FUNKTIONENTHEORIE

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Funktionentheorie an der

- Freien Universität Berlin im Sommer 2005 (Funktionentheorie I).
- Universität Konstanz im Sommer 2010 (Funktionentheorie).
- Universität Konstanz im Winter 2011/12 (Mathematik für Physiker III).

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript orientiert sich insbesondere an dem Buch von J. Bak und D. Newman [1].

1. Die komplexen Zahlen

Theorem 1.1. *Die reellen 2×2-Matrizen der Form* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *bilden bezüglich komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation einen Körper.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung 1.2.

- Statt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ schreiben wir auch $a + ib$.

Date: 21. Februar 2013.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 30-01.
Skript für vierstündige Vorlesung: Ändere LaTeX-Befehl „`\lang`“.

- Es gilt $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Für $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $r \ge 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (oder $0 \le \varphi < 2\pi$), so dass
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
mit $r^2 = a^2 + b^2$ gilt. Matrizen dieser Form operieren daher als Drehstreckungen auf $\mathbb{R}^2$.
- Für $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3. $\mathbb{C}$ ist der Körper der komplexen Zahlen,
$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation. Es ist
$$\mathbb{C} \cong \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$
mit
$$\begin{aligned} (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(ad + bc), \\ (a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d). \end{aligned}$$
Dies ist das Bild der komplexen oder Gaußschen Zahlenebene.

Die komplexe Konjugation ist durch
$$\begin{gathered} a + ib = z \mapsto \overline{z} = a - ib, \\ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{gathered}$$
definiert. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- $a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ heißt Realteil von z, $\operatorname{Re} z$.
- $b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ heißt Imaginärteil von z, $\operatorname{Im} z$.
- Der Betrag von $z = a + ib$ ist durch $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ definiert.

Bemerkung 1.4. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Es gilt

- $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\left[X^2 + 1\right]$.
- $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\right\} \cong \mathbb{R}$. Wir identifizieren diese beiden Mengen.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- Komplexe Konjugation ist ein involutiver Automorphismus von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ festhält.
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|$, $-|z| \le \operatorname{Im} z \le |z|$
- Der Körper $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper.
- $|z| \ge 0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $z = 0$ ist.
- $|w + z| \le |w| + |z|$
- $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$
- Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der Achse $\{\operatorname{Im} z = 0\} \subset \mathbb{C}$, wobei wir für $\mathbb{C}$ das Modell der komplexen Zahlenebene verwenden.

- Auf $\mathbb{C}$ definieren wir durch $\|z\| := |z|$ eine Norm.
- $B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$. Wir können somit von offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen sprechen.
- $\mathbb{R}^2 \ni (a, b) \mapsto a + ib \in \mathbb{C}$ ist ein normtreuer $\mathbb{R}$ Vektorraumisomorphismus. Somit entsprechen sich Konvergenz und topologische Begriffe wie beispielsweise Offenheit in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.
- Insbesondere ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann stetig, wenn die Komposition aller dieser Abbildungen stetig ist:
$$(x, y) \mapsto x + iy \mapsto f(x + iy) \mapsto (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy)),$$
wobei außen Elemente von $\mathbb{R}^2$ und innen Elemente von $\mathbb{C}$ stehen.
- Komplexe Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen.
- Eine offene zusammenhängende Menge heißt Gebiet.
- Je zwei Punkte in einem Gebiet lassen sich durch einen endlichen Polygonzug verbinden. Es genügt auch, Strecken zu verwenden, für die $\operatorname{Im} z$ oder $\operatorname{Re} z$ konstant sind.

Bemerkung 1.5 (Stereographische Projektion)**.**
$$\mathbb{C} \ni x + iy \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}\right) \in \partial B_{\frac{1}{2}}\left(\left(0, 0, \tfrac{1}{2}\right)\right) \subset \mathbb{R}^3$$
heißt Inverse der stereographische Projektion. Bilden wir einen Punkt ∞ auf $(0, 0, 1)$ ab, so können wir $\mathbb{C}$ mit Hilfe dieser Abbildung kompaktifizieren.

2. Funktionen der Variablen z

$x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2$ ist ein Polynom in $x + iy$, nicht aber $x^2 + y^2 - 2ixy$.

Definition 2.1. P heißt analytisches Polynom, falls
$$\begin{aligned} P(x, y) &= \alpha_N (x + iy)^N + \ldots + \alpha_2 (x + iy)^2 + \alpha_1 (x + iy) + \alpha_0, \\ P(z) &= \alpha_N z^N + \ldots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \end{aligned}$$
mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Definition 2.2. Sei $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ und seien u, v reellwertig. Definiere
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$
falls diese Ableitungen existieren. Wir schreiben auch $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Proposition 2.3. *Ein Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann analytisch, wenn $P_y = iP_x$ gilt.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei P analytisch. Differenzieren liefert unmittelbar $P_y = iP_x$.
„$\Longleftarrow$“: Gelte $P_y = iP_x$. Dann ist diese Bedingung insbesondere auch für alle Terme n-ten Grades erfüllt. Es genügt daher, ein Polynom der folgenden Form zu betrachten
$$P(x, y) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} y + C_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n y^n.$$

Wegen $P_y = iP_x$ folgt

$$\begin{aligned} & C_1x^{n-1} + 2C_2x^{n-2}y + \ldots + nC_ny^{n-1} \\ = {} & i\left[nC_0x^{n-1} + (n-1)C_1x^{n-2}y + \ldots + C_{n-1}y^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} C_1 &= inC_0 = i\binom{n}{1}C_0, \\ C_2 &= \frac{i(n-1)}{2}C_1 = i^2\frac{n(n-1)}{2}C_0 = i^2\binom{n}{2}C_0, \end{aligned}$$

und per Induktion erhalten wir

$$C_k = i\frac{n-k+1}{k}C_{k-1} = i^k\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}C_0 = i^k\binom{n}{k}C_0.$$

Daher hat P die Gestalt

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_kx^{n-k}y^k = C_0\sum_{k=0}^{k}\binom{n}{k}x^{n-k}(iy)^k = C_0(x+iy)^k.$$

Somit ist P analytisch. $\square$

Theorem 2.4 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)**.** *Ist $f = u + iv$, so folgt aus $f_y = if_x$, dass $u_y + iv_y = i(u_x + iv_x)$ und somit*

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Definition 2.5 (Komplexe Differenzierbarkeit)**.** Sie f nahe $z \in \mathbb{C}$ definiert. Dann heißt f in z (komplex) differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(z)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.6. Für $f(z) = \overline{z}$ gilt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

und dies ist gleich 1, falls h reell ist und gleich -1, falls h rein imaginär ist, d. h., wenn $\operatorname{Re} h = 0$ gilt.

Summen, Produkte und Quotienten (lokal ohne Nennernullstelle) sind differenzierbar, falls dies die Bestandteile sind. Es gelten Summen-, Produkt- und Quotientenregel.

Analytische Polynome sind überall differenzierbar.

Theorem 2.7. *Eine Potenzreihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_kz^k$$

konvergiert in $B_R(0)$ und divergiert in $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$ mit

$$R = \frac{1}{\limsup |C_k|^{1/k}}.$$

R heißt Konvergenzradius. In $B_R(0)$ ist die Konvergenz lokal gleichmäßig.

Beweis. Wie im Reellen. □

Bemerkung 2.8. Wie im Reellen kann man im Konvergenzbereich Potenzreihen addieren oder mit Hilfe des Cauchyproduktes multiplizieren.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Theorem 2.9. *Konvergiere $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ für $|z| < R$. Dann existiert $f'(z)$ für $|z| < R$ und es gilt dort*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n z^{n-1}.$$

Beweis. Wie im Reellen. □

Korollar 2.10. *Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradiusses beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. Induktion □

Korollar 2.11. *Hat $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ positiven Konvergenzradius, so gilt $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ für alle n.*

Beweis. Differenziere beide Seiten und vergleiche im Punkt $z = 0$. □

Theorem 2.12 (Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen)**.** *Verschwinde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ für alle Punkte $z_k \neq 0$ einer Nullfolge. Dann verschwinden alle Koeffizienten C_n.*

Beweis. Da für alle Punkte z_k der Folge $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z_k^n = 0$ gilt, hat diese Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius. Setze $f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$. Da f im Ursprung stetig ist, folgt

$$C_0 = f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z_k \to 0} f(z_k) = 0.$$

Aufgrund des Wurzelkriteriums hat

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \ldots$$

denselben Konvergenzradius wie f und ist insbesondere im Ursprung stetig. Somit folgt nach Voraussetzung

$$C_1 = g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k} = 0.$$

Die Behauptung folgt nun per Induktion. □

Korollar 2.13. *Konvergieren $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ und stimmen sie auf einer Menge, die den Ursprung als Häufungspunkt besitzt, überein, so gilt $a_n = b_n$ für alle n.*

3. Analytische Funktionen

Analytische Funktionen werden auch als holomorph bezeichnet. Erinnerung: f ist in z differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert, wobei $\mathbb{C} \ni h \to 0$ beliebig ist und wir später (der Bequemlichkeit halber) $h \neq 0$ weglassen werden.

Proposition 3.1. *Sei $f = u + iv$ im Punkte z differenzierbar, so existieren dort die partiellen Ableitungen f_x und f_y und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$f_y = if_x$$

oder, äquivalent dazu,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Beweis. Sei zunächst $h \in \mathbb{R}$. Wir lassen $h \to 0$ und erhalten

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \to f_x.$$

Sei nun η reell. Wir betrachten $\eta \to 0$ und $h = i\eta$. Dann gilt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x,y+\eta)-f(x,y)}{i\eta} \to \frac{f_y}{i}.$$

Da diese beiden Limites übereinstimmen folgt

$$f_y = if_x$$

und daher

$$u_y + iv_y = i(u_x + iv_x).$$

In diesen Gleichungen müssen Real- und Imaginärteil jeweils schon einzeln übereinstimmen. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$ □

Es gilt die folgende Form der Umkehrung

Proposition 3.2. *Existieren f_x und f_y in einer Umgebung von z, sind in z stetig und gilt in z, dass $f_y = if_x$ ist, so ist f in z differenzierbar.*

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \to f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z)$$

für $h \to 0$ gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{u(z+h)-u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi,y+\eta)-u(x,y)}{\xi+i\eta}\\ &= \frac{u(x+\xi,y+\eta)-u(x+\xi,y)}{\xi+i\eta}+\frac{u(x+\xi,y)-u(x,y)}{\xi+i\eta}\\ &= \frac{\eta}{\xi+i\eta}u_y(x+\xi,y+\vartheta_1\eta)+\frac{\xi}{\xi+i\eta}u_x(x+\vartheta_2\xi,y)\end{aligned}$$

für $0<\vartheta_k<1$ aufgrund des reellen Mittelwertsatzes für Funktionen einer Variablen. Ebenso folgt

$$\frac{v(z+h)-v(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi+i\eta}v_y(x+\xi,y+\vartheta_3\eta)+\frac{\xi}{\xi+i\eta}v_x(x+\vartheta_4\xi,y)$$

mit $0<\vartheta_k<1$, $k=1,\ldots,4$. Wir erhalten

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi+i\eta}[u_y(z_1)+iv_y(z_2)]+\frac{\xi}{\xi+i\eta}[u_x(z_3)+iv_x(z_4)],$$

wobei $|z-z_k|\to 0$ für $h\to 0$ und $k=1,\ldots,4$ gilt.
Andererseites erhalten wir wegen $f_y=if_x$ in z

$$\begin{aligned}f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi+i\eta}f_y+\frac{\xi}{\xi+i\eta}f_x\\ &= \frac{\eta}{\xi+i\eta}(u_y+iv_y)+\frac{\xi}{\xi+i\eta}(u_x+iv_x).\end{aligned}$$

Subtrahieren liefert

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f_x(z) = &\frac{\eta}{\xi+i\eta}\left[(u_y(z_1)-u_y(z))+i(v_y(z_2)-v_y(z))\right]\\ &+\frac{\xi}{\xi+i\eta}\left[(u_x(z_3)-u_x(z))+i(v_x(z_4)-v_x(z))\right].\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in z impliziert, dass die Terme in den eckigen Klammern für $h\to 0$ gegen 0 konvergieren. Weiterhin gilt $\left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right|\le 1$ und $\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right|\le 1$. Somit erhalten wir

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f_x(z). \qquad \square$$

Definition 3.3. f heißt in einem Punkt (einer Menge) analytisch, falls f in einer Umgebung des Punktes (der Menge) (komplex) differenzierbar ist.

Bemerkung 3.4. Analytische Polynome sind gemäß dieser Definition analytische Funktionen.
Eine Potenzreihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius ist „im Inneren des Konvergenzradiusses" eine analytische Funktion.
Wie im Reellen ist die Verkettung differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar und damit analytisch.
In ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktionen heißen ganze Funktionen.

Definition 3.5. Seien S, T offenen Mengen, sei $f : S \to T$ bijektiv. g ist die Inverse von f in T, falls $f(g(z)) = z$ für alle $z \in T$ gilt. g heißt Inverse zu f in z_0, falls g in einer Umgebung von z_0 zu f invers ist.

Proposition 3.6. *Sei g zu f in einem Punkt z_0 invers und sei g dort stetig. Ist f in $g(z_0)$ differenzierbar mit $f'(g(z_0)) \neq 0$, dann ist g in z_0 differenzierbar und es gilt*

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

Beweis. Für $z \neq z_0$ nahe z_0 gilt

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}}.$$

Die Stetigkeit von g in z_0 liefert, dass $g(z) \to g(z_0)$ für $z \to z_0$ konvergiert. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f folgt daher

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

□

3.1. **Konsequenzen aus der Analytizität.**

Proposition 3.7. *Sei $f = u + iv$ in einem Gebiet D analytisch und sei u konstant. (u und v seien wie stets bei einer solchen Darstellung reell.) Dann ist f konstant.*

Beweis. Da u konstant ist, folgt $u_x = u_y = 0$. Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhalten wir daher $v_x = v_y = 0$ und die Behauptung folgt. □

Proposition 3.8. *Sei f in einem Gebiet analytisch und $|f|$ dort konstant. Dann ist f konstant.*

Beweis. Ist $|f| \equiv 0$, so ist die Behauptung offensichtlich. Sonst erhalten wir für $f = u + iv$, dass $u^2 + v^2 \equiv c \neq 0$ gilt und erhalten daraus mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= uu_x + vv_x = uu_x - vu_y, \\ 0 &= uu_y + vv_y = vu_x + uu_y. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun die erste Gleichung mit u, die zweite mit v und erhalten nach Addition $(u^2 + v^2)u_x = 0$. Somit ist $u_x = 0$. Analog erhalten wir nach Multiplikation der ersten Gleichung mit $-v$ und der zweiten Gleichung mit u, dass $u_y = 0$ ist. Die Behauptung folgt. □

3.2. **Die komplexe Exponentialfunktion.** Wir suchen eine ganze analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= f(z_1) \cdot f(z_2) && \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ f(x) &= e^x && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gilt.

Es gilt $f(z) = f(x+iy) = f(x) \cdot f(iy) = e^x f(iy)$. Wir machen den Ansatz $f(iy) = A(y) + iB(y)$ und erhalten

$$f(z) = e^x A(y) + ie^x B(y).$$

Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen schließen wir

$$\begin{aligned} u_x &= v_y & &\implies & A(y) &= B'(y), \\ u_y &= -v_x & &\implies & A'(y) &= -B(y) \end{aligned}$$

und erhalten daraus $A'' = -A$. Daher ist

$$\begin{aligned} A(y) &= \alpha \cos y + \beta \sin y, \\ B(y) &= -A'(y) = -\beta \cos y + \alpha \sin y. \end{aligned}$$

Wegen $f(x) = e^x$ schließen wir, dass $A(0) = \alpha = 1$ und dass $B(0) = -\beta = 0$ gelten. Setze daher

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Die oben geforderten Eigenschaften sind erfüllt (Übung). Wir schreiben $f(z) = e^z$.

Bemerkung 3.9. Es gilt

(i) $|e^z| = e^x$,
(ii) $e^z \neq 0$, $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$.
(iii) Für jedes $\alpha \neq 0$ besitzt $e^z = \alpha$ abzählbar viele Lösungen.
(iv) $(e^z)' = (e^z)_x = e^z$.

3.3. **Sinus und Kosinus.** Sei $y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y, \\ e^{-iy} &= \cos y - i \sin y, \\ \sin y &= \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right), \\ \cos y &= \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right). \end{aligned}$$

Definiere daher

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \\ \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.10. Wie im Reellen gilt

$$\begin{aligned} \sin 2z &= 2 \sin z \cdot \cos z, \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ (\sin z)' &= \cos z. \end{aligned}$$

Aber $|\sin z| \leq 1$ gilt für allgemeines $z \in \mathbb{C}$ nicht mehr.

4. Linienintegrale und ganze Funktionen

Ziel: Eine ganze Funktion besitzt eine überall konvergente Darstellung als Potenzreihe.

Definition 4.1. Sei $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ stetig, $f(t) = u(t) + iv(t)$. Wir definieren

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt := \int\limits_a^b u(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(t)\,dt.$$

Definition 4.2.

(i) Sei $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$. Die durch $z(t)$ beschriebene Kurve ist stückweise differenzierbar, falls x und y auf $[a,b]$ stetig und die Einschränkungen auf $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_n,b]$ für geeignete x_i's differenzierbar sind. Schreibweise: $\dot z(t) = x'(t) + iy'(t)$.

(ii) Eine Kurve heißt in t regulär, falls $\dot z(t) \neq 0$ ist. Falls nicht anders erwähnt, nehmen wir ab jetzt stets an, dass alle Kurven in höchstens endlich vielen Punkten nicht regulär sind.

Definition 4.3. Sei C eine durch $z(t)$, $a \le t \le b$, gegebene Kurve. Sei f auf C stetig. Das Integral von f entlang C ist durch

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))\dot z(t)\,dt$$

definiert.

Definition 4.4. Zwei Kurven

$$\begin{aligned} C_1 &: z(t), \quad a \le t \le b,\\ C_2 &: w(t), \quad c \le t \le d, \end{aligned}$$

heißen äquivalent, falls es eine C^1-Bijektion $\lambda(t) : [c,d] \to [a,b]$ mit $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, $\lambda'(t) > 0$ für alle t und $w(t) = z(\lambda(t))$ gibt.
Es ist leicht nachzurechnen, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

Proposition 4.5. *Seien C_1 und C_2 äquivalente Kurven, so gilt*

$$\int\limits_{C_1} f = \int\limits_{C_2} f.$$

Beweis. Seien $f(z) = u(z) + iv(z)$, C_1 und C_2 wie oben, $z(t) = x(t) + iy(t)$. Nach Definition (in Real- und Imaginärteil aufgespalten) gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_1} f = &\int\limits_a^b u(z(t))x'(t)\,dt - \int\limits_a^b v(z(t))y'(t)\,dt\\ &+ i\int\limits_a^b u(z(t))y'(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(z(t))x'(t)\,dt\end{aligned}$$

und

$$\int_{C_2} f = \int_c^d [u(z(\lambda(t))) + iv(z(\lambda(t)))] \cdot [x'(\lambda(t)) + iy'(\lambda(t))]\lambda'(t)\,dt.$$

Ausmultiplizieren liefert Übereinstimmung, z. B.

$$\int_c^d u(z(\lambda(t)))x'(\lambda(t))\lambda'(t)\,dt = \int_a^b u(z(t))x'(t)\,dt$$

aufgrund der Transformationsformel für Integrale. □

Definition 4.6. Sei die Kurve C durch $z(t)$, $a \le t \le b$, gegeben. Dann ist $-C$ durch $z(b+a-t)$, $a \le t \le b$, definiert, d. h. die Kurve wird andersherum durchlaufen.

Proposition 4.7. *Es gilt*

$$\int_{-C} f = -\int_C f.$$

Beweis. Nach Kettenregel und (komponentenweise angewandter) Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned}\int_{-C} f &= -\int_a^b f(z(b+a-t))\dot{z}(b+a-t)\,dt \\ &= \int_b^a f(z(b+a-t))\dot{z}(b+a-t)\,dt \\ &= -\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt = -\int_C f.\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.8. Sei

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$C : z(t) = R\cos t + iR\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad R \ne 0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{R} - i\frac{\sin t}{R}\right) \cdot (-R\sin t + iR\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.\end{aligned}$$

Proposition 4.9. *Sei C eine Kurve, f und g seien auf C stetig. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz,$$

$$\int_C \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz.$$

Beweis. Klar. □

Die folgende Notation ist nicht überall verbreitet.

Notation 4.10. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha \ll \beta$, falls $|\alpha| \le |\beta|$ gilt.

Lemma 4.11. *Sei $[a, b] \ni t \mapsto G(t) \in \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b G(t)\,dt \ll \int_a^b |G(t)|\,dt.$$

Beweis. Seien $R \ge 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_a^b G(t)\,dt = Re^{i\vartheta}$$

ist. Dann folgt nach Proposition 4.9

$$\int_a^b e^{-i\vartheta} G(t)\,dt = R.$$

Da die rechte Seite reell ist, erhalten wir

$$R = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\vartheta} G(t)\right)\,dt.$$

Da aber $\operatorname{Re}(z) \le |\operatorname{Re}(z)| \le |z|$ gilt, erhalten wir

$$R \le \int_a^b |G(t)|\,dt$$

und die Behauptung folgt. □

Lemma 4.12 (M-L Abschätzung)**.** *Sei C eine Kurve der Länge L, sei f auf C stetig mit $f \ll M \in \mathbb{R}$ auf C. Dann gilt*

$$\int_C f(z)\,dz \ll ML.$$

Beweis. Sei C durch $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, gegeben. Mit Lemma 4.11 erhalten wir

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt \ll \int_a^b |f(z(t))\dot{z}(t)|\,dt$$

$$\leq \max_{z\in C} |f(z)| \cdot \int_a^b |\dot z(t)|\, dt.$$

Für die Bogenlänge L von C erhalten wir

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_a^b |\dot z(t)|\, dt$$

und somit

$$\int_C f(z)\, dz \ll ML. \qquad \square$$

Proposition 4.13. *Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen, die auf einer Kurve C gleichmäßig gegen einen Funktion f konvergiert. Dann gilt*

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\, dz.$$

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist f stetig.
Es gilt

$$\int_C f(z)\, dz - \int_C f_n(z)\, dz = \int_C (f(z) - f_n(z))\, dz.$$

Fixiere $\varepsilon > 0$ und wähle n groß genug, so dass $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in C$ gilt. Sei L die Länge von C. Dann gilt

$$\int_C f(z)\, dz - \int_C f_n(z)\, dz \ll \varepsilon \cdot L.$$

Wir lassen $\varepsilon \to 0$ und erhalten

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\, dz$$

wie behauptet. $\square$

Proposition 4.14. *Sei f die Ableitung einer analytischen Funktion F auf C, d. h. gelte $f(z) = F'(z)$ auf C. Dann gilt*

$$\int_C f(z)\, dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Beweis. Es genügt, dies in einem Intervall zu beweisen, in dem C durch $z(t)$ dargestellt ist und zusätzlich z glatt ist und $\dot z \neq 0$ gilt. Nehme ohne Einschränkung ein, dass dies für $a \leq t \leq b$ der Fall ist. Die allgemeine Behauptung folgt dann durch Aufsummieren.

Definiere $\gamma(t) := F(z(t))$, $a \leq t \leq b$. Wir beweisen zunächst das komplexe Analogon zur Kettenregel:

$$\dot\gamma(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{z(t+h) - z(t)} \cdot \frac{z(t+h) - z(t)}{h},$$

da $\dot{z} \neq 0$ impliziert, dass $z(t+h) \neq z(t)$ gilt, falls $h \neq 0$ klein genug ist

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{z(t+h) - z(t)}}_{=F'(z(t))} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}}_{=\dot{z}(t)}$$

$$= f(z(t)) \cdot \dot{z}(t).$$

Also folgt aufgrund des reellen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt = \int\limits_a^b \dot{\gamma}(t)\,dt$$

$$= \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)). \qquad \square$$

4.1. **Satz über geschlossene Kurven für ganze Funktionen.** Ab diesem Kapitel werden wir einige Resultate für ganze Funktionen beweisen, die aber auch entsprechend für Funktionen gelten, die in Kreisscheiben oder (noch zu definierenden) einfach zusammenhängenden Gebieten definiert sind. Da wir später nur auf die entsprechenden Beweisschritte verweisen werden, ist es jetzt schon sinnvoll, sich zu merken, dass die betrachteten Funktionen für die Gültigkeit des jeweiligen Satzes häufig nicht in ganz $\mathbb{C}$ definiert zu sein brauchen.

Definition 4.15. Eine Kurve C heißt geschlossen, falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, d. h. falls C durch $z(t)$, $a \le t \le b$, mit $z(a) = z(b)$ gegeben ist.

C heißt einfach geschlossen, falls keine weiteren Punkte auf der Kurve übereinstimmen, d. h. falls aus $z(t_1) = z(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ folgt, dass $t_1 = a$ und $t_2 = b$ gelten.

Unter dem Rand eines (achsenparallelen) Rechtecks verstehen wir eine einfach geschlossene Kurve entlang des mengentheoretischen Randes des Rechtecks, so dass das Rechteck bei wachsendem Parameter t auf der linken Seite der Kurve liegt. (Die Kurve wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.)

Theorem 4.16 (Rechteckstheorem). *Sei f eine ganze Funktion und Γ der Rand eines Rechtecks R. Dann gilt*

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Lemma 4.17. *Ist f zusätzlich affin linear, so gilt das Rechteckstheorem.*

Beweis. Sei $f(z) = \alpha + \beta z$ und sei Γ durch $\Gamma : z(t)$, $a \le t \le b$, gegeben. f ist überall die Ableitung der analytischen Funktion

$$F(z) = \alpha z + \tfrac{1}{2}\beta z^2.$$

Nach Proposition 4.14 folgt

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma F'(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) = 0. \qquad \square$$

Beweis von Theorem 4.16. Setze $I := \int\limits_\Gamma f(z)\,dz$. Wir behaupten, dass $I = 0$ gilt. Nehme an, dies wäre nicht der Fall. Dann unterteilen wir R in vier Rechtecke mit jeweils den halben Seitenlängen von R: $R_1, \ldots, R_4$ mit Rändern $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$. Da die im inneren von R liegenden Strecken jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, erhalten wir

$$\int\limits_\Gamma f = \sum_{i=1}^4 \int\limits_{\Gamma_i} f.$$

Wähle eines der Rechtecke, $R^{(1)}$ mit Rand $\Gamma^{(1)}$, so dass

$$\int\limits_{\Gamma^{(1)}} f(z)\,dz \gg \frac{I}{4}$$

gilt. Wir iterieren dies mit $R^{(i)}$ und $\Gamma^{(i)}$ statt R und Γ und erhalten Folgen

$$R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \ldots$$

mit Rändern

$$\Gamma, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots,$$

so dass

$$\operatorname{diam} R^{(k+1)} = \tfrac{1}{2} \operatorname{diam} R^{(k)}$$

und

$$\int\limits_{\Gamma^{(k)}} f(z)\,dz \gg \frac{I}{4^k}$$

gelten. Sei $z_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} R^{(k)}$. Nutze nun die Analytizität von f im Punkte z_0. Da

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to f'(z_0)$$

gilt, existiert ε_z, so dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon_z \cdot (z - z_0)$$

mit $\varepsilon_z \to 0$ für $z \to z_0$ ist. Nun gilt

$$\int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma^{(n)}} [f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon_z \cdot (z - z_0)]\,dz = \int\limits_{\Gamma^{(n)}} \varepsilon_z \cdot (z - z_0)\,dz,$$

da das Integral über den linearen Anteil verschwindet. Bezeichne die Länge der längsten Seite von Γ mit s. Wir erhalten für die Länge von $\Gamma^{(n)}$ die Abschätzung $\int\limits_{\Gamma^{(n)}} |dz| \le \frac{4s}{2^n}$ und für $z \in \Gamma^{(n)}$, dass $|z - z_0| \le \frac{\sqrt{2}s}{2^n}$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass aus $|z - z_0| \le \frac{\sqrt{2}\cdot s}{2^N}$ folgt, dass $\varepsilon_z \ll \varepsilon$ gilt. Für $n \ge N$ folgt damit nach der M-L-Abschätzung

$$\int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz \ll \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{2}s}{2^n} \frac{4s}{2^n}.$$

Nach Wahl von $\Gamma^{(n)}$ folgt

$$\frac{I}{4^n} \ll \int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz \ll \varepsilon\frac{4\sqrt{2}s^2}{4^n}$$

und damit $I \ll \varepsilon 4\sqrt{2}s^2$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $I = 0$. $\square$

Die Orientierung der Rechtecke war nicht wesentlich, nur, dass sie einheitlich war. Wir wollen in Zukunft jeweils so um konvexe Mengen herum integrieren, dass diese auf der linken Seite liegen.

Theorem 4.18 (Integraltheorem)**.** *Sei f eine ganze Funktion. Dann ist f überall die Ableitung einer analytischen Funktion, d. h. es gibt eine ganze Funktion F, so dass $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.*

Beweis. Definiere $F(z)$ durch

$$F(z) := \int\limits_0^z f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei $\int\limits_0^z$ das Integral auf geraden Strecken von 0 nach $\operatorname{Re} z$ und weiter von $\operatorname{Re} z$ nach z bezeichnet.

Analog bezeichnet $\int\limits_z^{z+h}$ das Integral auf geraden Strecken von z nach $z + \operatorname{Re} h$ und weiter von $z + \operatorname{Re} h$ nach $z + h$.

Es gilt

$$F(z + h) = F(z) + \int\limits_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta,$$

da sich die beiden Ausdrücke nur um das Integral um ein Rechteck herum unterscheiden. Nun ist für $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} 1\,d\zeta = \frac{1}{h}(z + h - z) = 1.$$

Zusammengenommen ergibt sich nun

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt für hinreichend kleines $|h|$ im Integral stets $|f(\zeta) - f(z)| \le \varepsilon$. Aufgrund der M-L-Formel ist also

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \ll \frac{1}{|h|}2|h|\varepsilon = 2\varepsilon$$

und somit gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Theorem 4.19 (Satz über geschlossene Kurven)**.** *Sei f eine ganze Funktion und C eine geschlossene Kurve, so gilt*

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Sei F eine ganze Funktion wie im Integraltheorem, Theorem 4.18, d. h. es gelte $F'(z) = f(z)$. Wir erhalten in der auch bisher schon verwendeten Notation für Kurvenintegrale

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C F'(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) = 0,$$

da C eine geschlossene Kurve ist. □

5. Eigenschaften ganzer Funktionen

5.1. **Cauchysche Integralformel und Taylordarstellung.** Sei f eine ganze Funktion. Definiere g durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a, \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

für festes $a \in \mathbb{C}$. Da f eine ganze Funktion ist, ist g stetig. Erst einmal ist nicht klar, ob g auch ganz ist.

Ziel: Das Integraltheorem, Theorem 4.18, und der Satz über geschlossene Kurven, Theorem 4.19, gelten auch für g.

Theorem 5.1 (Rechteckstheorem II)**.** *Sei f ganz und g wie oben, dann gilt*

$$\int\limits_\Gamma g(z)\,dz = 0$$

für den Rand Γ eines Rechteckes R.

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:

(i) $a \notin R$: g ist in R analytisch und der bisherige Beweis funktioniert ungeändert.

(ii) $a \in \Gamma$: Unterteile R so in sechs kleine Rechtecke, dass (bis auf ein sehr kleines Rechteck) alle Rechtecke einen positiven Abstand zu a besitzen. In offensichtlicher Notation erhalten wir

$$\int\limits_\Gamma g = \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{\Gamma_k} g.$$

Da g stetig ist, folgt $g \ll M \in \mathbb{R}$ in R für eine geeignete Konstante M. Habe nun das Rechteck R_1 mit a auf dem Rand Γ_1 einen Umfang kleiner als ε. Dann folgt aufgrund der M-L-Formel

$$\int\limits_{\Gamma_1} g \ll M\varepsilon$$

und da aufgrund des ersten Teiles $\int\limits_{\Gamma_k} g = 0$ für $k = 2, \dots, 6$ ist, erhalten wir, dass $\int\limits_\Gamma g \ll M\varepsilon$ gilt. Wir erhalten somit $\int\limits_\Gamma g = 0$.

(iii) $a \in \mathring{R}$: Unterteile das Rechteck (ähnlich wie oben) in neun Rechtecke. Acht Rechtecke davon liefern wiederum keinen Beitrag. Wie im letzten Fall lässt sich der Beitrag des Rechtecks mit a abschätzen, wenn der Umfang klein gewählt wird. $\square$

Korollar 5.2. *Sei g wie oben. Dann gelten das Integraltheorem 4.18 und der Satz über geschlossene Kurven, Theorem 4.19, auch für g.*

Beweis. Verwende in den entsprechenden Beweisen das Rechteckstheorem II, Theorem 5.1, statt des ersten Rechteckstheorems 4.16. Der Rest des jeweiligen Beweises bleibt unverändert. $\square$

Theorem 5.3 (Cauchysche Integralformel)**.** *Sei f eine ganze Funktion, $a \in \mathbb{C}$ und sei C die Kurve*

$$C : Re^{i\vartheta}, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad R > |a|.$$

Dann gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Beweis. Nach Korollar 5.2 folgt

$$\int\limits_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz = 0.$$

Da der Integrand entland der Kurve nirgends singulär ist, dürfen wir das Integral wie folgt aufsplitten

$$f(a) \int\limits_C \frac{dz}{z-a} = \int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Das folgende Lemma liefert

$$\int\limits_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

und damit folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 5.4. *Sei a im Kreis C_ρ enthalten, d. h. C_ρ hat Mittelpunkt $\alpha \in \mathbb{C}$, Radius ρ und es gilt $|a - \alpha| < \rho$. Dann gilt*

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die zentrierte Situation

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z-\alpha} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\vartheta}}{\rho e^{i\vartheta}}\, d\vartheta = 2\pi i,$$

wobei wir im Zähler des mittleren Integrals die Ableitung des Weges im Nenner haben. Weiterhin gilt für $1 \le k \in \mathbb{N}$ wie oben

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{(z-\alpha)^{k+1}} = \frac{1}{\rho^k} \int\limits_0^{2\pi} ie^{-ik\vartheta}\, d\vartheta = 0.$$

Alternativ kann man benutzen, dass $\frac{1}{(z-\alpha)^{k+1}}$ die Stammfunktion $\frac{-1}{k(z-\alpha)^k}$ besitzt. Im allgemeinen Fall, d. h. wenn $a \neq \alpha$ ist, gilt

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-\alpha)-(a-\alpha)} = \frac{1}{(z-\alpha)\left[1-\frac{a-\alpha}{z-\alpha}\right]} = \frac{1}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\omega},$$

wobei $\omega = \frac{a-\alpha}{z-\alpha}$ ist. Auf C_ρ gilt $|\omega| = \frac{|a-\alpha|}{\rho} < 1$. Daher liefert die geometrische Reihe dass

$$\frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \dots$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{z-\alpha}\left[1 + \frac{a-\alpha}{z-\alpha} + \frac{(a-\alpha)^2}{(z-\alpha)^2} + \dots\right]\\ &= \frac{1}{z-\alpha} + \frac{a-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{(a-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3} + \dots .\end{aligned}$$

Da die Konvergenz auf C_ρ gleichmäßig ist, erhalten wir aufgrund der obigen Rechnungen

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{1}{z-a}\,dz = \int\limits_{C_\rho} \frac{1}{z-\alpha}\,dz + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{C_\rho} \frac{(a-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+1}}\,dz = 2\pi i. \qquad \square$$

Theorem 5.5 (Taylordarstellung ganzer Funktionen)**.** *Ist f eine ganze Funktion, so besitzt f eine Potenzreihendarstellung, $f^{(k)}(0)$ existiert für $k = 1, 2, 3, \dots$ und es gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. (Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius ∞.)

Beweis. Sei $a \neq 0$, $R = |a| + 1$. Sei C der Kreis um den Ursprung mit Radius R. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

für alle $z \ll a$. Wie oben gilt, da aus $z \ll a$ folgt, dass $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ ist,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w\left(1-\frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots .$$

Da die Konvergenz auf C gleichmäßig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(w)\left[\frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots\right] dw\\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w}\,dw + \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w^2}\,dw\right) z + \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w^3}\,dw\right) z^2 + \dots\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

mit $C_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$. Die Koeffizienten könnten nun noch von a und R abhängen. Die angegebene Formel gilt jedoch für alle $z \ll a$. Da die Potenzreihe für $z \ll a$ mit f übereinstimmt hat sie einen positiven Konvergenzradius, mindestens $|a|$. Nach Korollar 2.10 ist f daher für $|z| < |a|$ beliebig oft differenzierbar und nach Korollar 2.11 gilt $C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ für alle k. Somit hängt C_k nicht von a ab. Dasselbe Argument liefert also die gleiche Potenzreihe für alle a und mit $|a| \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Korollar 5.6. *Eine ganze Funktion ist beliebig oft differenzierbar.*

Wir bemerken, dass man nicht von unendlich oft differenzierbaren Funktionen sprechen sollte, da keine ∞-te Ableitung existiert.

Beweis. Eine ganze Funktion besitzt eine überall konvergente Potenzreihendarstellung. Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzradiusses (eigentlich: im Inneren eines Balles mit dem Konvergenzradius als Radius) beliebig oft differenzierbar. □

Korollar 5.7. *Sei f eine ganze Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Da $g(\zeta) := f(\zeta + a)$ eine ganze Funktion ist, folgt

$$g(\zeta) = g(0) + g'(0)\zeta + \frac{g''(0)}{2!}\zeta^2 + \ldots$$

und daher

$$f(\zeta + a) = f(a) + f'(a)\zeta + \frac{f''(a)}{2!}\zeta^2 + \ldots .$$

Wir setzen nun $\zeta = z - a$ und erhalten die Behauptung. □

Proposition 5.8. *Sei g wie in der Einleitung des Kapitels definiert. Dann ist g eine ganze Funktion.*

Beweis. Nach Korollar 5.7 gilt

$$g(z) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(z-a)^2 + \ldots$$

für $z \neq a$ und für $z = a$. Diese Reihe konvergiert überall da die Koeffizienten betragsmäßig kleiner als die entsprechenden Koeffizienten von f' sind. Daher ist g eine ganze Funktion. □

Korollar 5.9. *Sei f eine ganze Funktion mit paarweise verschiedenen Nullstellen in $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Wir definieren g durch*

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdot \ldots \cdot (z-a_N)}$$

für $z \neq a_k$. Dann existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{z \to a_k} g(z)$ für $k = 1, 2, \dots, N$. Definieren wir $g(a_k)$ als diesen Grenzwert, so ist g eine ganze Funktion.

Beweis. Wir gehen per Induktion vor. Setzt $f_0(z) := f(z)$ und definiere

$$f_k(z) = \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z - a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z - a_k}$$

für $z \neq a_k$. Ist f_{k-1} eine ganze Funktion, so folgt nach Proposition 5.8, dass $f_k(z)$ für $z \to a_k$ einen Grenzwert besitzt, der $f'_{k-1}(a_k)$ ist und f_k lässt sich als ganze Funktion nach a_k fortsetzen. Mit Induktion folgt daher die Behauptung. □

5.2. **Sätze von Liouville und der Fundamentalsatz der Algebra.**

Theorem 5.10 (Satz von Liouville)**.**
Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Sei f ganz. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und C ein Kreis mit Radius $R > \max(|a|, |b|)$ und Mittelpunkt 0; er enthält also a und b. Aufgrund der Cauchyschen Integralformel erhalten wir daher

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z-b}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)(b-a)}{(z-a)(z-b)}\, dz \\ &\ll \sup |f| \cdot \frac{|b-a| \cdot R}{(R-|a|)(R-|b|)}. \end{aligned}$$

Wir lassen nun $R \to \infty$ und erhalten $f(a) = f(b)$. Somit ist f konstant. □

Theorem 5.11 (Erweiterter Satz von Liouville)**.** *Sei f eine ganze Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $A, B > 0$. Gilt*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f ein Polynom, dessen Grad höchstens k beträgt.

Beweis. Für $k = 0$ ist dies gerade der Satz von Liouville.
Sei daher $k > 0$. Definiere

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(0)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

g ist eine ganze Funktion und erfüllt nach Voraussetzung an f die folgende Wachstumsbedingung:

$$|g(z)| \leq C + D|z|^{k-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und für geeignete Konstanten $C, D > 0$. Nach Induktionsannahme ist daher g ein Polynom vom Grade $\leq k - 1$. Somit ist f ein Polynom vom Grade $\leq k$. □

(Dies funktioniert auch für ein beliebiges $k \geq 0$ mit einem analogen Resultat.)

Lemma 5.12 (Wachstumslemma für Polynome)**.** *Sei* $0 < n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ *mit* $a_n \neq 0$ *und sei*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom. Dann gibt es $R > 0$, *so dass*

$$\frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n \leq |f(z)| \leq 2|a_n| \cdot |z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \geq R$ *gilt.*

Beweis. Es gilt $|z|^k \leq |z|^n$ für $k \leq n$ und $|z| \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |a_n| \cdot |z|^n + |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \ldots + |a_0| \\ &\leq |a_n| \cdot |z|^n + (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)\, |z|^{n-1} \\ &\leq |a_n| \cdot |z|^n + \frac{|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|}{|z|} |z|^n \\ &\leq 2|a_n| \cdot |z|^n \end{aligned}$$

für $|z| \cdot |a_n| \geq |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$.
Andererseits folgt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n + \underbrace{\left(\frac{1}{2}|a_n| \cdot |z| - (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)\right)}_{\geq 0 \text{ für } |z| \geq R} |z|^{n-1} \\ &\geq \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n, \end{aligned}$$

falls R groß genug ist. ☐

Theorem 5.13 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante Polynom in* $\mathbb{C}[X]$ *besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Sei $P(x)$ ein beliebiges Polynom. Besitzt $P(z)$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d. h. gilt $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ eine ganze Funktion. $f(z)$ ist beschränkt (weil $P(z)$ konstant ist oder $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ gilt). Nach dem Satz von Liouville ist daher f konstant. Somit ist auch P konstant. ☐

Korollar 5.14. *In* $\mathbb{C}[X]$ *zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren.*

Beweis. Induktion. ☐

6. Eigenschaften analytischer Funktionen

6.1. **Potenzreihendarstellung für analytische Funktionen in Kreisscheiben.**

Theorem 6.1. *Sei* f *in* $B_r(\alpha)$ *analytisch. Wenn das abgeschlossene Rechteck* R *und der Punkt* a *beide in* $B_r(\alpha)$ *enthalten sind und* Γ *der Rand von* R *ist, so gelten*

$$\int\limits_\Gamma f(z)\, dz = 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_\Gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz = 0.$$

(Ist $a \notin B_r(\alpha)$, *so gilt das Theorem auch, wenn man statt* $f(a)$ *eine beliebige Zahl einsetzt.)*

Beweis. Wie beim Rechteckstheorem, Theorem 4.16 und Theorem 5.1, da f in $R \subset B_r(\alpha)$ analytisch ist. $\square$

Theorem 6.2. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch und $a \in B_r(\alpha)$. Dann gibt es in $B_r(\alpha)$ analytische Funktionen F und G, so dass*

$$F'(z) = f(z), \quad G'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

wobei wir hier und später bei dieser Schreibweise $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ im Punkte $z = a$ als $f'(z)$, also als den Grenzwert in diesem Punkt, definieren.

Beweis. Definiere

$$F(z) := \int\limits_{\alpha}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

und

$$G(z) := \int\limits_{\alpha}^{z} \frac{f(\zeta) - f(a)}{\zeta - a}\, d\zeta,$$

wobei wir entlang horizontaler und vertikaler Strecken in $B_r(\alpha)$ integrieren. (Aufgrund des Rechteckstheorems, Theorem 4.16 und Theorem 5.1, ist dies wohldefiniert.) Wie beim Beweis des Integraltheorems, Theorem 4.18, mit Hilfe des Rechteckstheorems, Theorem 4.16, folgt

$$F'(z) = f(z) \quad \text{und} \quad G'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$ $\square$

Theorem 6.3. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch, $a \in B_r(\alpha)$ und sei C eine in $B_r(\alpha)$ enthaltene geschlossene Kurve. Dann gelten*

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz = 0.$$

Beweis. Nach Theorem 6.2 existiert eine in $B_r(\alpha)$ analytische Funktion G mit

$$G'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Daher gilt mit den üblichen Bezeichnungen für einen Weg

$$\int\limits_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz = \int\limits_C G'(z)\, dz = G(z(b)) - G(z(a)) = 0.$$

Analog sieht man, dass $\int\limits_C f(z)\, dz = 0$ gilt. $\square$

Theorem 6.4 (Cauchyscher Integralformel)**.** *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch, $0 < \rho < r$, $|a - \alpha| < \rho$. Dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - a}\, dz,$$

wobei $C_\rho : \alpha + \rho e^{i\vartheta}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$.

Beweis. Benutze Theorem 6.3 und argumentiere wie in Lemma 5.4. $\square$

Wir untersuchen die Darstellbarkeit analytischer Funktionen in Kreisscheiben als Potenzreihen.

Theorem 6.5. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch. Dann gibt es Konstanten C_k, so dass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-\alpha)^k$$

für alle $z \in B_r(\alpha)$ gilt.

Beweis. Der Beweis funktioniert ganz analog zu dem in Theorem 5.5. Lasse jedoch $R \nearrow r$ statt $R \to \infty$. (Außerhalb von $B_r(\alpha)$ muß f nicht analytisch sein und es ist auch überhaupt nicht klar, ob die Reihe dort konvergiert.) Wiederum gilt $C_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$. □

6.2. **Analytische Funktionen in beliebigen Gebieten.**

Theorem 6.6. *Sei f in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ analytisch. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in D$ Konstanten C_k, so dass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-\alpha)^k$$

für alle z in der größten Kugel $B_r(\alpha)$ mit $B_r(\alpha) \subset D$ konvergiert.

Beweis. Dies ist eine Umformulierung von Theorem 6.5. □

(Konvergenz auf größeren Mengen kann man im allgemeinen nicht erwarten, da Potenzreihen stets auf Kreisscheiben (und unterschiedlichen Teilen des Randes) konvergieren. Im Beweis entspricht dies bei einem Quadrat der Tatsache, dass es keinen Kreis innerhalb des Quadrates gibt, der den Mittelpunkt des Quadrates und einen Punkt sehr nahe an einer Ecke umschließt.)

6.3. **Eindeutigkeit, Mittelwertsatz und Maximumprinzip.**

Proposition 6.7. *Ist f in α analytisch, so auch*

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}, & z \neq \alpha, \\ f'(\alpha), & z = \alpha. \end{cases}$$

Beweis. Analog zur globalen Version in Proposition 5.8. □

Theorem 6.8. *Ist f in z analytisch, so ist f in z beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. f ist lokal analytisch. Stelle f als Potenzreihe dar. Potenzreihen sind lokal beliebig oft differenzierbar. □

Theorem 6.9 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei f in einem Gebiet D analytisch und gelte $f(z_n) = 0$ für eine Folge $D \ni z_n \to z \in D$, $z_n \neq z$. Dann gilt $f \equiv 0$ in D.*

Beweis. Nahe z besitzt f eine Darstellung als Potenzreihe. Der Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen liefert, dass $f = 0$ nahe z gilt. Definiere

$$\begin{aligned} A := \{&z \in D : z \text{ ist ein Grenzwert von Punkten} \neq z, \text{ in } D, \\ &\text{für die } f \text{ verschwindet}\}, \end{aligned}$$

$$B := \{z \in D : z \notin A\}.$$

Es gilt $A \cap B = \emptyset$.

A ist offen: Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen folgt wie oben, dass $f \equiv 0$ nahe z ist, falls $z \in A$ gilt.

B ist offen: Sei $z \in B$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(\tilde{z}) \neq 0$ für $0 < |z - \tilde{z}| < \delta$ gilt. Somit ist $B_{\delta/2}(z) \subset B$ und die Offenheit von B folgt.

Da D zusammenhängend ist, folgt, dass $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ gilt. Da aber $z \in A$ ist, folgt $B = \emptyset$ und $A = D$. Aufgrund der Stetigkeit ist nun $f \equiv 0$ in D. □

Korollar 6.10. *Seien f und g in einem Gebiet D analytisch. Stimmen f und g auf einer Menge mit einem Häufungspunkt in D überein, so gilt $f = g$ in D.*

Beweis. Betrachte $f - g$. □

(Wir bemerken, dass dies nicht zu gelten braucht, wenn der Häufungspunkt auf ∂D liegt, wie das Beispiel $\sin \frac{1}{z}$ und $z_n = \frac{1}{n\pi}$ zeigt.)

Theorem 6.11. *Sei f eine ganze Funktion. Gilt $f(z) \to \infty$ für $z \to \infty$, so ist f ein Polynom.*
(Die Konvergenz „$\to \infty$“ ist betragsmäßig zu verstehen.)

Beweis. Wähle $M > 0$, so dass $|z| > M$ impliziert, dass $|f(z)| > 1$ gilt. f besitzt höchstens endlich viele Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, da sonst die Nullstellen einen Häufungspunkt hätten und $f \equiv 0$ gelten würde. Wir dividieren die Nullstellen heraus

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_N)}.$$

Bei Nullstellen mit höherer Vielfachheit ist dies gegebenenfalls (entsprechend der Vielfachheit) zu wiederholen. Die Vielfachheit ist aber stets endlich, da sonst die Potenzreihenentwicklung um den entsprechenden Punkt die Nullfunktion ergeben würde.

Nach Proposition 5.8 ist g eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Definiere

$$h(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_N)}{f(z)}.$$

h ist eine analytische Funktion. Da $f \to \infty$ für $z \to \infty$ geht ($|f| \geq 1$ würde auch genügen), folgt $|h(z)| \leq A + B|z|^N$. Nach dem erweiterte Satz von Liouville, Theorem 5.11, ist h daher ein Polynom. Nach Konstruktion ist g nullstellenfrei. h hat auch keine Nullstellen. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra gilt daher $h(z) = k \in \mathbb{C}$ und wir erhalten

$$f = \frac{1}{k}(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_N).$$ □

(Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass für nichtkonstante Polynome $f(z) \to \infty$ für $z \to \infty$ gilt, da der Term mit dem größten Exponenten für große z dominiert.)

Theorem 6.12 (Mittelwertsatz)**.** *Sei f in einem Gebiet D analytisch, $\alpha \in D$. Sei $\overline{B_r(\alpha)} \subset D$. Dann gilt*

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\alpha + re^{i\vartheta}\right) \, d\vartheta.$$

Beweis. (Dies ist eine Umformulierung der Cauchyschen Integralformel.) Auf den Mittelpunkt angewandt liefert die Cauchysche Integralformel

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(z)}{z-\alpha} \, dz.$$

Wir verwenden die Parametrisierung $z = \alpha + re^{i\vartheta}$, so dass $z_\vartheta = ire^{i\vartheta}$ und $z - \alpha = re^{i\vartheta}$ gelten. Wir erhalten

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\alpha + re^{i\vartheta}\right) \frac{ire^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}} \, d\vartheta,$$

was direkt die Behauptung liefert. □

Analog zur reellen Situation sagen wir, dass f ein relatives Maximum in z hat, falls $|f(z)| \ge |f(w)|$ für alle w in einer Umgebung von z gilt. Analog definieren wir ein relatives Minimum.

Theorem 6.13 (Maximumprinzip)**.** *(Maximum-Modulus Theorem) Eine nichtkonstante analytische Funktion f in einem Gebiet D besitzt kein inneres Maximum: Für jedes $z \in D$ und $\delta > 0$, so dass $\overline{B_\delta(z)} \subset D$ gilt, gibt es $w \in \overline{B_\delta(z)}$, so dass $|f(w)| > |f(z)|$ ist.*
(Statt $\overline{B_\delta(z)} \subset D$ zu fordern kann man auch δ für den Beweis entsprechend verkleinern.)

Beweis. Der Mittelwertsatz liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z + \delta e^{i\vartheta}\right) \, d\vartheta.$$

Daraus folgt

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(z + \delta e^{i\vartheta}\right)\right| \, d\vartheta \le \max_\vartheta \left|f\left(z + \delta e^{e\vartheta}\right)\right|.$$

Daher existiert ein $w \ne z$ nahe z mit $|f(z)| \le |f(w)|$. Wir erhalten nur dann keine strikte Ungleichung, wenn überall Gleichheit gilt (und dies für alle kleinen Radien). Betrachten nur den Fall, in dem Gleichheit gilt. Dann ist $|f|$ in $B_r(z)$ für ein $0 < r < \delta$ konstant und nach Proposition 3.8 ist f in $B_r(z)$ konstant. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist daher f in D konstant. Widerspruch. □

Bemerkung 6.14. Sei D ein beschränktes Gebiet. Wir nennen eine in D analytische und auf $\overline{D}$ stetig fortsetzbare (und ohne Einschränkung fortgesetzte) Funktion in D C-analytisch (C für "continuous").

Aufgrund des Maximum-Modulus Theorems nimmt eine solche Funktion ihr betragsmäßiges Maximum auf ∂D an.

Theorem 6.15 (Minimum-Modulus-Theorem). *Sei f eine in einem beschränkten Gebiet D nicht-konstante analytische Funktion. Dann ist kein Punkt $z \in D$ ein relatives Minimum außer es gilt $f(z) = 0$.*

Beweis. Wenn f keine Nullstelle in z besitzt, so erfüllt $w \mapsto \frac{1}{f(w)}$ für w nahe z die Bedingungen für das Maximum-Modulus-Theorem. $\square$

Bemerkung 6.16. Alternativ kann man das Maximum-Modulus-Theorem beweisen, indem man den ersten nicht-konstanten Term (kleinster Exponent) in der Taylorentwicklung betrachtet, der in der Nähe von z gegenüber dem Rest dominiert.

Definition 6.17. Sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Sei $a = re^{i\varphi}$, $r > 0$ und (üblicherweise) $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dann heißt φ das Argument von a.

7. Weitere Eigenschaften analytischer Funktionen

7.1. Satz von der offenen Abbildung und Schwarzsches Lemma.

Theorem 7.1 (Satz von der offenen Abbildung). *Das Bild einer offenen zusammenhängenden Menge unter einer nichtkonstanten analytischen Abbildung ist eine offene Menge.*

Beweis. (nach Carathéodory) Wir wollen zeigen, dass das Bild einer (kleinen) Kreisscheibe um α eine Kreisscheibe um $f(\alpha)$ enthält. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $f(\alpha) = 0$ gilt. Der Eindutigkeitssatz für Potenzreihen liefert, dass es einen Kreis C um α mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in C$ gibt. (Sonst gibt es eine nichttriviale Folge $\to \alpha$, für die f verschwindet. Daraus würde dann lokal $f \equiv 0$ folgen.)
Sei $2\varepsilon = \min\limits_{z \in C} |f(z)|$.
Wir behaupten, dass $B_\varepsilon(0)$ im Bild der Kreisscheibe mit Rand C unter f enthalten ist: Sei $w \in B_\varepsilon(0)$. Betrachte $f(z) - w$. Für $z \in C$ gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z)| - |w| \geq \varepsilon, \\ |f(\alpha) - w| &= |-w| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher nimmt $|f(z) - w|$ ein lokales Minimum innerhalb von C an. Aufgrund des Minimum-Modulus-Theorems gibt es daher ein z innerhalb von C mit $f(z) - w = 0$. Der Wert w wird also angenommen. $\square$

Theorem 7.2 (Schwarzsches Lemma). *Sei f in der Einheitskreisscheibe analytisch und gelte dort $f \ll 1$. Sei $f(0) = 0$. Dann gilt*

(i) $|f(z)| \leq |z|$ *für alle* $z \in B_1(0)$ *und*
(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Gleichheit gilt in (i) *für ein* $z \neq 0$ *oder in* (ii) *genau dann, wenn*

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \text{ für ein } \vartheta \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

Beweis. Betrachte die in $B_1(0)$ analytische Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & 0 < |z| < 1, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Auf $\partial B_r(0)$ gilt $g \ll \frac{1}{r}$. Aufgrund des Maximum-Modulus-Theorems ist daher $g \ll \frac{1}{r}$ in $B_r(0)$. Mit $r \nearrow 1$ erhalten wir $|g(z)| \le 1$ in $B_1(0)$. Nach Definition von g folgt daher (i) und da $f(0) = 0$ ist, erhalten wir auch (ii).

Gelte Gleichheit in (i) oder (ii). Dann folgt $|g(z_0)| = 1$ für ein $|z_0| < 1$. Aufgrund des Maximum-Modulus-Theorems ist dann g eine Konstante vom Betrag 1. Somit gilt $f(z) = e^{i\vartheta} z$. □

7.2. **Die Umkehrung von Cauchys Theorem; Moreras Theorem; Schwarzsches Spiegelungsprinzip.**

Theorem 7.3 (Morera)**.** *Sei f in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ stetig. Gilt*

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

für alle Ränder abgeschlossener Rechtecke $R \subset D$, so ist f in D analytisch.

(Die Stetigkeit ist nötig, da das Abändern in einem Punkt das Integral nicht ändert. Wir benötigen die Voraussetzung im Beweis nur für achsenparallele Rechtecke.)

Beweis. Sei $z_0 \in D$. In einer kleinen Umgebung von z_0 definieren wir eine Stammfunktion

$$F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei wir zunächst horizontal und dann vertikal von z_0 nach z integrieren. Für den Differenzenquotienten erhalten wir wie beim Integraltheorem, Theorem 4.18, da $\int\limits_\Gamma f = 0$ für Kurven Γ um die entsprechenden Rechtecke herum gilt,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta \to f(z)$$

für $h \to 0$, da f stetig ist. Somit ist F nahe z_0 analytisch. Auch $F' = f$ ist nahe z_0 analytisch. Somit ist f in D analytisch. □

Definition 7.4. Seien f_n und f in D definiert. f_n konvergiert lokal gleichmäßig gegen f, falls f_n auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir schreiben $f_n \rightrightarrows f$ in K.

(Beachte, dass im Reellen der gleichmäßige Limes differenzierbarer Funktionen nicht wieder differenzierbar zu sein braucht. Der gleichmäßige Limes harmonischer Funktionen ist wieder harmonisch und differenzierbar.)

Theorem 7.5. *Sei f_n eine in D definierte Folge analytischer Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f in D analytisch.*

Beweis. Sei $K \subset D$ kompakt, $f_n \rightrightarrows f$ in K. Dann ist f in K stetig. Für jedes Rechteck in K gilt aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz und da jedes f_n analytisch ist

$$\int\limits_\Gamma f = \int\limits_\Gamma \lim_n f_n = \lim_n \int\limits_\Gamma f_n = 0.$$

Der Satz von Morera liefert nun, dass f in D analytisch ist. □

Theorem 7.6. *Sei f in einer offenen Menge D stetig und für eine Gerade L sei f in $D \setminus L$ analytisch. Dann ist f in D analytisch.*

Beweis. Betrachte ohne Einschränkung $L = \mathbb{R}$ (sonst $g(z) := f(Az + B)$) und $D = B_1(0)$ eine Kreisscheibe.
Wir behaupten, dass $\int\limits_\Gamma f = 0$ für jedes achsenparallele Rechteck Γ in D gilt.

(i) Ist $\Gamma \cap \mathbb{R} = \emptyset$, so folgt wie im Beweis des Rechteckstheorems, Theorem 4.16, die Behauptung $\int\limits_\Gamma f = 0$, da f analytisch ist.

(ii) Eine Seite von Γ liegt auf L: Approximiere Γ durch Rechtecke Γ_ε, die auf einer Seite von L liegen. Es folgt nach (i)

$$\int\limits_\Gamma f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f = 0,$$

da f stetig ist.

(iii) Liegen auf beiden Seiten von L Teile des Rechteckes, so unterteilen wir Γ in zwei Rechtecke wie in (ii) und erhalten aufgrund der Resultate aus (ii)

$$\int\limits_\Gamma f = \int\limits_{\Gamma_1} f + \int\limits_{\Gamma_2} f = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist f daher in D analytisch. □

Theorem 7.7 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)**.** *Sei f in einem Gebiet D C-analytisch (d. h. zusätzlich bis zum Rand stetig). Sei D in der oberen (oder unteren) Halbebene enthalten und enthalte ein Geradenstück L auf der reellen Achse im Rand (nur für dieses Randstück ist die stetige Fortsetzbarkeit wichtig). Sei f für reelle z reell. Sei $D^* := \{z : \bar{z} \in D\}$. Dann ist die Fortsetzung g, definiert durch*

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D \cup L, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*, \end{cases}$$

in $D \cup L \cup D^*$ analytisch.

Beweis. In D ist $g = f$ analytisch. Für $z, z + h \in D^*$ gilt

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \overline{\frac{f\left(\bar{z} + \bar{h}\right) - f(\bar{z})}{h}} = \overline{\left[\frac{f\left(\bar{z} + \bar{h}\right) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right]} \to \overline{f'(\bar{z})}$$

für h bzw. $\bar{h} \to 0$. Daher ist g in D^* analytisch. Da f auf L reell ist, ist g in $D \cup L \cup D^*$ stetig. Nach Theorem 7.6 ist g daher in $D \cup L \cup D^*$ analytisch. □

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes erhalten wir daraus

Korollar 7.8. *Sei f in einem bezüglich der reellen Achse spiegelsymmetrischen Gebiet analytisch und für reelle z reellwertig. Dann gilt $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.*

8. Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz

Theorem 8.1 (Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D analytisch und sei C eine geschlossene Kurve in D. Dann gilt*
$$\int\limits_C f = 0.$$

Beweisskizze. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist ein Gebiet, in dem man jede geschlossene Kurve zu einem Punkt zusammenziehen kann. Man überlegt sich, dass sich das Kurvenintegral bei kleinen Deformationen der Kurve nicht ändert, weil man den Bereich zwischen zwei Kurven in kleine Gebiete aufteilen kann, über deren Rand das Kurvenintegral verschwindet. Die Differenz der beiden Kurvenintegrale lässt sich nun als Summe dieser „kleinen“ Kurvenintegrale schreiben. Somit erhält man für das Kurvenintegral denselben Wert wie für eine konstante Kurve, also Null. □

Theorem 8.2. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei f in D analytisch. Dann gibt es eine analytische Stammfunktion F, d. h. es gilt $F' = f$ in D.*

Beweis. Wähle $z_0 \in D$ und definiere $F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, wobei wir über eine beliebige Kurve von z_0 nach z integrieren. Nach Theorem 8.1 ist F wohldefiniert. Wie im Beweis des Integraltheorems, Theorem 4.18, folgt, dass $F' = f$ in D gilt. □

Bemerkung 8.3.

(i) Es genügt, wenn man D auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet verkleinern kann, das C enthält: Für $C : \alpha + re^{i\vartheta}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ und $|a-\alpha| > r$ gilt
$$\int\limits_C \frac{dz}{z-a} = 0.$$

(ii) Sei f in $\{1 \le |z| \le 4\}$ analytisch. Dann ist
$$\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = \int\limits_{|z|=3} f(z)\,dz.$$
Dies sieht man, indem man den Annulus zwischen den beiden Kreisen an der x-Achse zerteilt und benutzt, dass das Integral über den Rand für jedes dieser Teilgebiete verschwindet.

8.1. **Der komplexe Logarithmus.**

Definition 8.4. f heißt analytischer Zweig von $\log z$ in einem Gebiet D, falls

(i) f in D analytisch ist,
(ii) f in D zur Exponentialfunktion invers ist, d. h. falls $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in D$ gilt.

Bemerkung 8.5.

(i) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist mit $f(z)$ auch $g(z) := f(z) + 2\pi ik$ ein analytischer Zweig von $\log z$.

(ii) Wegen $e^\omega \neq 0$ für $w \in \mathbb{C}$ ist $\log 0$ nicht definiert. Ist $z = Re^{i\vartheta}$, $R > 0$, $f(z) =$ „$\log z$“ $= u(z) + iv(z)$, so folgt $\exp(f(z)) = e^{u(z)} \cdot e^{iv(z)} = Re^{i\vartheta}$. Daher ist $e^{u(z)} = |z| = R$ und $v(z) = \arg(z) = \vartheta + 2\pi k$, wobei wir mit arg das Argument von z bezeichnen.

Also ist $f(z) = \log|z| + i\arg(z)$ stets eine Lösung zu (ii) in Definition 8.4. Die Definition von arg unterscheidet sich teilweise um ganzzahlige Vielfache von 2π.

Stetigkeit und Analytizität sind nicht klar.

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion einer analytischen Funktion liefert $f'(z) = \frac{1}{z}$, falls f existiert. (Dies ist die Motivation für das nachfolgende Theorem.)

Theorem 8.6. *Sei D einfach zusammenhängend und $0 \notin D$. Sei $z_0 \in D$. Wähle einen Wert von $\log z_0$ (der (ii) in Definition 8.4 erfüllt) und definiere*

$$f(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \log z_0.$$

Dann ist f ein analytischer Zweig von $\log z$ in D.

Beweis. f ist wohldefiniert, da $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ in D analytisch ist und somit nach Theorem 8.1 $\int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$ für eine geschlossene Kurve Γ in D gilt.

Es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$. Somit ist f in D analytisch.

Wir behaupten, dass $\exp(f(z)) = z$ gilt:

Betrachte $g(z) := z \cdot e^{-f(z)}$. Wegen $g'(z) = e^{-f(z)} - zf'(z)e^{-f(z)} = 0$ ist g konstant. Aus $g(z) = g(z_0) = z_0 e^{-f(z_0)} = 1$ folgt daher $e^{f(z)} = z$. □

9. Isolierte Singularitäten analytischer Funktionen

9.1. Klassifikation isolierter Singularitäten, Riemanns Prinzip und das Theorem von Casorati-Weierstraß.

Notation 9.1. Eine punktierte Kreisscheibe von z_0 ist durch $\{z : 0 < |z - z_0| < d\}$ definiert. Eine punktierte Umgebung von z_0 ist eine Menge der Form $U \setminus \{z_0\}$, falls U eine Umgebung von z_0 ist.

Definition 9.2. f besitzt in z_0 eine isolierte Singularität, falls f in einer punktierten Umgebung von z_0 analytisch ist, aber nicht in z_0.

Bemerkung 9.3. Nach Theorem 7.6 ist f in z_0 unstetig: Es kann sein, dass f in z_0 gar nicht definiert ist. Ist f in z_0 definiert und stetig, so ist es außerhalb einer Geraden analytisch und sonst stetig, damit aber nach Theorem 7.6 auch in z_0 analytisch.

Beispiele 9.4.

(i)
$$f(z) = \begin{cases} \sin z, & z \neq 2, \\ 0, & z = 2, \end{cases}$$
besitzt in $z = 2$ eine isolierte Singularität.

(ii) $g(z) = \frac{1}{z-3}$ besitzt eine isolierte Singularität im Punkt $z = 3$.

(iii) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.

Definition 9.5. Habe f in z_0 eine isolierte Singularität.

(i) Gibt es eine Funktion g, so dass $f(z) = g(z)$ für alle z in einer punktierten Umgebung von z_0 gilt und ist g in z_0 analytisch, so besitzt f eine hebbare Singularität in z_0.
(ii) Falls sich für $z \neq z_0$ (nahe z_0) f in der Form $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ darstellen lässt, wobei $A(z)$ und $B(z)$ in z_0 analytisch sind, $A(z_0) \neq 0$, $B(z_0) = 0$, so besitzt f einen Pol in z_0. Hat B in z_0 eine Nullstelle der Ordnung k, so hat f in z_0 einen Pol der Ordnung k.
(iii) Ist die Singularität von f in z_0 weder hebbar noch ein Pol, so besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität.

Theorem 9.6 (Riemanns Prinzip hebbarer Singularitäten)**.** *Besitzt f in z_0 eine isolierte Singularität und gilt*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

so ist die Singularität hebbar.

Beweis. Betrachte

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z), & z \neq z, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

h ist in z_0 stetig und in einer punktierten Umgebung von z_0 analytisch. Nach Theorem 7.6 ist h in z_0 analytisch. Da $h(z_0) = 0$ ist, ist auch $g(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ in z_0 analytisch mit $g(z) = f(z)$ für $z \neq z_0$. □

Theorem 9.7 (Casorati-Weierstraß)**.** *Besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität und ist D eine punktierte Umgebung von z_0, so ist das Bild $\{f(z) : z \in D\}$ in $\mathbb{C}$ dicht.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es $B_\delta(w) \subset \mathbb{C}$, so dass $B_\delta(w) \cap \{f(z) : z \in D\} = \emptyset$. Daher gilt stets $|f(z) - w| \geq \delta$ und folglich

$$\left| \frac{1}{f(z) - w} \right| \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{in } D.$$

Nach Riemanns Prinzip hat daher $\frac{1}{f(z)-w}$ in z_0 höchstens eine hebbare Singularität. Die (geeignet nach z_0 fortgesetzte) Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ ist also in z_0 analytisch und wir erhalten, dass $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ gilt. Dies bedeutet, dass f in z_0 einen Pol (falls $g(z_0) = 0$ ist) besitzt oder (falls $g(z_0) \neq 0$ ist) eine hebbare Singularität. Widerspruch. □

Es gilt sogar die folgende Verschärfung des Theorems von Casorati-Weierstraß.

Bemerkung 9.8 (Picards Theorem)**.** Nahe einer wesentlichen Singularität nimmt eine analytische Funktion alle Werte aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.

9.2. **Laurentreihen.** **Ziel:** Für in Annuli definierte analytische Funktionen wollen wir eine Laurentreihendarstellung herleiten.

Definition 9.9. Wir schreiben $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = L$, falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ konvergieren und falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} = L$$

gilt.

Theorem 9.10. *Die Funktion* $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ *konvergiert im Kreisring*

$$D = \{z : R_1 < |z| < R_2\},$$

wobei

$$R_2 = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}},$$

$$R_1 = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{1/k}$$

ist, falls $R_1 < R_2$ *ist.* f *ist in* D *analytisch.*

Beweis. Aufgrund des Wurzelkriteriums konvergiert

$$f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

für $|z| < R_2$. Analog folgt, dass

$$f_2(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

für $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{R_1} \iff |z| > R_1$ konvergiert. Somit konvergiert $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ für $R_1 < |z| < R_2$. f_1 ist eine Potenzreihe und es ist $f_2(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$, wobei g eine Potenzreihe ist. Daher sind f_1 und f_2 im Konvergenzbereich analytisch. Also ist auch f dort analytisch. $\square$

Theorem 9.11. *Sei* f *in* $A := \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ *analytisch. Dann besitzt* f *im Annulus* A *eine Laurentreihenentwicklung,* $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ *in* A.

Beweis. Seien $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Seien C_1 und C_2 Kreise um 0 mit Radius r_1 und r_2. Sei $r_1 < |z| < r_2$. Dann ist

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

in A analytisch. Wie in Bemerkung 8.3 folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int\limits_{C_2 - C_1} g(w)\, dw = 0.$$

(Dies folgt, indem wir die beiden Kreise in Halbkreise zerschneiden un die Verbindungsstücke auf der reellen Achse hinzufügen. Dann verschwinden die Integrale über den oberen und über den unteren Teil individuell. Beim Zusammenfügen heben sich die Beiträge über die zusätzlichen Strecken gerade wieder gegenseitig auf.) Entlang C_i sind die Integranden nichtsingulär, wir dürfen das Integral also auseinanderziehen

$$\int\limits_{C_2-C_1} \frac{f(z)}{w-z}\,dw = \int\limits_{C_2-C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{9.1}$$

Nach Lemma 5.4 erhalten wir, da C_2 den Punkt z umschließt $\int\limits_{C_2} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$. Nach Cauchy (Theorem 8.1) gilt, da C_1 im Inneren keine Singularität enthält $\int\limits_{C_1} \frac{dw}{w-z} = 0$. Wir erhalten also

$$\int\limits_{C_2-C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 2\pi i f(z).$$

Mit (9.1) folgt daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Auf C_2 gilt $|w| > |z|$. Wir erhalten somit

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w\left(1-\frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \ldots .$$

Auf C_1 gilt $|w| < |z|$ und daher erhalten wir

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-w} = -\frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} - \frac{w^2}{z^3} - \ldots .$$

In beiden geometrischen Reihen ist die Konvergenz lokal gleichmäßig. Daher erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)z^k}{w^{k+1}}\right) dw + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w)z^k}{w^{k+1}}\right) dw.$$

Aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir die Integration und die Summation vertauschen und erhalten

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw,$$

wobei C irgendein Kreis in A ist, der im Ursprung zentriert ist. Zunächst war

$$C = \begin{cases} C_2 & \text{für } k \ge 0, \\ C_1 & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Da aber $g(w) = \frac{f(w)}{w^{k+1}}$ in A analytisch ist, ist das Integral aufgrund des Cauchyschen Satzes für geschlossene Kurven unabhängig vom speziellen Kreis. Da nun der Kreis beliebig ist, folgt die Konvergenz nicht nur in $B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}(0)}$, sondern in ganz A. □

Bemerkung 9.12. Die Laurentreihe einer in einem Kreisring analytischen Funktion ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir behaupten, dass aus $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ folgt, dass auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dz$$

gilt. Daraus folgt dann die Eindeutigkeit.

Konvergiert $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in A, so ist die Konvergenz auf C gleichmäßig. Daher erhalten wir

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_C a_n z^{n-k-1}\, dz = a_k 2\pi i,$$

denn für $n \neq k$ verschwindet das Integral und wir erhalten die rechte Seite aus dem Summanden $n = k$. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 9.13. *Sei f im Annulus $R_1 < |z - z_0| < R_2$ analytisch. Dann besitzt f in diesem Annulus eine eindeutige Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz$$

ist sowie $C = \partial B_r(z_0)$ und $R_1 < r < R_2$.

Beweis. $g(z) = f(z + z_0)$ ist in $R_1 < |z| < R_2$ analytisch, also existiert dort eine eindeutige Laurentreihenentwicklung. □

Für $R_1 = 0$ erhalten wir den folgenden Spezialfall.

Korollar 9.14. *Besitzt f in z_0 eine isolierte Singularität, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textit{für } 0 < |z - z_0| < \delta$$

gilt, wobei a_k wie in Korollar 9.13 definiert ist.

Beispiele 9.15.

(i) $\frac{(z+1)^2}{z} = \frac{1}{z} + 2 + z$ für $z \neq 0$,

(ii)

$$\frac{1}{z^2(1 - z)} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + z^2 + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \ldots \quad \text{für } 0 < |z| < 1,$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(1-z)} &= \frac{-1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{[1+(z-1)]^2(z-1)} \\
&= \frac{-1}{z-1} + 2 - 3(z-1) + 4(z-1)^2 \mp \ldots \quad \text{für } 0 < |z-1| < 1, \quad \text{da} \\
\frac{1}{1+a} &= 1 - a + a^2 - a^3 \pm \ldots, \\
\left(\frac{1}{1+a}\right)^2 &= 1 - 2a + 3a^2 - 4a^3 \pm \ldots,
\end{aligned}$$

(iv) $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$ für $z \neq 0$.

Definition 9.16. Ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurentreihenentwicklung von f um eine isolierte Singularität z_0 herum, so heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

Hauptteil von f in z_0;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt analytischer Teil.

Lemma 9.17 (Charakterisierung des Hauptteils)**.** *Besitze f in z_0 eine isolierte Singularität.*

(i) Ist die Singularität hebbar, so verschwinden alle Koeffizienten a_{-k}, $k > 0$, in der Laurentreihendarstellung um z_0.
(ii) Besitzt f in z_0 einen Pol der Ordnung k, $k > 0$, so gilt $a_{-k} \neq 0$ und $a_{-N} = 0$ für $N > k$.
(iii) Besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität, so treten im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten / Summanden $\neq 0$ auf.

Beweis.

(i) Für $z \neq z_0$ gilt $f(z) = g(z)$ für eine auch in z_0 analytische Funktion. Die Eindeutigkeit der Laurentreihe liefert, dass die Laurentreihe von f mit der Taylorreihe von g übereinstimmt. Beispiel:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \ldots.$$

(ii) Es gilt $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ wobei $A(z_0) \neq 0$ ist und B in z_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung besitzt. Daher gilt $f(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_0)^k}$, wobei Q in z_0 analytisch und von Null verschieden ist. Somit gilt

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad b_0 \neq 0,$$

und daher

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^k} = \sum_{j=-k}^{\infty} \underbrace{b_{j+k}}_{=a_j} (z-z_0)^j.$$

Somit ist $a_{-k} = b_0 \neq 0$.

(iii) Falls nicht, wäre $(z-z_0)^N f(z)$ für großes $N \in \mathbb{N}$ in z_0 analytisch. Dann hätte f einen Pol in z_0. □

Lemma 9.18 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen)**.** *Seien P und Q Polynome mit* $\deg P < \deg Q$,

$$Q(z) = (z-z_1)^{k_1} \cdot (z-z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_n)^{k_n}$$

mit $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Dann lässt sich $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ als Summe von Polynomen in $\frac{1}{z-z_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, darstellen.

Beweis. R besitzt in z_1 einen Pol der Ordnung $\leq k_1$. Aus der Laurentreihendarstellung um z_1 folgt daher

$$R(z) = \underbrace{P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right)}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{A_1(z).}_{\text{analytischer Teil}}$$

Daher besitzt $A_1(z) = R(z) - P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right)$ in z_1 eine hebbare Singularität und denselben Hauptteil wie $R(z)$ in $z_2, \ldots, z_n$. Induktiv erhalten wir

$$A_n(z) = R(z) - \left[P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) + \ldots + P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right].$$

Nach geeigneter Fortsetzung in die hebbaren Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist A_n eine ganze Funktion. Aufgrund der Homogenitäten und da keine konstanten Terme auftreten, gilt

$$R(z) \to 0 \quad \text{für } z \to \infty,$$
$$P_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right) \to 0 \quad \text{für } z \to \infty.$$

Nach dem Satz von Liouville, Theorem 5.10, ist A_n daher konstant. Durch eine analoge Betrachtung der Homogenitäten wie oben erhalten wir sogar $A_n \equiv 0$. Somit gilt

$$R(z) = P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) + \ldots + P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right).$$ □

10. Der Residuensatz

Ziel: Sei γ ein geschlossener Weg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet und sei f dort analytisch. Wir wollen den Cauchyschen Integralsatz $\int_\gamma f = 0$ auf Funktionen mit isolierten Singularitäten verallgemeinern.

Sei

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$$

nahe einer isolierten Singularität in z_0, γ ein Kreis um z_0. Dann wollen wir nachweisen, dass

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i C_{-1}$$

gilt.

Definition 10.1. Gilt $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k(z-z_0)^k$ in einer punktierten Umgebung von z_0, so heißt C_{-1} das Residuum von f in z_0.

$$C_{-1} = \operatorname{Res}(f; z_0).$$

Beispiele 10.2.

(i) Besitzt f einen einfachen Pol in z_0, d. h. gilt $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, $A(z_0) \neq 0$, wobei A und B in z_0 analytisch sind und B in z_0 eine einfache Nullstelle besitzt, so gilt

$$C_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots, \\ (z-z_0)f(z) &= C_{-1} + C_0(z-z_0) + C_1(z-z_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

und daher folgt

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = C_{-1}.$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{A(z)}{B(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{A(z)}{\frac{B(z)-B(z_0)}{z-z_0}} = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$ □

(ii) Besitzt f einen Pol der Ordnung k in z_0, so gilt

$$C_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]\Big|_{z=z_0},$$

wobei die rechte Seite als Grenzwert zu lesen ist.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} f(z) &= C_{-k}(z-z_0)^{-k} + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots, \\ g(z) &= (z-z_0)^k f(z) = C_{-k} + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{k-1} + C_0(z-z_0)^k + \ldots, \\ \frac{d^{k-1}}{z^{k-1}} g(z) &= (k-1)! C_{-1} + k! C_0(z-z_0) + \ldots. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

(iii) a) Da in $z = i$ ein einfacher Pol vorliegt, erhalten wir

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4-1}, i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}\cdot\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1}, i\right)$$

$$= \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right), i\right) = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}.$$

Mit (i) folgt alternativ

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4-1}, i\right) = \frac{1}{4i^3} = \frac{i}{4}.$$

b) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}, 0\right) = 0$,

c) $\operatorname{Res}\left(\sin\frac{1}{z-1}, 1\right) = 1$, da

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} \mp \dots .$$

Definition 10.3 (Windungszahl)**.** Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \notin \gamma$. Dann heißt

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Windungszahl von γ um a.

Beispiel 10.4. Sei γ ein im Gegenuhrzeigersinn einmal durchlaufener Kreis. Dann gilt

$$n(\gamma, a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \text{ in der Kreisscheibe liegt,} \\ 0, & \text{falls } a \text{ außerhalb der Kreisscheibe liegt.} \end{cases}$$

Dies folgt aus Lemma 5.4 bzw. aus dem Satz über geschlossene Kurven, Theorem 6.3.

Wird der Punkt a nun k-mal umlaufen, also ist $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi k$, so folgt

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi k} i\,dt = k.$$

Theorem 10.5. *Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \notin \gamma$. Dann ist $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei γ durch $z(t)$ parametrisiert, $0 \le t \le 1$. Definiere

$$F(s) := \int_0^s \frac{\dot z(t)}{z(t)-a}\,dt, \quad 0 \le s \le 1.$$

Dann liefert der Hauptsatz

$$\dot F(s) = \frac{\dot z(s)}{z(s)-a}.$$

Daher verschwindet die Ableitung von $(z(s)-a)\cdot e^{-F(s)}$ und somit ist diese Funktion konstant. Wir schließen weiter

$$\begin{aligned} (z(s)-a)\cdot e^{-F(s)} &= z(0)-a, \\ e^{F(s)} &= \frac{z(s)-a}{z(0)-a}, \\ e^{F(1)} &= \frac{z(1)-a}{z(0)-a} = \frac{z(0)-a}{z(0)-a} = 1, \end{aligned}$$

da z geschlossen ist,

$$F(1) = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und erhalten daher

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} F(1) = k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Bemerkung 10.6. Solange $a \notin \gamma$ ist, hängt $n(\gamma, a)$ nach Definition stetig von a ab. Da $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ ist, ist $n(\gamma, a)$ also auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ konstant. Weiterhin gilt $n(\gamma, a) = 0$ auf der unbeschränkten Komponente, da wir aus Integralabschätzungen $n(\gamma, a) \to 0$ für $a \to \infty$ bekommen.

Statt Bildchen: In einer „Acht“ ist in die Windungszahl in einem Gebiet 1 im anderen -1. In einem Halbkreis ist die Windungszahl 1. Besteht dir Kurve aus zwei im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen, sich in einem Punkt berührenden Kreisen, so ist die Windungszahl ganz im Inneren 2 und im Zwischenbereich 1.

Zum Beweis deformiert man die Kurve entweder in einen Kreis oder benutzt die Analytizität von $\frac{1}{z-a}$ „innerhalb“ der Kurve.

Aufgrund des Jordanschen Kurvensatzes erhalten wir: Ist γ einfach geschlossen und geeignet orientiert. Dann besteht $\mathbb{C} \setminus \gamma$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, die durch $n = 0$ (die unbeschränkte Komponente, s. o.) und $n = 1$ (die beschränkte Komponente) charakterisiert sind.

Beweis: Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis oder Topologie.

Definition 10.7. Eine einfach geschlossene Kurve γ heißt reguläre geschlossene Kurve, falls $n(\gamma, a) \in \{0, 1\}$ für $a \notin \gamma$ gilt. Wir definieren dann $\{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(\gamma, a) = 1\}$ als das Innere von γ und $\{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(\gamma, a) = 0\}$ als das Äußere von γ.

Das Innere von γ liegt dann immer „links“ der Kurve.

Theorem 10.8 (Residuensatz (Cauchy))**.** *Sei D einfach zusammenhängend, f in $D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ analytisch (möglicherweise) mit Singularitäten in $z_1, \ldots, z_m$. Gelte $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Sei γ eine geschlossene Kurve in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$. Dann gilt*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Beweis. Wir subtrahieren die Hauptteile $H_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right), \ldots, H_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)$. Beachte dabei, dass die Hauptteile nach Theorem 9.10 in $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ analytisch sind. Dann ist

$$g(z) := f(z) - H_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - H_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) - \ldots - H_m\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$$

in D analytisch. Somit gilt $\int_\gamma g = 0$ und wir schließen, dass

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^m \int_\gamma H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) dz.$$

Sei
$$H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \frac{C_{-1}}{z-z_k} + \frac{C_{-2}}{(z-z_k)^2} + \dots .$$
Wir erhalten daher
$$\int\limits_\gamma H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) dz = C_{-1} \cdot \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_k} = 2\pi i n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname{Res}(f, z_k)$$
wie behauptet. $\square$

Mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes erhalten wir daraus

Korollar 10.9. *Seien f, D wie oben. Ist γ zusätzlich eine reguläre geschlossene Kurve, so gilt*
$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k),$$
wobei wir nur über Singularitäten von f in γ summieren.

10.1. **Anwendungen des Residuensatzes.**

Theorem 10.10 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel)**.** *Sei f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D analytisch. Sei γ eine reguläre geschlossene Kurve in D. Dann gilt für z in γ und $k = 0, 1, 2, \dots$*
$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw.$$

Beweis. In einer Umgebung von z gilt
$$f(w) = f(z) + f'(z) \cdot (w-z) + \ldots + \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(w-z)^k + \dots .$$
Daraus folgt
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}; z\right) = \frac{f^{(k)}(z)}{k!}.$$
Die Funktion $\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}$ besitzt außer z keine weiteren Singularitäten in D. Somit folgt die Behauptung aus dem Residuensatz. $\square$

Theorem 10.11. *Sei f_n eine Folge in D analytischer Funktionen, die auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann ist f analytisch, $f_n' \to f'$ in D und die Konvergenz ist auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig.*

Beweis. Nach Theorem 7.5 ist f analytisch. Sei $B_r(z_0) \subset D$, $C = \partial B_{\frac{3r}{4}}(z_0)$. Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel
$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}\, dw, \quad z \in \overline{B_{r/2}(z_0)}.$$
Da $f_n \to f$ in $\overline{B_{\frac{3r}{4}}(z_0)}$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert somit auch $f_n' \to f'$ gleichmäßig in $\overline{B_{r/2}(z_0)}$. Mit einem Überdeckungsargument erhalten wir Konvergenz für eine beliebige kompakte Teilmenge von D. Die Behauptung folgt. $\square$

11. Anwendungen des Residuensatzes

11.1. Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Herleitung 11.1. P und Q seien Polynome, der Nenner Q sei (für reelle x) nullstellenfrei, $\deg Q - \deg P \ge 2$. Dann existiert aufgrund von Sätzen aus der Analysis 2

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Alternativ zu den folgenden Überlegungen kann man auch eine Partialbruchzerlegung durchführen.
Sei C_R der Rand der oberen Halbkugel B_R^+. Sei R so groß, dass C_R alle Nullstellen von Q in der oberen Halbebene umläuft. Sei Γ_R der obere Halbkreis.
Nun liefert uns der Residuensatz

$$\int\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right),$$

wobei z_k die Nullstellen (ohne Vielfachheiten) von Q in der oberen Halbebene sind.
Daher ist

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right).$$

Da $\deg Q - \deg P \ge 2$ ist, folgt aus der M-L-Abschätzung

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{P}{Q} \ll \pi R \frac{A}{R^2}$$

für eine Konstante A. Somit ist

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$$

und es folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right).$$

Beispiel 11.2.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; z_k\right),$$

wobei die Nullstellen von z^4+1 in der oberen Halbebene $z_1 = e^{i\pi/4}$ und $z_2 = e^{3i\pi/4}$ sind.
Wir bestimmen die Residuen: Nahe z_1 gelte

$$\frac{1}{z^4+1} = \ldots + a_{-2}\frac{1}{(z-z_1)^2} + a_{-1}\frac{1}{z-z_1} + a_0 + a_1\cdot(z-z_1) + \ldots .$$

Es gilt (Da alle Nullstellen von z^4+1 Vielfachheit 1 haben existiert der folgende Grenzert.)

$$
\begin{aligned}
a_{-1} &= \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{\frac{z^4+1}{z-z_1}}\\
&= \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_1} \frac{(z^4+1)-(z_1^4+1)}{z-z_1}} \quad \text{(da } z_1 \text{ eine Nullstelle von } z^4+1 \text{ ist)}\\
&= \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(z^4+1\right)\big|_{z=z_1}} = \frac{1}{4z_1^3}.
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; e^{i\pi/4}\right) &= \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4}\cdot\left(-e^{i\pi/4}\right)\\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).
\end{aligned}
$$

Ebenso erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; e^{3i\pi/4}\right) &= \frac{1}{4e^{3\cdot 3i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i).
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir also

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.
$$

Literatur

1. Joseph Bak and Donald J. Newman, *Complex analysis*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.
2. John B. Conway, *Functions of one complex variable*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978.
3. Wolfgang Fischer and Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, vol. 47, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980, Aufbaukurs Mathematik.
4. Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch., Springer-Verlag, Berlin, 1993.
5. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
6. Martin Väth, *Einführung in die Funktionentheorie I*, 2004, Lecture Notes, Freie Universität Berlin.

Oliver C. Schnürer, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`