwert die Differenzierbarkeit von u_ε und die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x^i}u_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)u(y)\,dy.$$

Analog zeigt man $u_\varepsilon \in C^\infty$ und dass wir sämtliche Ableitungen in das Integral hineinziehen und auf η_ε anwenden können.

(d) **Ableitung und Glättung:** Nach Kettenregel und Definition der schwachen Ableitung erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i}u_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)u(y)\,dy \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y^i}(x-y)u(y)\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\frac{\partial u}{\partial y^i}(y)\,dy \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)_\varepsilon(x).\end{aligned}$$

(e) **Approximation in $W^{1,p}$:** Es gilt für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|D(u_\varepsilon) - Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|(Du)_\varepsilon - Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Beide Terme auf der rechten Seite konvergieren nun für $\varepsilon \to 0$ aufgrund der oben gezeigten L^p-Konvergenz gegen Null. ☐

10.3. **Einbettungssätze.** Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand.

(i) **Sobolevscher Einbettungssatz:** Sei $p < n$. Es gilt

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \le C(n,p,\Omega)\cdot\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Diese Sobolevfunktionen sind also in einem L^q-Raum mit höherem q als in der Definition gefordert.

(ii) **Morreyscher Einbettungssatz:** Sei $n < p < \infty$. Hier gilt (für geeignet gewählte Repräsentanten) $\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\Omega)} \le C(n,p,\Omega)\cdot\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

(iii) **Rellichscher Kompaktheitssatz:** Ist Ω beschränkt mit C^1-Rand, so ist die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für $1 \le q < \frac{np}{n-p}$ und $1 \le p < n$ ein kompakter (stetiger linearer) Operator, d. h. Bilder beschränkter Mengen sind präkompakt.

Die Beweisstrategie ist stets, Abschätzungen für glatte Funktionen zu zeigen, dann Sobolevfunktionen durch glatte Funktionen zu approximieren und schließlich bei den gezeigten Abschätzungen zum Grenzwert überzugehen.

Beweiseinblick für (i)*:* Wir betrachten als kleinen Einblick den Fall $n = 2$, $p = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $u \in C^1_c\left(\mathbb{R}^2\right) \subset W^{1,1}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Hier zeigen wir die erste (nichttriviale) Ungleichung in

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|Du\|^2_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le \|u\|^2_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}:$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus $u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} u_1(a,y)\,da$ (Hauptsatz für $u(\cdot,y)$ und kompakter Träger) folgt $|u(x,y)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |Du(a,y)|\,da$. Aufgrund der Symmetrie erhalten wir

$$|u(x,y)|^2 \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |Du(a,y)|\,da \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} |Du(x,b)|\,db.$$

Integration bezüglich x und y liefert nun $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \leq \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |Du|\Bigg)^2 = \|u\|^2_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ wie behauptet. $\square$

Beweiseinblick für (ii). Wir betrachten den Fall $n = 1$, $p = 2$, $\Omega = \mathbb{R}$ und $u \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,2}(\mathbb{R})$:

(a) Sei $r > 0$, sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $-r \leq s \leq r$. Dann gilt

$$|u(x+s) - u(x)| = \left| \int\limits_0^s \frac{d}{dt} u(x+t)\,dt \right| \leq \pm \int\limits_0^s |Du(x+t)|\,dt \leq \int\limits_{B_r(x)} |Du|.$$

Wir integrieren dies nochmals, dividieren durch $2r$ und erhalten mit $\fint\limits_{\Omega} := \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega}$

$$\begin{aligned} \fint\limits_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\,dy &= \frac{1}{2r} \int\limits_{-r}^{r} |u(x+s) - u(x)|\,ds \\ &\leq \frac{1}{2r} \int\limits_{-r}^{r} 1\,ds \cdot \int\limits_{B_r(x)} |Du| = \int\limits_{B_r(x)} |Du|. \end{aligned}$$

Mo 19.07.2021

(b) Mit (a) können wir nun die C^0-Norm abschätzen: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir aufgrund der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \fint\limits_{B_1(x)} |u(x)|\,dy \leq \fint\limits_{B_1(x)} |u(y) - u(x)|\,dy + \fint\limits_{B_1(x)} |u(y)| \\ &\overset{(a)}{\leq} \int\limits_{B_1(x)} 1 \cdot |Du| + \frac{1}{2} \int\limits_{B_1(x)} 1 \cdot |u| \\ &\leq \Bigg(\int\limits_{B_1} 1^2\Bigg)^{1/2} \cdot \Bigg(\int\limits_{B_1(x)} |Du|^2\Bigg)^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \Bigg(\int\limits_{B_1} 1^2\Bigg)^{1/2} \cdot \Bigg(\int\limits_{B_1(x)} |u|^2\Bigg)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} \cdot \|Du\|_{L^2(B_1(x))} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \|u\|_{L^2(B_1(x))} \\ &\leq \sqrt{2} \cdot \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(c) Auch für die Abschätzung des Differenzenquotienten nutzen wir wieder (a): Seien $x \neq y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $r := |x-y|$ und $W := B_r(x) \cap B_r(y) = (x,y)$. Dann gilt

$$|u(x) - u(y)| = \fint\limits_{W} |u(x) - u(y)|\,dz \leq \fint\limits_{W} |u(x) - u(z)|\,dz + \fint\limits_{W} |u(y) - u(z)|\,dz.$$

Wir betrachten nur eines der beiden Integrale und erhalten

$$\fint_W |u(x)-u(z)|\,dz = \frac{2}{2}\frac{1}{r}\int_W |u(x)-u(z)|\,dz \le 2 \fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|\,dz$$

$$\overset{\text{(a)}}{\le} 2 \int_{B_r(x)} 1\cdot|Du| \le 2\left(\int_{B_r} 1^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{B_r(x)} |Du|^2\right)^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{2r}\cdot\|Du\|_{L^2(B_r(x))}.$$

Zusammengenommen erhalten wir also

$$|u(x)-u(y)| \le 4\sqrt{2}\cdot\|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}\cdot|x-y|^{1/2}.$$

(d) Insgesamt folgt daher für die Höldernorm die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{0,1/2}(\mathbb{R})} \le 8\cdot\|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}$$

wie behauptet. □

11. Schwache Konvergenz und Reflexivität

11.1. **Schwache Konvergenz.**

Definition 11.1.1. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E **konvergiert schwach** gegen $x\in E$, $x_n \rightharpoonup x$, falls für alle $\varphi\in E^*$

$$\varphi(x_n)\to\varphi(x)$$

für $n\to\infty$ gilt.

Bemerkung 11.1.2.

(i) In topologischen Räumen sagt man, dass x_n gegen x konvergiert, $x_n\to x$, falls jede Umgebung von x fast alle Elemente x_n enthält.

(ii) Die stetigen Funktionale $f\in L(X,\mathbb{K})$ erzeugen nach Definition 1.2.2 eine Topologie auf X, die schwache Topologie.

(iii) Konvergenz $x_n\to x$ bezüglich der schwachen Topologie ist äquivalent zu $x_n\rightharpoonup x$.

(iv) Auf X^* können wir ebenfalls eine schwache Topologie einführen. Dann gilt $\varphi_n\rightharpoonup\varphi$ in X^*, falls $f(\varphi_n)\to f(\varphi)$ für alle $f\in X^{**}$ gilt.

(v) Auf X^* gibt es auch die schwach*-Topologie: Es gilt $\varphi_n\to\varphi$ schwach*, falls $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ für alle $x\in X$ gilt.

(vi) Um Missverständnissen vorzubeugen, werden wir die übliche Konvergenz, d. h. $\|x_n-x\|\to 0$ für $n\to\infty$, auch als starke Konvergenz oder Normkonvergenz bezeichnen.

(vii) Wie bei starker Konvergenz definiert man schwache und schwach* Cauchyfolgen sowie schwache und schwach* Folgenkompaktheit.

(viii) In endlichdimensionalen Vektorräumen sind schwache und starke Konvergenz äquivalent.

(ix) In $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ konvergiert $e_n\rightharpoonup 0$, aber $e_n\not\to 0$ für $n\to\infty$.

Lemma 11.1.3. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Die durch

$$\langle\varphi, Jx\rangle := \langle x,\varphi\rangle$$

für alle $x\in X$ und alle $\varphi\in X^*$ definierte Abbildung $J\colon X\to X^{**}$ ist eine Isometrie. Wir sagen, dass J den Raum X in seinen Bidualraum einbettet.

(ii) Seien $x_n, x\in X$. Dann sind $x_n\rightharpoonup x$ in X und $Jx_n\to Jx$ schwach in X^{**} für $n\to\infty$ äquivalent.*

Beweis.

(i) Es gilt
$$\|Jx\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, Jx\rangle| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle x, \varphi\rangle| = \|x\|$$
nach Korollar 4.1.4.

(ii) Dies folgt direkt nach Definition, da die Konvergenz in
$$\langle x_n, \varphi\rangle = \langle \varphi, Jx_n\rangle \overset{?}{\to} \langle x, \varphi\rangle = \langle \varphi, Jx\rangle$$
für die Ausdrücke mit oder ohne J äquivalent ist. □

Theorem 11.1.4. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Der schwache und der schwach Grenzwert einer Folge sind eindeutig bestimmt.*

(ii) Starke Konvergenz impliziert schwache und schwach Konvergenz.*

(iii) Gelte $\varphi_n \to \varphi$ schwach in X^* für $n \to \infty$. Dann folgt*
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$

(iv) Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$. Dann folgt
$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(v) Schwach konvergente und schwach konvergente Folgen sind in Banachräumen beschränkt.*

(vi) Gilt $x_n \to x$ in X und $\varphi_n \to \varphi$ schwach in X^* für $n \to \infty$ oder $x_n \rightharpoonup x$ und $\varphi_n \to \varphi$ (stark) in X^*, so folgt*
$$\langle x_n, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$$
für $n \to \infty$.

Beweis.

(i) Benutze den Satz von Hahn-Banach für die schwache Konvergenz. Für die schwach* Konvergenz ist dies klar, da der Grenzwert eine Funktion φ ist, die wegen $\langle x, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$ eindeutig bestimmt ist.

(ii) Klar.

(iii) Sei $x \in X$. Für $n \to \infty$ folgt
$$|\langle x, \varphi\rangle| \leftarrow |\langle x, \varphi_n\rangle| \le \|\varphi_n\| \cdot \|x\|,$$
also
$$|\langle x, \varphi\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\| \cdot \|x\|$$
und damit nach Definition der Operatornorm
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$

(iv) Analog zu eben erhalten wir $|\langle x, \varphi\rangle| \le \|\varphi\| \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Benutze nun wieder Korollar 4.1.4. Wähle also φ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\langle x, \varphi\rangle = \|x\|$.

(v) Aus $\varphi_n \to \varphi$ schwach* in X^* erhalten wir insbesondere $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \varphi_n\rangle| < \infty$ punktweise für alle $x \in X$. Daher folgt nach Banach-Steinhaus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty$.

Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt nach Lemma 11.1.3 $Jx_n \to Jx$ schwach* in X^{**} mit J wie in Lemma 11.1.3. Somit ist Jx_n in X^{**} beschränkt, also auch x_n in X.

(vi) Es gilt

$$\begin{aligned}|\langle x,\varphi\rangle - \langle x_n,\varphi_n\rangle| &\le |\langle x,\varphi-\varphi_n\rangle| + |\langle x_n - x,\varphi_n\rangle|\\ &\le \underbrace{|\langle x,\varphi-\varphi_n\rangle|}_{\to 0} + \underbrace{\|x-x_n\|}_{\to 0}\cdot\underbrace{\|\varphi_n\|}_{\le c}\end{aligned}$$

für $n\to\infty$.

Die zweite Aussage folgt durch eine analoge Argumentation mit „vertauschten Rollen". □

Bemerkung 11.1.5. ⋆ Ist X lediglich normiert, so sind schwach konvergente Folgen ebenfalls beschränkt (Übung).

Allerdings sind schwach* konvergente Folgen i. a. nicht mehr beschränkt: Sei X der Raum der abbrechenden Folgen in $l^2(\mathbb{N})$. Der Dualraum von X ist isomorph zu $l^2(\mathbb{N})$. Dabei ist die Paarung durch das l^2-Skalarprodukt gegeben. $\varphi_n = n\cdot e_n$ ist eine unbeschränkte schwach*-konvergente Folge. Die Details lassen wir als Übung.

Theorem 11.1.6. *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $\overline{B_1(0)}\subset X^*$ schwach* folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^* mit $\|\varphi_k\|\le 1$. Dann sind die Folgen $(\langle x_n,\varphi_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ für festes $n\in\mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt. Daher finden wir mit einem Diagonalfolgenargument eine (nicht umbenannte) Teilfolge, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty}\langle x_n,\varphi_k\rangle\in\mathbb{K}$$

existiert. Setze $Y := \langle\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\rangle$. Sei $y\in Y$. Dann existiert der folgende Grenzwert

$$\varphi(y) := \lim_{k\to\infty}\langle y,\varphi_k\rangle$$

und die damit definierte Funktion $\varphi\colon Y\to\mathbb{K}$ ist linear. Wegen

$$|\varphi(y)| = \lim_{k\to\infty}|\langle y,\varphi_k\rangle|\le\|y\|$$

ist φ auf Y gleichmäßig stetig und läßt sich daher nach Theorem 2.2.9, dem Fortsetzungssatz, eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung Φ auf $\hat{X}$ und damit insbesondere auf $\overline{Y} = X\subset\hat{X}$ mit $\|\Phi\|\le 1$ fortsetzen. Wir behaupten, dass $\varphi_n\to\Phi$ schwach* konvergiert.

Sei dazu $x\in X$ und $y\in Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\langle x,\Phi-\varphi_n\rangle| &\le |\langle x-y,\Phi-\varphi_n\rangle| + |\langle y,\Phi-\varphi_n\rangle|\\ &\le 2\|x-y\| + |\langle y,\Phi-\varphi_n\rangle|.\end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass der zweite Term für $n\to\infty$ verschwindet. Der erste Term kann wegen $\overline{Y}=X$ zuvor beliebig klein gewählt werden. Die Behauptung folgt. □

Der Satz von Banach-Alaoğlu verallgemeinert dies wie folgt: Benutzt man den Satz von Tychonoff, so kann man die schwach*-Kompaktheit von $\overline{B_1(0)}\subset X^*$ auch für nicht separable Räume zeigen.

Mit den Methoden aus Theorem 11.1.6 zeigt man auch

Proposition 11.1.7. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Dann gilt $x_n \rightharpoonup x$ in X genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|<\infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D\subset X^*$ mit $\langle x_n,\varphi\rangle\to\langle x,\varphi\rangle$ für alle $\varphi\in D$ gibt.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist genau dann eine schwache Cauchyfolge, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|<\infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D\subset X^*$ gibt, so dass $(\langle x_n,\varphi\rangle)$ für alle $\varphi\in D$ eine Cauchyfolge ist.

Beweis. Übung. □

Lemma 11.1.8. *Sei X ein Hilbertraum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x_n \to x$ *für* $n \to \infty$,
(ii) $\|x_n\| \to \|x\|$ *und* $x_n \rightharpoonup x$ *für* $n \to \infty$.

Beweis. Übung. Betrachte $\|x_n - x\|^2$. □

11.2. Reflexivität.

Definition 11.2.1. Sei X ein Banachraum und J die Isometrie aus Lemma 11.1.3. Dann heißt X **reflexiv**, falls $J\colon X \to X^{**}$ surjektiv (und damit eine bijektive Isometrie) ist.

Wir hätten Reflexivität auch für normierte Räume definieren können. Da jedoch X^{**} stets vollständig ist, gilt dies auch für X.

Lemma 11.2.2. *Sei X ein Banachraum.*

(i) Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach Folgenkonvergenz in X^* überein.*
(ii) Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.
(iii) Ist Y ein Banachraum und $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.
(iv) X ist genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.

Beweis.

(i) Klar.
(ii) Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren x'' durch
$$\langle x', x''\rangle := \langle x'|_Y, y''\rangle$$
für alle $x' \in X^*$. Dann ist $x'' \in X^{**}$. Definiere $x := J_X^{-1}x''$. Wir behaupten, dass $x \in Y$ gilt. Sei dazu $x' \in X^*$ mit $x' = 0$ auf Y. Für solche x' folgt
$$\langle x, x'\rangle = \langle x', x''\rangle = \langle x'|_Y, y''\rangle = 0.$$
Y ist abgeschlossen. Nach Korollar 4.1.5 folgt also $x \in Y$.

Wir behaupten weiterhin, dass $J_Y x = y''$ gilt. Sei dazu $y' \in Y^*$ beliebig. Sei $x' \in X^*$ eine Fortsetzung von y' wie im Satz von Hahn-Banach. Wir erhalten wegen $x \in Y$
$$\langle x, y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x'|_Y, y''\rangle = \langle y', y''\rangle.$$
Somit ist $y'' = J_Y x$. Damit ist J_Y surjektiv.
(iii) Sei X reflexiv. Wir wollen zeigen, dass Y ebenfalls reflexiv ist: Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren $x'' \in X^{**}$ durch
$$\langle x', x''\rangle = \langle x' \circ T^{-1}, y''\rangle \quad \text{für alle } x' \in X^*.$$
Für $y' \in Y^*$ mit $x' := y' \circ T$ gilt nach Definition von x''
$$\langle y', y''\rangle = \langle y' \circ T, x''\rangle = \left\langle J_X^{-1}x'', y' \circ T\right\rangle = \left\langle TJ_X^{-1}x'', y'\right\rangle.$$
Also gilt $y'' = J_Y T J_X^{-1} x''$ und damit ist J_Y surjektiv, Y also ebenfalls reflexiv.
(iv) „$\Longrightarrow$“: Sei X reflexiv. Sei $x''' \in X^{***}$, so ist $x''' \circ J_X \in X^*$. Für $x'' \in X^{**}$ gilt
$$\langle x'', x'''\rangle = \left\langle J_X^{-1}x'', x''' \circ J_X\right\rangle = \langle x''' \circ J_X, x''\rangle = \langle x'', J_{X^*} \circ x''' \circ J_X\rangle.$$
Somit folgt $x''' = J_{X^*}(x''' \circ J_X)$. Also ist J_{X^*} surjektiv und somit ist auch X^* reflexiv.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun X^* reflexiv. Aufgrund des ersten Teils ist auch X^{**} reflexiv. J_X ist eine Isometrie. Somit ist $J_X(X) \subset X^{**}$ abgeschlossen. Nach (ii) ist $J_X(X)$ daher reflexiv. Nach (iii) ist also X selbst reflexiv. □

Lemma 11.2.3. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel, falls X^* separabel ist.*

Die Umkehrung ist falsch, da L^1 separabel ist, L^∞, der Dualraum von L^1 aber nicht.

Beweis. Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^*. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X so dass $|\langle x_n, \varphi_n\rangle| \ge \frac{1}{2}\|\varphi_n\|$ und $\|x_n\| = 1$. Setze $Y := \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$. Sei $\varphi \in X^*$ mit $\varphi = 0$ auf Y, so folgt für alle n

$$\|\varphi - \varphi_n\| \ge |\langle x_n, \varphi - \varphi_n\rangle| = |\langle x_n, \varphi_n\rangle| \ge \tfrac{1}{2}\|\varphi_n\| \ge \tfrac{1}{2}(\|\varphi\| - \|\varphi_n - \varphi\|),$$

also

$$\|\varphi\| \le 3 \inf_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi - \varphi_n\| = 0,$$

da $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^* liegt. Nach Korollar 4.1.5 erhalten wir $Y = X$. Da Y nach Konstruktion separabel ist, ist auch X separabel. □

Theorem 11.2.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subset X$. Definiere $Y := \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$. Dann ist Y nach Lemma 11.2.2 selbst reflexiv. Y ist nach Definition separabel. Somit ist auch das Bild $J_Y Y$ separabel. Da J_Y reflexiv ist, ist J_Y surjektiv wir erhalten $Y^{**} = J_Y Y$. Nach Lemma 11.2.3 ist daher auch Y^* separabel. Somit ist nach Theorem 11.1.6 die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ schwach* folgenkompakt. Wir wenden dies auf die Folge $(J_Y x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^{**} an, deren Folgeglieder in $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ enthalten sind. Es gibt also ein $y'' \in Y^{**}$ und eine nicht umbenannte Teilfolge, so dass

$$\langle y', J_Y x_n\rangle \to \langle y', y''\rangle$$

für alle $y' \in Y^*$ für $n \to \infty$ konvergiert. Definiere $x := J_Y^{-1} y'' \in Y$. Es folgt für alle $y' \in Y^*$ und $n \to \infty$

$$\langle x_n, y'\rangle = \langle y', J_Y x_n\rangle \to \langle y', y''\rangle = \langle x, y'\rangle.$$

Sei $x' \in X^*$. Dann gilt $x'|_Y \in Y^*$. Auf Elemente in $Y \subset X$ angewandt stimmen x' und $x'|_Y$ überein. Wir erhalten also

$$\underline{\langle x_n, x'\rangle} = \langle x_n, x'|_Y\rangle \to \langle x, x'|_Y\rangle = \underline{\langle x, x'\rangle} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir erhalten $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$. □

Theorem 11.2.5. *Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. sind $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und gilt $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$, so folgt $x \in M$.*

Beweis. Folgt direkt aus dem Trennungssatz, Theorem 4.1.6, durch einen Widerspruchsbeweis. □

Lemma 11.2.6 (Lemma von Mazur)**.** *Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in einem normierten Raum. Dann liegt x im Abschluss der konvexen Hülle von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. Der Abschluss der konvexen Hülle ist konvex. Also folgt die Behauptung aus Theorem 11.2.5. □

Vergleiche das folgende Resultat mit Theorem 5.2.2.

Theorem 11.2.7. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in M$ mit*

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Minimalfolge, gelte also $\|x_n - x_0\| \to \operatorname{dist}(x_0, M)$ für $n \to \infty$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit gibt es nach eine schwach konvergente Teilfolge $x_n \rightharpoonup x$ für ein $x \in X$. Nach Theorem 11.2.5 erhalten wir $x \in M$. Aus der schwachen Konvergenz erhalten wir auch $x_n - x_0 \rightharpoonup x - x_0$. Da die Norm unter schwacher Konvergenz nach Theorem 11.1.4 unterhalbstetig ist, folgt die mittlere Ungleichung in

$$\operatorname{dist}(x_0, M) \le \|x - x_0\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Die erste Ungleichung gilt nach Definition des Abstandes und die letzte, da x_n als Minimalfolge gewählt war. Die Behauptung folgt. $\square$

Setzt man in der folgenden Definition $\alpha = 1$, so erhält man lipschitzstetige Funktionen.

Definition 11.2.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. (Die Definition für Funktionen mit Werten in einem anderen Banachraum ist analog.) Sei $0 < \alpha < 1$.

(i) Die Funktion f heißt in $x_0 \in \Omega$ mit Exponent α **hölderstetig**, falls
$$\overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}} \sup_{x\in(\Omega\cap B_\varepsilon(x_0))\setminus\{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty$$
ist.

(ii) Die Funktion f heißt mit Exponent α **hölderstig**, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \equiv C^\alpha(\Omega)$, falls f in allen Punkten $x \in \Omega$ mit Exponent α hölderstetig ist.

(iii) Wir definieren
$$C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$
und die **Hölderhalbnorm**
$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

(iv) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$, so definieren wir
$$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) := \left\{ f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right) : [D^\beta f]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty \text{ für alle } |\beta| = k \right\}.$$

Theorem 11.2.9.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist der Raum aller Funktionen $f \in C^\alpha(\Omega)$ mit
$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^0(\Omega)} + [f]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty$$
mit der Norm $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ ein Banachraum.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so schreiben wir dafür $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist der Raum aller Funktionen $f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ mit
$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta f\right]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty$$
mit der Norm $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ ein Banachraum: $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung 11.2.10. Hölderräume sind i. a. nicht separabel. Betrachte dazu den Raum $C^\alpha([-1,1])$ und die Funktionen $u_{x_0}(x) := |x - x_0|^\alpha$. (Details: Übung.)

12. Sobolevräume

12.1. **Definition und grundlegende Eigenschaften.** Wir folgen [6]. Weitere gute Übersichten zu Sobolevräumen und deren Umfeld vermitteln die Bücher von William Ziemer [20] und Robert Adams [1].

Bemerkung 12.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ heißt Testfunktion. Sei $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i\varphi,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $u \in C^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega D^\alpha u\varphi$$

für alle Multiindices $|\alpha| \le k$.

Definition 12.1.2 (Schwache Ableitung)**.** Sei nun $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $v \in L^1_{\text{loc}}$ heißt α-te **schwache Ableitung** von u, falls

$$\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega v\varphi$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Wir schreiben $D^\alpha u = v$.

Lemma 12.1.3 (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)**.**
Seien v, $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt $v = \tilde{v}$.

Zum Beweis benötigen wir das Lemma von Du Bois-Reymond. Wir folgen der Darstellung in [9].

Lemma 12.1.4 (Du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt*

$$\int\limits_\Omega f\varphi = 0$$

für alle Testfunktionen φ, so gilt $f = 0$ fast überall, $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt, $f \in L^1(\Omega)$ zu betrachten, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es gelten $|g| \le 1$ und $f \cdot g = |f|$. Da $g \in L^\infty(\Omega)$ ist, folgt auch $g \in L^2(\Omega)$. Somit existiert eine Folge $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_\varepsilon \to g$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Nach Theorem 3.2.3, siehe auch [11, Theorem 3.12], konvergiert nun eine (nicht umbenannte) Teilfolge der η_ε dann fast überall gegen g. Wir dürfen annehmen, dass die Folge η_ε durch Glättung entstanden ist. Somit gilt

$$\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty} \le 1.$$

Aufgrund des Satzes über dominerende Konvergenz folgt nun

$$0 = \int\limits_\Omega f \cdot \eta_\varepsilon \to \int\limits_\Omega f \cdot g = \int\limits_\Omega |f|.$$

Wir schließen also, dass fast überall $f = 0$ gilt und erhalten $f = 0$ in $L^1(\Omega)$. $\square$

Beweis von Lemma 12.1.3. Es gilt

$$\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega \tilde{v}\varphi$$

für alle Testfunktionen φ. Wir erhalten also

$$\int\limits_\Omega (v-\tilde{v})\varphi = 0$$

und somit aufgrund des Lemma von Du Bois-Reymond auch $v=\tilde{v}$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. □

Lemma 12.1.5. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Seien $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $v\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ stetig und gelte*

$$\int\limits_\Omega uD\varphi = -\int\limits_\Omega v\varphi$$

für alle $\varphi\in C^\infty_c(\Omega)$. Dann ist $u\in C^1(\Omega)$ und es gilt $Du=v$.

Beweis. Sei $\varphi\in C^\infty_c(\Omega)$ und sei η_ε ein symmetrischer Friedrichscher Glättungskern mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon>0$.

Wir definieren

$$\varphi_\varepsilon(x) := \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,dy.$$

Entsprechend definieren wir u_ε und v_ε auf kompakten Teilmengen von Ω, so dass diese Integrale wohldefiniert sind. Ist $\varepsilon>0$ hinreichend klein, was wir nachfolgend annehmen, so gilt $\varphi_\varepsilon\in C^\infty_c(\Omega)$. Wir behaupten, dass $v_\varepsilon = D(u_\varepsilon)$ gilt. Dazu betrachten wir $\int v_\varepsilon\varphi$, benutzen die Voraussetzung und erhalten

$$\begin{aligned}\int v_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx &= \int\int v(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,\varphi(x)\,dx\\ &= \int v(y)\int\varphi(x)\eta_\varepsilon(x-y)\,dx\,dy\\ &\overset{sym.}{=}\int v(y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy \overset{n.V.}{=} -\int u(y)D_y\varphi_\varepsilon(y)\,dy\\ &= -\int u(y)D_y\int\varphi(x)\eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy\\ &= -\int u(y)\int\varphi(x)D_y\eta_\varepsilon(y-x)\,dx\,dy\\ &= -\int\int u(y)D_y\eta_\varepsilon(y-x)\,dy\,\varphi(x)\,dx\\ &= \int\int u(y)D_x\eta_\varepsilon(y-x)\,dy\,\varphi(x)\,dx\\ &= \int D_x\int u(y)\eta_\varepsilon(y-x)\,dy\,\varphi(x)\,dx\\ &= \int D_x\int u(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,\varphi(x)\,dx\\ &= \int D_xu_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Du Bois-Reymond folgt somit die Behauptung. Nun gelten $v_\varepsilon\rightrightarrows v$ und $u_\varepsilon\rightrightarrows u$ ($u_\varepsilon\to u$ genügt auch). Aufgrund der Resultate über die Differentiation von Funktionenfolgen erhalten wir nun die Behauptung. □

Beispiel 12.1.6. Sei $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

Dann ist v die schwache Ableitung von u.

Beweis. Sei φ eine Testfunktion

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi' + \int_1^2 \varphi' = -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi = -\int_0^2 v\varphi. \end{aligned}$$

□

Beispiel 12.1.7. Sei $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann besitzt u keine Ableitung im schwachen Sinne.

Beweis. Nehme an, $v \in L^1_{\text{loc}}$ wäre eine schwache Ableitung. Dann folgt für alle Testfunktionen φ

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\varphi &= \int_0^2 u\varphi' = \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi' \\ &= -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + 2\varphi(2) - 2\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi - \varphi(1). \end{aligned}$$

Sei φ_m eine Folge von Testfunktionen mit $0 \le \varphi_m \le 1$, $\varphi_m(1) = 1$, $\varphi_m(x) \to 0$ für $x \neq 1$. Dann gilt für $m \to \infty$

$$\begin{tikzcd} -\int_0^2 v\varphi_m \arrow[r, equal] \arrow[d] & -\int_0^1 \varphi_m - \varphi_m(1) \arrow[d] \\ 0 & 0 - 1 = -1. \end{tikzcd}$$

Daher kann es keine solche Funktion v geben. □

Definition 12.1.8.

(i) Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ im schwachen Sinn für alle } |\alpha| \le k \right\}.$$

(ii) Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ sind, wie wir später sehen werden, Hilberträume.

(iii) Für $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ schreiben wir $u = v$, falls $u = v$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, d. h., falls $u = v$ fast überall gilt.

(iv) Wir definieren die folgende Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \infty, & u \notin W^{k,p}(\Omega), \\ \left(\sum\limits_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha|\le k} \sup\limits_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Hier benutzen wir das wesentliche Supremum. Mit dieser Norm wird der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. Dies beweisen wir später.

(v) $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt.

(vi) Wir schreiben $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, falls

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$

und $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$$

für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

(vii) Wir definieren

$$W^{k,p}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C^\infty_c(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ auch $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \le k-1$. Diese Aussage ist nicht trivial, da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.

(viii) $H^k_0(\Omega) = W^{k,2}_0(\Omega)$.

Beispiel 12.1.9. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Für welche Werte von $\alpha > 0$, n und p gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Für $x \neq 0$ gilt

$$u_i(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$
$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Sei $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ eine Testfunktion und $\varepsilon > 0$. Es folgt

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u\varphi_i = -\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u_i\varphi + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right).$$

Wir erhalten

$$\left| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right) \right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} \le c \cdot \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$$

für $\varepsilon \searrow 0$, falls $n - 1 - \alpha > 0$ gilt.

Es gelten die folgenden Integralabschätzungen

$$\int\limits_{B_1(0)} |Du| \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha-1+n-1} dr \le c,$$

falls $-\alpha-1+n>0$ und
$$\int\limits_{B_1(0)} u \le c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha+n-1}dr \le c,$$
falls $-\alpha+n>0$ ist. Die entsprechenden Integrale werden klein, wenn wir nur über eine Umgebung des Ursprungs integrieren. Somit erhalten wir für $\varepsilon\searrow 0$
$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i\varphi$$
für alle Testfunktionen φ. $u_i(0)$ ist frei wählbar. Aufgrund der Eindeutigkeit der Ableitung ist die schwache Ableitung außerhalb des Ursprungs gleich der klassischen Ableitung. Die obigen Rechnungen zeigen, dass u in ganz Ω schwach differenzierbar ist.

Wann sind u und $Du\in L^p$? Es gilt
$$\int\limits_{B_1(0)} |u|^p = c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha p+n-1}<\infty \Longleftrightarrow -\alpha p+n>0$$
und
$$\int\limits_{B_1(0)} |Du|^p = c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha p-p+n-1}<\infty \Longleftrightarrow -\alpha p-p+n>0.$$
Die letzte Bedingung ist am einschränkendsten. Somit gilt
$$u\in W^{1,p}(\Omega)\Longleftrightarrow \alpha<\frac{n-p}{p}$$
und für $p\ge n$ ist $u(x)$ in keinem $W^{1,p}(\Omega)$-Raum.

Bemerkung 12.1.10. Sei y_k eine dichte Folge in $B_1(0)$. Dann ist
$$u(x)=\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x-y_k|^{-\alpha}\in W^{1,p}(B_1(0)),$$
falls $\alpha<\frac{n-p}{p}$. (Um einfach nachzuweisen, dass nicht nur die endlichen Summen in $W^{1,p}(B_1(0))$ sind, benutzt man am besten die Vollständigkeit von $W^{1,p}(B_1(0))$, die wir in Theorem 12.1.12 zeigen werden.) Es ist also möglich, dass eine Funktion $u\in W^{1,p}$ auf einer dichten Teilmenge unbeschränkt wird (selbst wenn man u auf einer Nullmenge abändert).

Theorem 12.1.11 (Eigenschaften schwacher Ableitungen)**.** *Seien u, $v\in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gelten*

(i) $D^\alpha u\in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *und* $D^\beta(D^\alpha u)=D^\alpha\left(D^\beta u\right)=D^{\alpha+\beta}u$ *für* $|\alpha|+|\beta|\le k$.

(ii) $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}\Longrightarrow \lambda u+\mu v\in W^{k,p}(\Omega)$ *und* $D^\alpha(\lambda u+\mu v)=\lambda D^\alpha u+\mu D^\alpha v$.

(iii) Ist $\Omega'\subset\Omega$ *offen, so folgt* $u\in W^{k,p}(\Omega')$.

(iv) Ist $\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$*, so folgt* $\zeta u\in W^{k,p}(\Omega)$ *und es gilt die Leibnizregel*
$$D^\alpha(\zeta u)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta\zeta D^{\alpha-\beta}u,$$
wobei
$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$
ist und $\alpha! := \alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!$.

Beweis.

(i) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist auch $D^\beta\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit gilt
$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega D^\alpha u D^\beta \varphi &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta}\varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u\varphi \\ &= (-1)^{|\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u\varphi.\end{aligned}$$
Somit gilt $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ im schwachen Sinne.

(ii) Ist klar.

(iii) Ist klar.

(iv) Seien $|\alpha| = 1$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \zeta u D^\alpha \varphi &= \int\limits_\Omega u D^\alpha(\zeta\varphi) - \int\limits_\Omega u\left(D^\alpha\zeta\right)\varphi \\ &= -\int\limits_\Omega D^\alpha u \zeta\varphi - \int\limits_\Omega u\left(D^\alpha\zeta\right)\varphi \\ &= -\int\limits_\Omega \left(\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right)\varphi.\end{aligned}$$
Somit gilt nun
$$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta.$$
Der Rest folgt nun per Induktion wie für klassisch differenzierbare Funktionen.

□

Theorem 12.1.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.*

Bemerkung 12.1.13. Dies ist für $k = 0$ bekannt. Dann gilt nämlich $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Beweis von Theorem 12.1.12.

(i) Wir wollen zunächst zeigen, dass $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm ist: Es ist nur die Dreiecksungleichung im Falle $p < \infty$ nachzuweisen. Seien also $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p} + \|D^\alpha v\|_{L^p}\right)^p\right)^{1/p}, \\ &\quad \text{da die Dreiecksungleichung in } L^p \text{ gilt,} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p}\right)^{1/p}, \\ &\quad \text{da } \left(\mathbb{R}^l, \|\cdot\|_{l^p}\right) \text{ ein Banachraum ist.} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

(ii) Zur Vollständigkeit: Sei u_m eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist auch $D^\alpha u_m$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \le k$. Somit existiert für alle α mit $|\alpha| \le k$ ein Grenzwert,

$$\begin{aligned} D^\alpha u_m &\to u_\alpha, \\ u_m &\to u. \end{aligned}$$

Es fehlt nun noch der Nachweis, dass die Grenzwertbildung mit dem Ableiten vertauscht, also dass $u_\alpha = D^\alpha u$ gilt. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{tikzcd} \int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] \arrow[d] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \varphi \arrow[d] \\ \int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha \varphi. \end{tikzcd}$$

Die Konvergenz folgt hier, da φ in jedem L^q-Raum ist. Somit ist $D^\alpha u = u_\alpha$ und es gilt $u_m \to u \in W^{k,p}(\Omega)$. ☐

12.2. **Approximierbarkeit.** In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}$-Norm approximieren.

Theorem 12.2.1 (Lokale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.**
Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

und es gilt

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Die Regularitätsaussage ist bekannt. Sei also $|\alpha| \le k$. Wir behaupten, dass

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

gilt, dass also Glätten und schwaches Ableiten kommutieren. Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int\limits_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y) dy, \end{aligned}$$

da $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ für festes $x \in \Omega_\varepsilon$ eine Testfunktion ist. Somit folgt

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x).$$

Sei nun $\Omega' \Subset \Omega$. Da die Mollifizierungen in L^p konvergieren, erhalten wir

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega').$$

Also konvergiert jeder Bestandteil der Norm und es gilt auch

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega').$$ ☐

Bemerkung 12.2.2. Dies funktioniert im Falle $p = \infty$ nicht, da sich L^∞-Funktionen i. a. aufgrund ihrer Sprungstellen nicht durch glatte Funktionen in L^∞ approximieren lassen.

Theorem 12.2.3 (Globale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweisskizze.

(i) Zerlege mit Hilfe von Abschneidefunktionen u in Anteile auf „Zwiebelschalen“. Betrachte also $u\eta_i$ statt u, wobei (η_i) eine Zerlegung der Eins ist, wobei die Träger dieser Funktionen jeweils in einer festen Anzahl benachbarter Zwiebelschalen enthalten sind.

(ii) Approximiere dort bis auf einen Fehler $\frac{\delta}{2^{i+1}}$ in der $W^{k,p}$-Norm, so dass der Träger der Approximation maximal in zwei zusätzliche benachbarte Schichten reicht.

(iii) Die Summe der Approximationen ist lokal endlich und daher in C^∞. Auf $\Omega' \Subset \Omega$ schätzt man den Fehler in der Approximation mit Hilfe der Dreiecksungleichung gleichmäßig in Ω' nach oben durch δ ab. Lasse nun $\Omega' \nearrow \Omega$ und erhalte eine bis auf $\delta > 0$ approximierende Funktion.

(iv) Verwende nun $\delta > 0$ als Folgenindex. □

Bemerkung 12.2.4. Wir benötigen keine Randregularität von Ω und bekommen dafür nur $u_m \in C^\infty(\Omega)$ und nicht $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 12.2.5 (Globale Approximierbarkeit in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass

$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert (nach Umbenennen der Koordinatenachsen) eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1, so dass

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x^n > \gamma(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$$

gilt. Definiere $V := \Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.

(ii) Definiere für $x \in V$ und $\varepsilon > 0$ den Punkt $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert ein $\lambda = \lambda(|D\gamma|) \gg 1$, so dass $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x_0)$ für $x \in V$ gilt, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Definiere $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für alle x mit $x^\varepsilon \in \Omega$, die um $\lambda\varepsilon$ in Richtung e_n verschobene Funktion. Mollifiziere und definiere $v^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Dies ist für $\lambda \gg 1$ in der Menge V wohldefiniert. Wir erhalten insbesondere $v^\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{V}\right)$.

(iii) Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Wie in Theorem 12.2.1 sehen wir, dass $D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon \to 0$ in L^p gilt. Weiterhin gilt $D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u \to 0$ in L^p, da Translationen in L^p stetig sind. Hieraus folgt dann $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

Wir wollen noch genauer begründen, warum Translationen in L^p für $1 \le p < \infty$ stetige Abbildungen sind. Seien also $\delta > 0$ und $u \in L^p$ vorgegeben. Wir wollen nachweisen, dass $u(\cdot) - u(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p gilt. Approximiere dazu zunächst die Funktion u bis auf $\delta/3$ in L^p durch eine glatte Funktion. Das Ergebnis, $\tilde{u}$, hat einen beschränkten Gradienten, wobei die Schranke von der Approximation abhängt. Dies funktioniert so nur auf beschränkten Gebieten. Auf unbeschränkten Gebieten sind aber die Beiträge zum L^p-Integral außerhalb einer großen Kugel ohnehin klein und können direkt abgeschätzt werden. Da Translationen für Funktionen mit beschränktem Gradienten in L^p stetig sind, erhalten wir $\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p. Wir wählen nun $|h|$ so klein, dass auch diese Differenz durch $\delta/3$ beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\|u(\cdot) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \le{}& \|u(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_{L^p} + \|\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h)\|_{L^p} \\ &+ \|\tilde{u}(\cdot - h) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \\ \le{}& \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.\end{aligned}$$

(iv) Sei nun $\delta > 0$. Da Ω beschränkt ist, existieren endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und Radien $r_i > 0$, so dass $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$ wie in (i) ist und $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r_i/2}(x_i^0)$ gilt. Wie oben gezeigt, gibt es also $v_i \in C^\infty\left(\overline{V}_i\right)$ mit $\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \le \delta$. Wähle noch $V_0 \Subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N} V_i$ gilt. Nach Theorem 12.2.1 gibt es $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V}_0\right)$ mit $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \le \delta$.

(v) Sei nun ζ_i eine den Mengen $\tilde{V}_i = \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(x_i^0)$ und $\tilde{V}_0 = V_0$ untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Definiere $v := \sum\limits_{i=0}^{N} \zeta_i v_i$. Es gilt $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} ={}& \left\| \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i u) \right\|_{L^p(\Omega)} \\ \le{}& \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ \le{}& c \cdot \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\ \le{}& c \cdot (N+1)\delta,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass die Ableitungen der Funktionen ζ_i gleichmäßig beschränkt sind. Die Behauptung folgt. □

12.3. **Fortsetzbarkeitssätze.**

In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ als $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, so dass deren Norm durch die ursprüngliche Norm abgeschätzt bleibt.

Theorem 12.3.1 (Fortsetzungssatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \Subset V$. Dann gibt es eine beschränkte lineare Abbildung*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$

so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgendes gilt

- *$Eu = u$ fast überall in Ω,*
- *$\operatorname{supp}(Eu) \subset V$,*
- *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(p, \Omega, V) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Die Funktion Eu heißt Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Nehme zunächst an, dass lokal $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Dann gibt es $r > 0$, so dass ohne Einschränkung

$$\begin{aligned}B^+ :={}& B_r(x_0) \cap \{x^n \ge 0\} \subset \overline{\Omega}, \\ B^- :={}& B_r(x_0) \cap \{x^n \le 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.\end{aligned}$$

(ii) Nehme zunächst an, dass $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Definiere eine Spiegelung von höherer Ordnung durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) + 4u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\frac{1}{2}x^n\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

(iii) Wir behaupten zunächst, dass $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$ ist. Definiere dazu $u^- := \overline{u}|_{B^-}$ und $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Für die Normalenableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial u^-}{\partial x^n} = 3\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\tfrac{1}{2}x^n\right).$$

Somit gilt auf $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ für die Normalenableitungen $u^-_{x^n} = u^+_{x^n}$. Auf der Menge $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ stimmen die Funktionswerte von u^+ und u^- und damit auch die Tangentialableitungen überein. Somit gilt nach dem Hebbarkeitssatz aus Analysis II $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$.

(iv) Es gilt

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B_r(x_0))} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

da in der Definition der Spiegelung höherer Ordnung nie weiter als bisher von $\{x^n = 0\}$ entfernt ausgewertet wird. Da die Spiegelung eine Linearkombination von $W^{1,p}$-Funktionen ist und da das neue Argument die Norm höchstens um eine Konstante vergrößert, folgt die Behauptung.

(v) Ist der Rand nicht eben/flach, so biegt man den Rand zunächst flach, setzt dann fort und transformiert anschließend zurück.

(vi) Da sich der Rand nicht mit einer solchen Umgebung überdecken läßt, zerlegt man die Funktion zunächst mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und baut das Resultat anschließend wieder zusammen.

(vii) Durch Multiplikation mit einer Abschneidefunktion, die Null wird bevor man Stellen erreicht, an denen u nicht mehr von der Klasse C^1 ist, stellt man sicher, dass der Träger der fortgesetzten Funktion nicht zu groß wird.

(viii) Wir erhalten also die Abschätzung

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Die Details zu den letzten Schritten sind eine Übung.

(ix) Seien nun $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir approximieren u durch Funktionen $u_m \in C^\infty(\overline{u})$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir $u_m \to u$ fast überall in Ω annehmen. Damit folgt später $Eu = u$ in Ω. Die Abbildung $v \mapsto Ev := \overline{v}$ ist ein linearer Operator. Die Stetigkeit folgt dabei aus der obigen Abschätzung für glatte Funktionen. Diese Abschätzung liefert aber auch

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Eu_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun $\overline{u} = Eu$ als den Grenzwert dieser Folge. Eu ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig und die gesuchte Fortsetzung. Die Normabschätzung für Eu folgt durch Grenzübergang.

(x) Der Fall $p = \infty$ ist ebenfalls eine Übung. □

Bemerkung 12.3.2. Für $\partial\Omega \in C^2$ funktioniert die obige Konstruktion auch noch für $W^{2,p}(\Omega)$-Funktionen. Dabei bleibt eine C^2-Funktion jedoch nicht in dieser Klasse.

Mit Hilfe von Spiegelungen höherer Ordnung kann man analog aber auch Fortsetzungsoperatoren für die Räume $W^{k,p}$ konstruieren. Dies bleibt als Übung.

12.4. **Spuren von Sobolevfunktionen.** Wir wollen Randwerte von $W^{1,p}$-Funktionen definieren. Diese Funktionen sind i. a. nicht stetig und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

Sei Ω beschränkt. Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < \infty$, so besitzt u Randwerte als L^p-Funktion.

Theorem 12.4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ ist und

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c(p, \Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt.

Beweis.

(i) Nehme zunächst an, dass $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist, dass $\partial\Omega$ in der Nähe eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ flach ist, lokal also $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Wähle nun $r > 0$ so, dass $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap \{x^n > 0\}$ gilt. Definiere $\hat{B} := B_{r/2}(x_0)$ und $B := B_r(x_0)$. Setze weiterhin $\Gamma := \partial\Omega \cap \{x^n = 0\} \cap \hat{B}$ und $(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x^n = 0\}$, wobei das letzte Gleichheitszeichen die Identifikation der beiden Mengen andeutet.

Sei $\zeta \in C_c^\infty(B)$, $\zeta \ge 0$ und $\zeta = 1$ in $\hat{B}$. Setze $B^+ := B \cap \Omega$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma |u|^p d\hat{x} &\le \int\limits_{\{x^n=0\}} \zeta \cdot |u|^p d\hat{x} \\
&= -\int\limits_{B^+} \left(\zeta |u|^p\right)_{x^n} dx \quad \text{(Hauptsatz)} \\
&\le \int\limits_{B^+} |D\zeta| \cdot |u|^p + p|u|^{p-1}|Du|\zeta
\end{aligned}$$

(für $p = 1$ erhält man dieselbe obere Abschätzung mit $\pm\zeta u$ punktweise und integriert dann in $\hat{x}$)

$$\le c \cdot \int\limits_{B^+} |u|^p + |Du|^p \quad \left(\text{Young, } \tfrac{p-1}{p} + \tfrac{1}{p} = 1\right).$$

(ii) Für ein allgemeines C^1-Gebiet Ω, eine kleine Umgebung Γ von $x_0 \in \partial\Omega$ in $\partial\Omega$ erhält man durch Aufbiegen ebenfalls

$$\int\limits_\Gamma |u|^p \le c \cdot \int\limits_\Omega |u|^p + |Du|^p.$$

(iii) Überdecke nun $\partial\Omega$ mit solchen Randstücken Γ, zerlege mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und erhalte

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Definiere $Tu := u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Es folgt

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Wir bemerken, dass T ein linearer Operator ist.

(iv) Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Sei $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ eine approximierende Folge, also $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir erhalten
$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$
Daher ist Tu_m eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega)$. Wir definieren also
$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m \text{ in } L^p(\partial\Omega).$$
Diese Definition ist unabhängig von der approximierenden Folge u_m. Die Normabschätzung für Tu folgt durch Grenzübergang.

(v) Sei schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Die in Theorem 12.2.5 konstruierte Folge ist so definiert, dass sie in diesem Falle auf ganz $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen u konvergiert. Daher folgt hier $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Da der Grenzwert aber von der approximierenden Folge unabhängig ist, gilt dies auch, wenn man andere approximierende Folgen verwendet. □

Theorem 12.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*
$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad\Longleftrightarrow\quad Tu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei zunächst $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es nach Definition der $W_0^{1,p}(\Omega)$-Funktionen eine Folge von Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für alle Folgenglieder gilt $Tu_m = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ein stetiger linearer Operator ist, folgt auch $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir benutzen eine Zerlegung der Eins und biegen den Rand $\partial\Omega$ lokal auf. Daher dürfen wir annehmen, dass $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \equiv W^{1,p}(\{x^n > 0\})$, $\operatorname{supp} u \Subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$ und $Tu = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ gelten. Wir wollen nachweisen, dass sich u in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ durch $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$-Funktionen approximieren läßt. Es gilt $Tu = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$. Daher gibt es $u_m \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, so dass
$$\begin{aligned} u_m &\to u \text{ in } W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right), \\ Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} &\to 0 \text{ in } L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right). \end{aligned}$$
Sei nun $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x^n \ge 0$. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir
$$|u_m(\hat{x}, x^n)| \le |u_m(\hat{x}, 0)| + \int_0^{x^n} |u_{m,x^n}(\hat{x}, t)|dt.$$
Wir betrachten die p-te Potenz dieser Ungleichung und schätzen mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit den Exponenten p und $\frac{p}{p-1}$ ab
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, x^n)|^p d\hat{x} \le{}& c(p) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ &+ c(p) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x^n} 1 \cdot |Du_m(\hat{x}, t)|dt \right)^p d\hat{x} \\ \le{}& c(p) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ &+ c(p) \cdot (x^n)^{p-1} \cdot \int_0^{x^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(\hat{x}, t)|^p d\hat{x}\, dt. \end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ gilt $u_m \to 0$ in $L^p\left(\partial\mathbb{R}^n_+\right)$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Wegen $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\{x^n > t\})$ ergibt sich $u_m \to u$ in $L^p(\{x^n = t\})$. Daher folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x},t)|^p \, d\hat{x} \le c(p) t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x}\, d\tau.$$

Wir integrieren dies bezüglich t und erhalten

$$\int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x},t)|^p \, d\hat{x}\, dt \le c(p) \int\limits_0^{x^n} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x}\, d\tau\, dt. \tag{12.1}$$

Definiere nun die approximierenden Funktionen mit Randwerten Null. Sei $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $0 \le \zeta \le 1$ und

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } [0,1], \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \setminus [0,2]. \end{cases}$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$ Funktionen

$$\zeta_m(x) := \zeta(mx^n)$$

und

$$w_m(x) := u(x)(1 - \zeta_m(x)).$$

Es folgt

$$w_{m,x^n} = u_{x^n}(1 - \zeta_m) - mu\zeta'$$

und

$$D_{\hat{x}} w_m = D_{\hat{x}} u(1 - \zeta_m).$$

Zeige nun, dass $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ konvergiert. Es gilt $w_m \to u$ in L^p aufgrund der Stetigkeit des Integrals bezüglich des Integrationsgebietes. Wir schätzen wie folgt ab

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \le c(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p + c(p,\zeta) m^p \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \equiv A + B.$$

Wir benutzen nochmals die Stetigkeit bezüglich des Integrationsgebietes (oder den Satz von der dominierenden Konvergenz mit entsprechend "abgeschnittenen" Funktionen) und erhalten $A \to 0$ für $m \to \infty$. Das zweite Integral schätzen wir mit Hilfe von (12.1) ab

$$\begin{aligned} B &\le c \cdot m^p \int\limits_0^{2/m} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x} d\tau dt \\ &\le c \cdot m^p \left(\int\limits_0^{2/m} t^{p-1} dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \right) \\ &\le c \cdot \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \end{aligned}$$

$$\to 0$$

für $m \to \infty$. Wir erhalten also $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Andererseits gilt $w_m = 0$ für $0 < x^n < 1/m$. Daher erhält man durch Mollifizierung der w_m eine Folge $u_m \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ und es gilt (wie behauptet) $u \in W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. □

13. Sobolevungleichungen und Einbettungssätze

Sobolevräume betten in andere Funktionenräume ein. Diese Einbettungen

$$\left(W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow ?\right)$$

unterscheiden sich, je nachdem, ob

- $1 \le p < n$,
- $p = n$ oder
- $n < p \le \infty$

gilt. Es genügt, die entsprechenden Abschätzungen für glatte Funktionen zu beweisen, da diese dicht in den entsprechenden Sobolevfunktionen liegen.

13.1. **Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung.**

Definition 13.1.1. Sei $1 \le p < n$. Der zu p **konjugierte Sobolevexponent** ist $p^* = \frac{np}{n-p}$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Es gilt $p^* > p$.

Theorem 13.1.2 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung)**.**
Sei $1 \le p < n$. Dann gibt es eine Konstante c, die nur von p und n abhängt, so dass

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ gilt.

Bemerkung 13.1.3. Aufgrund des Skalierungsverhaltens der Ungleichung bei einer Funktionenfamilie der Form $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ sieht man (Übung), dass solch eine Ungleichung nur für den hier angegebenen Wert von p^* richtig sein kann.

Beweis von Theorem 13.1.2. **Sei zunächst** $p = 1$**.** Da u kompakten Träger hat, folgt für festes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x^i} u_i\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, y^i, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) dy^i.$$

Wir schließen hieraus zunächst, dass

$$|u(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|Du\left(x^1, \ldots, y^i, \ldots, x^n\right)\right| dy^i$$

gilt und erhalten somit auch

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^n \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du(x^1, \ldots, y^i, \ldots, x^n)| dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Diese Ungleichung integrieren wir nun bezüglich der Variablen x^1

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx^1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx^1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx^1 \\
&\qquad \text{da im ersten Faktor nun keine } x^1\text{-Abhängigkeit mehr vorliegt} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}
$$

aufgrund der verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung, angewandt auf den zweiten Faktor für die Variable x^1.

Wir fahren nun analog zu dieser Rechnung fort. Zunächst integrieren wir bezüglich x^2, ziehen wieder einen Faktor, in dem kein x^2 vorkommt, nach vorne und verwenden dann für den Rest wiederum die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx^1\, dx^2 &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=3}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx^2 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1\, dx^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dx^2\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Per Induktion erhält man hieraus durch weitere Integrationen die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1 \ldots dy^i \ldots dx^n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| \right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Dies ist gerade die behauptete Ungleichung im Falle $p = 1$

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Sei nun $1 < p < n$ **beliebig.** Für $\gamma > 1$ ist (wie man leicht direkt nachrechnet) mit u auch $|u|^\gamma \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Aus der obigen Ungleichung im Falle $p = 1$ erhalten wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung $\left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1\right)$

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma| \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma \cdot |u|^{\gamma-1}|Du| \\ &\leq \gamma \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Wir wählen nun γ so, dass die Exponenten in den Integralen mit $|u|$ übereinstimmen, also so dass

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}$$

gilt. Dies ist der Fall für

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1.$$

Mit dieser Wahl von γ gilt dann auch

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{pn}{n-p} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = p^*$$

und

$$\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{np - p - np + n}{pn} = \frac{n-p}{pn} = \frac{1}{p^*}.$$

Wir erhalten somit die behauptete Ungleichung

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\right)^{1/p^*} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\right)^{1/p}.$$

□

Theorem 13.1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $1 \leq p < n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $u \in L^{p^*}(\Omega)$ und*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit $c = c(p, n, \Omega)$.

Beweis. Sei $\overline{u}$ eine $W^{1,p}$-Fortsetzung von u mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$,

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Da $\overline{u}$ kompakten Träger hat, gibt es Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$u_m \to \overline{u} \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ konvergiert.}$$

Nach Theorem 13.1.2 folgt somit

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da u_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}$ ist, ist auch u_m eine Cauchyfolge in L^{p^*} und es gilt $u_m \to v \in L^{p^*}$ für ein $v \in L^{p^*}$. Da aber beide Konvergenzen auch L^1_{loc}-Konvergenz implizieren, stimmen die Grenzwerte überein und es gilt somit $u_m \to \overline{u}$ auch in L^{p^*}. Wir wenden nun nochmals Theorem 13.1.2 an und erhalten

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Gehen wir hierbei zum Grenzwert über, so erhalten wir die mittlere Ungleichung in der folgenden Ungleichungskette. Die erste Ungleichung folgt aufgrund der Inklusion der beteiligten Gebiete und die letzte Ungleichung ist eine Konsequenz der Fortsetzungseigenschaft von Ω. Insgesamt ergibt sich also

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

was gerade die Behauptung des Theorems ergibt. $\square$

Einen solchen Einbettungssatz bekommen wir auch, wenn das Gebiet nicht von der Klasse C^1 ist, die Sobolevfunktion dafür aber Randwerte Null hat.

Theorem 13.1.5 (Poincaréungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $|\Omega| < \infty$. Seien $1 \le p < n$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für beliebiges $q \in [1, p^*]$, wobei $c = c(p, q, n, \Omega)$.

Beweis. Da $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ist, gibt es Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, die in $W^{1,p}(\Omega)$ gegen u konvergieren. Setze diese durch Null nach $\mathbb{R}^n$ fort. Benutze Theorem 13.1.2 und lasse $m \to \infty$. Es folgt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Da $|\Omega|$ beschränkt ist, bekommen wir aufgrund der Hölderschen Ungleichung eine Schachtelung der L^p-Räume und wir erhalten

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

für $1 \le q \le p^*$. $\square$

Korollar 13.1.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $|\Omega| < \infty$ und sei $1 \le p < n$. Dann sind auf $W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

äquivalente Normen.

13.2. **Morreyungleichung.**

Theorem 13.2.1 (Morrey). *Sei $n < p < \infty$. Dann gibt es $c = c(p, n)$, so dass*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ggf. mit unendlicher rechter Seite, gilt, wobei $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ ist.

Beweis.

(i) Fixiere eine Kugel $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$. Wir behaupten zunächst, dass es eine Konstante $c = c(n)$ gibt, so dass

$$\fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\, dy \le c \cdot \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|y - x|^{n-1}}\, dy.$$

Dies sieht man wie folgt ein: Fixiere $w \in \partial B_1(0)$. Dann gilt für $0 < s < r$

$$\begin{aligned} |u(x + sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x + tw)\, dt \right| \\ &= \left| \int_0^s \langle Du(x + tw), w \rangle\, dt \right| \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^s |Du(x+tw)|\,dt.$$

Integriere dies bezüglich w über die Sphäre und erhalte

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,dw \leq \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |Du(x+tw)|\,dw\,dt.$$

Setze nun $y := x + tw$. Dann gilt $t = |x-y|$ und es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,dw &\leq \int_0^s t^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dw\,dt \\ &= \int_{B_s(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy \leq \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy,\end{aligned}$$

da $0 < s < r$ ist. Wir multiplizieren diese Ungleichung nun mit s^{n-1}, integrieren über s von 0 bis r und erhalten wie behauptet die Ungleichung

$$\int_{B_r(x)} |u(y)-u(x)|\,dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

(ii) Fixiere nun $x \in \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der soeben gewonnenen Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}|u(x)| &= \fint_{B_1(x)} |u(x)|\,dy \\ &\leq \fint_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,dy + \fint_{B_1(x)} |u(y)|\,dy \\ &\leq c \cdot \int_{B_1(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy + c\cdot \|u\|_{L^p(B_1(x))} \\ &\leq c \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad + c\cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c\cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung die folgende Integralabschätzung verwendet haben

$$\begin{aligned}\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\,dy &= c\cdot \int_0^1 r^{n-1} r^{-(n-1)\frac{p}{p-1}}\,dr \\ &= c\cdot r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}}\Big|_0^1 < \infty,\end{aligned}$$

da $n > (n-1)\frac{p}{p-1}$ genau dann gilt, wenn $p > n$ ist. Somit folgt

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq c\cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

(iii) Seien nun $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $r := |x-y|$. Wir definieren $W := B_r(x) \cap B_r(y)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &= \fint_W |u(x)-u(y)|dz \\
&\le \fint_W |u(x)-u(z)|dz + \fint_W |u(y)-u(z)|dz.
\end{aligned}
$$

Wir benutzen nun wiederum den ersten Teil des Beweises und erhalten

$$
\begin{aligned}
\fint_W |u(x)-u(z)|dz &\le c \cdot \fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dz \le c \cdot \int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}}dz \\
&\le c \cdot \left(\int_{B_r(x)} |Du|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{B_r(x)} \frac{1}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le c \cdot \left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Analog folgt

$$
\fint_W |u(y)-u(z)|dz \le c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\le c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= c \cdot |x-y|^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Für den noch nicht abgeschätzten Anteil der Höldernorm folgt also

$$
\begin{aligned}
[u]_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} &\equiv \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \\
&\le c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

und es ergibt sich die Behauptung des Theorems. □

Bemerkung 13.2.2. $\star$ Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ auch noch

$$
\|u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Durch leichte Modifikation des Beweises bekommt man

$$
|u(y)-u(x)| \le c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \left(\int_{B_{2r}(x)} |Du|^p \right)^{1/p}
$$

für $u \in C^1(B_{2r}(x))$, $y \in B_r(x)$ und $n < p < \infty$. Wählen wir nun jeweils einen stetigen Repräsentanten der hier auftretenden Funktionen so folgt die letzte Ungleichung durch Approximation auch noch für $u \in W^{1,p}(B_{2r}(x))$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 13.2.3. Durch Approximation beweist man, dass die Morreysche Ungleichung auch noch für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dabei ist zu beachten, dass die Morreysche Ungleichung gleichmäßige Hölderschranken für die Funktionen der approximierenden Folge liefert. Daher können wir auch für den Grenzwert u einen

Hölderstetigen Repräsentanten wählen. In Zukunft werden wir stets diesen Repräsentanten betrachten.

Theorem 13.2.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $n < p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann besitzt u einen stetigen Repräsentanten, $u^* \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, und es gilt*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit $c = c(p, n, \Omega)$.

Beweis. Der Beweis benutzt den Morreyschen Einbettungssatz genauso, wie im Beweis von Theorem 13.1.4 der Sobolevsche Einbettungssatz, Theorem 13.1.2, eingeht. Details: Übungsaufgabe. □

Für Funktionen, die schwache Ableitungen höherer Ordnung besitzen, erhält man den folgenden Einbettungssatz. Zum Beweis wendet man einfach solange den Sobolevschen oder Morreyschen Einbettungssatz an, bis dies nicht mehr möglich ist.

Theorem 13.2.5. ⋆ *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(1) *Falls $k < \frac{n}{p}$ gilt, dann ist $u \in L^q(\Omega)$ mit*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{k,p}},$$

wobei $c = c(k, p, n, \Omega)$ ist.

(2) *Falls $k > \frac{n}{p}$ gilt, so ist*

$$u \in C^{k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1, \gamma}\left(\overline{\Omega}\right),$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer oder Abrundefunktion ist und

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ < 1 \text{ (beliebig)}, & \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Es gilt

$$\|u\|_{C^{k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1, \gamma}(\overline{\Omega})} \le c(k, p, n, \gamma, \Omega) \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Beweis.

(i) Sei $k < \frac{n}{p}$. Nach Definition gilt $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ für $|\alpha| \le k$. Aufgrund der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung erhalten wir

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \text{ für } |\beta| \le k - 1.$$

Somit ist

$$u \in W^{k-1,p^*}(\Omega) \text{ mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

und

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Analog folgt

$$\|u\|_{W^{k-2,(p^*)^*}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \text{ mit } \frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Die Behauptung folgt nun per Induktion.

(ii) Sei $k > \frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$. Wie im ersten Teil erhalten wir
$$\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$
für $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$, falls $lp < n$ ist. Wähle l maximal, so dass dies erfüllt ist, d. h.
$$l < \frac{n}{p} < l + 1, \quad l = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$
Man überprüft direkt, dass
$$r = \frac{pn}{n - pl} > n$$
ist. Nun können wir die Morreysche Ungleichung anwenden und erhalten
$$D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{r}}\left(\overline{\Omega}\right)$$
für $|\alpha| \le k - l - 1$. Es gilt nach Definition von r
$$1 - \frac{n}{r} = 1 - \frac{n}{p} + l = 1 - \frac{n}{p} + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$
Unter Berücksichtigung von Lemma 12.1.5 ist daher
$$u \in C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}}\left(\overline{\Omega}\right)$$
mit den entsprechenden Normabschätzungen.

(iii) Sei $k > \frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$. Setze $l = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Wie oben erhalten wir
$$u \in W^{k-l,r}(\Omega) \text{ mit } r = \frac{np}{n - pl} = n.$$
Nach der Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg-Sobolev erhalten wir somit $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$ für alle q mit $n \le q < \infty$ und $|\alpha| \le k - l - 1 = k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Nun können wir den Morreyschen Einbettungssatz anwenden und erhalten $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $n < q < \infty$ und $|\alpha| \le k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1$. Wir erhalten somit, nochmals mit Lemma 12.1.5, wie gewünscht
$$u \in C^{k-\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1, \gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ für alle } 0 < \gamma < 1$$
samt entsprechender Normabschätzungen. □

13.3. **Kompaktheitssätze.** Für $1 \le p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ sind die Einbettungen $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ stetig. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ist für $1 \le q < p^*$ sogar eine kompakte Einbettung.

Definition 13.3.1. Seinen X, Y Banachräume, $X \subset Y$. X ist **kompakt** enthalten in Y,
$$X \Subset Y,$$
falls
(i) $\|x\|_Y \le c \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$,
(ii) jede beschränkte Folge in X ist in Y präkompakt.

Theorem 13.3.2 (Rellich-Kondrachov). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < n$. Dann gilt*
$$W^{1,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega)$$
für alle $1 \le q < p^*$.

Beweis.
(i) Die Sobolevschen Einbettungssätze und die Beschränktheit von Ω liefern die Stetigkeit der Einbettung.

(ii) Sei also u_m in $W^{1,p}(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Es genügt, eine in $L^q(\Omega)$ konvergente Teilfolge zu finden.

(iii) Da sich die Funktionen u_m zu $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger in einer großen Kugel B_R fortsetzen lassen, genügt es, solche Funktionen mit
$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(B_R)} < \infty$$
zu betrachten.

Wir glätten und definieren $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$ für $1 \ge \varepsilon > 0$, wobei wir annehmen dürfen, dass $\operatorname{supp} u_m^\varepsilon \Subset B_{R+1}$ gilt.

(iv) Wir behaupten zunächst, dass $u_m^\varepsilon \to u_m$ für $\varepsilon \to 0$ in L^q konvergiert und zwar sogar gleichmäßig in m.

Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir zunächst glatte Funktionen u_m und erhalten
$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \varepsilon^{-n}\eta_\varepsilon\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) u_m(z)\,dz - u_m(x)\\
&= \int\limits_{B_1(0)} \eta(y)(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\,dy\\
&= \int\limits_{B_1(0)} \eta(y)\int\limits_0^1 \frac{d}{dt}u_m(x-\varepsilon t y)\,dt\,dy\\
&= -\varepsilon \int\limits_{B_1(0)} \eta(y)\int\limits_0^1 \langle Du_m(x-\varepsilon t y), y\rangle\,dt\,dy.
\end{aligned}$$
Hieraus folgt
$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{R+1}} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\,dx &\le \varepsilon \int\limits_{B_1(0)} \eta(y)\int\limits_0^1 \int\limits_{B_{R+1}} |Du_m(x-\varepsilon t y)|\,dx\,dt\,dy\\
&\le \varepsilon \int\limits_{B_{R+2}(0)} |Du_m(z)|\,dz.
\end{aligned}$$
Da das Maß dieser Kugel endlich ist, folgt
$$\begin{aligned}
\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B_{R+1})} &\le \varepsilon \cdot \|Du_m\|_{L^1(B_{R+2})}\\
&\le \varepsilon \cdot c \cdot \|Du_m\|_{L^p(B_{R+2})}.
\end{aligned}$$
Mittels Approximation sehen wir, dass diese Ungleichung auch noch für $W^{1,p}$-Funktionen mit Träger in $B_R(0)$ gilt.

Da $\|Du_m\|_{L^p(B_R)}$ gleichmäßig beschränkt ist, ist die folgende Konvergenz für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in m
$$u_m^\varepsilon \to u_m \text{ in } L^1(B_{R+1}).$$
Dies zeigt die Behauptung im Falle $q = 1$. Im allgemeinen Fall ist $1 < q < p^*$. Daher gibt es ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so dass
$$\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{1} + \frac{1-\vartheta}{p^*}$$
gilt. Somit gilt auch
$$1 = \frac{\vartheta q}{1} + \frac{(1-\vartheta)q}{p^*}$$

und wir erhalten die folgende Interpolationsungleichung für L^p-Räume

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q} &= \left(\int |f|^q\right)^{1/q} = \left(\int |f|^{\vartheta q} \cdot |f|^{(1-\vartheta)q}\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int |f|\right)^{\vartheta} \cdot \left(\int |f|^{p^*}\right)^{\frac{1-\vartheta}{p^*}} \\ &= \|f\|_{L^1}^{\vartheta} \cdot \|f\|_{L^{p^*}}^{1-\vartheta}.\end{aligned}$$

In unserem Falle folgt also

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B_{R+1})} \le \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B_{R+1})}^{\vartheta} \, \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(B_{R+1})}^{1-\vartheta}.$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite hier ist aufgrund der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung gleichmäßig beschränkt. Benutze dabei insbesondere, dass $\|u_m^\varepsilon\|_{L^{p^*}} \le \|u_m\|_{L^{p^*}}$ ist, siehe [20, Thm 1.6.1]. Im ersten Teil dieses Teilbeweises haben wir gesehen, dass der erste Faktor gegen Null geht. Somit erhalten wir auch $u_m^\varepsilon \to u_m$ in $L^q(B_{R+1})$, gleichmäßig in m, und die Behauptung folgt.

(v) Als nächstes behaupten wir, dass die Folge u_m^ε für festes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Wähle dazu $x \in \mathbb{R}^n$. Beachte für die nachfolgenden Rechnungen, dass bei Glättungen, um das L^1-Integral konstant zu halten, $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ist. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}|u_m^\varepsilon(x)| &\le \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|dy \\ &\le \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_m\|_{L^1(B_{R+1}(0))} \le \frac{c}{\varepsilon^n} < \infty\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|Du_m^\varepsilon(x)| &\le \int\limits_{B_\varepsilon(x)} |D\eta_\varepsilon(x-y)| \cdot |u_m(y)|dy \\ &\le \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_m\|_{L^1(B_{R+1}(x))} \le \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < \infty.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

(vi) Sei nun $\delta > 0$. Wir behaupten, dass es eine Teilfolge u_{m_j} der u_m gibt, so dass

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(B_{R+1})} \le \delta$$

gilt. Sei also $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B_{R+1})} \le \frac{\delta}{3} \tag{13.1}$$

gilt. Fixiere nun $\varepsilon > 0$ entsprechend. Aufgrund der oben bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz, können wir dies unabhängig von m erreichen. Nach Arzelà-Ascoli gibt es für festes $\varepsilon > 0$ eine in B_{R+1} gleichmäßig konvergente Teilfolge $u_{m_j}^\varepsilon$ der u_m^ε. Insbesondere gilt für diese Teilfolge also

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(B_{R+1})} = 0.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und (13.1) folgt also die Behauptung.

(vii) Das Theorem folgt nun, wenn wir in der letzten Behauptung $\delta \searrow 0$ lassen und die Teilfolgen iterativ aus vorhergehenden (für eine Folge von $\delta_i \to 0$) wählen. Eine Diagonalfolge aus dieser Folge von Teilfolgen ist dann die gesuchte Cauchyfolge in L^q. □

Bemerkung 13.3.3.

(i) Es gilt stets $p^* > p$ und $p^* \to \infty$ für $p \nearrow n$. Daher gilt
$$W^{1,p}(\Omega) \Subset L^p(\Omega) \quad \forall\, 1 \le p \le \infty$$
für Ω wie oben. Im Falle $n < p \le \infty$ benutzt man dazu die Morreysche Ungleichung und ebenfalls den Satz von Arzelà-Ascoli.

(ii) Falls Ω nur offen und beschränkt ist, gilt auch noch
$$W_0^{1,p}(\Omega) \Subset L^p(\Omega).$$

Beweis. Übung. □

Theorem 13.3.4 (Poincaré). *Sei die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es $c = c(n, p, \Omega)$, so dass*
$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$
für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt, wobei
$$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u.$$

Beweis. Falls dies nicht der Fall ist, finden wir $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit
$$\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k \cdot \|Du_k\|_{L^p(\Omega)}.$$
Hierzu definieren wir (Wohldefiniertheit folgt nach Annahme)
$$v_k := \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}.$$
Nach Definition gelten $(v_k)_\Omega = 0$ und $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Wir erhalten nach Definition der u_k
$$\|Dv_k\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} < \frac{1}{k}.$$
Insbesondere sind die v_k also in $W^{1,p}(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt. Daher konvergiert nach Rellich-Kondrachov eine (nicht umbenannte) Teilfolge,
$$v_k \to v \text{ in } L^p(\Omega).$$
Auch im Limes bleiben die Eigenschaften $(v)_\Omega = 0$ und $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ erhalten. Sei nun $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Dann gilt
$$\int\limits_\Omega v \cdot D_i\varphi = \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega v_k \cdot D_i\varphi = -\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega D_i v_k \varphi = 0,$$
da $Dv_k \to 0$ in L^p konvergiert. Damit ist $v \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $Dv = 0$ fast überall in Ω. Also ist (Übung) die Funktion v konstant. Wegen $(v)_\Omega = 0$ folgt daher $v \equiv 0$ im Widerspruch zu $\|v\|_{L^p} = 1$. □

Theorem 13.3.5 (Poincaré für eine Kugel). *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es $c = c(n, p)$ mit*
$$\|u - (u)_{B_r(x)}\|_{L^p(B_r(x))} \le c \cdot r \cdot \|Du\|_{L^p(B_r(x))}$$
für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ und für alle $u \in W^{1,p}(B_r(x))$.

Beweis. Übung. Betrachte zunächst eine feste Kugel und skaliere dann, um die genaue Abhängigkeit vom Radius r zu erhalten. □

Bemerkung 13.3.6. $\star$ Sei $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Nach Theorem 13.3.5 mit $p = 1$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\fint_{B_r(x)} \left|u - (u)_{B_r(x)}\right| &\le c \cdot r \cdot \fint_{B_r(x)} |Du| \\
&\le c \cdot r \cdot \left(\fint_{B_r(x)} |Du|^n \right)^{1/n} \qquad \text{(Hölder-)} \\
&\le c \cdot \left(\int_{B_r(x)} |Du|^n \right)^{1/n} \le c \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n \right)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Definiere die BMO-Halbnorm ("bounded mean oscillation") als

$$[u]_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B_r(x) \subset \mathbb{R}^n} \left\{ \fint_{B_r(x)} \left|u - (u)_{B_r(x)}\right| \right\}.$$

Die obige Rechnung zeigt somit, dass

$$[u]_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

gilt.

13.4. **Differenzenquotienten $\star$.**

Definition 13.4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega' \Subset \Omega$, $1 \le i \le n$ und $h \neq 0$. Sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Definiere den i-ten **Differenzenquotienten** der Göße h durch

$$\begin{aligned}
D_i^h u(x) &:= \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \\
D^h u &:= \left(D_1^h u, \ldots, D_n^h u\right).
\end{aligned}$$

Theorem 13.4.2 (Differenzenquotienten und schwache Ableitungen)**.**

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\Omega' \Subset \Omega$ gibt es ein $c = c(\Omega, \Omega', n, p) > 0$, so dass

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(ii) Sei $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gibt es $c > 0$ und $\Omega' \Subset \Omega$ mit

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$$

für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, so gilt $u \in W^{1,p}(\Omega')$ und

$$\|Du\|_{L^p(\Omega')} \le c.$$

Beweis.

(i) Sei $1 \le p < \infty$ und sei u glatt. Sei $x \in \Omega'$, $1 \le i \le n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Es gilt

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^1 u_i(x + the_i) h \, dt$$

$$|u(x+he_i)-u(x)| \le |h| \cdot \int\limits_0^1 |Du(x+the_i)|\,dt$$

und aufgrund der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} \left|D^h u\right|^p &\le c\sum_i \int\limits_{\Omega'} \int\limits_0^1 |Du(x+the_i)|^p\,dt\,dx\\ &= c\sum_i \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |Du(x+the_i)|^p\,dx\,dt \le c\int\limits_{\Omega} |Du|^p.\end{aligned}$$

Da Ω' von $\partial\Omega$ mindestens Abstand $2|h|$ hat, folgt die Behauptung durch Approximation.

(ii) Gelte $\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$ eine Testfunktion. Dann gilt die folgende "partielle Integrationsformel", falls $|h| \le c(\varphi)$ klein genug ist

$$\int\limits_{\Omega'} u(x)\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}dx = -\int\limits_{\Omega'} \frac{u(x)-u(x-he_i)}{h}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{\Omega'} u\left(D_i^h\varphi\right) = -\int\limits_{\Omega} \left(D_i^{-h}u\right)\varphi.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\sup_h \left\|D_i^{-h}u\right\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$

Daher existiert $v_i \in L^p(\Omega')$ und eine Folge $h_k \to 0$, so dass

$$D_i^{-h_k}u \rightharpoonup v_i \quad \text{in } L^p(\Omega').$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} u\varphi_i = \int\limits_{\Omega} u\varphi_i &= \lim_{h_k\to 0}\int\limits_{\Omega} u\cdot D_i^{h_k}\varphi = \lim_{h_k\to 0} -\int\limits_{\Omega} D_i^{-h_k}u\varphi\\ &= \lim_{h_k\to 0} -\int\limits_{\Omega'} D_i^{-h_k}u\varphi = -\int\limits_{\Omega'} v_i\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $v_i = u_i$ im schwachen Sinne. Wegen der schwachen Konvergenz ist $v_i \in L^p(\Omega')$ und wir erhalten $Du \in L^p(\Omega')$. Da auch $u \in L^p(\Omega')$ ist, folgt $u \in W^{1,p}(\Omega')$. Die Normabschätzung folgt aus der Unterhalbstetigkeit der Norm. □

14. Spektralsatz

14.1. **Spektrum.** Sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 14.1.1. Sei X ein Banachraum und $T \in L(X,X) \equiv L(X)$.

(i) Die Menge $\rho(T) \subset \mathbb{K}$ aller rellen oder komplexen Zahlen λ, so dass $T-\lambda\,\mathrm{id} \equiv T-\lambda$ ein Banachraumisomorphismus ($T-\lambda$ ist stetig, bijektiv und $(T-\lambda)^{-1}$ ist ebenfalls stetig) ist, heißt **Resolventenmenge** von T.

(ii) $\sigma(T) := \mathbb{K}\setminus\rho(T)$ heißt **Spektrum** von T.

(iii) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K}\colon T-\lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt das **Punktspektrum** von T.

(iv) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{K}\colon T-\lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X, (T-\lambda)^{-1}\colon R(T-\lambda) \to X \text{ nicht stetig}\}$ heißt das **kontinuierliche Spektrum** von T.

(v) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} \neq X\}$ heißt das **residuelle Spektrum** oder **Restspektrum** von T.

Theorem 14.1.2 (Neumannsche Reihe)**.** *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $\operatorname{id} - T \equiv \mathbb{1} - T$ invertierbar, es gelten $(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$ und $\|(\mathbb{1} - T)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|T\|}$.*

Beweis. Aufgrund der geometrischen Reihe konvergiert die Reihe absolut:

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} T^n \right\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Die angegebene Reihe ist invers zu $\mathbb{1} - T$, denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} T^n \cdot (\mathbb{1} - T) = \mathbb{1} - T^{N+1} = (\mathbb{1} - T) \cdot \sum_{n=0}^{N} T^n.$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung, da $\left\|T^{N+1}\right\| \le \|T\|^{N+1} \to 0$. □

Korollar 14.1.3. *Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, X)$ und gelte $ST = \mathbb{1}_X$ sowie $TS = \mathbb{1}_Y$. S heißt dann Inverse zu T. Dann gibt es eine Umgebung U von T in $L(X, Y)$, so dass alle $\tilde{T} \in U$ eine Inverse in $L(Y, X)$ besitzen.*

Der Beweis funktioniert auch für einseitige Inverse.

Beweis. Sei

$$U := \left\{ \tilde{T} \in L(X, Y) \colon \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1 \right\}.$$

Sei $\tilde{T} \in U$ beliebig. Es gilt $S\tilde{T} = ST + S\big(\tilde{T} - T\big) = \mathbb{1} + S\big(\tilde{T} - T\big)$. Dann ist $S\tilde{T} \in L(X)$ mit $\left\|\mathbb{1} - S\tilde{T}\right\| = \left\|S\big(\tilde{T} - T\big)\right\| \le \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1$. Somit ist $S\tilde{T} = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - S\tilde{T}\right)$ mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertierbar. Sei $A \in L(X)$ die Inverse zu $S\tilde{T}$. Es folgt $\mathbb{1} = (AS)\tilde{T}$.

Analog bekommen wir eine rechtsseitige Inverse.

Rechtsseitige und linksseitige Inverse stimmen überein. □

Korollar 14.1.4. *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen.*

Beweis. Wir haben in Korollar 14.1.3 gezeigt, dass $\mathbb{K} \setminus \sigma(T) = \rho(T)$ offen ist. □

Lemma 14.1.5. *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$. Dann ist $T - \lambda = (-\lambda)(\mathbb{1} - \lambda^{-1}T)$ invertierbar, da $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ gilt. Somit ist $\sigma(T)$ beschränkt und die Behauptung folgt, da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist. □

14.2. **Selbstadjungierte Operatoren.** In diesem Kapitel benutzen wir auch [19].

Proposition 14.2.1 (Adjungierte Abbildung)**.** *Seien E, F normierte Räume. Sei $A \in L(E, F)$. Dann gibt es eine Abbildung $A^* \in L(F^*, E^*)$, die adjungierte oder duale Abbildung mit*

$$\langle Ax, w \rangle = \langle x, A^* w \rangle$$

für alle $(x, w) \in E \times F^*$. Die Abbildung A^* ist eindeutig bestimmt und es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

Beweis.
Existenz: Sei $w \in F^*$. Dann ist $\varphi(x) := \langle Ax, w\rangle$ mit $x \in E$ eine lineare Form auf E. Es gilt $\varphi \in E^*$, d. h. φ ist stetig: Es gilt nämlich

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax, w\rangle| \le \|w\| \cdot \|Ax\| \le (\|w\| \cdot \|A\|) \cdot \|x\|$$

und daher $\|\varphi\| \le \|w\| \cdot \|A\|$. Definiere nun $A^*w := \varphi$. Nach Definition von φ ist A^* linear, also eine lineare Abbildung von F^* nach E^*. Aus $\|A^*w\| \le \|w\| \cdot \|A\|$ folgt $\|A^*\| \le \|A\|$. Andererseits folgt aus der Definition von A^* die Gleichheit $\langle Ax, w\rangle = \langle x, A^*w\rangle$ und somit gilt

$$|\langle Ax, w\rangle| = |\langle x, A^*w\rangle| \le \|A^*w\| \cdot \|x\| \le \|A^*\| \cdot \|w\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt mit einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach, siehe Korollar 4.1.4, $\|Ax\| \le \|A^*\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in E$. Wir erhalten $\|A\| \le \|A^*\|$.

Eindeutigkeit: Sei $A' \in L(F^*, E^*)$ eine Abbildung, die ebenfalls $\langle Ax, w\rangle = \langle x, A'w\rangle$ für alle $(x, w) \in E \times F^*$ erfüllt. Dann erhalten wir $\langle x, (A^* - A')w\rangle = 0$ für alle $(x, w) \in E \times F^*$ und somit $A^*w = A'w$ für alle $w \in F^*$. □

Definition 14.2.2. Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$. Seien $x, y \in H$. Sei $I : H^* \to H$ wie im Satz von Riesz, Theorem 5.2.8. In der folgenden Rechnung schreiben wir explizit hin, wenn es sich um das Skalarprodukt und nicht im die Paarung zwischen H und H^* handelt. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle_{\text{Skp.}} &= \left\langle Ax, I^{-1}y\right\rangle = \left\langle x, A^*I^{-1}y\right\rangle = \left\langle x, I^{-1}IA^*I^{-1}y\right\rangle \\ &= \left\langle x, IA^*I^{-1}y\right\rangle_{\text{Skp.}}.\end{aligned}$$

Dann nennen wir $IA^*I^{-1} \in L(H)$ die **Hilbertraumadjungierte** von A und bezeichnen diese Abbildung wieder mit A^*.

Gilt $A = A^*$, so heißt A **selbstadjungiert**.

Statt der Rechnung mit $I : H^* \to H$ in der Definition der Hilbertraumadjungierten kann man den Beweis der Existenz einer allgemeinen Adjungierten auch an Hilberträume anpassen (Übung).

Proposition 14.2.3. *Sei H ein Hilbertraum. Dann hat die Abbildung $* : L(H) \to L(H)$ mit $A \mapsto A^*$ die folgenden Eigenschaften:*

(i) $A^{**} = A$, *d. h.* $*$ *ist eine Involution.*
(ii) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar\lambda A^* + \bar\mu B^*$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
(iii) $(AB)^* = B^*A^*$,
(iv) $\|A\| = \|A^*\|$,
(v) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.
(vi) Besitzt A eine stetige Inverse, so auch A^*. Es gilt dann $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Beweis. Übung. □

Definition 14.2.4. Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt **normal**, falls $AA^* = A^*A$ gilt.

Proposition 14.2.5. *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren, $A \in L(H)$ und gelte $A_n \to A$ punktweise (oder sogar in der Operatornorm). Dann ist A selbstadjungiert.
(ii) Seien A, B selbstadjungiert. Dann ist die Verknüpfung AB genau dann selbstadjungiert, wenn A und B vertauschen.

Beweis.

(i) Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann folgt
$$\langle Ax, y\rangle \leftarrow \langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle \to \langle x, Ay\rangle$$
für $n \to \infty$ und damit die Behauptung.

(ii) Dies folgt aus $AB \overset{?}{=} (AB)^* = B^*A^* = BA$, wobei die Gleichheitszeichen stets gelten. □

Lemma 14.2.6. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$. Dann gilt $H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$. Die Summanden stehen jeweils senkrecht aufeinander.*

Beweis. Wegen $A^{**} = A$ genügt es, die erste Gleichheit zu beweisen.

Wir erinnern weiterhin an Lemma 5.1.10, wonach $\overline{R(A)}^\perp = R(A)^\perp$ gilt.

„$N(A^*) \subset \overline{R(A)}^\perp$“: Sei $y \in N(A^*)$. Dann gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Also ist $y \in R(A)^\perp$.

„$\overline{R(A)}^\perp \subset N(A^*)$“: Sei $y \in \overline{R(A)}^\perp$. Dann folgt $\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Somit ist $y \in N(A^*)$. □

Definition 14.2.7. Sei H ein Hilbertraum. Seien $A, B \in L(H)$ selbstadjungiert.

(i) Dann ist A **kleiner** als B, $A \le B$, falls $\langle Ax, x\rangle \le \langle Bx, x\rangle$ für alle $x \in H$ gilt.

(ii) A heißt **positiv (semidefinit)** oder **monoton**, falls $0 \le A$ gilt.

(iii) A heißt **gleichmäßig positiv definit**, falls es ein $c > 0$ mit
$$c \cdot \|x\|^2 \le \langle Ax, x\rangle$$
für alle $x \in H$ gibt.

Bemerkung 14.2.8. Ist $A \ge 0$, so gilt auch $A^n \ge 0$, da wir rund die Hälfte der Operatoren A im Skalarprodukt auf die andere Seite schreiben dürfen.

Theorem 14.2.9. *Sei H ein Hilbertraum. Erfülle $A \in L(H)$*
$$\|Ax\| \ge c\|x\| \quad \textit{für alle } x \in H$$
für ein $c > 0$ und sei A^* injektiv. Dann ist A stetig invertierbar.

Die Injektivität von A^* ist automatisch gegeben, wenn A selbstadjungiert ist.

Beweis.

(i) $R(A)$ ist abgeschlossen, denn aus $Ax_x = y_n \to y$ folgt
$$\|x_n - x_m\| \le \frac{1}{c}\|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$
Somit bilden die x_n eine Cauchyfolge. Gelte $x_n \to x$. Dann folgt $Ax = y$.

(ii) Nach Lemma 14.2.6 gilt $H = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}$. Nach Voraussetzung ist $N(A^*) = \{0\}$. Da $R(A)$ abgeschlossen ist, folgt $H = R(A)$. Somit ist A bijektiv.

(iii) Sei B die Inverse zu A. Dann ist B linear und wegen
$$\|By\| \le \tfrac{1}{c}\|ABy\| = \tfrac{1}{c}\|y\|$$
für alle $y \in H$ ist B auch beschränkt. □

Theorem 14.2.10. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Es gilt
$$\langle Ax, x\rangle - \lambda\|x\|^2 = \langle (A - \lambda 1\!\!1)x, x\rangle.$$
Da A selbstadjungiert ist, gilt $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$. Folglich ist dieser Ausdruck reell. Da A selbstadjungiert ist, erhalten wir weiterhin
$$|\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2 = |\operatorname{Im}\langle (A - \lambda 1\!\!1)x, x\rangle| \le \|(A - \lambda 1\!\!1)x\| \cdot \|x\|.$$
Es ist $(A - \lambda 1\!\!1)^* = A - \overline{\lambda} 1\!\!1$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\left\langle \left(A - \bar{\lambda}\mathbb{1}\right) x, x\right\rangle = \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\in\mathbb{R}} - \bar{\lambda} \underbrace{\|x\|^2}_{\in\mathbb{R}} \not\in \mathbb{R}$$

für $x \neq 0$. Somit ist $(A - \lambda\mathbb{1})^*$ injektiv. Nach Theorem 14.2.9 ist $A - \lambda\mathbb{1}$ daher stetig invertierbar. □

Theorem 14.2.11. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ mit $A \geq 0$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.*

Beweis. Nach Theorem 14.2.10 gilt stets $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Für $\lambda < 0$ erfüllt $B := A - \lambda\mathbb{1}$ die Voraussetzungen aus Theorem 14.2.9:

(i) Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$\|Bx\| = \|Ax - \lambda\mathbb{1}x\| \geq \frac{\langle Ax - \lambda\mathbb{1}x, x\rangle}{\|x\|} \geq \frac{0 - \lambda\|x\|^2}{\|x\|} = -\lambda\|x\| \equiv c\|x\|.$$

(ii) Es gilt $B^* = B$ und die Injektivität von B folgt aus der obigen Abschätzung.

□

Theorem 14.2.12 (Satz von Vigier)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von selbstadjungierten Operatoren in $L(H)$ mit*

$$A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq \kappa\mathbb{1}$$

für ein $\kappa > 0$. Dann gibt es einen selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ mit $A_n \to A$ punktweise.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass man für selbstadjungierte Operatoren $B \geq 0$ ähnlich wie in der Linearen Algebra eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$ zeigt: Betrachte das Skalarprodukt $\langle (B + \varepsilon\mathbb{1})\cdot, \cdot\rangle$ und lasse am Ende $\varepsilon \to 0$.

Gelte ohne Einschränkung $0 \leq A_0$ und $\kappa = 1$. Es genügt nach Proposition 14.2.5 nachzuweisen, dass $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in H$ eine Cauchyfolge ist, da Linearität und Stetigkeit erhalten sind.

Sei $x \in H$ und sei $n > m \geq 0$. Dann gilt $0 \leq A_n - A_m \leq \mathbb{1}$ und daraus erhalten wir mit der verallgemeinerten Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|(A_n - A_m)x\|^4 &= \langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x\rangle^2 \\
&\leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \left\langle (A_n - A_m)^2 x, (A_n - A_m)x\right\rangle \\
&\leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \|A_n - A_m\|^3 \|x\|^2 \\
&\leq (\langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle)\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Da die Folge $\langle A_n x, x\rangle$ eine monotone beschränkte reelle Folge ist, ist sie eine Cauchyfolge. Somit ist auch $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Die Behauptung folgt. □

14.3. **Kompakte Operatoren.**

Definition 14.3.1. Seien E, F normierte Räume und $f\colon E \to F$ eine Abbildung. Dann heißt f

(i) schwach **(folgen-)stetig**, falls aus $x_n \rightharpoonup y$ auch $f(x_n) \rightharpoonup f(y)$ folgt.
(ii) **voll (folgen-)stetig**, falls $x_n \rightharpoonup y$ impliziert, dass $f(x_n) \to f(y)$ gilt.
(iii) **kompakt**, falls Bilder beschränkter Mengen relativ kompakt (= kompakter Abschluss) sind.

Proposition 14.3.2. *Seien E, F normierte Räume. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann gilt:*

(i) A ist genau dann stetig, wenn A schwach stetig ist.
(ii) Ist A kompakt, so ist A vollstetig.
(iii) Ist A vollstetig, so ist A stetig.

Beweis.
(i) „$\Longrightarrow$“: Sei A stetig und gelte $x_n \rightharpoonup x$. Sei $w \in F^*$. Dann gilt
$$\langle Ax_n, w\rangle = \langle x_n, A^*w\rangle \to \langle x, A^*w\rangle = \langle Ax, w\rangle.$$
„$\Longleftarrow$“: Sei A schwach stetig. Nehme an, dass A nicht stetig ist. Dann ist A nicht beschränkt. Es gibt also eine Folge $(x_n)_n$ in E mit $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Wir definieren $y_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Dann gilt $y_n \to 0$, also auch $y_n \rightharpoonup 0$. Es gilt aber $\|Ay_n\| \geq \sqrt{n}$ sowie $Ay_n \rightharpoonup 0$. Dies ist ein Widerspruch, da jede schwach konvergente Folge beschränkt ist.
(ii) Sei A kompakt und gelte $x_n \rightharpoonup x$. A ist beschränkt, da A beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da schwach konvergent. Somit ist $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativ kompakt. Wir finden also eine (ohne Einschränkung nicht umbenannte) konvergente Teilfolge.
Wir behaupten, dass $Ax_n \to Ax$ konvergiert. Dann besitzt nämlich jede Teilfolge der ursprünglichen Folge Ax_n eine Teilfolge, die gegen Ax konvergiert. Da der Grenzwert von der Auswahl der ersten Teilfolge unabhängig ist, konvergiert (aufgrund eines einfachen Widerspruchsargumentes) die gesamte Folge.
Nehme an, dass $Ax_n \to z$ gilt. Sei $w \in F^*$. Wir erhalten
$$\langle z, w\rangle \leftarrow \langle Ax_n, w\rangle = \langle x_n, A^*w\rangle \to \langle x, A^*w\rangle = \langle Ax, w\rangle.$$
Somit ist $Ax = z$ und die Behauptung folgt.
(iii) Klar. □

14.4. **Projektoren.**

Definition 14.4.1. Sei H ein Hilbertraum. Ein **Projektor** P ist ein idempotenter ($P^2 = P$) selbstadjungierter Operator in $L(H)$.

Proposition 14.4.2. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes. Dann ist die Projektion auf M wie in Theorem 5.2.2 oder Korollar 5.2.7 ein Projektor.*

Beweis. Sei $H = M \oplus M^\perp$ und $z = x + y$ mit $(x, y) \in M \times M^\perp$ wie in Korollar 5.2.7 zerlegt. Dann ist $Pz = x$. Die Linearität folgt aus der Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$. Die Stetigkeit haben wir in Theorem 5.2.5 bereits nachgewiesen. Aus $\|z\|^2 = \|Pz\|^2 + \|y\|^2$ folgt sogar $\|P\| \leq 1$. $P^2 = P$ ist klar.
P ist selbstadjungiert: Seien $z_1 = x_1 + y_1$ und $z_2 = x_2 + y_2$ Zerlegungen wie oben. Dann folgt $Pz_i = x_i$ für $i = 1, 2$ und
$$\langle Pz_1, z_2\rangle = \langle x_1, z_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = \langle z_1, x_2\rangle = \langle z_1, Pz_2\rangle.$$ □

Proposition 14.4.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $P \in L(H)$ ein Projektor. Dann ist $M := R(P) = P(H)$ ein abgeschlossener Unterraum, der genau die Fixpunkte von P enthält. P ist die Projektion aus Theorem 5.2.2 auf M.*

Beweis.
(i) Da P linear ist, ist M ein Unterraum.
(ii) Sei x ein Fixpunkt, so gilt $Px = x$, also $x \in P(H) = M$.
Sei umgekehrt $x \in P(H)$, so existiert ein $y \in H$ mit $Py = x$. Also folgt $x = Py = P^2y = Px$. Somit ist x auch ein Fixpunkt.
Wegen $M = \{x \in H : Px - \mathbb{1}x = 0\}$ ist M abgeschlossen.

(iii) Sei $x \in H$ beliebig. Dann ist $x - Px \in M^\perp$, denn es gilt für beliebiges $y \in H$

$$\langle x - Px, Py\rangle = \langle Px - P^2x, y\rangle = 0.$$

Dies liefert eine Zerlegung $x = Px + (x - Px)$ mit $Px \in M$ und $x - Px \in M^\perp$. Um zu sehen, dass P mit der Projektion auf M aus Theorem 5.2.2 übereinstimmt, zeigen wir, dass Px das nächste Element aus M zu x ist. Beliebige andere Elemente aus M lassen sich als $Px+y$ mit $y \in M$ darstellen. Nun gilt

$$\|x - Px\|^2 \le \|\underbrace{x - Px}_{\in M^\perp}\|^2 + \|\underbrace{y}_{\in M}\|^2 = \|x - Px - y\|^2$$

mit Gleichheit genau für $y = 0$. Die Behauptung folgt. □

Definition 14.4.4. Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$.

(i) Ein Teilraum $M \subset H$ heißt bezüglich A **invariant**, falls $A(M) \subset M$ gilt.
(ii) Ein Teilraum $M \subset H$ heißt bezüglich A **reduzierend**, falls M bezüglich A und bezüglich A^* invariant ist.

Proposition 14.4.5. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, P der Projektor auf M. Sei $A \in L(H)$. Dann gelten*

(i) M ist genau dann bezüglich A invariant, wenn $P \circ A \circ P = A \circ P$ gilt.
(ii) M reduziert A genau dann, wenn A und P vertauschen.

Beweis.
(i) $P \circ A \circ P = A \circ P$ ist äquivalent zu $PAx = Ax$ für alle $x \in M$. Dies ist äquivalent zur Invarianz von M.
(ii) „$\Longrightarrow$": Angenommen, M reduziert A. Dann gilt nach (i) $PA^*P = A^*P$ und ebenso $PAP = AP$. Hieraus folgt

$$PA = (A^*P)^* = (PA^*P)^* = PAP = AP.$$

„$\Longleftarrow$": Gelte nun $AP = PA$. Dann folgt $AP = APP = PAP$, also $A(M) \subset M$.
Aus $AP = PA$ folgt $A^*P = PA^*$ und dann ebenso, dass $A^*(M) \subset M$ gilt. Also reduziert M den Operator A. □

Proposition 14.4.6. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes. Dann gilt für die Projektoren*

$$\mathrm{pr}_{M^\perp} = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M\,.$$

Beweis. pr_M sowie $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ sind selbstadjungiert und es gilt $(\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M)^2 = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M - \mathrm{pr}_M + \mathrm{pr}_M^2 = 1 - \mathrm{pr}_M$. Somit ist $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ ein Projektor. Aus der Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ folgt direkt, dass $(\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M)(H) = M^\perp$ gilt. Somit ist $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ ein Projektor auf $M^\perp$. □

Proposition 14.4.7. *Ein abgeschlossener Teilraum $M \subset H$ eines Hilbertraumes ist genau dann ein $A \in L(H)$ reduzierender Teilraum, wenn A die Räume M und $M^\perp$ invariant lässt.*

In diesem Fall gibt es zu A Operatoren $A_1 \in L(M)$ und $A_2 \in L\left(M^\perp\right)$, so dass A, wenn wir H als $H = M \oplus M^\perp$ zerlegen, als

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann, d. h. es gilt für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M$ und $x_2 \in M^\perp$

$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2,$$

wobei wir $A_1x_1 \in M$ und $A_2x_2 \in M^\perp$ als Elemente in H betrachten.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Reduziert M den Operator A, so vertauscht A mit pr_M, also auch mit $\mathrm{pr}_{M^\perp} = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$. Daher reduziert auch $M^\perp$ den Operator A. Somit sind M und $M^\perp$ unter A invariante Unterräume.

„$\Longleftarrow$“: Nehme an, dass A die Räume M und $M^\perp$ invariant lässt. Setze $P := \mathrm{pr}_M$. Dann folgt $AP = PAP$ nach Proposition 14.4.5. Aus der Invarianz von $M^\perp$ folgt ebenso $A(\mathbb{1} - P) = (\mathbb{1} - P)A(\mathbb{1} - P)$. Wir multiplizieren aus und erhalten

$$A - AP = A - PA \underbrace{-AP + PAP}_{=0} = A - PA.$$

Somit vertauschen A und P und wir erhalten nach Proposition 14.4.5, dass M den Operator A reduziert.

Die Zerlegung von A in Blockmatrixgestalt folgt direkt aus der Invarianz von M und $M^\perp$ unter A. □

Proposition 14.4.8. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann ist $P := P_1 \circ P_2$ genau dann ein Projektor, wenn $[P_1, P_2] = 0$ gilt. In diesem Fall ist P ein Projektor auf den Raum $M := M_1 \cap M_2$.*

Beweis. Nach Proposition 14.2.5 ist P genau dann selbstadjungiert, wenn $[P_1, P_2] = 0$ gilt. Hieraus folgt dann

$$P^2 = P_1 \circ P_2 \circ P_1 \circ P_2 = P_1^2 \circ P_2^2 = P_1 \circ P_2 = P.$$

Somit ist P ein Projektor.

Aus $P = P_1 \circ P_2$ folgt $R(P) \subset M_1$. Ebenso folgt aus $P = P_2 \circ P_1$ die Inklusion $R(P) \subset M_2$. Insgesamt erhalten wir also $R(P) \subset M_1 \cap M_2$. □

Proposition 14.4.9. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann gilt $M_1 \perp M_2$ genau dann, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Seien M_1 und M_2 orthogonal zueinander. Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann folgt $0 = \langle P_1x, P_2y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle$. Somit ist $P_1P_2 = 0$.

„$\Longleftarrow$“: Seien $x \in M_1$ und $y \in M_2$. Dann gilt $\langle x, y\rangle = \langle P_1x, P_2y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle = 0$. □

Proposition 14.4.10. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann ist $P := P_1 + P_2$ genau dann ein Projektor, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ gilt. In diesem Fall ist P ein Projektor auf $M = M_1 \oplus M_2$, die orthogonale Summe von M_1 und M_2.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Ist P ein Projektor, so ist P idempotent. Wäre $P_1P_2 \neq 0$, so folgt nach Korollar 14.4.9, dass $M_1 \not\perp M_2$ gilt. Ohne Einschränkung nehmen wir also an, dass es $M_1 \ni x = y_2 + y_2^\perp$ mit $\left(y_2, y_2^\perp\right) \in M_2 \times M_2^\perp$ und $y_2 \neq 0$ gibt. Dann gelten $P_1x = x$, $P_2y_2 = y_2$ und $P_2y_2^\perp = 0$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} Px &= (P_1 + P_2)(x) = x + P_2\left(y_2 + y_2^\perp\right) = x + y_2 \\ = P^2x &= (P_1 + P_2)(x + y_2) = x + P_1y_2 + P_2x + P_2y_2 = x + P_1y_2 + y_2 + y_2 \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$P_1y_2 = -y_2.$$

Also ist $y_2 \neq 0$ ein Eigenvektor von P_1 zum Eigenwert -1. Dies ist absurd, da Projektoren nur die Eigenwerte 0 oder 1 haben können, es gilt nämlich für einen Eigenvektor z zum Eigenwert λ stets

$$\lambda z = Pz = P^2z = P(\lambda z) = \lambda^2 z,$$

also $0 = \lambda(\lambda - 1)$.

„$\Longleftarrow$": Gelte $P_1P_2 = 0$. Aus Korollar 14.4.9 erhalten wir auch $P_2P_1 = 0$. Somit ist $P := P_1 + P_2$ idempotent. Nach Proposition 14.2.5 oder direkter Überlegung ist P auch selbstadjungiert.

Sei also P ein Projektor. Die Räume $M_1, M_2 \subset H$ stehen orthogonal aufeinander. Für $x = x_1 + x_2$ mit $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$ gilt $Px = P_1x_1 + P_1x_2 + P_2x_1 + P_2x_2 = x_1 + 0 + 0 + x_2 = x$. Also gilt $M_1 \oplus M_2 \subset R(P)$. Andererseits gilt $R(P) \subset R(P_1) \oplus R(P_2) = M_1 \oplus M_2$. Somit folgt die Behauptung. □

Proposition 14.4.11. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $M_i \subset H$, $i = 1, 2$, abgeschlossene Teilräume mit zugehörigen Projektoren P_i.*

(i) Dann ist $P := P_2 - P_1$ genau dann ein Projektor, wenn $M_1 \subset M_2$ gilt.
(ii) P projiziert auf das orthogonale Komplement von M_1 in M_2.
(iii) Es gilt
$$M_1 \subset M_2 \quad\Longleftrightarrow\quad P_1 = P_2P_1 \quad\Longleftrightarrow\quad P_1 \le P_2.$$

Beweis.
(i) Nach Proposition 14.4.6 ist $P = P_2 - P_1$ genau dann ein Projektor, wenn $Q := \mathbb{1} - P = (\mathbb{1} - P_2) + P_1$ ein Projektor ist. Nach Proposition 14.4.10 ist dies äquivalent zu $(\mathbb{1} - P_2) \circ P_1 = 0$ oder $P_1 = P_2P_1$. Dies ist äquivalent zu $M_1 \subset M_2$.
(ii) Betrachte die Einschränkungen auf M_2. Dort ist P_2 die Identität und die Behauptung folgt aus Proposition 14.4.6. Elemente von $M_2^\perp$ werden durch P_1 und P_2 auf Null abgebildet.
(iii) Die erste Äquivalenz ist klar.

„$\Longrightarrow$": Sei $M_1 \subset M_2$. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum M von H mit $M_2 = M_1 \oplus M$, wobei die Summe orthogonal ist, M also das orthogonale Komplement von M_1 in M_2. Sei $x \in H$. Es folgt $P_2x = P_1(P_2x) + \overline{x} = P_1x + \overline{x}$ für ein $\overline{x} \in M$. Da die Zerlegung orthogonal ist, erhalten wir $\|P_1x\|^2 \le \|P_2x\|^2$ für $x \in H$. Da beide P_i's selbstadjungiert sind, erhalten wir $\langle P_1x, x\rangle \le \langle P_2x, x\rangle$ für alle $x \in H$ und somit $P_1 \le P_2$.

„$\Longleftarrow$": Sei $P_1 \le P_2$. Sei $x \in M_1$. Dann folgt $\|x\|^2 \le \|P_2x\|^2$ wie in den letzten Zeilen oben. Andererseits gilt $\|P_2x\|^2 \le \|x\|$, da P_2 eine Projektion ist (zerlege H in $M_2 \oplus M_2^\perp$). Somit gilt $\|P_2x\|^2 = \|x\|^2$ für $x \in M_1$. Mittels orthogonaler Zerlegung von M_1 in $M_2 \cap M_1$ und das zugehörige orthogonale Komplement erhalten wir $P_2x = x$ für $x \in M_1$. Somit gilt $M_1 \subset M_2$. □

Aus dem Satz von Vigier, Theorem 14.2.12, erhalten wir

Proposition 14.4.12. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (oder fallende) Folge von Projektoren $P_n \in L(H)$. Dann gibt es einen Projektor P, so dass $P_n \to P$ punktweise konvergiert.*

Beweis. Wegen $0 \le P \le \mathbb{1}$ ist jeder Projektor gleichmäßig beidseitig beschränkt. Betrachte ohne Einschränkung den Fall einer monoton wachsenden Folge $P_0 \le P_1 \le P_2 \le \ldots$. Nach dem Satz von Vigier konvergiert somit $P_n \to P$ punktweise und P ist selbstadjungiert.

P ist auch idempotent, denn es gilt
$$\left\langle P^2x, y\right\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, P_ny\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, y\rangle = \langle Px, y\rangle. \qquad \square$$

Bemerkung 14.4.13. Es ist leicht zu sehen, dass der punktweise Grenzwert P einer monoton wachsenden Folge von Projektoren P_n
$$R(P) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)}$$

erfüllt.

14.5. **Orthonormalbasen.**

Definition 14.5.1.
(i) Sei X ein Banach- oder Hilbertraum. Dann heißt $S \subset X$ **Banach-** oder **Hilbertraumbasis**, falls S linear unabhängig ist und $\overline{\langle S \rangle} = X$ gilt.
(ii) Eine Hilbertraumbasis S von H heißt **Orthonormalbasis**, falls $\|x\| = 1$ und $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \neq y \in S$ gilt.
(iii) Zur deutlicheren Unterscheidung bezeichnen wir eine Basis im Sinne der Linearen Algebra als **Hamelbasis**.

Beispiel 14.5.2. Die Vektoren $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ bilden eine Orthonormalbasis von $l^2(\mathbb{N})$, aber keine Hamelbasis von $l^2(\mathbb{N})$.

Lemma 14.5.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H, d. h. gelte $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Setze $M := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ und sei P die Projektion auf M. Dann gilt*

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Beweis. Definiere P_i als den Projektor auf den Teilraum $\langle e_i \rangle$. Dann gilt $P_i x = \langle x, e_i \rangle e_i$ für $x \in H$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 14.4.10 per Induktion. □

Theorem 14.5.4. *Jeder separable Hilbertraum H besitzt eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis, die durch Gram-Schmidt Orthonormalisierung aus einer gegebenen Basis gewonnen werden kann.*

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma existiert eine Basis, die man aus einer abzählbaren dichten Teilmenge gewinnt.

Die Orthonormalisierung funktioniert genau so wie in der Linearen Algebra. Beachte dazu, dass die Erzeugnisse der ersten n Vektoren einer gegebenen Basis und der Orthonormalisierung davon übereinstimmen. □

Proposition 14.5.5. *Sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum. Dann erfüllt eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann $\overline{\langle \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle} = H$, wenn sie*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(Parsevalsche Identität) oder, äquivalent dazu,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

für alle $x \in H$ erfüllt.

Vergleiche dies mit der Besselschen Ungleichung, Korollar 5.1.12.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Gelte $\overline{\langle \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle} = H$. Setze $M_n := \langle e_0, \ldots, e_n \rangle$ und $M = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} M_n$. Dann ist M dicht in H. Definiere P_n als den Projektor auf M_n. Aus Proposition 14.4.12, Bemerkung 14.4.13 und Lemma 14.5.3 erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = P_n x \to x \quad \text{für alle } x \in H$$

und somit

$$\sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|P_n x\|^2 \to \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H.$$

„$\Longleftarrow$“: Sei nun die Parsevalsche Identität erfüllt. Wir definieren Projektoren P_n durch $P_n x := \sum\limits_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Dann ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge von Projektoren, konvergiert also punktweise gegen einen Projektor P. Wäre $P \neq \mathbb{1}$, so folgt $R(P) \subsetneq H$. Ein zu $R(P)$ orthogonaler Vektor $y \neq 0$ steht auch auf allen Vektoren e_n senkrecht. Somit gilt für ihn die Parsevalsche Ungleichung nicht. Widerspruch. Aus $P = \mathbb{1}$ folgt die Behauptung direkt. □

14.6. **Spektralsatz.** Die Zerlegung kompakter selbstadjungierter Operatoren ist eine Verallgemeinerung der Resultate aus Kapitel 6.8, „Diagonalisierung von selbstadjungierten linearen Endomorphismen“, in [16].

Lemma 14.6.1. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*

Beweis. Lineare Algebra. □

Lemma 14.6.2. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Sei die Familie $(e_i)_{i\in I}$ ein unendliches Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von A mit $Ae_i = \lambda_i e_i$ für $i \in I$. Dann ist 0 der einzige Häufungspunkt der Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ und die Menge der Eigenwerte ist höchstens abzählbar.*

Beweis. Wegen $|\lambda_i| \le \|A\|$ für $i \in I$ sind die Eigenwerte gleichmäßig beschränkt. Somit besitzen die Eigenwerte einen Häufungspunkt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass $\lambda = 0$ gilt. Somit gibt es auch höchstens abzählbar viele Eigenwerte, da dann jeder Annulus um den Ursprung nur endlich viele Eigenwerte enthalten kann.

Angenommen, es gälte doch $\lambda \neq 0$. Wir dürfen ohne Einschränkung $I = \mathbb{N}$ und $\lambda_i \to \lambda$ für $i \to \infty$ annehmen. Seien e_i die zugehörigen Eigenvektoren mit $\|e_i\| = 1$. Nehme weiterhin ohne Einschränkung $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e_i \rightharpoonup e$ für ein $e \in H$ an. Es gilt $\lambda_i^{-1} A e_i = e_i$. Da A kompakt ist, folgt $Ae_i \to Ae$. Somit erhalten wir

$$e_i = \lambda_i^{-1} A e_i \to \lambda^{-1} A e,$$

die Vektoren e_i konvergieren also nicht nur schwach, sondern sogar stark. Da der schwache Grenzwert eindeutig bestimmt ist, folgt auch $e_i \to e$. Da die Vektoren $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jedoch ein Orthonormalsystem bilden, gilt $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$. Widerspruch. □

Korollar 14.6.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A mit Eigenraum E_λ, so gilt $\dim E_\lambda < \infty$.*

Beweis. Andernfalls könnten wir mit dem Gram-Schmidtschen-Orthonormalisierungsverfahren induktiv ein abzählbares Orthonormalsystem in E_λ konstruieren. Widerspruch zur Kompaktheit. □

Da wir für unendliche Vektorräume i. a. keine Determinante und somit auch kein charakteristisches Polynom haben, benutzen wir variationelle Methoden um Eigenwerte zu finden.

Lemma 14.6.4. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $0 \neq A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt A mindestens einen Eigenwert $\lambda \neq 0$.*

Beweis. Betrachte das Variationsproblem

$$J(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \to \max$$

für $0 \neq x \in H$ oder, äquivalent dazu,

$$j(x) = \langle Ax, x\rangle \to \max$$

für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$.

Wir bemerken zunächst, dass

$$\inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = 0 = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle,$$

also $\langle Ax, x\rangle = 0$ für alle x nicht auftreten kann, da sonst für $\tilde{x} = x + Ax$

$$\begin{aligned}\langle A\tilde{x}, \tilde{x}\rangle &= \langle A(x + Ax), x + Ax\rangle = \langle Ax + AAx, x + Ax\rangle \\ &= \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{=0} + 2\underbrace{\langle Ax, Ax\rangle}_{=\|Ax\|^2} + \underbrace{\langle AAx, Ax\rangle}_{=0}\end{aligned}$$

gilt, was nur für $A = 0$ möglich ist.

Definiere $\lambda := \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$. Da A selbstadjungiert ist, gilt $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir nehmen ohne Einschränkung (betrachte sonst $-A$) an, dass $\lambda > 0$ gilt.

Sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| = 1$ eine Maximalfolge für j, d. h. gelte $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$. Eine ohne Einschränkung nicht umbenannte Teilfolge konvergiert dann schwach: $x_n \rightharpoonup x$. Da A kompakt ist, folgt $Ax_n \to Ax$ und wir erhalten

$$\langle Ax, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle = \lambda > 0.$$

Somit ist $x \neq 0$. Da $\{x : \|x\| \le 1\}$ nach Definition der Norm eine konvexe Menge ist (benutze $\|tx + (1-t)y\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\|$), folgt nach dem Lemma von Mazur, Lemma 11.2.6, $\|x\| \le 1$ (Alternative: Benutze die Unterhalbstetigkeit der Norm unter schwacher Konvergenz.). Andererseits gilt

$$\lambda = \sup_{\|y\|=1} j(y) = \sup_{y\neq 0} J(y) \ge J(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\lambda}{\|x\|^2}.$$

Somit ist $\|x\| \ge 1$. Also gilt $\|x\| = 1$, das Funktional j nimmt also, ebenso wie J, sein Maximum in x an.

Wir erhalten für beliebiges $y \in H$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \ll 1$, also $x + ty \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt} J(x + ty)\right|_{t=0}, \\ \langle A(x + ty), x + ty\rangle &= \langle Ax, x\rangle + t\langle Ax, y\rangle + t\langle Ay, x\rangle + t^2\langle Ay, y\rangle, \\ \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle &= \langle Ax, y\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle} = 2\operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle, \\ \|x + ty\|^2 &= \|x\|^2 + 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2, \\ \left.\frac{d}{dt} J(x + ty)\right|_{t=0} &= \frac{2}{\|x\|^4}\Big(\underbrace{\|x\|^2}_{=1} \cdot \operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle - \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{=\lambda} \cdot \operatorname{Re}\langle x, y\rangle\Big) \\ &= 2\operatorname{Re}\langle Ax - \lambda x, y\rangle. \end{aligned}$$

Somit folgt $Ax = \lambda x$. □

Theorem 14.6.5 (Spektralsatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte $(\lambda_i)_{i\in I}$. Sei M_{λ_i} der (abgeschlossene) Eigenraum zum Eigenwert λ_i und E_{λ_i}*

der Projektor auf M_{λ_i}. Dann gelten

$$A = \sum_{i\in I} \lambda_i E_{\lambda_i} \quad \textit{und} \quad \mathbb{1} = \sum_{i\in I} E_{\lambda_i},$$

wobei die Reihen punktweise konvergieren.

Die Eigenräume zu Eigenwerten $\lambda_i \neq 0$ sind endlichdimensional. Gibt es abzählbar viele Eigenwerte λ_i, so können wir $I = \mathbb{N}$ wählen und erhalten $\lambda_i \to 0$ für $i \to \infty$.

Ist $\dim H < \infty$, so ist dieser Satz bereits aus der Linearen Algebra in äquivalenter Formulierung bekannt.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $A \neq 0$ annehmen. Ist $N(A) \neq \{0\}$, so ist 0 ein Eigenwert mit Eigenraum $N(A)$. Da A selbstadjungiert ist, gilt nach Lemma 14.2.6 $\overline{R(A)} \oplus N(A) = H$. Somit ist $N(A)$ ein reduzierender Unterraum, siehe Proposition 14.4.7. Wir setzen $\mathcal{H} := N(A)^\perp$. Können wir das Theorem für $A|_\mathcal{H} \in L(\mathcal{H})$ zeigen, so folgt das Theorem auch für den ursprünglichen Operator A. Wir dürfen also ohne Einschränkung annehmen, dass $N(A) = \{0\}$ gilt, dass also A injektiv ist. Wegen $A \neq 0$ folgt auch $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Der Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ ist aus der Linearen Algebra bekannt. Sei also $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Seien $(\lambda_i)_{i\in I}$, I eine geeignete Indexmenge, die Eigenwerte von A mit Eigenräumen M_{λ_i} und Projektoren E_{λ_i}. Gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Es gilt $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Nach Lemma 14.6.4 besitzt A mindestens einen Eigenwert. Nach Lemma 14.6.2 ist I höchstens abzählbar, also gilt ohne Einschränkung $I \subset \mathbb{N}$. Nach Korollar 14.6.3 gilt $\dim M_{\lambda_i} < \infty$ für alle $i \in I$. Ist I abzählbar (noch ist nicht klar, dass es überhaupt mehr als einen Eigenwert gibt), so ist die Menge $\{\lambda_i : i \in I\}$ beschränkt und besitzt somit einen Häufungspunkt. Nach Lemma 14.6.2 ist dies Null.

Nach Lemma 14.6.1 sind die Eigenräume M_{λ_i} paarweise orthogonal zueinander. Somit konvergiert die Reihe der Projektoren E_{λ_i} punktweise gegen einen Projektor E, $E = \sum\limits_{i\in I} E_{\lambda_i}$. Wir wenden dazu Proposition 14.4.12, die Folgerung aus dem Satz von Vigier, an.

Es gilt $E = \mathbb{1}_\mathcal{H}$: Da jeder Eigenraum von A den Operator A reduziert, da $A^*(M_{\lambda_i}) = A(M_{\lambda_i}) \subset M_{\lambda_i}$ klar ist, gilt dies auch für $R(E)$, da man in $AP_nx = P_nAx$ mit $P_n = \sum\limits_{i=0}^{n} E_{\lambda_i}$, wobei wir ohne Einschränkung $I \subset \mathbb{N}$ annehmen, zum Grenzwert $AEx = EAx$ übergehen kann. Somit reduziert $R(E)$ den Operator A. Benutze Bemerkung 14.4.13. Wäre $R(E)^\perp \neq \{0\}$, so gäbe es darin aufgrund der Injektivität von A einen Eigenvektor zu einem Eigenwert ungleich Null. Widerspruch. Somit ist $R(E) = \mathcal{H}$. Nach Lemma 14.6.3 ist somit I abzählbar.

Es gilt $\mathbb{1} = \sum\limits_{i\in I} E_{\lambda_i}$. Die Konvergenz ist punktweise.

Sei schließlich $x \in H$ beliebig. Dann folgt $x = \sum\limits_{i\in I} E_{\lambda_i} x$. Da A stetig ist, erhalten wir

$$Ax = \sum_{i\in I} AE_{\lambda_i} x = \sum_{i\in I} \lambda_i E_{\lambda_i} x$$

wie behauptet. □

Anhang A. Einige Mathematiker aus diesem Skript ⋆

A.1. **Historisches.**

- Leonidas Alaoglu, 1914-1981, Chicago
- René-Louis Baire, 1874-1932, Paris
- Stefan Banach, 1892-1945, Krakau, Lemberg (= Lwów, Lviv)
- Friedrich Bessel, 1784-1846, Königsberg
- Augustin Cauchy, 1789-1859, Paris, Dijon
- Paul Du Bois-Reymond, 1831-1889, Berlin, Freiburg
- Hans Hahn, 1879-1934, Wien

- Georg Hamel, 1877-1954, Berlin
- Ernst Hellinger, 1883-1950, Frankfurt, Chicago
- David Hilbert, 1862-1943, Königsberg, Göttingen
- Otto Hölder, 1859-1937, Stuttgart, Tübingen, Königsberg, Leipzig
- Nikolai Lusin, 1883-1950, Irkutsk, Göttingen, Moskau
- Stanisław Mazur, 1905-1981, Lemberg, Warschau
- Hermann Minkowski, 1864-1909, Russland, Königsberg, Berlin, Bonn, Zürich, Göttingen
- Charles B. Morrey, 1907-1984, Columbus, Ohio, Berkeley
- John von Neumann, 1903-1957, Budapest, Los Alamos, Princeton
- Otto Nikodym, 1887-1974, Warschau, Krakau, Ohio, New York
- Marc-Antoine Parseval, 1755-1836, Paris
- Pythagoras, 570-510 v. Chr., Griechenland
- Johann Radon, 1887-1956, Breslau, Wien
- Hermann Schwarz, 1843-1921, Berlin, Göttingen
- Sergei Sobolev, 1908-1989, St. Petersburg, Moskau
- Hugo Steinhaus, 1887-1972, Göttingen, Lwów
- Marshall Stone, 1903-1989, New York, Madras
- Otto Toeplitz, 1881-1940, Breslau, Göttingen, Kiel, Bonn, Jerusalem
- Jean-Pierre Vigier, 1920-2004, Paris
- Karl Weierstraß, 1815-1897, Berlin
- Max Zorn, 1906-1993, Hamburg, Bloomington, Indiana

Man lese über die Lemberger / Polnische Mathematikerschule / Funktionalanalysisschule und deren trauriges Ende 1941 durch die deutsche Besatzung nach.

Literatur

1. Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
2. Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer-Lehrbuch Masterclass, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2006.
3. Robert Denk and Dieter Hoffmann, *Funktionalanalysis*, 2008, Skript zur Vorlesung.
4. Robert Denk, *Funktionalanalysis*, 2011, Skript zur Vorlesung.
5. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
6. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
7. Claus Gerhardt, *Analysis. II*, International Series in Analysis, International Press, Cambridge, MA, 2005.
8. Claus Gerhardt, *Funktionalanalysis*, 1996, Vorlesungsmitschrift.
9. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, Vorlesungsmitschrift.
10. Gert Lube, *Numerische Mathematik I*, 2005, `https://lp.uni-goettingen.de/`.
11. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
12. Oliver C. Schnürer, *Analysis I*, 2019, Skript zur Vorlesung.
13. Oliver C. Schnürer, *Analysis II*, 2020, Skript zur Vorlesung.
14. Oliver C. Schnürer, *Analysis III*, 2021, Skript zur Vorlesung.
15. Oliver C. Schnürer, *Elementare Differentialgeometrie*, 2012, Skript zur Vorlesung.
16. Oliver C. Schnürer, *Lineare Algebra I*, 2010, Skript zur Vorlesung.
17. Oliver C. Schnürer, *Topologie*, 2007, Skript zur Vorlesung.
18. Wikipedia, `http://www.wikipedia.org`.
19. Gerd Wittstock, *Lineare Operatoren auf dem Hilbertraum*, 2003, Skript zur Vorlesung.
20. William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989.

Oliver C. Schnürer, Mathematik, Universität Konstanz
Email address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`