FUNKTIONENTHEORIE

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Funktionentheorie an der
- Freien Universität Berlin im Sommer 2005 (Funktionentheorie I).
- Universität Konstanz im Sommer 2010 (Funktionentheorie).
- Universität Konstanz im Winter 2011/12 (Mathematik für Physiker III).

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skript orientiert sich insbesondere an dem Buch von J. Bak und D. Newman [1].

1. Die komplexen Zahlen

Theorem 1.1. *Die reellen 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, bilden bezüglich komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation einen Körper.*

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung 1.2.
- Statt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ schreiben wir auch $a + ib$.

Date: 21. Februar 2013.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 30-01.
Skript für vierstündige Vorlesung: Ändere LaTeX-Befehl „`\lang`“.

- Es gilt $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Für $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (oder $0 \leq \varphi < 2\pi$), so dass
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
mit $r^2 = a^2 + b^2$ gilt. Matrizen dieser Form operieren daher als Drehstreckungen auf $\mathbb{R}^2$.
- Für $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3. $\mathbb{C}$ ist der Körper der komplexen Zahlen,
$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation. Es ist
$$\mathbb{C} \cong \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$
mit
$$\begin{aligned} (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(ad + bc), \\ (a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d). \end{aligned}$$
Dies ist das Bild der komplexen oder Gaußschen Zahlenebene.
Die komplexe Konjugation ist durch
$$\begin{gathered} a + ib = z \mapsto \overline{z} = a - ib, \\ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{gathered}$$
definiert. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- $a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ heißt Realteil von z, $\operatorname{Re} z$.
- $b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ heißt Imaginärteil von z, $\operatorname{Im} z$.
- Der Betrag von $z = a + ib$ ist durch $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ definiert.

Bemerkung 1.4. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Es gilt

- $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\left[X^2 + 1\right]$.
- $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\right\} \cong \mathbb{R}$. Wir identifizieren diese beiden Mengen.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- Komplexe Konjugation ist ein involutiver Automorphismus von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ festhält.
- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$, $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$
- Der Körper $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper.
- $|z| \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $z = 0$ ist.
- $|w + z| \leq |w| + |z|$
- $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$
- Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der Achse $\{\operatorname{Im} z = 0\} \subset \mathbb{C}$, wobei wir für $\mathbb{C}$ das Modell der komplexen Zahlenebene verwenden.

- Auf $\mathbb{C}$ definieren wir durch $\|z\| := |z|$ eine Norm.
- $B_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$. Wir können somit von offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen sprechen.
- $\mathbb{R}^2 \ni (a,b) \mapsto a + ib \in \mathbb{C}$ ist ein normtreuer $\mathbb{R}$ Vektorraumisomorphismus. Somit entsprechen sich Konvergenz und topologische Begriffe wie beispielsweise Offenheit in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$.
- Insbesondere ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann stetig, wenn die Komposition aller dieser Abbildungen stetig ist:
$$(x,y) \mapsto x + iy \mapsto f(x+iy) \mapsto (\operatorname{Re} f(x+iy), \operatorname{Im} f(x+iy)),$$
wobei außen Elemente von $\mathbb{R}^2$ und innen Elemente von $\mathbb{C}$ stehen.
- Komplexe Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen.
- Eine offene zusammenhängende Menge heißt Gebiet.
- Je zwei Punkte in einem Gebiet lassen sich durch einen endlichen Polygonzug verbinden. Es genügt auch, Strecken zu verwenden, für die $\operatorname{Im} z$ oder $\operatorname{Re} z$ konstant sind.

Bemerkung 1.5 (Stereographische Projektion).
$$\mathbb{C} \ni x + iy \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \right) \in \partial B_{\frac{1}{2}}\left(\left(0,0,\tfrac{1}{2}\right)\right) \subset \mathbb{R}^3$$
heißt Inverse der stereographische Projektion. Bilden wir einen Punkt ∞ auf $(0,0,1)$ ab, so können wir $\mathbb{C}$ mit Hilfe dieser Abbildung kompaktifizieren.

2. Funktionen der Variablen z

$x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2$ ist ein Polynom in $x + iy$, nicht aber $x^2 + y^2 - 2ixy$.

Definition 2.1. P heißt analytisches Polynom, falls
$$\begin{aligned} P(x,y) &= \alpha_N (x+iy)^N + \ldots + \alpha_2 (x+iy)^2 + \alpha_1 (x+iy) + \alpha_0, \\ P(z) &= \alpha_N z^N + \ldots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 \end{aligned}$$
mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Definition 2.2. Sei $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ und seien u, v reellwertig. Definiere
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$
falls diese Ableitungen existieren. Wir schreiben auch $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Proposition 2.3. *Ein Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann analytisch, wenn $P_y = iP_x$ gilt.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei P analytisch. Differenzieren liefert unmittelbar $P_y = iP_x$.
„$\Longleftarrow$“: Gelte $P_y = iP_x$. Dann ist diese Bedingung insbesondere auch für alle Terme n-ten Grades erfüllt. Es genügt daher, ein Polynom der folgenden Form zu betrachten
$$P(x,y) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} y + C_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n y^n.$$

Wegen $P_y = iP_x$ folgt

$$\begin{aligned} &C_1x^{n-1} + 2C_2x^{n-2}y + \ldots + nC_ny^{n-1} \\ = {} & i\left[nC_0x^{n-1} + (n-1)C_1x^{n-2}y + \ldots + C_{n-1}y^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} C_1 &= inC_0 = i\binom{n}{1}C_0, \\ C_2 &= \frac{i(n-1)}{2}C_1 = i^2\frac{n(n-1)}{2}C_0 = i^2\binom{n}{2}C_0, \end{aligned}$$

und per Induktion erhalten wir

$$C_k = i\frac{n-k+1}{k}C_{k-1} = i^k\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}C_0 = i^k\binom{n}{k}C_0.$$

Daher hat P die Gestalt

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_kx^{n-k}y^k = C_0\sum_{k=0}^{k}\binom{n}{k}x^{n-k}(iy)^k = C_0(x+iy)^k.$$

Somit ist P analytisch. □

Theorem 2.4 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)**.** *Ist $f = u + iv$, so folgt aus $f_y = if_x$, dass $u_y + iv_y = i(u_x + iv_x)$ und somit*

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Definition 2.5 (Komplexe Differenzierbarkeit)**.** Sie f nahe $z \in \mathbb{C}$ definiert. Dann heißt f in z (komplex) differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(z)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.6. Für $f(z) = \overline{z}$ gilt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

und dies ist gleich 1, falls h reell ist und gleich -1, falls h rein imaginär ist, d. h., wenn $\operatorname{Re} h = 0$ gilt.

Summen, Produkte und Quotienten (lokal ohne Nennernullstelle) sind differenzierbar, falls dies die Bestandteile sind. Es gelten Summen-, Produkt- und Quotientenregel.

Analytische Polynome sind überall differenzierbar.

Theorem 2.7. *Eine Potenzreihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_kz^k$$

konvergiert in $B_R(0)$ und divergiert in $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$ mit

$$R = \frac{1}{\limsup |C_k|^{1/k}}.$$

R heißt Konvergenzradius. In $B_R(0)$ ist die Konvergenz lokal gleichmäßig.

Beweis. Wie im Reellen. □

Bemerkung 2.8. Wie im Reellen kann man im Konvergenzbereich Potenzreihen addieren oder mit Hilfe des Cauchyproduktes multiplizieren.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Theorem 2.9. *Konvergiere $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ für $|z| < R$. Dann existiert $f'(z)$ für $|z| < R$ und es gilt dort*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1}.$$

Beweis. (Eigentlich ist dies bereits aus dem Reellen bekannt.) Die zweite Potenzreihe konvergiert, da

$$\begin{aligned}\limsup |nC_n|^{\frac{1}{n-1}} &= \limsup \left(|nC_n|^{1/n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \\ &= \lim n^{1/n} \cdot \limsup |C_n|^{1/n} = \limsup |C_n|^{1/n}.\end{aligned}$$

Nehme an, dass $0 < R < \infty$ gilt. Sei $|z| = R - 2\delta$ für $\delta > 0$. Sei $|h| < \delta$ und $h \neq 0$. Dann ist $|z + h| < R - \delta$. Es gilt

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n b_n$$

mit

$$b_n = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k},$$

da durch h dividiert wurde. Für $z = 0$ gilt $b_n = h^{n-1}$. Die Behauptung folgt in diesem Falle. Sei nun also $z \neq 0$. Für $k \geq 2$ gilt, wenn man zwei Faktoren im Zähler durch n abschätzt,

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq n^2 \binom{n}{k-2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}|b_n| &\leq \frac{n^2|h|}{|z|^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-2} |h|^{k-2} |z|^{n-(k-2)} \leq \frac{n^2|h|}{|z|^2} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |h|^j |z|^{n-j} \\ &= \frac{n^2|h|}{|z|^2} (|z| + |h|)^n \leq \frac{n^2|h|}{|z|^2} (R-\delta)^n.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |C_n| (R-\delta)^n.$$

Wie oben konvergiert die unendliche Summe auf der rechten Seite aufgrund des Wurzelkriteriums. Der Ausdruck ist also durch eine Konstante mal $|h|$ abgeschätzt und die Behauptung folgt indem wir $h \to 0$ streben lassen. □

Korollar 2.10. *Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradiusses beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. Induktion □

Korollar 2.11. *Hat* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ *positiven Konvergenzradius, so gilt* $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ *für alle* n.

Beweis. Differenziere beide Seiten und vergleiche im Punkt $z = 0$. □

Theorem 2.12 (Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen)**.** *Verschwinde* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ *für alle Punkte* $z_k \neq 0$ *einer Nullfolge. Dann verschwinden alle Koeffizienten* C_n.

Beweis. Da für alle Punkte z_k der Folge $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z_k^n = 0$ gilt, hat diese Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius. Setze $f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$. Da f im Ursprung stetig ist, folgt

$$C_0 = f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z_k \to 0} f(z_k) = 0.$$

Aufgrund des Wurzelkriteriums hat

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \ldots$$

denselben Konvergenzradius wie f und ist insbesondere im Ursprung stetig. Somit folgt nach Voraussetzung

$$C_1 = g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k} = 0.$$

Die Behauptung folgt nun per Induktion. □

Korollar 2.13. *Konvergieren* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *und stimmen sie auf einer Menge, die den Ursprung als Häufungspunkt besitzt, überein, so gilt* $a_n = b_n$ *für alle* n.

3. Analytische Funktionen

Analytische Funktionen werden auch als holomorph bezeichnet. Erinnerung: f ist in z differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert, wobei $\mathbb{C} \ni h \to 0$ beliebig ist und wir später (der Bequemlichkeit halber) $h \neq 0$ weglassen werden.

Proposition 3.1. *Sei* $f = u + iv$ *im Punkte* z *differenzierbar, so existieren dort die partiellen Ableitungen* f_x *und* f_y *und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$f_y = i f_x$$

oder, äquivalent dazu,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -\,v_x. \end{aligned}$$

Beweis. Sei zunächst $h \in \mathbb{R}$. Wir lassen $h \to 0$ und erhalten

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \to f_x.$$

Sei nun η reell. Wir betrachten $\eta \to 0$ und $h = i\eta$. Dann gilt

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{f(x,y+\eta)-f(x,y)}{i\eta} \to \frac{f_y}{i}.$$

Da diese beiden Limites übereinstimmen folgt

$$f_y = i f_x$$

und daher

$$u_y + i v_y = i(u_x + i v_x).$$

In diesen Gleichungen müssen Real- und Imaginärteil jeweils schon einzeln übereinstimmen. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -\,v_x. \end{aligned}$$

□

Es gilt die folgende Form der Umkehrung

Proposition 3.2. *Existieren f_x und f_y in einer Umgebung von z, sind in z stetig und gilt in z, dass $f_y = i f_x$ ist, so ist f in z differenzierbar.*

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $h = \xi + i\eta$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \to f_x(z) = u_x(z) + i v_x(z)$$

für $h \to 0$ gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{u(z+h)-u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi,y+\eta)-u(x,y)}{\xi+i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi,y+\eta)-u(x+\xi,y)}{\xi+i\eta} + \frac{u(x+\xi,y)-u(x,y)}{\xi+i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi+i\eta} u_y(x+\xi,y+\vartheta_1\eta) + \frac{\xi}{\xi+i\eta} u_x(x+\vartheta_2\xi,y) \end{aligned}$$

für $0 < \vartheta_k < 1$ aufgrund des reellen Mittelwertsatzes für Funktionen einer Variablen. Ebenso folgt

$$\frac{v(z+h)-v(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi+i\eta} v_y(x+\xi,y+\vartheta_3\eta) + \frac{\xi}{\xi+i\eta} v_x(x+\vartheta_4\xi,y)$$

mit $0 < \vartheta_k < 1$, $k = 1,\ldots,4$. Wir erhalten

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi+i\eta}[u_y(z_1) + i v_y(z_2)] + \frac{\xi}{\xi+i\eta}[u_x(z_3) + i v_x(z_4)],$$

wobei $|z - z_k| \to 0$ für $h \to 0$ und $k = 1,\ldots,4$ gilt.

Andererseites erhalten wir wegen $f_y = if_x$ in z

$$\begin{aligned} f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y + \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta}(u_y + iv_y) + \frac{\xi}{\xi + i\eta}(u_x + iv_x). \end{aligned}$$

Subtrahieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) = & \frac{\eta}{\xi + i\eta}\left[(u_y(z_1) - u_y(z)) + i(v_y(z_2) - v_y(z))\right] \\ & + \frac{\xi}{\xi + i\eta}\left[(u_x(z_3) - u_x(z)) + i(v_x(z_4) - v_x(z))\right]. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in z impliziert, dass die Terme in den eckigen Klammern für $h \to 0$ gegen 0 konvergieren. Weiterhin gilt $\left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right| \le 1$ und $\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right| \le 1$. Somit erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_x(z).$$

□

Definition 3.3. f heißt in einem Punkt (einer Menge) analytisch, falls f in einer Umgebung des Punktes (der Menge) (komplex) differenzierbar ist.

Bemerkung 3.4. Analytische Polynome sind gemäß dieser Definition analytische Funktionen.

Eine Potenzreihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit positivem Konvergenzradius ist „im Inneren des Konvergenzradiusses“ eine analytische Funktion.

Wie im Reellen ist die Verkettung differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar und damit analytisch.

In ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktionen heißen ganze Funktionen.

Definition 3.5. Seien S, T offenen Mengen, sei $f : S \to T$ bijektiv. g ist die Inverse von f in T, falls $f(g(z)) = z$ für alle $z \in T$ gilt. g heißt Inverse zu f in z_0, falls g in einer Umgebung von z_0 zu f invers ist.

Proposition 3.6. *Sei g zu f in einem Punkt z_0 invers und sei g dort stetig. Ist f in $g(z_0)$ differenzierbar mit $f'(g(z_0)) \neq 0$, dann ist g in z_0 differenzierbar und es gilt*

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

Beweis. Für $z \neq z_0$ nahe z_0 gilt

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)}}.$$

Die Stetigkeit von g in z_0 liefert, dass $g(z) \to g(z_0)$ für $z \to z_0$ konvergiert. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f folgt daher

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

□

3.1. **Konsequenzen aus der Analytizität.**

Proposition 3.7. *Sei $f = u+iv$ in einem Gebiet D analytisch und sei u konstant. (u und v seien wie stets bei einer solchen Darstellung reell.) Dann ist f konstant.*

Beweis. Da u konstant ist, folgt $u_x = u_y = 0$. Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhalten wir daher $v_x = v_y = 0$ und die Behauptung folgt. □

Proposition 3.8. *Sei f in einem Gebiet analytisch und $|f|$ dort konstant. Dann ist f konstant.*

Beweis. Ist $|f| \equiv 0$, so ist die Behauptung offensichtlich. Sonst erhalten wir für $f = u + iv$, dass $u^2 + v^2 \equiv c \neq 0$ gilt und erhalten daraus mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= uu_x + vv_x = uu_x - vu_y, \\ 0 &= uu_y + vv_y = vu_x + uu_y. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun die erste Gleichung mit u, die zweite mit v und erhalten nach Addition $(u^2+v^2)u_x = 0$. Somit ist $u_x = 0$. Analog erhalten wir nach Multiplikation der ersten Gleichung mit $-v$ und der zweiten Gleichung mit u, dass $u_y = 0$ ist. Die Behauptung folgt. □

3.2. **Die komplexe Exponentialfunktion.** Wir suchen eine ganze analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= f(z_1) \cdot f(z_2) \qquad && \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ f(x) &= e^x && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gilt.
Es gilt $f(z) = f(x + iy) = f(x) \cdot f(iy) = e^x f(iy)$. Wir machen den Ansatz $f(iy) = A(y) + iB(y)$ und erhalten

$$f(z) = e^x A(y) + ie^x B(y).$$

Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen schließen wir

$$\begin{aligned} u_x = v_y &\quad\Longrightarrow\quad A(y) = B'(y), \\ u_y = -v_x &\quad\Longrightarrow\quad A'(y) = -B(y) \end{aligned}$$

und erhalten daraus $A'' = -A$. Daher ist

$$\begin{aligned} A(y) &= \alpha \cos y + \beta \sin y, \\ B(y) &= -\, A'(y) = -\beta \cos y + \alpha \sin y. \end{aligned}$$

Wegen $f(x) = e^x$ schließen wir, dass $A(0) = \alpha = 1$ und dass $B(0) = -\beta = 0$ gelten. Setze daher

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Die oben geforderten Eigenschaften sind erfüllt (Übung). Wir schreiben $f(z) = e^z$.

Bemerkung 3.9. Es gilt

(i) $|e^z| = e^x$,
(ii) $e^z \neq 0$, $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$.
(iii) Für jedes $\alpha \neq 0$ besitzt $e^z = \alpha$ abzählbar viele Lösungen.

(iv) $(e^z)' = (e^z)_x = e^z$.

3.3. **Sinus und Kosinus.** Sei $y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y, \\ e^{-iy} &= \cos y - i \sin y, \\ \sin y &= \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right), \\ \cos y &= \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right). \end{aligned}$$

Definiere daher

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \\ \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.10. Wie im Reellen gilt

$$\begin{aligned} \sin 2z &= 2 \sin z \cdot \cos z, \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ (\sin z)' &= \cos z. \end{aligned}$$

Aber $|\sin z| \le 1$ gilt für allgemeines $z \in \mathbb{C}$ nicht mehr.

4. Linienintegrale und ganze Funktionen

Ziel: Eine ganze Funktion besitzt eine überall konvergente Darstellung als Potenzreihe.

Definition 4.1. Sei $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ stetig, $f(t) = u(t) + iv(t)$. Wir definieren

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt := \int\limits_a^b u(t)\,dt + i \int\limits_a^b v(t)\,dt.$$

Definition 4.2.

(i) Sei $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$. Die durch $z(t)$ beschriebene Kurve ist stückweise differenzierbar, falls x und y auf $[a,b]$ stetig und die Einschränkungen auf $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ für geeignete x_i's differenzierbar sind. Schreibweise: $\dot{z}(t) = x'(t) + iy'(t)$.

(ii) Eine Kurve heißt in t regulär, falls $\dot{z}(t) \neq 0$ ist. Falls nicht anders erwähnt, nehmen wir ab jetzt stets an, dass alle Kurven in höchstens endlich vielen Punkten nicht regulär sind.

Definition 4.3. Sei C eine durch $z(t)$, $a \le t \le b$, gegebene Kurve. Sei f auf C stetig. Das Integral von f entlang C ist durch

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt$$

definiert.

Definition 4.4. Zwei Kurven

$$C_1 : z(t), \quad a \le t \le b,$$
$$C_2 : w(t), \quad c \le t \le d,$$

heißen äquivalent, falls es eine C^1-Bijektion $\lambda(t) : [c,d] \to [a,b]$ mit $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$, $\lambda'(t) > 0$ für alle t und $w(t) = z(\lambda(t))$ gibt.

Es ist leicht nachzurechnen, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

Proposition 4.5. *Seien C_1 und C_2 äquivalente Kurven, so gilt*

$$\int_{C_1} f = \int_{C_2} f.$$

Beweis. Seien $f(z) = u(z) + iv(z)$, C_1 und C_2 wie oben, $z(t) = x(t) + iy(t)$. Nach Definition (in Real- und Imaginärteil aufgespalten) gilt

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f = &\int_a^b u(z(t))x'(t)\,dt - \int_a^b v(z(t))y'(t)\,dt \\ &+ i\int_a^b u(z(t))y'(t)\,dt + i\int_a^b v(z(t))x'(t)\,dt\end{aligned}$$

und

$$\int_{C_2} f = \int_c^d [u(z(\lambda(t))) + iv(z(\lambda(t)))] \cdot [x'(\lambda(t)) + iy'(\lambda(t))]\lambda'(t)\,dt.$$

Ausmultiplizieren liefert Übereinstimmung, z. B.

$$\int_c^d u(z(\lambda(t)))x'(\lambda(t))\lambda'(t)\,dt = \int_a^b u(z(t))x'(t)\,dt$$

aufgrund der Transformationsformel für Integrale. □

Definition 4.6. Sei die Kurve C durch $z(t)$, $a \le t \le b$, gegeben. Dann ist $-C$ durch $z(b + a - t)$, $a \le t \le b$, definiert, d. h. die Kurve wird andersherum durchlaufen.

Proposition 4.7. *Es gilt*

$$\int_{-C} f = -\int_C f.$$

Beweis. Nach Kettenregel und (komponentenweise angewandter) Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned}\int_{-C} f &= -\int_a^b f(z(b + a - t))\dot{z}(b + a - t)\,dt \\ &= \int_b^a f(z(b + a - t))\dot{z}(b + a - t)\,dt\end{aligned}$$

$$= -\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt = -\int_C f. \qquad \square$$

Beispiel 4.8. Sei

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$C : z(t) = R\cos t + iR\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad R \neq 0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{R} - i\frac{\sin t}{R}\right) \cdot (-R\sin t + iR\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.\end{aligned}$$

Proposition 4.9. *Sei C eine Kurve, f und g seien auf C stetig. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz,$$
$$\int_C \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz.$$

Beweis. Klar. $\square$

Die folgende Notation ist nicht überall verbreitet.

Notation 4.10. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\alpha \ll \beta$, falls $|\alpha| \le |\beta|$ gilt.

Lemma 4.11. *Sei $[a,b] \ni t \mapsto G(t) \in \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b G(t)\,dt \ll \int_a^b |G(t)|\,dt.$$

Beweis. Seien $R \ge 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_a^b G(t)\,dt = Re^{i\vartheta}$$

ist. Dann folgt nach Proposition 4.9

$$\int_a^b e^{-i\vartheta} G(t)\,dt = R.$$

Da die rechte Seite reell ist, erhalten wir

$$R = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\vartheta} G(t)\right)\,dt.$$

Da aber $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ gilt, erhalten wir

$$R \leq \int\limits_a^b |G(t)|\, dt$$

und die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 4.12 (M-L Abschätzung)**.** *Sei C eine Kurve der Länge L, sei f auf C stetig mit $f \ll M \in \mathbb{R}$ auf C. Dann gilt*

$$\int\limits_C f(z)\, dz \ll ML.$$

Beweis. Sei C durch $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, gegeben. Mit Lemma 4.11 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt &\ll \int\limits_a^b |f(z(t))\dot{z}(t)|\, dt \\ &\leq \max_{z \in C} |f(z)| \cdot \int\limits_a^b |\dot{z}(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Für die Bogenlänge L von C erhalten wir

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int\limits_a^b |\dot{z}(t)|\, dt$$

und somit

$$\int\limits_C f(z)\, dz \ll ML.$$

$\square$

Proposition 4.13. *Sei f_n eine Folge stetiger Funktionen, die auf einer Kurve C gleichmäßig gegen einen Funktion f konvergiert. Dann gilt*

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \int\limits_C f_n(z)\, dz.$$

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ist f stetig.
Es gilt

$$\int\limits_C f(z)\, dz - \int\limits_C f_n(z)\, dz = \int\limits_C (f(z) - f_n(z))\, dz.$$

Fixiere $\varepsilon > 0$ und wähle n groß genug, so dass $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in C$ gilt. Sei L die Länge von C. Dann gilt

$$\int\limits_C f(z)\, dz - \int\limits_C f_n(z)\, dz \ll \varepsilon \cdot L.$$

Wir lassen $\varepsilon \to 0$ und erhalten

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \int\limits_C f_n(z)\, dz$$

wie behauptet. □

Proposition 4.14. *Sei f die Ableitung einer analytischen Funktion F auf C, d. h. gelte $f(z) = F'(z)$ auf C. Dann gilt*

$$\int\limits_C f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Beweis. Es genügt, dies in einem Intervall zu beweisen, in dem C durch $z(t)$ dargestellt ist und zusätzlich z glatt ist und $\dot z \neq 0$ gilt. Nehme ohne Einschränkung ein, dass dies für $a \le t \le b$ der Fall ist. Die allgemeine Behauptung folgt dann durch Aufsummieren.

Definiere $\gamma(t) := F(z(t))$, $a \le t \le b$. Wir beweisen zunächst das komplexe Analogon zur Kettenregel:

$$\begin{aligned}\dot\gamma(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{z(t+h) - z(t)} \cdot \frac{z(t+h) - z(t)}{h},\end{aligned}$$

da $\dot z \neq 0$ impliziert, dass $z(t+h) \neq z(t)$ gilt, falls $h \neq 0$ klein genug ist

$$\begin{aligned}&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{z(t+h) - z(t)}}_{=F'(z(t))} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}}_{=\dot z(t)}\\ &= f(z(t)) \cdot \dot z(t).\end{aligned}$$

Also folgt aufgrund des reellen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))\dot z(t)\,dt &= \int\limits_a^b \dot\gamma(t)\,dt\\ &= \gamma(b) - \gamma(a) = F(z(b)) - F(z(a)).\end{aligned}$$ □

4.1. **Satz über geschlossene Kurven für ganze Funktionen.** Ab diesem Kapitel werden wir einige Resultate für ganze Funktionen beweisen, die aber auch entsprechend für Funktionen gelten, die in Kreisscheiben oder (noch zu definierenden) einfach zusammenhängenden Gebieten definiert sind. Da wir später nur auf die entsprechenden Beweisschritte verweisen werden, ist es jetzt schon sinnvoll, sich zu merken, dass die betrachteten Funktionen für die Gültigkeit des jeweiligen Satzes häufig nicht in ganz $\mathbb{C}$ definiert zu sein brauchen.

Definition 4.15. Eine Kurve C heißt geschlossen, falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, d. h. falls C durch $z(t)$, $a \le t \le b$, mit $z(a) = z(b)$ gegeben ist.

C heißt einfach geschlossen, falls keine weiteren Punkte auf der Kurve übereinstimmen, d. h. falls aus $z(t_1) = z(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ folgt, dass $t_1 = a$ und $t_2 = b$ gelten.

Unter dem Rand eines (achsenparallelen) Rechtecks verstehen wir eine einfach geschlossene Kurve entlang des mengentheoretischen Randes des Rechtecks, so dass das Rechteck bei wachsendem Parameter t auf der linken Seite der Kurve liegt. (Die Kurve wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.)

Theorem 4.16 (Rechteckstheorem)**.** *Sei f eine ganze Funktion und Γ der Rand eines Rechtecks R. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Lemma 4.17. *Ist f zusätzlich affin linear, so gilt das Rechteckstheorem.*

Beweis. Sei $f(z) = \alpha + \beta z$ und sei Γ durch $\Gamma : z(t)$, $a \le t \le b$, gegeben. f ist überall die Ableitung der analytischen Funktion

$$F(z) = \alpha z + \tfrac{1}{2}\beta z^2.$$

Nach Proposition 4.14 folgt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma F'(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) = 0. \qquad \square$$

Beweis von Theorem 4.16. Setze $I := \int\limits_\Gamma f(z)\,dz$. Wir behaupten, dass $I = 0$ gilt. Nehme an, dies wäre nicht der Fall. Dann unterteilen wir R in vier Rechtecke mit jeweils den halben Seitenlängen von R: $R_1, \dots, R_4$ mit Rändern $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$. Da die im inneren von R liegenden Strecken jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, erhalten wir

$$\int_\Gamma f = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} f.$$

Wähle eines der Rechtecke, $R^{(1)}$ mit Rand $\Gamma^{(1)}$, so dass

$$\int_{\Gamma^{(1)}} f(z)\,dz \gg \frac{I}{4}$$

gilt. Wir iterieren dies mit $R^{(i)}$ und $\Gamma^{(i)}$ statt R und Γ und erhalten Folgen

$$R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \dots$$

mit Rändern

$$\Gamma, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots,$$

so dass

$$\operatorname{diam} R^{(k+1)} = \tfrac{1}{2} \operatorname{diam} R^{(k)}$$

und

$$\int_{\Gamma^{(k)}} f(z)\,dz \gg \frac{I}{4^k}$$

gelten. Sei $z_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} R^{(k)}$. Nutze nun die Analytizität von f im Punkte z_0. Da

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to f'(z_0)$$

gilt, existiert ε_z, so dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon_z \cdot (z - z_0)$$

mit $\varepsilon_z \to 0$ für $z \to z_0$ ist. Nun gilt

$$\int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma^{(n)}} [f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon_z \cdot (z - z_0)]\,dz = \int\limits_{\Gamma^{(n)}} \varepsilon_z \cdot (z - z_0)\,dz,$$

da das Integral über den linearen Anteil verschwindet. Bezeichne die Länge der längsten Seite von Γ mit s. Wir erhalten für die Länge von $\Gamma^{(n)}$ die Abschätzung $\int\limits_{\Gamma^{(n)}} |dz| \le \frac{4s}{2^n}$ und für $z \in \Gamma^{(n)}$, dass $|z - z_0| \le \frac{\sqrt{2}s}{2^n}$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass aus $|z - z_0| \le \frac{\sqrt{2} \cdot s}{2^N}$ folgt, dass $\varepsilon_z \ll \varepsilon$ gilt. Für $n \ge N$ folgt damit nach der M-L-Abschätzung

$$\int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz \ll \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{2}s}{2^n} \frac{4s}{2^n}.$$

Nach Wahl von $\Gamma^{(n)}$ folgt

$$\frac{I}{4^n} \ll \int\limits_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz \ll \varepsilon \frac{4\sqrt{2}s^2}{4^n}$$

und damit $I \ll \varepsilon 4\sqrt{2}s^2$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $I = 0$. □

Die Orientierung der Rechtecke war nicht wesentlich, nur, dass sie einheitlich war. Wir wollen in Zukunft jeweils so um konvexe Mengen herum integrieren, dass diese auf der linken Seite liegen.

Theorem 4.18 (Integraltheorem)**.** *Sei f eine ganze Funktion. Dann ist f überall die Ableitung einer analytischen Funktion, d. h. es gibt eine ganze Funktion F, so dass $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.*

Beweis. Definiere $F(z)$ durch

$$F(z) := \int\limits_0^z f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei $\int\limits_0^z$ das Integral auf geraden Strecken von 0 nach $\operatorname{Re} z$ und weiter von $\operatorname{Re} z$ nach z bezeichnet.
Analog bezeichnet $\int\limits_z^{z+h}$ das Integral auf geraden Strecken von z nach $z + \operatorname{Re} h$ und weiter von $z + \operatorname{Re} h$ nach $z + h$.
Es gilt

$$F(z + h) = F(z) + \int\limits_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta,$$

da sich die beiden Ausdrücke nur um das Integral um ein Rechteck herum unterscheiden. Nun ist für $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} 1\,d\zeta = \frac{1}{h}(z+h-z) = 1.$$

Zusammengenommen ergibt sich nun

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} [f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt für hinreichend kleines $|h|$ im Integral stets $|f(\zeta)-f(z)| \leq \varepsilon$. Aufgrund der M-L-Formel ist also

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \ll \frac{1}{|h|}2|h|\varepsilon = 2\varepsilon$$

und somit gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. □

Theorem 4.19 (Satz über geschlossene Kurven)**.** *Sei f eine ganze Funktion und C eine geschlossene Kurve, so gilt*

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Sei F eine ganze Funktion wie im Integraltheorem, Theorem 4.18, d. h. es gelte $F'(z) = f(z)$. Wir erhalten in der auch bisher schon verwendeten Notation für Kurvenintegrale

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C F'(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) = 0,$$

da C eine geschlossene Kurve ist. □

5. Eigenschaften ganzer Funktionen

5.1. **Cauchysche Integralformel und Taylordarstellung.** Sei f eine ganze Funktion. Definiere g durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a, \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

für festes $a \in \mathbb{C}$. Da f eine ganze Funktion ist, ist g stetig. Erst einmal ist nicht klar, ob g auch ganz ist.

Ziel: Das Integraltheorem, Theorem 4.18, und der Satz über geschlossene Kurven, Theorem 4.19, gelten auch für g.

Theorem 5.1 (Rechteckstheorem II)**.** *Sei f ganz und g wie oben, dann gilt*

$$\int\limits_\Gamma g(z)\,dz = 0$$

für den Rand Γ eines Rechteckes R.

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:

(i) $a \notin R$: g ist in R analytisch und der bisherige Beweis funktioniert ungeändert.

(ii) $a \in \Gamma$: Unterteile R so in sechs kleine Rechtecke, dass (bis auf ein sehr kleines Rechteck) alle Rechtecke einen positiven Abstand zu a besitzen. In offensichtlicher Notation erhalten wir
$$\int\limits_\Gamma g = \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{\Gamma_k} g.$$
Da g stetig ist, folgt $g \ll M \in \mathbb{R}$ in R für eine geeignete Konstante M. Habe nun das Rechteck R_1 mit a auf dem Rand Γ_1 einen Umfang kleiner als ε. Dann folgt aufgrund der M-L-Formel
$$\int\limits_{\Gamma_1} g \ll M\varepsilon$$
und da aufgrund des ersten Teiles $\int\limits_{\Gamma_k} g = 0$ für $k = 2, \ldots, 6$ ist, erhalten wir, dass $\int\limits_\Gamma g \ll M\varepsilon$ gilt. Wir erhalten somit $\int\limits_\Gamma g = 0$.

(iii) $a \in \mathring{R}$: Unterteile das Rechteck (ähnlich wie oben) in neun Rechtecke. Acht Rechtecke davon liefern wiederum keinen Beitrag. Wie im letzten Fall lässt sich der Beitrag des Rechtecks mit a abschätzen, wenn der Umfang klein gewählt wird. □

Korollar 5.2. *Sei g wie oben. Dann gelten das Integraltheorem 4.18 und der Satz über geschlossene Kurven, Theorem 4.19, auch für g.*

Beweis. Verwende in den entsprechenden Beweisen das Rechteckstheorem II, Theorem 5.1, statt des ersten Rechteckstheorems 4.16. Der Rest des jeweiligen Beweises bleibt unverändert. □

Theorem 5.3 (Cauchysche Integralformel)**.** *Sei f eine ganze Funktion, $a \in \mathbb{C}$ und sei C die Kurve*
$$C : Re^{i\vartheta}, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad R > |a|.$$
Dann gilt
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Beweis. Nach Korollar 5.2 folgt
$$\int\limits_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz = 0.$$
Da der Integrand entland der Kurve nirgends singulär ist, dürfen wir das Integral wie folgt aufsplitten
$$f(a) \int\limits_C \frac{dz}{z-a} = \int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$
Das folgende Lemma liefert
$$\int\limits_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$
und damit folgt die Behauptung. □

Lemma 5.4. *Sei a im Kreis C_ρ enthalten, d. h. C_ρ hat Mittelpunkt $\alpha \in \mathbb{C}$, Radius ρ und es gilt $|a-\alpha| < \rho$. Dann gilt*

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die zentrierte Situation

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\vartheta}}{\rho e^{i\vartheta}}\, d\vartheta = 2\pi i,$$

wobei wir im Zähler des mittleren Integrals die Ableitung des Weges im Nenner haben. Weiterhin gilt für $1 \le k \in \mathbb{N}$ wie oben

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{(z-\alpha)^{k+1}} = \frac{1}{\rho^k} \int_0^{2\pi} ie^{-ik\vartheta}\, d\vartheta = 0.$$

Alternativ kann man benutzen, dass $\frac{1}{(z-\alpha)^{k+1}}$ die Stammfunktion $\frac{-1}{k(z-\alpha)^k}$ besitzt. Im allgemeinen Fall, d. h. wenn $a \neq \alpha$ ist, gilt

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-\alpha)-(a-\alpha)} = \frac{1}{(z-\alpha)\left[1-\frac{a-\alpha}{z-\alpha}\right]} = \frac{1}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\omega},$$

wobei $\omega = \frac{a-\alpha}{z-\alpha}$ ist. Auf C_ρ gilt $|\omega| = \frac{|a-\alpha|}{\rho} < 1$. Daher liefert die geometrische Reihe dass

$$\frac{1}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{z-\alpha}\left[1 + \frac{a-\alpha}{z-\alpha} + \frac{(a-\alpha)^2}{(z-\alpha)^2} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{z-\alpha} + \frac{a-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{(a-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3} + \ldots. \end{aligned}$$

Da die Konvergenz auf C_ρ gleichmäßig ist, erhalten wir aufgrund der obigen Rechnungen

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z-a}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{1}{z-\alpha}\, dz + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C_\rho} \frac{(a-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+1}}\, dz = 2\pi i. \qquad \square$$

Theorem 5.5 (Taylordarstellung ganzer Funktionen)**.** *Ist f eine ganze Funktion, so besitzt f eine Potenzreihendarstellung, $f^{(k)}(0)$ existiert für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und es gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. (Die Potenzreihe hat also den Konvergenzradius ∞.)

Beweis. Sei $a \neq 0$, $R = |a| + 1$. Sei C der Kreis um den Ursprung mit Radius R. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

für alle $z \ll a$. Wie oben gilt, da aus $z \ll a$ folgt, dass $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ ist,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w\left(1-\frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots .$$

Da die Konvergenz auf C gleichmäßig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(w) \left[\frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \dots\right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w}\,dw + \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w^2}\,dw\right) z + \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w^3}\,dw\right) z^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \end{aligned}$$

mit $C_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$. Die Koeffizienten könnten nun noch von a und R abhängen. Die angegebene Formel gilt jedoch für alle $z \ll a$. Da die Potenzreihe für $z \ll a$ mit f übereinstimmt hat sie einen positiven Konvergenzradius, mindestens $|a|$. Nach Korollar 2.10 ist f daher für $|z| < |a|$ beliebig oft differenzierbar und nach Korollar 2.11 gilt $C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ für alle k. Somit hängt C_k nicht von a ab. Dasselbe Argument liefert also die gleiche Potenzreihe für alle a und mit $|a| \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Korollar 5.6. *Eine ganze Funktion ist beliebig oft differenzierbar.*

Wir bemerken, dass man nicht von unendlich oft differenzierbaren Funktionen sprechen sollte, da keine ∞-te Ableitung existiert.

Beweis. Eine ganze Funktion besitzt eine überall konvergente Potenzreihendarstellung. Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzradiusses (eigentlich: im Inneren eines Balles mit dem Konvergenzradius als Radius) beliebig oft differenzierbar. □

Korollar 5.7. *Sei f eine ganze Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Da $g(\zeta) := f(\zeta + a)$ eine ganze Funktion ist, folgt

$$g(\zeta) = g(0) + g'(0)\zeta + \frac{g''(0)}{2!}\zeta^2 + \dots$$

und daher

$$f(\zeta + a) = f(a) + f'(a)\zeta + \frac{f''(a)}{2!}\zeta^2 + \dots .$$

Wir setzen nun $\zeta = z - a$ und erhalten die Behauptung. □

Proposition 5.8. *Sei g wie in der Einleitung des Kapitels definiert. Dann ist g eine ganze Funktion.*

Beweis. Nach Korollar 5.7 gilt

$$g(z) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a) + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(z - a)^2 + \dots$$

für $z \neq a$ und für $z = a$. Diese Reihe konvergiert überall da die Koeffizienten betragsmäßig kleiner als die entsprechenden Koeffizienten von f' sind. Daher ist g eine ganze Funktion. □

Korollar 5.9. *Sei f eine ganze Funktion mit paarweise verschiedenen Nullstellen in $a_1, a_2, \dots, a_N$. Wir definieren g durch*

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2) \cdot \dots \cdot (z - a_N)}$$

für $z \neq a_k$. Dann existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{z \to a_k} g(z)$ für $k = 1, 2, \dots, N$. Definieren wir $g(a_k)$ als diesen Grenzwert, so ist g eine ganze Funktion.

Beweis. Wir gehen per Induktion vor. Setzt $f_0(z) := f(z)$ und definiere

$$f_k(z) = \frac{f_{k-1}(z) - f_{k-1}(a_k)}{z - a_k} = \frac{f_{k-1}(z)}{z - a_k}$$

für $z \neq a_k$. Ist f_{k-1} eine ganze Funktion, so folgt nach Proposition 5.8, dass $f_k(z)$ für $z \to a_k$ einen Grenzwert besitzt, der $f'_{k-1}(a_k)$ ist und f_k lässt sich als ganze Funktion nach a_k fortsetzen. Mit Induktion folgt daher die Behauptung. □

5.2. **Sätze von Liouville und der Fundamentalsatz der Algebra.**

Theorem 5.10 (Satz von Liouville)**.**
Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis. Sei f ganz. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und C ein Kreis mit Radius $R > \max(|a|, |b|)$ und Mittelpunkt 0; er enthält also a und b. Aufgrund der Cauchyschen Integralformel erhalten wir daher

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z - b}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z - a}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)(b - a)}{(z - a)(z - b)}\,dz \\ &\ll \sup|f| \cdot \frac{|b - a| \cdot R}{(R - |a|)(R - |b|)}. \end{aligned}$$

Wir lassen nun $R \to \infty$ und erhalten $f(a) = f(b)$. Somit ist f konstant. □

Theorem 5.11 (Erweiterter Satz von Liouville)**.** *Sei f eine ganze Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $A, B > 0$. Gilt*

$$|f(z)| \le A + B|z|^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f ein Polynom, dessen Grad höchstens k beträgt.

Beweis. Für $k = 0$ ist dies gerade der Satz von Liouville.
Sei daher $k > 0$. Definiere

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

g ist eine ganze Funktion und erfüllt nach Voraussetzung an f die folgende Wachstumsbedingung:

$$|g(z)| \le C + D|z|^{k-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und für geeignete Konstanten $C, D > 0$. Nach Induktionsannahme ist daher g ein Polynom vom Grade $\le k-1$. Somit ist f ein Polynom vom Grade $\le k$. □

(Dies funktioniert auch für ein beliebiges $k \ge 0$ mit einem analogen Resultat.)

Lemma 5.12 (Wachstumslemma für Polynome)**.** *Sei $0 < n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ und sei*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom. Dann gibt es $R > 0$, so dass

$$\frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n \le |f(z)| \le 2|a_n| \cdot |z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \ge R$ gilt.

Beweis. Es gilt $|z|^k \le |z|^n$ für $k \le n$ und $|z| \ge 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le |a_n| \cdot |z|^n + |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \ldots + |a_0| \\ &\le |a_n| \cdot |z|^n + (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)\, |z|^{n-1} \\ &\le |a_n| \cdot |z|^n + \frac{|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|}{|z|} |z|^n \\ &\le 2|a_n| \cdot |z|^n \end{aligned}$$

für $|z| \cdot |a_n| \ge |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$.
Andererseits folgt ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} |f(z)| \ge \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n + \underbrace{\left(\frac{1}{2}|a_n| \cdot |z| - (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)\right)}_{\ge 0 \text{ für } |z| \ge R} |z|^{n-1} \\ \ge \frac{1}{2}|a_n| \cdot |z|^n, \end{aligned}$$

falls R groß genug ist. □

Theorem 5.13 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Sei $P(x)$ ein beliebiges Polynom. Besitzt $P(z)$ keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d. h. gilt $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ eine ganze Funktion. $f(z)$ ist beschränkt (weil $P(z)$ konstant ist oder $|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ gilt). Nach dem Satz von Liouville ist daher f konstant. Somit ist auch P konstant. □

Korollar 5.14. *In $\mathbb{C}[X]$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren.*

Beweis. Induktion. □

6. Eigenschaften analytischer Funktionen

6.1. **Potenzreihendarstellung für analytische Funktionen in Kreisscheiben.**

Theorem 6.1. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch. Wenn das abgeschlossene Rechteck R und der Punkt a beide in $B_r(\alpha)$ enthalten sind und Γ der Rand von R ist, so gelten*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

(Ist $a \notin B_r(\alpha)$, so gilt das Theorem auch, wenn man statt $f(a)$ eine beliebige Zahl einsetzt.)

Beweis. Wie beim Rechteckstheorem, Theorem 4.16 und Theorem 5.1, da f in $R \subset B_r(\alpha)$ analytisch ist. □

Theorem 6.2. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch und $a \in B_r(\alpha)$. Dann gibt es in $B_r(\alpha)$ analytische Funktionen F und G, so dass*

$$F'(z) = f(z), \quad G'(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a},$$

wobei wir hier und später bei dieser Schreibweise $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ im Punkte $z = a$ als $f'(z)$, also als den Grenzwert in diesem Punkt, definieren.

Beweis. Definiere

$$F(z) := \int_\alpha^z f(\zeta)\,d\zeta$$

und

$$G(z) := \int_\alpha^z \frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}\,d\zeta,$$

wobei wir entlang horizontaler und vertikaler Strecken in $B_r(\alpha)$ integrieren. (Aufgrund des Rechteckstheorems, Theorem 4.16 und Theorem 5.1, ist dies wohldefiniert.) Wie beim Beweis des Integraltheorems, Theorem 4.18, mit Hilfe des Rechteckstheorems, Theorem 4.16, folgt

$$F'(z) = f(z) \quad \text{und} \quad G'(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}. \qquad \square$$

Theorem 6.3. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch, $a \in B_r(\alpha)$ und sei C eine in $B_r(\alpha)$ enthaltene geschlossene Kurve. Dann gelten*

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0 \quad \text{und} \quad \int\limits_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

Beweis. Nach Theorem 6.2 existiert eine in $B_r(\alpha)$ analytische Funktion G mit

$$G'(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$

Daher gilt mit den üblichen Bezeichnungen für einen Weg

$$\int\limits_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = \int\limits_C G'(z)\,dz = G(z(b)) - G(z(a)) = 0.$$

Analog sieht man, dass $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$ gilt. □

Theorem 6.4 (Cauchyscher Integralformel)**.** *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch, $0 < \rho < r$, $|a-\alpha| < \rho$. Dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

wobei $C_\rho : \alpha + \rho e^{i\vartheta}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$.

Beweis. Benutze Theorem 6.3 und argumentiere wie in Lemma 5.4. □

Wir untersuchen die Darstellbarkeit analytischer Funktionen in Kreisscheiben als Potenzreihen.

Theorem 6.5. *Sei f in $B_r(\alpha)$ analytisch. Dann gibt es Konstanten C_k, so dass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-\alpha)^k$$

für alle $z \in B_r(\alpha)$ gilt.

Beweis. Der Beweis funktioniert ganz analog zu dem in Theorem 5.5. Lasse jedoch $R \nearrow r$ statt $R \to \infty$. (Außerhalb von $B_r(\alpha)$ muß f nicht analytisch sein und es ist auch überhaupt nicht klar, ob die Reihe dort konvergiert.) Wiederum gilt $C_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$. □

6.2. **Analytische Funktionen in beliebigen Gebieten.**

Theorem 6.6. *Sei f in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ analytisch. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in D$ Konstanten C_k, so dass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-\alpha)^k$$

für alle z in der größten Kugel $B_r(\alpha)$ mit $B_r(\alpha) \subset D$ konvergiert.

Beweis. Dies ist eine Umformulierung von Theorem 6.5. □

(Konvergenz auf größeren Mengen kann man im allgemeinen nicht erwarten, da Potenzreihen stets auf Kreisscheiben (und unterschiedlichen Teilen des Randes) konvergieren. Im Beweis entspricht dies bei einem Quadrat der Tatsache, dass es keinen Kreis innerhalb des Quadrates gibt, der den Mittelpunkt des Quadrates und einen Punkt sehr nahe an einer Ecke umschließt.)

6.3. **Eindeutigkeit, Mittelwertsatz und Maximumprinzip.**

Proposition 6.7. *Ist f in α analytisch, so auch*

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}, & z \neq \alpha, \\ f'(\alpha), & z = \alpha. \end{cases}$$

Beweis. Analog zur globalen Version in Proposition 5.8. □

Theorem 6.8. *Ist f in z analytisch, so ist f in z beliebig oft differenzierbar.*

Beweis. f ist lokal analytisch. Stelle f als Potenzreihe dar. Potenzreihen sind lokal beliebig oft differenzierbar. □

Theorem 6.9 (Eindeutigkeitssatz). *Sei f in einem Gebiet D analytisch und gelte $f(z_n) = 0$ für eine Folge $D \ni z_n \to z \in D$, $z_n \neq z$. Dann gilt $f \equiv 0$ in D.*

Beweis. Nahe z besitzt f eine Darstellung als Potenzreihe. Der Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen liefert, dass $f = 0$ nahe z gilt. Definiere

$$\begin{aligned} A :=& \{z \in D : z \text{ ist ein Grenzwert von Punkten } \neq z, \text{ in } D, \\ & \text{für die } f \text{ verschwindet}\}, \\ B :=& \{z \in D : z \notin A\}. \end{aligned}$$

Es gilt $A \cap B = \emptyset$.
A ist offen: Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen folgt wie oben, dass $f \equiv 0$ nahe z ist, falls $z \in A$ gilt.
B ist offen: Sei $z \in B$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(\tilde{z}) \neq 0$ für $0 < |z - \tilde{z}| < \delta$ gilt. Somit ist $B_{\delta/2}(z) \subset B$ und die Offenheit von B folgt.
Da D zusammenhängend ist, folgt, dass $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ gilt. Da aber $z \in A$ ist, folgt $B = \emptyset$ und $A = D$. Aufgrund der Stetigkeit ist nun $f \equiv 0$ in D. □

Korollar 6.10. *Seien f und g in einem Gebiet D analytisch. Stimmen f und g auf einer Menge mit einem Häufungspunkt in D überein, so gilt $f = g$ in D.*

Beweis. Betrachte $f - g$. □

(Wir bemerken, dass dies nicht zu gelten braucht, wenn der Häufungspunkt auf ∂D liegt, wie das Beispiel $\sin \frac{1}{z}$ und $z_n = \frac{1}{n\pi}$ zeigt.)

Theorem 6.11. *Sei f eine ganze Funktion. Gilt $f(z) \to \infty$ für $z \to \infty$, so ist f ein Polynom.*
(Die Konvergenz „$\to \infty$“ ist betragsmäßig zu verstehen.)

Beweis. Wähle $M > 0$, so dass $|z| > M$ impliziert, dass $|f(z)| > 1$ gilt. f besitzt höchstens endlich viele Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, da sonst die Nullstellen einen Häufungspunkt hätten und $f \equiv 0$ gelten würde. Wir dividieren die Nullstellen heraus

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N)}.$$

Bei Nullstellen mit höherer Vielfachheit ist dies gegebenenfalls (entsprechend der Vielfachheit) zu wiederholen. Die Vielfachheit ist aber stets endlich, da sonst die Potenzreihenentwicklung um den entsprechenden Punkt die Nullfunktion ergeben würde.

Nach Proposition 5.8 ist g eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Definiere

$$h(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_N)}{f(z)}.$$

h ist eine analytische Funktion. Da $f \to \infty$ für $z \to \infty$ geht ($|f| \geq 1$ würde auch genügen), folgt $|h(z)| \leq A + B|z|^N$. Nach dem erweiterte Satz von Liouville, Theorem 5.11, ist h daher ein Polynom. Nach Konstruktion ist g nullstellenfrei. h hat auch keine Nullstellen. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra gilt daher $h(z) = k \in \mathbb{C}$ und wir erhalten

$$f = \frac{1}{k}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N). \qquad \square$$

(Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass für nichtkonstante Polynome $f(z) \to \infty$ für $z \to \infty$ gilt, da der Term mit dem größten Exponenten für große z dominiert.)

Theorem 6.12 (Mittelwertsatz)**.** *Sei f in einem Gebiet D analytisch, $\alpha \in D$. Sei $\overline{B_r(\alpha)} \subset D$. Dann gilt*

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\alpha + re^{i\vartheta}\right)\, d\vartheta.$$

Beweis. (Dies ist eine Umformulierung der Cauchyschen Integralformel.) Auf den Mittelpunkt angewandt liefert die Cauchysche Integralformel

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz.$$

Wir verwenden die Parametrisierung $z = \alpha + re^{i\vartheta}$, so dass $z_\vartheta = ire^{i\vartheta}$ und $z - \alpha = re^{i\vartheta}$ gelten. Wir erhalten

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} f\left(\alpha + re^{i\vartheta}\right) \frac{ire^{i\vartheta}}{re^{i\vartheta}}\, d\vartheta,$$

was direkt die Behauptung liefert. $\square$

Analog zur reellen Situation sagen wir, dass f ein relatives Maximum in z hat, falls $|f(z)| \geq |f(w)|$ für alle w in einer Umgebung von z gilt. Analog definieren wir ein relatives Minimum.

Theorem 6.13 (Maximumprinzip)**.** *(Maximum-Modulus Theorem) Eine nicht-konstante analytische Funktion f in einem Gebiet D besitzt kein inneres Maximum: Für jedes $z \in D$ und $\delta > 0$, so dass $\overline{B_\delta(z)} \subset D$ gilt, gibt es $w \in \overline{B_\delta(z)}$, so dass $|f(w)| > |f(z)|$ ist.*
(Statt $\overline{B_\delta(z)} \subset D$ zu fordern kann man auch δ für den Beweis entsprechend verkleinern.)

Beweis. Der Mittelwertsatz liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + \delta e^{i\vartheta}\right) \, d\vartheta.$$

Daraus folgt

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z + \delta e^{i\vartheta}\right)\right| \, d\vartheta \le \max_\vartheta \left|f\left(z + \delta e^{e\vartheta}\right)\right|.$$

Daher existiert ein $w \neq z$ nahe z mit $|f(z)| \le |f(w)|$. Wir erhalten nur dann keine strikte Ungleichung, wenn überall Gleichheit gilt (und dies für alle kleinen Radien). Betrachten nur den Fall, in dem Gleichheit gilt. Dann ist $|f|$ in $B_r(z)$ für ein $0 < r < \delta$ konstant und nach Proposition 3.8 ist f in $B_r(z)$ konstant. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist daher f in D konstant. Widerspruch. □

Bemerkung 6.14. Sei D ein beschränktes Gebiet. Wir nennen eine in D analytische und auf $\overline{D}$ stetig fortsetzbare (und ohne Einschränkung fortgesetzte) Funktion in D C-analytisch (C für "continuous").
Aufgrund des Maximum-Modulus Theorems nimmt eine solche Funktion ihr betragsmäßiges Maximum auf ∂D an.

Theorem 6.15 (Minimum-Modulus-Theorem)**.** *Sei f eine in einem beschränkten Gebiet D nicht-konstante analytische Funktion. Dann ist kein Punkt $z \in D$ ein relatives Minimum außer es gilt $f(z) = 0$.*

Beweis. Wenn f keine Nullstelle in z besitzt, so erfüllt $w \mapsto \frac{1}{f(w)}$ für w nahe z die Bedingungen für das Maximum-Modulus-Theorem. □

Bemerkung 6.16. Alternativ kann man das Maximum-Modulus-Theorem beweisen, indem man den ersten nicht-konstanten Term (kleinster Exponent) in der Taylorentwicklung betrachtet, der in der Nähe von z gegenüber dem Rest dominiert.

Definition 6.17. Sei $0 \neq a \in \mathbb{C}$. Sei $a = re^{i\varphi}$, $r > 0$ und (üblicherweise) $0 \le \varphi < 2\pi$. Dann heißt φ das Argument von a.

7. Weitere Eigenschaften analytischer Funktionen

7.1. Satz von der offenen Abbildung und Schwarzsches Lemma.

Theorem 7.1 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Das Bild einer offenen zusammenhängenden Menge unter einer nichtkonstanten analytischen Abbildung ist eine offene Menge.*

Beweis. (nach Carathéodory) Wir wollen zeigen, dass das Bild einer (kleinen) Kreisscheibe um α eine Kreisscheibe um $f(\alpha)$ enthält. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $f(\alpha) = 0$ gilt. Der Eindutigkeitssatz für Potenzreihen liefert, dass es einen Kreis C um α mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in C$ gibt. (Sonst gibt es eine nichttriviale Folge $\to \alpha$, für die f verschwindet. Daraus würde dann lokal $f \equiv 0$ folgen.)
Sei $2\varepsilon = \min\limits_{z\in C} |f(z)|$.
Wir behaupten, dass $B_\varepsilon(0)$ im Bild der Kreisscheibe mit Rand C unter f enthalten ist: Sei $w \in B_\varepsilon(0)$. Betrachte $f(z) - w$. Für $z \in C$ gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z)| - |w| \geq \varepsilon, \\ |f(\alpha) - w| &= |-w| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher nimmt $|f(z) - w|$ ein lokales Minimum innerhalb von C an. Aufgrund des Minimum-Modulus-Theorems gibt es daher ein z innerhalb von C mit $f(z) - w = 0$. Der Wert w wird also angenommen. □

Theorem 7.2 (Schwarzsches Lemma)**.** *Sei f in der Einheitskreisscheibe analytisch und gelte dort $f \ll 1$. Sei $f(0) = 0$. Dann gilt*

(i) $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B_1(0)$ und
(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Gleichheit gilt in (i) *für ein $z \neq 0$ oder in* (ii) *genau dann, wenn*

$$f(z) = e^{i\vartheta} z \text{ für ein } \vartheta \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

Beweis. Betrachte die in $B_1(0)$ analytische Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & 0 < |z| < 1, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Auf $\partial B_r(0)$ gilt $g \ll \frac{1}{r}$. Aufgrund des Maximum-Modulus-Theorems ist daher $g \ll \frac{1}{r}$ in $B_r(0)$. Mit $r \nearrow 1$ erhalten wir $|g(z)| \leq 1$ in $B_1(0)$. Nach Definition von g folgt daher (i) und da $f(0) = 0$ ist, erhalten wir auch (ii).
Gelte Gleichheit in (i) oder (ii). Dann folgt $|g(z_0)| = 1$ für ein $|z_0| < 1$. Aufgrund des Maximum-Modulus-Theorems ist dann g eine Konstante vom Betrag 1. Somit gilt $f(z) = e^{i\vartheta} z$. □

7.2. **Die Umkehrung von Cauchys Theorem; Moreras Theorem; Schwarzsches Spiegelungsprinzip.**

Theorem 7.3 (Morera)**.** *Sei f in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ stetig. Gilt*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$$

für alle Ränder abgeschlossener Rechtecke $R \subset D$, so ist f in D analytisch.
(Die Stetigkeit ist nötig, da das Abändern in einem Punkt das Integral nicht ändert. Wir benötigen die Voraussetzung im Beweis nur für achsenparallele Rechtecke.)

Beweis. Sei $z_0 \in D$. In einer kleinen Umgebung von z_0 definieren wir eine Stammfunktion

$$F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei wir zunächst horizontal und dann vertikal von z_0 nach z integrieren. Für den Differenzenquotienten erhalten wir wie beim Integraltheorem, Theorem 4.18, da $\int\limits_\Gamma f = 0$ für Kurven Γ um die entsprechenden Rechtecke herum gilt,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta \to f(z)$$

für $h \to 0$, da f stetig ist. Somit ist F nahe z_0 analytisch. Auch $F' = f$ ist nahe z_0 analytisch. Somit ist f in D analytisch. □

Definition 7.4. Seien f_n und f in D definiert. f_n konvergiert lokal gleichmäßig gegen f, falls f_n auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir schreiben $f_n \rightrightarrows f$ in K.

(Beachte, dass im Reellen der gleichmäßige Limes differenzierbarer Funktionen nicht wieder differenzierbar zu sein braucht. Der gleichmäßige Limes harmonischer Funktionen ist wieder harmonisch und differenzierbar.)

Theorem 7.5. *Sei f_n eine in D definierte Folge analytischer Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f in D analytisch.*

Beweis. Sei $K \subset D$ kompakt, $f_n \rightrightarrows f$ in K. Dann ist f in K stetig. Für jedes Rechteck in K gilt aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz und da jedes f_n analytisch ist

$$\int\limits_\Gamma f = \int\limits_\Gamma \lim_n f_n = \lim_n \int\limits_\Gamma f_n = 0.$$

Der Satz von Morera liefert nun, dass f in D analytisch ist. □

Theorem 7.6. *Sei f in einer offenen Menge D stetig und für eine Gerade L sei f in $D \setminus L$ analytisch. Dann ist f in D analytisch.*

Beweis. Betrachte ohne Einschränkung $L = \mathbb{R}$ (sonst $g(z) := f(Az + B)$) und $D = B_1(0)$ eine Kreisscheibe.

Wir behaupten, dass $\int\limits_\Gamma f = 0$ für jedes achsenparallele Rechteck Γ in D gilt.

(i) Ist $\Gamma \cap \mathbb{R} = \emptyset$, so folgt wie im Beweis des Rechteckstheorems, Theorem 4.16, die Behauptung $\int\limits_\Gamma f = 0$, da f analytisch ist.

(ii) Eine Seite von Γ liegt auf L: Approximiere Γ durch Rechtecke Γ_ε, die auf einer Seite von L liegen. Es folgt nach (i)

$$\int\limits_\Gamma f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f = 0,$$

da f stetig ist.

(iii) Liegen auf beiden Seiten von L Teile des Rechteckes, so unterteilen wir Γ in zwei Rechtecke wie in (ii) und erhalten aufgrund der Resultate aus (ii)

$$\int\limits_{\Gamma} f = \int\limits_{\Gamma_1} f + \int\limits_{\Gamma_2} f = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist f daher in D analytisch. □

Theorem 7.7 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)**.** *Sei f in einem Gebiet D C-analytisch (d. h. zusätzlich bis zum Rand stetig). Sei D in der oberen (oder unteren) Halbebene enthalten und enthalte ein Geradenstück L auf der reellen Achse im Rand (nur für dieses Randstück ist die stetige Fortsetzbarkeit wichtig). Sei f für reelle z reell. Sei $D^* := \{z : \bar{z} \in D\}$. Dann ist die Fortsetzung g, definiert durch*

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D \cup L, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*, \end{cases}$$

in $D \cup L \cup D^*$ analytisch.

Beweis. In D ist $g = f$ analytisch. Für $z, z + h \in D^*$ gilt

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f\left(\bar{z} + \bar{h}\right) - f(\bar{z})}}{h} = \overline{\left[\frac{f\left(\bar{z} + \bar{h}\right) - f(\bar{z})}{\bar{h}}\right]} \to \overline{f'(\bar{z})}$$

für h bzw. $\bar{h} \to 0$. Daher ist g in D^* analytisch. Da f auf L reell ist, ist g in $D \cup L \cup D^*$ stetig. Nach Theorem 7.6 ist g daher in $D \cup L \cup D^*$ analytisch. □

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes erhalten wir daraus

Korollar 7.8. *Sei f in einem bezüglich der reellen Achse spiegelsymmetrischen Gebiet analytisch und für reelle z reellwertig. Dann gilt $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.*

8. Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz

8.1. **Einfach zusammenhängende Gebiete.**

Definition 8.1. Sei X ein topologischer Raum. (Hier genügt es, offene Teilmengen $X \subset \mathbb{C}$ zu betrachten.)

(i) Eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$ heißt geschlossene Kurve.
(ii) Zwei geschlossene Kurven γ_0, $\gamma_1 : \mathbb{S}^1 \to X$, heißen homotop, falls es eine stetige Abbildung $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$ mit $H(\cdot, 0) = \gamma_0$ und $H(\cdot, 1) = \gamma_1$ gibt.
(iii) Eine geschlossene Kurve γ heißt konstant, falls $\gamma(x) = \gamma(y)$ für alle x, $y \in \mathbb{S}^1$ gilt.
(iv) Eine geschlossene Kurve heißt nullhomotop (oder zusammenziehbar oder kontrahierbar), falls sie homotop zu einer konstanten Kurve ist.
(v) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. D heißt einfach zusammenhängend, falls alle geschlossenen Kurven $\gamma : \mathbb{S}^1 \to D$ nullhomotop sind. (Bemerkung: Diese Definition gilt auch für beliebige topologische Räume.)
(vi) Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ stetige Kurven mit gleichen Anfangs- und Endpunkten: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann heißen γ_0 und γ_1 homotop, falls es eine stetige Abbildung (Homotopie) $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H(\cdot, 0) = \gamma_0$ und $H(\cdot, 1) = \gamma_1$ gibt, so dass $H(0,t) = \gamma_0(0)$ und $H(1,t) = \gamma_0(1)$ für alle $t \in [0,1]$ gelten.

Beispiele 8.2.

(i) Eine konvexe Menge ist einfach zusammenhängend.
(ii) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist zusammenhängend aber nicht einfach zusammenhängend. Dies folgt aus Bemerkung 8.5 und Theorem 8.8.

8.2. **Kurvenintegrale für C^0-Kurven.**

Definition 8.3 (Kurvenintegrale für C^0-Wege)**.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Weg. Sei f in D analytisch. Wir definieren

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz,$$

wobei $\gamma_n : [0,1] \to D$, $n \in \mathbb{N}$, eine Familie von stückweise C^1-Wegen mit $\|\gamma - \gamma_n\|_{C^0([0,1],\mathbb{C})} \to 0$ für $n \to \infty$ ist.

Lemma 8.4. *Das Kurvenintegral für C^0-Wege ist wohldefiniert.*
Ist $D = B_r(a)$, $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, so verschwindet das Kurvenintegral über geschlossene Wege.

Damit stimmt es insbesondere für stückweise C^1-Wege mit dem bisherigen Kurvenintegral überein.

Beweis. Betrachte zunächst den Fall $D = B_r(a)$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$: Sei F in D eine Stammfunktion zu f, siehe Theorem 6.2. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma_n} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} F(\gamma_n(1)) - F(\gamma_n(0)) = F(\gamma(0)) - F(\gamma(1)).$$

In diesem Falle folgt die Behauptung. Hier kommt es also sogar nur darauf an, dass die Endpunkte konnvergieren.
Sei nun D beliebig. Überdecke $\operatorname{im}\gamma$ durch endlich viele Kugeln $B_i \subset D$. Dann gibt es t_i mit $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m = 1$ und $\operatorname{im}\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \subset B_i$. Dies gilt auch für γ_n, falls n groß genug ist. Da das Kurvenintegral auf jedem Intervall wohldefiniert ist, ist es auch insgesamt wohldefiniert. Es hängt auch nicht von der Auswahl der Kugeln $B_i \subset D$ ab. □

8.3. **Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz.**

Bemerkung 8.5. Motivation: Sei f in einer Kreisscheibe analytisch. Dann gilt $\int\limits_{\Gamma} f = 0$ für jede geschlossene Kurve Γ in D, aber $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$.
Ziel: Finde allgemeine Gebiete, für die das Integral über geschlossene Kurven von analytischen Funktionen verschwindet.

Theorem 8.6. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei f in D analytisch. Seien γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \to D$ stetige homotope Wege. Dann gilt*

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Beweis. Sei H eine Homotopie die zeigt, dass die beiden Wege homotop sind. Da $\operatorname{im} H$ kompakt ist, wird es von endlich vielen Bällen $B_m \subset D$ überdeckt. Aufgrund der Kompaktheit und der gleichmäßigen Stetigkeit finden wir $n \gg 1$, so dass $\operatorname{im} H|_{\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]}$ für alle $1 \le i, j \le n$ in einem solchen Ball B_m enthalten ist. Nach Lemma 8.4 verschwindet das Kurvenintegral über die Kurve $H\left(\partial\left(\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]\right)\right)$. Aufsummieren liefert die Behauptung. $\square$

Lemma 8.7. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to D$ eine Homotopie geschlossener Kurven. Sei $p \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Homotopie $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to D$, so dass für jedes $t \in [0,1]$ der Weg $\tau \mapsto \tilde{H}(\tau, t)$ bis auf Umparametrisierung gerade aus den folgenden Wegen zusammengesetzt ist:*

(i) Aus einem Weg $[0,t] \ni \tau \mapsto H(p,\tau)$,
(ii) einem Weg $[0,2\pi] \ni \vartheta \mapsto H\left(pe^{i\vartheta}, t\right)$
(iii) und einem Weg $[0,t] \ni \tau \mapsto H(p, t-\tau)$.

Beweis. Definiere
$$\tilde{H}(\tau,t) := \begin{cases} H(p,4\tau), & 0 \le \tau \le \frac14 t,\\ H\left(p\cdot\exp\left(\frac{2\pi i\left(\tau-\frac14 t\right)}{1-\frac12 t}\right), t\right), & \frac14 t \le \tau \le 1-\frac14 t,\\ H(p,1-4\tau), & 1-\frac14 t \le \tau \le 1.\end{cases}$$
$\square$

Theorem 8.8 (Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D analytisch und sei C eine geschlossene Kurve in D. Dann gilt*
$$\int\limits_C f = 0.$$

Beweis. Sei H eine Homotopie, die zeigt, dass C nullhomotop ist. Nach Lemma 8.7 gibt es eine zugehörige Homotopie mit festen Anfangs- und Endpunkten. Beim Berechnen der entsprechenden Kurvenintegrale ist nur der mittlere Teil der Kurven in diesem Lemma relevant, da die Anfangs- und Endstücke jeweils einmal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. Theorem 8.6 liefert nun die Behauptung, da die Homotopie eine Homotopie zu einem konstanten Weg mit Kurvenintegral Null ist. $\square$

Theorem 8.9. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Sei f in D analytisch. Dann gibt es eine analytische Stammfunktion F, d. h. es gilt $F' = f$ in D.*

Beweis. Wähle $z_0 \in D$ und definiere $F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, wobei wir über eine beliebige Kurve von z_0 nach z integrieren. Nach Theorem 8.8 ist F wohldefiniert. Wie im Beweis des Integraltheorems, Theorem 4.18, folgt, dass $F' = f$ in D gilt. $\square$

Bemerkung 8.10.

(i) Es genügt, wenn man D auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet verkleinern kann, das C enthält: Für $C : \alpha + re^{i\vartheta}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ und $|a-\alpha| > r$

gilt
$$\int\limits_C \frac{dz}{z-a} = 0.$$

(ii) Sei f in $\{1 \leq |z| \leq 4\}$ analytisch. Dann ist
$$\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = \int\limits_{|z|=3} f(z)\,dz.$$
Dies sieht man, indem man den Annulus zwischen den beiden Kreisen an der x-Achse zerteilt und benutzt, dass das Integral über den Rand für jedes dieser Teilgebiete verschwindet.

8.4. **Der komplexe Logarithmus.**

Definition 8.11. f heißt analytischer Zweig von $\log z$ in einem Gebiet D, falls

(i) f in D analytisch ist,
(ii) f in D zur Exponentialfunktion invers ist, d. h. falls $\exp(f(z)) = z$ für alle $z \in D$ gilt.

Bemerkung 8.12.

(i) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist mit $f(z)$ auch $g(z) := f(z) + 2\pi ik$ ein analytischer Zweig von $\log z$.
(ii) Wegen $e^\omega \neq 0$ für $w \in \mathbb{C}$ ist $\log 0$ nicht definiert. Ist $z = Re^{i\vartheta}$, $R > 0$, $f(z) =$ „$\log z$“ $= u(z) + iv(z)$, so folgt $\exp(f(z)) = e^{u(z)} \cdot e^{iv(z)} = Re^{i\vartheta}$. Daher ist $e^{u(z)} = |z| = R$ und $v(z) = \arg(z) = \vartheta + 2\pi k$, wobei wir mit arg das Argument von z bezeichnen.

Also ist $f(z) = \log|z| + i\arg(z)$ stets eine Lösung zu (ii) in Definition 8.11. Die Definition von arg unterscheidet sich teilweise um ganzzahlige Vielfache von 2π.

Stetigkeit und Analytizität sind nicht klar.

Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion einer analytischen Funktion liefert $f'(z) = \frac{1}{z}$, falls f existiert. (Dies ist die Motivation für das nachfolgende Theorem.)

Theorem 8.13. *Sei D einfach zusammenhängend und $0 \notin D$. Sei $z_0 \in D$. Wähle einen Wert von $\log z_0$ (der* (ii) *in Definition 8.11 erfüllt) und definiere*
$$f(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \log z_0.$$
Dann ist f ein analytischer Zweig von $\log z$ in D.

Beweis. f ist wohldefiniert, da $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ in D analytisch ist und somit nach Theorem 8.8 $\int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$ für eine geschlossene Kurve Γ in D gilt.

Es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$. Somit ist f in D analytisch.
Wir behaupten, dass $\exp(f(z)) = z$ gilt:
Betrachte $g(z) := z \cdot e^{-f(z)}$. Wegen $g'(z) = e^{-f(z)} - zf'(z)e^{-f(z)} = 0$ ist g konstant.
Aus $g(z) = g(z_0) = z_0 e^{-f(z_0)} = 1$ folgt daher $e^{f(z)} = z$. □

9. Isolierte Singularitäten analytischer Funktionen

9.1. **Klassifikation isolierter Singularitäten, Riemanns Prinzip und das Theorem von Casorati-Weierstraß.**

Notation 9.1. Eine punktierte Kreisscheibe von z_0 ist durch $\{z : 0 < |z - z_0| < d\}$ definiert. Eine punktierte Umgebung von z_0 ist eine Menge der Form $U \setminus \{z_0\}$, falls U eine Umgebung von z_0 ist.

Definition 9.2. f besitzt in z_0 eine isolierte Singularität, falls f in einer punktierten Umgebung von z_0 analytisch ist, aber nicht in z_0.

Bemerkung 9.3. Nach Theorem 7.6 ist f in z_0 unstetig: Es kann sein, dass f in z_0 gar nicht definiert ist. Ist f in z_0 definiert und stetig, so ist es außerhalb einer Geraden analytisch und sonst stetig, damit aber nach Theorem 7.6 auch in z_0 analytisch.

Beispiele 9.4.

(i)
$$f(z) = \begin{cases} \sin z, & z \neq 2, \\ 0, & z = 2, \end{cases}$$
besitzt in $z = 2$ eine isolierte Singularität.

(ii) $g(z) = \frac{1}{z-3}$ besitzt eine isolierte Singularität im Punkt $z = 3$.

(iii) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ besitzt in $z = 0$ eine isolierte Singularität.

Definition 9.5. Habe f in z_0 eine isolierte Singularität.

(i) Gibt es eine Funktion g, so dass $f(z) = g(z)$ für alle z in einer punktierten Umgebung von z_0 gilt und ist g in z_0 analytisch, so besitzt f eine hebbare Singularität in z_0.

(ii) Falls sich für $z \neq z_0$ (nahe z_0) f in der Form $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ darstellen lässt, wobei $A(z)$ und $B(z)$ in z_0 analytisch sind, $A(z_0) \neq 0$, $B(z_0) = 0$, so besitzt f einen Pol in z_0. Hat B in z_0 eine Nullstelle der Ordnung k, so hat f in z_0 einen Pol der Ordnung k.

(iii) Ist die Singularität von f in z_0 weder hebbar noch ein Pol, so besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität.

Theorem 9.6 (Riemanns Prinzip hebbarer Singularitäten)**.** *Besitzt f in z_0 eine isolierte Singularität und gilt*
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$
so ist die Singularität hebbar.

Beweis. Betrachte
$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z), & z \neq z, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$
h ist in z_0 stetig und in einer punktierten Umgebung von z_0 analytisch. Nach Theorem 7.6 ist h in z_0 analytisch. Da $h(z_0) = 0$ ist, ist auch $g(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$ in z_0 analytisch mit $g(z) = f(z)$ für $z \neq z_0$. □

Theorem 9.7 (Casorati-Weierstraß)**.** *Besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität und ist D eine punktierte Umgebung von z_0, so ist das Bild $\{f(z) : z \in D\}$ in $\mathbb{C}$ dicht.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es $B_\delta(w) \subset \mathbb{C}$, so dass $B_\delta(w) \cap \{f(z) : z \in D\} = \emptyset$. Daher gilt stets $|f(z) - w| \geq \delta$ und folglich

$$\left|\frac{1}{f(z) - w}\right| \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{in } D.$$

Nach Riemanns Prinzip hat daher $\frac{1}{f(z)-w}$ in z_0 höchstens eine hebbare Singularität. Die (geeignet nach z_0 fortgesetzte) Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ ist also in z_0 analytisch und wir erhalten, dass $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ gilt. Dies bedeutet, dass f in z_0 einen Pol (falls $g(z_0) = 0$ ist) besitzt oder (falls $g(z_0) \neq 0$ ist) eine hebbare Singularität. Widerspruch. $\square$

Es gilt sogar die folgende Verschärfung des Theorems von Casorati-Weierstraß.

Bemerkung 9.8 (Picards Theorem)**.** Nahe einer wesentlichen Singularität nimmt eine analytische Funktion alle Werte aus $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.

9.2. **Laurentreihen. Ziel:** Für in Annuli definierte analytische Funktionen wollen wir eine Laurentreihendarstellung herleiten.

Definition 9.9. Wir schreiben $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = L$, falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ konvergieren und falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} = L$$

gilt.

Theorem 9.10. *Die Funktion $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert im Kreisring*

$$D = \{z : R_1 < |z| < R_2\},$$

wobei

$$R_2 = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}},$$
$$R_1 = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{1/k}$$

ist, falls $R_1 < R_2$ ist. f ist in D analytisch.

Beweis. Aufgrund des Wurzelkriteriums konvergiert

$$f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

für $|z| < R_2$. Analog folgt, dass

$$f_2(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

für $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{R_1} \iff |z| > R_1$ konvergiert. Somit konvergiert $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ für $R_1 < |z| < R_2$. f_1 ist eine Potenzreihe und es ist $f_2(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$, wobei g eine Potenzreihe ist. Daher sind f_1 und f_2 im Konvergenzbereich analytisch. Also ist auch f dort analytisch. □

Theorem 9.11. *Sei f in $A := \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ analytisch. Dann besitzt f im Annulus A eine Laurentreihenentwicklung, $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ in A.*

Beweis. Seien $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Seien C_1 und C_2 Kreise um 0 mit Radius r_1 und r_2. Sei $r_1 < |z| < r_2$. Dann ist

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

in A analytisch. Wie in Bemerkung 8.10 folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int\limits_{C_2 - C_1} g(w)\, dw = 0.$$

(Dies folgt, indem wir die beiden Kreise in Halbkreise zerschneiden un die Verbindungsstücke auf der reellen Achse hinzufügen. Dann verschwinden die Integrale über den oberen und über den unteren Teil individuell. Beim Zusammenfügen heben sich die Beiträge über die zusätzlichen Strecken gerade wieder gegenseitig auf.) Entlang C_i sind die Integranden nichtsingulär, wir dürfen das Integral also auseinanderziehen

$$\int\limits_{C_2 - C_1} \frac{f(z)}{w - z}\, dw = \int\limits_{C_2 - C_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{9.1}$$

Nach Lemma 5.4 erhalten wir, da C_2 den Punkt z umschließt $\int\limits_{C_2} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$. Nach Cauchy (Theorem 8.8) gilt, da C_1 im Inneren keine Singularität enthält $\int\limits_{C_1} \frac{dw}{w-z} = 0$. Wir erhalten also

$$\int\limits_{C_2 - C_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 2\pi i f(z).$$

Mit (9.1) folgt daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Auf C_2 gilt $|w| > |z|$. Wir erhalten somit

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w\left(1 - \frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \frac{z^2}{w^3} + \ldots.$$

Auf C_1 gilt $|w| < |z|$ und daher erhalten wir

$$\frac{1}{w - z} = \frac{-1}{z - w} = -\frac{1}{z} - \frac{w}{z^2} - \frac{w^2}{z^3} - \ldots.$$

In beiden geometrischen Reihen ist die Konvergenz lokal gleichmäßig. Daher erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w) z^k}{w^{k+1}} \right) dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{f(w) z^k}{w^{k+1}} \right) dw.$$

Aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir die Integration und die Summation vertauschen und erhalten

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(w)}{w^{k+1}} \, dw,$$

wobei C irgendein Kreis in A ist, der im Ursprung zentriert ist. Zunächst war

$$C = \begin{cases} C_2 & \text{für } k \geq 0, \\ C_1 & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Da aber $g(w) = \frac{f(w)}{w^{k+1}}$ in A analytisch ist, ist das Integral aufgrund des Cauchyschen Satzes für geschlossene Kurven unabhängig vom speziellen Kreis. Da nun der Kreis beliebig ist, folgt die Konvergenz nicht nur in $B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}(0)}$, sondern in ganz A. □

Bemerkung 9.12. Die Laurentreihe einer in einem Kreisring analytischen Funktion ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir behaupten, dass aus $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ folgt, dass auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, dz$$

gilt. Daraus folgt dann die Eindeutigkeit.

Konvergiert $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in A, so ist die Konvergenz auf C gleichmäßig. Daher erhalten wir

$$\int\limits_{C} \frac{f(z)}{z^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{C} a_n z^{n-k-1} \, dz = a_k 2\pi i,$$

denn für $n \neq k$ verschwindet das Integral und wir erhalten die rechte Seite aus dem Summanden $n = k$. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 9.13. *Sei f im Annulus $R_1 < |z - z_0| < R_2$ analytisch. Dann besitzt f in diesem Annulus eine eindeutige Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

ist sowie $C = \partial B_r(z_0)$ *und* $R_1 < r < R_2$.

Beweis. $g(z) = f(z+z_0)$ ist in $R_1 < |z| < R_2$ analytisch, also existiert dort eine eindeutige Laurentreihenentwicklung. □

Für $R_1 = 0$ erhalten wir den folgenden Spezialfall.

Korollar 9.14. *Besitzt* f *in* z_0 *eine isolierte Singularität, dann gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{für } 0 < |z-z_0| < \delta$$

gilt, wobei a_k *wie in Korollar 9.13 definiert ist.*

Beispiele 9.15.

(i) $\frac{(z+1)^2}{z} = \frac{1}{z} + 2 + z$ für $z \neq 0$,

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(1-z)} &= \frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+\ldots\right)\\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \ldots \quad \text{für } 0 < |z| < 1,\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(1-z)} &= \frac{-1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{[1+(z-1)]^2(z-1)}\\ &= \frac{-1}{z-1} + 2 - 3(z-1) + 4(z-1)^2 \mp \ldots \quad \text{für } 0 < |z-1| < 1, \quad \text{da}\\ \frac{1}{1+a} &= 1 - a + a^2 - a^3 \pm \ldots,\\ \left(\frac{1}{1+a}\right)^2 &= 1 - 2a + 3a^2 - 4a^3 \pm \ldots,\end{aligned}$$

(iv) $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$ für $z \neq 0$.

Definition 9.16. Ist

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

die Laurentreihenentwicklung von f um eine isolierte Singularität z_0 herum, so heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k$$

Hauptteil von f in z_0;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

heißt analytischer Teil.

Lemma 9.17 (Charakterisierung des Hauptteils). *Besitze f in z_0 eine isolierte Singularität.*

(i) Ist die Singularität hebbar, so verschwinden alle Koeffizienten a_{-k}, $k > 0$, in der Laurentreihendarstellung um z_0.
(ii) Besitzt f in z_0 einen Pol der Ordnung k, $k > 0$, so gilt $a_{-k} \neq 0$ und $a_{-N} = 0$ für $N > k$.
(iii) Besitzt f in z_0 eine wesentliche Singularität, so treten im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten / Summanden $\neq 0$ auf.

Beweis.
(i) Für $z \neq z_0$ gilt $f(z) = g(z)$ für eine auch in z_0 analytische Funktion. Die Eindeutigkeit der Laurentreihe liefert, dass die Laurentreihe von f mit der Taylorreihe von g übereinstimmt. Beispiel:
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots .$$
(ii) Es gilt $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ wobei $A(z_0) \neq 0$ ist und B in z_0 eine Nullstelle k-ter Ordnung besitzt. Daher gilt $f(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_0)^k}$, wobei Q in z_0 analytisch und von Null verschieden ist. Somit gilt
$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad b_0 \neq 0,$$
und daher
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^k} = \sum_{j=-k}^{\infty} \underbrace{b_{j+k}}_{=a_j} (z-z_0)^j.$$
Somit ist $a_{-k} = b_0 \neq 0$.
(iii) Falls nicht, wäre $(z-z_0)^N f(z)$ für großes $N \in \mathbb{N}$ in z_0 analytisch. Dann hätte f einen Pol in z_0. □

Lemma 9.18 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien P und Q Polynome mit* $\deg P < \deg Q$,
$$Q(z) = (z-z_1)^{k_1} \cdot (z-z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z-z_n)^{k_n}$$
mit $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Dann lässt sich $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ als Summe von Polynomen in $\frac{1}{z-z_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, darstellen.

Beweis. R besitzt in z_1 einen Pol der Ordnung $\leq k_1$. Aus der Laurentreihendarstellung um z_1 folgt daher
$$R(z) = \underbrace{P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right)}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{A_1(z)}_{\text{analytischer Teil}}.$$
Daher besitzt $A_1(z) = R(z) - P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right)$ in z_1 eine hebbare Singularität und denselben Hauptteil wie $R(z)$ in $z_2, \dots, z_n$. Induktiv erhalten wir
$$A_n(z) = R(z) - \left[P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) + \ldots + P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right].$$

Nach geeigneter Fortsetzung in die hebbaren Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist A_n eine ganze Funktion. Aufgrund der Homogenitäten und da keine konstanten Terme auftreten, gilt

$$\begin{aligned} R(z) &\to 0 \quad \text{für } z \to \infty, \\ P_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right) &\to 0 \quad \text{für } z \to \infty. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Liouville, Theorem 5.10, ist A_n daher konstant. Durch eine analoge Betrachtung der Homogenitäten wie oben erhalten wir sogar $A_n \equiv 0$. Somit gilt

$$R(z) = P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + P_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) + \ldots + P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right). \qquad \square$$

10. Der Residuensatz

Ziel: Sei γ ein geschlossener Weg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet und sei f dort analytisch. Wir wollen den Cauchyschen Integralsatz $\int\limits_\gamma f = 0$ auf Funktionen mit isolierten Singularitäten verallgemeinern.

Sei

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$$

nahe einer isolierten Singularität in z_0, γ ein Kreis um z_0. Dann wollen wir nachweisen, dass

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i C_{-1}$$

gilt.

Definition 10.1. Gilt $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ in einer punktierten Umgebung von z_0, so heißt C_{-1} das Residuum von f in z_0.

$$C_{-1} = \operatorname{Res}(f; z_0).$$

Beispiele 10.2.

(i) Besitzt f einen einfachen Pol in z_0, d. h. gilt $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, $A(z_0) \neq 0$, wobei A und B in z_0 analytisch sind und B in z_0 eine einfache Nullstelle besitzt, so gilt

$$C_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots, \\ (z-z_0)f(z) &= C_{-1} + C_0(z-z_0) + C_1(z-z_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

und daher folgt

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = C_{-1}.$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{A(z)}{B(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{A(z)}{\frac{B(z)-B(z_0)}{z-z_0}}=\frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$ □

(ii) Besitzt f einen Pol der Ordnung k in z_0, so gilt

$$C_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]\Big|_{z=z_0},$$

wobei die rechte Seite als Grenzwert zu lesen ist.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} f(z) &= C_{-k}(z-z_0)^{-k}+\ldots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\ldots, \\ g(z) &= (z-z_0)^k f(z)=C_{-k}+\ldots+C_{-1}(z-z_0)^{k-1}+C_0(z-z_0)^k+\ldots, \\ \frac{d^{k-1}}{z^{k-1}}g(z) &= (k-1)!C_{-1}+k!C_0(z-z_0)+\ldots. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

(iii) a) Da in $z=i$ ein einfacher Pol vorliegt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4-1},i\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}\cdot\frac{1}{z^2+1},i\right)=\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1},i\right) \\ &= \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right),i\right)=-\frac{1}{4i}=\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Mit (i) folgt alternativ

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4-1},i\right)=\frac{1}{4i^3}=\frac{i}{4}.$$

b) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3},0\right)=0$,

c) $\operatorname{Res}\left(\sin\frac{1}{z-1},1\right)=1$, da

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}\mp\ldots.$$

Definition 10.3 (Windungszahl)**.** Sei γ eine geschlossene Kurve und $a\notin\gamma$. Dann heißt

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}$$

Windungszahl von γ um a.

Beispiel 10.4. Sei γ ein im Gegenuhrzeigersinn einmal durchlaufener Kreis. Dann gilt

$$n(\gamma,a)=\begin{cases}1, & \text{falls } a \text{ in der Kreisscheibe liegt,}\\ 0, & \text{falls } a \text{ außerhalb der Kreisscheibe liegt.}\end{cases}$$

Dies folgt aus Lemma 5.4 bzw. aus dem Satz über geschlossene Kurven, Theorem 6.3.

Wird der Punkt a nun k-mal umlaufen, also ist $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi k$, so folgt

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi k} i\, dt = k.$$

Theorem 10.5. *Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \notin \gamma$. Dann ist $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei γ durch $z(t)$ parametrisiert, $0 \le t \le 1$. Definiere

$$F(s) := \int\limits_0^s \frac{\dot z(t)}{z(t) - a}\, dt, \quad 0 \le s \le 1.$$

Dann liefert der Hauptsatz

$$\dot F(s) = \frac{\dot z(s)}{z(s) - a}.$$

Daher verschwindet die Ableitung von $(z(s)-a)\cdot e^{-F(s)}$ und somit ist diese Funktion konstant. Wir schließen weiter

$$\begin{aligned} (z(s) - a) \cdot e^{-F(s)} &= z(0) - a, \\ e^{F(s)} &= \frac{z(s) - a}{z(0) - a}, \\ e^{F(1)} &= \frac{z(1) - a}{z(0) - a} = \frac{z(0) - a}{z(0) - a} = 1, \end{aligned}$$

da z geschlossen ist,

$$F(1) = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und erhalten daher

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} F(1) = k \in \mathbb{Z}.$$ □

Bemerkung 10.6. Solange $a \notin \gamma$ ist, hängt $n(\gamma, a)$ nach Definition stetig von a ab. Da $n(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ ist, ist $n(\gamma, a)$ also auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ konstant. Weiterhin gilt $n(\gamma, a) = 0$ auf der unbeschränkten Komponente, da wir aus Integralabschätzungen $n(\gamma, a) \to 0$ für $a \to \infty$ bekommen.

Statt Bildchen: In einer „Acht" ist in die Windungszahl in einem Gebiet 1 im anderen -1. In einem Halbkreis ist die Windungszahl 1. Besteht dir Kurve aus zwei im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen, sich in einem Punkt berührenden Kreisen, so ist die Windungszahl ganz im Inneren 2 und im Zwischenbereich 1.

Zum Beweis deformiert man die Kurve entweder in einen Kreis oder benutzt die Analytizität von $\frac{1}{z-a}$ „innerhalb" der Kurve.

Aufgrund des Jordanschen Kurvensatzes erhalten wir: Ist γ einfach geschlossen und geeignet orientiert. Dann besteht $\mathbb{C} \setminus \gamma$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, die durch $n = 0$ (die unbeschränkte Komponente, s. o.) und $n = 1$ (die beschränkte Komponente) charakterisiert sind.

Beweis: Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis oder Topologie.

Definition 10.7. Eine einfach geschlossene Kurve γ heißt reguläre geschlossene Kurve, falls $n(\gamma, a) \in \{0, 1\}$ für $a \notin \gamma$ gilt. Wir definieren dann $\{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(\gamma, a) = 1\}$ als das Innere von γ und $\{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(\gamma, a) = 0\}$ als das Äußere von γ.

Das Innere von γ liegt dann immer „links“ der Kurve.

Theorem 10.8 (Residuensatz (Cauchy))**.** *Sei D einfach zusammenhängend, f in $D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ analytisch (möglicherweise) mit Singularitäten in $z_1, \ldots, z_m$. Gelte $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Sei γ eine geschlossene Kurve in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$. Dann gilt*

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Beweis. Wir subtrahieren die Hauptteile $H_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right), \ldots, H_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)$. Beachte dabei, dass die Hauptteile nach Theorem 9.10 in $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ analytisch sind. Dann ist

$$g(z) := f(z) - H_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - H_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) - \ldots - H_m\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$$

in D analytisch. Somit gilt $\int\limits_\gamma g = 0$ und wir schließen, dass

$$\int\limits_\gamma f = \sum_{k=1}^m \int\limits_\gamma H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) dz.$$

Sei

$$H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \frac{C_{-1}}{z-z_k} + \frac{C_{-2}}{(z-z_k)^2} + \ldots .$$

Wir erhalten daher

$$\int\limits_\gamma H_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) dz = C_{-1} \cdot \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_k} = 2\pi i n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname{Res}(f, z_k)$$

wie behauptet. □

Mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes erhalten wir daraus

Korollar 10.9. *Seien f, D wie oben. Ist γ zusätzlich eine reguläre geschlossene Kurve, so gilt*

$$\int\limits_\gamma f = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k),$$

wobei wir nur über Singularitäten von f in γ summieren.

10.1. **Brouwerscher Fixpunktsatz.** Wir folgen [6].

Theorem 10.10. *Seien γ_1, γ_2 auf $[a, b]$ parametrisierte geschlossene Kurven. Gelte*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t) - z_0| \quad \forall t \in [a, b].$$

Dann ist $n(\gamma_1, z_0) = n(\gamma_2, z_0)$.

Beweis. Definiere $\gamma(t) := \frac{\gamma_2(t)-z_0}{\gamma_1(t)-z_0}$. Dann gilt
$$|1-\gamma(t)| = \left|\frac{\gamma_1(t)-\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)-z_0}\right| < 1.$$
Somit ist $\gamma([a,b]) \subset B_1(1)$. Also liegt 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}\gamma$. Daher gilt $n(\gamma,0)=0$. Wir benutzen nun die Definitionen der Windungszahl und des Kurvenintegrals und erhalten
$$\begin{aligned} 0 = n(\gamma,0) = &\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt \\ = &\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \left(\log\frac{\gamma_2-z_0}{\gamma_1-z_0}\right)'\,dt \\ = &\frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2-z_0}-\frac{\gamma_1'}{\gamma_1-z_0}\right)\,dt \\ = &\,n(\gamma_1,z_0)-n(\gamma_1,z_0). \end{aligned}$$
Da $\gamma \subset B_1(1)$ ist, ist der Logarithmus wohldefiniert. □

Bemerkung 10.11. Bisher haben wir nur die Windungszahl von Kurven betrachtet, die stückweise von der Klasse C^1 sind. Da wir aber gesehen haben, dass die Windungszahl unter kleinen Deformationen sich nicht ändert, können wir die Windungszahl eines C^0-Weges als die Windungszahl eines C^1-Weges definieren, der C^0-nahe am gegebenen C^0-Weg ist.

Theorem 10.12 (Homotopieinvarianz)**.** *Sei $H:[0,1]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig, $\gamma_t := H(t,\cdot)$ erfülle $\gamma_t(a)=\gamma_t(b)$. Liegt z_0 nicht im Bild von H, so ist $n(\gamma_t,z_0)$ unabhängig von $t\in[0,1]$.*

Beweis. Approximiere durch C^0-nahe C^1-Wege und benutze, dass $n(\gamma_t,z_0)$ nach Theorem 10.10 in t lokal konstant ist. □

Bemerkung 10.13. Die Kurve $\gamma(t)=z_0+e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $z_0\in\mathbb{C}$, lässt sich in $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ nicht stetig zu einem Punkt homotopieren (deformieren), da $n(\gamma,z_0)=1$ und $n(\text{pt.},z_0)=0$ ist, was nach Theorem 10.12 aber nicht sein kann.

Theorem 10.14 (Brouwerscher Fixpunktsatz in der Ebene)**.** *Sei $f:\overline{B_1(0)}\to\overline{B_1(0)}\subset\mathbb{C}$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d. h. es existiert $z_0\in\overline{B_1(0)}$ mit $f(z_0)=z_0$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine solche Funktion f ohne Fixpunkte. Definiere die Homotopie $H:[0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ durch
$$H(t,s) := \begin{cases} e^{is}-2tf\left(e^{is}\right), & t\le\frac12,\\ 2(1-t)e^{is}-f\left(2(1-t)e^{is}\right), & t\ge\frac12. \end{cases}$$
Für $t=\frac12$ stimmen diese beiden Definitionen überein. Daher ist H stetig. Falls $H(t,s)=0$ ist, folgt $t<\frac12$, da f keinen Fixpunkt besitzt. Somit gilt $e^{is}=2tf\left(e^{is}\right)$. Es ist $\left|e^{is}\right|=1$ und $|f|\le 1$. Daher folgt $t=\frac12$. Dies ist ein Widerspruch. Wir hatten angenommen, dass $H(t,s)=0$ gilt. Dies kann also nicht sein und somit ist

$H \neq 0$. Nun benutzen wir für $\gamma_t := H(t, \cdot)$ die Homotopieinvarianz der Umlaufzahl. Wir erhalten

$$1 = n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0) = 0,$$

dann für $t = 0$ ist γ_t ein Kreis und für $t = 1$ ist $\gamma_1 = f(0)$, also ein Punkt. □

Bemerkung 10.15. Die Nicht-Zusammenziehbarkeit der Kurve e^{it}, $0 \leq t \leq 2\pi$, in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann man auch aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz ableiten. Diese beiden Aussagen sind also äquivalent.

Beweis. Sei H eine solche Homotopie. Definiere

$$f(z) := -\frac{H(1 - |z|, \arg z)}{|H(1 - |z|, \arg z)|}.$$

Wir behaupten, dass $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ stetig und fixpunktfrei ist. Die Stetigkeit ist klar, da $H(1, \cdot)$ eine konstante Abbildung ist. Sei also z ein Fixpunkt. Da stets $|f(z)| = 1$ gilt, folgt auch $|z| = 1$. Wir erhalten also $z = f(z) = -\frac{H(0, \arg z)}{|H(0, \arg z)|}$. Es gilt aber $H(0, t) = e^{it}$, $H(0, \arg z) = z$ und daher $z = -z$. Widerspruch. □

10.2. **Anwendungen des Residuensatzes.**

Definition 10.16. Eine Funktion f, die in einem Gebiet D bis auf isolierte Polstellen analytisch ist, heißt meromorph.

Theorem 10.17. *Sei γ eine reguläre geschlossene Kurve. Ist f in und auf γ meromorph und besitzt f keine Nullstellen oder Pole auf γ, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'}{f} = \mathcal{Z} - \mathcal{P},$$

wobei $\mathcal{Z}$ die Anzahl der Nullstellen von f in γ und $\mathcal{P}$ die Anzahl der Polstellen von f in γ sind, jeweils mit Vielfachheiten (der Ordnung) gezählt.

Beweis. Außerhalb der Nullstellen und Pole von f is $\frac{f'}{f}$ analytisch. Habe f eine Nullstelle der Ordnung k im Punkt $z = a$. Dann folgt $f(z) = (z - a)^k g(z)$ mit $g(z) \neq 0$ für z nahe a. Es folgt

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z - a)^{k-1} \cdot [kg(z) + (z - a)g'(z)] \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Daher besitzt $\frac{f'}{f}$ in $z = a$ einen einfachen Pol mit Residuum k. Habe f in a einen Pol der Ordnung k. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - a)^{-k} g(z), && g(z) \neq 0 \quad \text{nahe } z = a, \\ f'(z) &= -k(z - a)^{-k-1} g(z) + (z - a)^{-k} g'(z), \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Wir sehen daher, dass $\frac{f'}{f}$ in $z=a$ einen einfachen Pol mit Residuum $-k$ besitzt. Daher liefert der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'}{f} = \sum \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}\right) = \mathcal{Z} - \mathcal{P}. \qquad \square$$

Korollar 10.18. *Sei f in und auf einer regulären geschlossenen Kurve γ analytisch und $f \neq 0$ auf γ, so gilt*

$$\mathcal{Z}(f) = \#\ \textit{Nullstellen von } f \textit{ in } \gamma\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'}{f}.$$

Theorem 10.19 (Rouché)**.** *Seien f und g in und auf einer regulären geschlossenen Kurve γ analytisch. Gilt $|f(z)| > |g(z)|$ für alle $z \in \gamma$, so ist*

$$\mathcal{Z}(f+g) = \mathcal{Z}(f).$$

Beweis. Ist $f(z) = A(z)\cdot B(z)$, so gilt

$$\frac{f'}{f} = \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}$$

und daher

$$\int\limits_\gamma \frac{f'}{f} = \int\limits_\gamma \frac{A'}{A} + \int\limits_\gamma \frac{B'}{B}.$$

Da $f+g = f\cdot\left(1+\frac{g}{f}\right)$ ist und nach Voraussetzung $1+\frac{g}{f} \neq 0$ auf γ gilt erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(f+g) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{(f+g)'}{f+g} &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_\gamma \frac{f'}{f} + \int\limits_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}\right)\\ &= \mathcal{Z}(f) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'}{1+\frac{g}{f}}.\end{aligned}$$

Auf γ gilt $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$. Sei $\alpha := \left(1+\frac{g}{f}\right)(\gamma(\cdot))$. Dann gilt $\operatorname{im}\alpha \subset B_1(1)$. Die Windungszahl von α um 0 ist Null:

$$0 = n(\alpha;0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha \frac{1}{\alpha - 0}. \qquad \square$$

Theorem 10.20 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel)**.** *Sei f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D analytisch. Sei γ eine reguläre geschlossene Kurve in D. Dann gilt für z in γ und $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw.$$

Beweis. In einer Umgebung von z gilt

$$f(w) = f(z) + f'(z)\cdot(w-z) + \ldots + \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(w-z)^k + \ldots.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}};z\right)=\frac{f^{(k)}(z)}{k!}.$$

Die Funktion $\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}$ besitzt außer z keine weiteren Singularitäten in D. Somit folgt die Behauptung aus dem Residuensatz. □

Theorem 10.21. *Sei f_n eine Folge in D analytischer Funktionen, die auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann ist f analytisch, $f_n' \to f'$ in D und die Konvergenz ist auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig.*

Beweis. Nach Theorem 7.5 ist f analytisch. Sei $B_r(z_0) \subset D$, $C = \partial B_{\frac{3r}{4}}(z_0)$. Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\,dw, \quad z \in \overline{B_{r/2}(z_0)}.$$

Da $f_n \to f$ in $\overline{B_{\frac{3r}{4}}(z_0)}$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert somit auch $f_n' \to f'$ gleichmäßig in $\overline{B_{r/2}(z_0)}$. Mit einem Überdeckungsargument erhalten wir Konvergenz für eine beliebige kompakte Teilmenge von D. Die Behauptung folgt. □

Theorem 10.22 (Hurwitz)**.** *Sei f_n eine Folge analytischer Funktionen, die in einem Gebiet D nicht verschwinden (keine Nullstellen besitzen). Gelte $f_n \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D. Dann gilt $f \equiv 0$ in D oder $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*

Beweis. Sei $f(z) = 0$ für ein $z \in D$. Gilt $f \not\equiv 0$, so gibt es einen um z zentrierten Kreis C in D, so das $f(z) \neq 0$ auf C gilt. Wir erhalten

$$\frac{f_n'}{f_n} \to \frac{f'}{f}$$

gleichmäßig auf C. Daher gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'}{f} = \mathcal{Z}(f) \ge 1,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f_n'}{f_n} = \mathcal{Z}(f_n) = 0.$$

Die letzte Gleichheit gilt hier nach Voraussetzung. Wir erhalten einen Widerspruch. Somit gilt $f \equiv 0$. □

Beispiel 10.23. Es gilt $\sin\pi = 0$. Daher existiert ein n_0, so dass

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots \pm \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

für $|z-\pi| < 1$ und $n \ge n_0$ eine Nullstelle besitzt.

Korollar 10.24. *Sei f_n eine Folge analytischer Funktionen, die in einem Gebiet D nirgends $f_n(z) = a$ erfüllen. Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf Kompakta in D, so gilt $f \equiv a$ oder $f \neq a$ in D.*

Beweis. Betrachte $g_n(z) = f_n(z) - a, \ldots$. □

Theorem 10.25. *Konvergiere eine Folge analytischer Funktionen f_n lokal gleichmäßig in D gegen f. Sind die Funktionen f_n für alle n in D injektiv, so ist f in D konstant oder ebenfalls injektiv.*

Beweis. Seien $z_1 \neq z_2 \in D$ mit $f(z_1) = f(z_2) = a$. Seien $D_1 \ni z_1$ und $D_2 \ni z_2$ disjunkte Kreisscheiben um z_1 bzw. z_2 in D.
Gilt $f \not\equiv a$, so besitzt $f_n(z) = a$ für große n eine Lösung in D_1. (Sonst gäbe es eine Teilfolge, ohne Einschränkung f_n, mit $f_n \neq a$ in D_1 und daher hätten wir nach Korollar 10.24 $f \neq a$ in D_1 oder $f \equiv a$. Widerspruch.) Ebenso besitzt $f_n(z) = a$ für große n eine Lösung in D_2. Dies ist aber ein Widerspruch zur vorausgesetzten Injektivität von f_n. □

11. Anwendungen des Residuensatzes

11.1. Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Herleitung 11.1. P und Q seien Polynome, der Nenner Q sei (für reelle x) nullstellenfrei, $\deg Q - \deg P \geq 2$. Dann existiert aufgrund von Sätzen aus der Analysis 2

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Alternativ zu den folgenden Überlegungen kann man auch eine Partialbruchzerlegung durchführen.
Sei C_R der Rand der oberen Halbkugel B_R^+. Sei R so groß, dass C_R alle Nullstellen von Q in der oberen Halbebene umläuft. Sei Γ_R der obere Halbkreis.
Nun liefert uns der Residuensatz

$$\int\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right),$$

wobei z_k die Nullstellen (ohne Vielfachheiten) von Q in der oberen Halbebene sind. Daher ist

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right).$$

Da $\deg Q - \deg P \geq 2$ ist, folgt aus der M-L-Abschätzung

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{P}{Q} \ll \pi R \frac{A}{R^2}$$

für eine Konstante A. Somit ist

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$$

und es folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}; z_k\right).$$

Beispiel 11.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; z_k\right),$$

wobei die Nullstellen von z^4+1 in der oberen Halbebene $z_1 = e^{i\pi/4}$ und $z_2 = e^{3i\pi/4}$ sind.

Wir bestimmen die Residuen: Nahe z_1 gelte

$$\frac{1}{z^4+1} = \ldots + a_{-2}\frac{1}{(z-z_1)^2} + a_{-1}\frac{1}{z-z_1} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_1) + \ldots .$$

Es gilt (Da alle Nullstellen von z^4+1 Vielfachheit 1 haben existiert der folgende Grenzert.)

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{\frac{z^4+1}{z-z_1}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_1} \frac{(z^4+1)-(z_1^4+1)}{z-z_1}} \quad \text{(da } z_1 \text{ eine Nullstelle von } z^4+1 \text{ ist)} \\ &= \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(z^4+1\right)\big|_{z=z_1}} = \frac{1}{4z_1^3}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; e^{i\pi/4}\right) &= \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4}\cdot\left(-e^{i\pi/4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; e^{3i\pi/4}\right) &= \frac{1}{4e^{3\cdot 3i\pi/4}} = \frac{1}{4e^{i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

12. Konforme Abbildungen

12.1. **Konforme Äquivalenz.** Generalvoraussetzung: In diesem Kapitel seien alle Kurven regulär, d. h. es gelte $\dot{z}(t) \neq 0$ für alle t.

Definition 12.1. Seien C_1 und C_2 zwei Kurven, die sich in z_0 schneiden. Der Winkel von C_1 nach C_2 in z_0, $\sphericalangle\, C_1, C_2$ ist als der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Winkel vom Tangentialvektor an C_1 in z_0 zum Tangentialvektor an C_2 in z_0 definiert.

Definition 12.2. Sei f in einer Umgebung von z_0 definiert. f heißt in z_0 konform, wenn es dort Winkel erhält: Seien C_1 und C_2 zwei Kurven, die sich in z_0 schneiden. Sei $\Gamma_1 = f(C_1)$, $\Gamma_2 = f(C_2)$. f ist konform, wenn für alle Kurven

$$\sphericalangle C_1, C_2 = \sphericalangle \Gamma_1, \Gamma_2$$

in $f(z_0)$ gilt. f heißt in einem Gebiet D konform, falls f in allen Punkten $z \in D$ konform ist.

Beispiel 12.3. Die Abbildung $z \mapsto z^2$ ist in $z = 0$ nicht konform. Das Bild von reeller und imaginärer Achse sind beide in $\mathbb{R}$ enthalten.

Wir werden später sehen, dass diese Abbildung für alle anderen Punkte der komplexen Ebene konform ist.

Definition 12.4.

(i) f heißt lokal injektiv (1-1) in z_0, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $z_1 \neq z_2 \in B_\delta(z_0)$ folgt, dass $f(z_1) \neq f(z_2)$ ist.
(ii) f heißt in einem Gebiet D lokal injektiv, falls f in jedem $z \in D$ lokal injektiv ist.
(iii) f heißt in D injektiv, falls für alle $z_1 \neq z_2 \in D$ auch $f(z_1) \neq f(z_2)$ gilt.

Beispiel 12.5. $f(z) = z^2$ ist in $z = 0$ nicht lokal injektiv, da $f(z) = f(-z)$ ist, aber für alle $z \neq 0$.

Theorem 12.6. *Sei f in z_0 analytisch und gelte $f'(z_0) \neq 0$. Dann ist f in z_0 konform und lokal injektiv.*

Beweis. Zur Konformität: Sei $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ eine glatte Kurve mit $z(t_0) = z_0$. Die Tangente in z_0 hat dieselbe Richtung (normiert) wie $\dot{z}(t_0) = \dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0)$. Somit ist der Winkel mit der reellen Achse $= \arg \dot{z}(t_0)$.

Betrachte nun das Bild $\Gamma = f(C)$, parametrisiert durch $w(t) = f(z(t))$. In $f(z_0)$ ist der Winkel der Tangente an Γ mit der reellen Achse $= \arg \dot{w}(t_0) = \arg(f'(z_0) \cdot \dot{z}(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t_0)$, wobei wir im letzten Schritt die Funktionalgleichung des Logarithmusses verwendet haben. Dies bedeutet, dass f alle Kurven so abbildet, dass sich deren Winkel mit der Horizontalen um die Konstante $\arg f'(z_0)$ ändert. Somit bleiben Schnittwinkel erhalten. Daher ist f in z_0 konform.

Eine andere Begründung ist die folgende: Das Differential einer analytischen Funktion ist die Multiplikation mit einer komplexen Zahl. Komplexe Zahlen operieren (bei Multiplikation) als Drehstreckungen auf $\mathbb{C}$.

Zur Injektivität in einer Umgebung von z_0: Setze $f(z_0) =: \alpha$. Wähle $\delta' > 0$ so klein, dass $f(z) - \alpha$ in $\overline{B_{\delta'}(z_0)}$ außer z_0 keine weiteren Nullstellen besitzt. (Dies geht, da sonst z_0 ein Häufungspunkt von Nullstellen wäre. Nach Theorem 6.9 impliziert dies $f \equiv \alpha$ nahe z_0 im Widerspruch zu $f'(z_0) \neq 0$.) Setze $C = \partial B_{\delta'}(z_0)$, $\Gamma = f(C)$. Da $f(z) - \alpha$ lokal nur eine Nullstelle besitzt, liefert das Argumentprinzip, Korollar 10.18,

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{dw}{w - \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{dw}{w - \beta}$$

für alle β in einer hinreichend kleinen Kreisscheibe $B_\varepsilon(\alpha)$, da die Umlaufzahl lokal konstant ist und da $\alpha \notin \Gamma$, denn $f - \alpha$ besitzt auf Γ keine Nullstelle. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta \le \delta'$, so dass $B_\delta(z_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(\alpha))$ gilt. Sei also $z_1 \in B_\delta(z_0)$. Wir wenden nun die obige Formel mit $f(z_1)$ statt β an und erhalten

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w - f(z_1)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_1)}\, dz.$$

Der Wert $f(z_1)$ wird innerhalb von C also nur einmal angenommen. Somit ist f in z_0 lokal injektiv. □

Beispiel 12.7.

(i) Die Ableitung der Exponentialfunktion $z \mapsto \exp z$ ist stets ungleich Null, aber die Funktion ist nicht global injektiv. Die Mengen $\{z : \operatorname{Re} z = \text{konst.}\}$ werden unter der Exponentialabbildung auf Kreise um den Ursprung und die Mengen $\{z : \operatorname{Im} z = \text{konst.}\}$ werden auf Ursprungsgeraden abgebildet. Diese schneiden sich jeweils im rechten Winkel.

(ii) Die Funktion $f : z \mapsto z^2$ ist für $z \neq 0$ konform. Es ist $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$ und $\operatorname{Im} f(z) = 2xy$. Die Urbilder der Mengen $\{z : \operatorname{Re} z = \text{konst.}\}$ und $\{z : \operatorname{Im} z = \text{konst.}\}$ sind also gerade Hyperbeln.

Bemerkung 12.8. Eine injektive Abbildung wird auch als $1-1$ bezeichnet.

Definition 12.9. Sei $0 \neq k \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung von D_1 auf D_2 heißt $k-1$, falls die Gleichung $f(z) = \alpha$ für alle $\alpha \in D_2$ genau k Lösungen (mit Vielfachheit gezählt - was bei analytischen Abbildungen möglich ist) in D_1 besitzt.

Das folgende Lemma beschreibt den Prototyp einer solchen Abbildung.

Lemma 12.10. *Sei $f(z) = z^k$, $0 < k \in \mathbb{N}$. Dann vergrößert f Winkel im Ursprung um den Faktor k (später dann modulo 2π betrachtet) und ist eine $k-1$ Abbildung von $B_\delta(0)$ auf $B_{\delta^k}(0)$ für $\delta > 0$.*

Beweis. Wegen $f\left(re^{i\vartheta}\right) = r^k e^{ik\vartheta}$ bildet f Halbgeraden aus dem Ursprung mit Argument ϑ auf Halbgeraden aus dem Ursprung mit Argument $k\vartheta$ ab. (Somit werden Winkel ver-k-facht. Bei allgemeinen Kurven verschwindet der Tangentialvektor wegen $f'(0) = 0$.)
Für $\alpha \neq 0$ besitzt $z^k = \alpha$ gerade k verschiedene Lösungen mit $|z| = |\alpha|^{1/k}$. (Das Bild des entsprechenden Kreises wird k-mal durchlaufen. Mit z ist auch $ze^{\frac{2\pi i}{k} l}$ eine Nullstelle und diese sind für $l = 0, 1, \ldots, k-1$ alle verschieden. Die erste Nullstelle erhalten wir beispielsweise aus dem Fundamentalsatz der Algebra.) Für $\alpha = 0$ liegt eine k-fache Nullstelle in $z = 0$ vor. □

Das nächste Theorem ist eine Variante von Theorem 12.6 für den Fall $f'(z_0) = 0$.

Theorem 12.11. *Sei f in z_0 analytisch und gelte $f'(z_0) = 0$. Sei f nahe z_0 nicht konstant. Dann gibt es eine kleine Umgebung von z_0, so dass f dort eine $k-1$ Abbildung ist und f vergrößert Winkel in z_0 um den Faktor k. Es ist*

$$k = \min\{l \in \mathbb{N} : f^{(l)}(z_0) \neq 0\}.$$

Beweis. Nehme ohne Einschränkung an, dass $f(z_0) = 0$ ist. Dann besitzt f nahe z_0 die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + a_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \ldots$$

$$= (z-z_0)^k \left[a_k + a_{k+1}(z-z_0) + a_{k+2}(z-z_0)^2 + \ldots\right],$$

wobei $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \neq 0$ ist. Wir setzen

$$g(z) := a_k + a_{k+1}(z-z_0) + a_{k+2}(z-z_0)^2 + \ldots .$$

Da $g(z_0) \neq 0$ ist, existiert in einer kleinen Kreisscheibe $B_\delta(z_0)$ eine analytische k-te Wurzel, die wir beispielsweise über den Logarithmus definieren, $g^{1/k}$. Somit gilt

$$f(z) = [h(z)]^k \quad \text{in } B_\delta(z_0),$$

wobei $h(z) = (z-z_0)g^{1/k}(z)$ ist. Es gilt $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = g^{1/k}(z_0) \neq 0$. Also ist in einer hinreichend kleinen Umgebung D von z_0 die Funktion f die Verknüpfung einer injektiven analytischen $(1-1)$ Abbildung h verknüpft mit $z \mapsto z^k$. Da $z \mapsto z^k$ im Ursprung Winkel um einen Faktor k vergrößert, vergrößert f Winkel in z_0 ebenfalls um einen Faktor k (für geeignete Wege wie oben). $z \mapsto z^k$ ist $k-1$ in Kreisscheiben um den Ursprung. Sei $B_\varepsilon(0) \subset h(B_\delta(z_0))$ und $\tilde{D} := h^{-1}(B_\varepsilon(0))$. Dann ist f auf $\tilde{D}$ eine $k-1$ Abbildung. □

Als Kombination der obigen Resultate erhalten wir

Theorem 12.12. *Sei f eine in einem Gebiet D analytische Funktion. Sei f $1-1$. Dann gilt*

(i) f^{-1} existiert und ist in $f(D)$ analytisch,
(ii) f und f^{-1} sind in D bzw. $f(D)$ konform.

Beweis. Da f $1-1$ ist, folgt $f' \neq 0$. Nach Proposition 3.6 ist f^{-1} ebenfalls analytisch und es gilt $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}$, wenn wir an der richtigen Stelle auswerten. Somit gilt $\left(f^{-1}\right)' \neq 0$. Somit sind f und f' konform. □

Dies motiviert die folgende Definition

Definition 12.13.
(i) Eine $1-1$ analytische Abbildung heißt konforme Abbildung.
(ii) Zwei Gebiete D_1 und D_2 heißen konform äquivalent, falls es eine konforme Abbildung von D_1 nach D_2 gibt.

Bemerkung 12.14. Es handelt sich in (ii) um eine Äquivalenzrelation, da insbesondere die Verkettung konformer Abbildungen wieder konform ist.

Der Riemannsche Abbildungssatz (den wir in Kapitel 13 behandeln werden) besagt, dass je zwei einfach zusammenhängende Gebiete $\neq \mathbb{C}$ konform äquivalent sind.

12.2. **Spezielle Abbildungen.**

Bemerkung 12.15 (Elementare Abbildungen)**.**
(i) $w = az + b$, $a \neq 0$, ist eine Streckung um $|a|$, gefolgt von einer Drehumg um $\arg a$ und einer Verschiebung um b. Dies ist eine $1-1$ analytische Abbildung von $\mathbb{C}$ in sich.
(ii) $w = z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $\alpha =$ reell, ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, das nicht den Ursprung enthält, analytisch.

Wähle einen Zweig des Logarithmus, der auf der positiven reellen Achse reell ist. Dann folgt, dass $z \mapsto z^\alpha$ die positive reelle Achse auf sich selbst abbildet. $z = re^{i\vartheta} \mapsto r^\alpha e^{i\alpha\vartheta}$. Damit bildet $z \mapsto z^\alpha$ den Kegel $S = \{z : \vartheta_1 < \arg z < \vartheta_2\}$ auf den Kegel $T = \{w : \alpha\vartheta_1 < \arg w < \alpha\vartheta_2\}$ ab. Sei $\alpha > 0$. Falls

$\alpha\vartheta_2 - \alpha\vartheta_1 \le 2\pi$ oder, äquivalent dazu, falls $\vartheta_2 - \vartheta_1 \le \frac{2\pi}{\alpha}$ und $\vartheta_2 - \vartheta_1 \le 2\pi$ gelten, so ist die Abbildung eine konforme Abbildung von S auf T.

Beispiele: $z \mapsto z^2$ bildet die obere Halbebene auf die an der positiven reellen Achse geschlitzte Ebene ab.

$z \mapsto z^{1/2}$ bildet die rechte Halbebene auf einen Kegel mit Öffungswinkel $90°$ ab, der symmetrisch um die positive reelle Achse ist.

(iii) $w = e^z = e^x e^{iy}$ bildet $y_1 < y < y_2$ auf $y_1 < \arg w < y_2$ ab. Falls $y_2 - y_1 \le 2\pi$ gilt, ist die Abbildung $1-1$.

Beispiel: Der Streifen mit Imaginärteil zwischen 0 und πi wird durch die Exponentialfunktion auf die obere Halbebene abgebildet. Die Logarithmusfunktion ist natürlich gerade die Umkehrfunktion hierzu.

Bemerkung 12.16 (Möbiustransformationen)**.**

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0$$

heißt Möbiustransformation oder bilineare Transformation. Es gilt

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Somit ist f lokal $1-1$ und konform.

f ist sogar überall injektiv, da aus

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

nach Durchmultiplizieren $(ad-bc)(z_1-z_2) = 0$ und somit $z_1 = z_2$ folgt. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \ni z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

ist surjektiv, da $w = \frac{az+b}{cz+d}$ für alle $w \neq \frac{a}{c}$ die Lösung $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$ besitzt, wovon man sich durch direktes Nachrechnen überzeugt.

Wir bemerken, dass f zu einer $1-1$ Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel auf sich selbst wird, wenn wir $f(\infty) = \frac{a}{c}$ und $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ setzen. Diese Fortsetzung ist stetig.

Die obige Formel für die Inverse (die Determinantenbedingung bleibt erfüllt) und Abgeschlossenheit unter Verknüpfungen (was man direkt nachrechnen kann) zeigen, dass die Möbiustransformationen eine Gruppe bilden. Vergleiche dies mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und Matrizenmultiplikation.

Bilineare Abbildungen bilden Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab. Wir rechnen dies zunächst für $f(z) = \frac{1}{z}$ nach:

Lemma 12.17. *Sei S ein Kreis oder eine Gerade und $f(z) = \frac{1}{z}$. Dann ist $f(S)$ ebenfalls ein Kreis oder eine Gerade.*

Beweis. Sei zunächst $S = \partial B_r(\alpha)$ ein Kreis. Es ist

$$f(S) = \left\{w = \frac{1}{z} : z \in S\right\}.$$

Die definierende Gleichung für S ist $(z-\alpha)(\bar z-\bar\alpha)=r^2$ oder, äquivalent dazu, $z\bar z-\alpha\bar z-\bar\alpha z=r^2-|\alpha|^2$. Dies ist wiederum im Falle $z\neq 0$ äquivalent zu

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\bar w}-\frac{\alpha}{\bar w}-\frac{\bar\alpha}{w}=r^2-|\alpha|^2. \tag{12.1}$$

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass $r=|\alpha|$ gilt. Dann ist S eine Kreis durch den Ursprung. Wir erhalten aus (12.1) $1-\alpha w-\bar\alpha\bar w=0$ oder, äquivalent dazu, $\operatorname{Re}\alpha w=\frac12$. Setze $\alpha=x_0+iy_0$ und $w=u+iv$. Dann gilt $ux_0-vy_0=\frac12$. Dies ist eine Geradengleichung in der Ebene. Somit ist $f(S)$ eine Gerade.
Gilt $r\neq|\alpha|$, so ist (12.1) äquivalent zu

$$w\bar w-\left(\frac{\bar\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\right)\bar w-\left(\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\right)w=\frac{-1}{|\alpha|^2-r^2}.$$

Wir setzen $\beta=\frac{\bar\alpha}{|\alpha|^2-r^2}$ und erhalten

$$w\bar w-\beta\bar w-\bar\beta w+|\beta|^2=\frac{r^2}{\left(|\alpha|^2-r^2\right)^2}$$

und daraus

$$|w-\beta|^2=\left(\frac{r}{|\alpha|^2-r^2}\right)^2.$$

Somit ist

$$f(S)=\partial B_{\left|\frac{r}{|\alpha|^2-r^2}\right|}(\beta).$$

Sei nun S eine Gerade. Dann gibt es $a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a,b)\neq(0,0)$, so dass $z=x+iy\in S$ genau dann gilt, wenn $ax+by=c$ ist. Wir setzen $\alpha=a-ib$. Dann ist z genau denn in S, wenn $\operatorname{Re}\alpha z=c$ gilt. Dies formen wir äquivalent in $\alpha z+\bar\alpha\bar z=2c$ und weiter in $2cw\bar w=\alpha\bar w+\bar\alpha w$ um. Analog zu oben folgt nun, dass $f(S)$ ein Kreis oder eine Gerade ist, je nachdem, ob $c=0$ oder $c\neq 0$ gilt. □

Theorem 12.18. *Die Abbildung*

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad \mathit{mit}\ ad-bc\neq 0$$

bildet Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden ab.

Beweis. Im Falle $c=0$ ist f affin linear und die Behauptung ist klar.
Sonst gilt

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac1c\left[\frac{acz+ad-ad+bc}{cz+d}\right]=\frac1c\left[a-\frac{ad-bc}{cz+d}\right].$$

Dies ist eine Darstellung von f als Verknüpfung von affin linearen Abbildungen und $z\mapsto\frac1z$. Die Menge aller Kreise und Geraden ist hierunter jeweils invariant. □

Definition 12.19. Eine konforme Abbildung eines Gebietes auf sich selbst heißt Automorphismus dieses Gebietes.

Lemma 12.20. *Sei $f:D_1\to D_2$ eine konforme Abbildung. Dann gilt:*

(i) Jede konforme Abbildung $h:D_1\to D_2$ ist von der Form $g\circ f$, wobei g ein Automorphismus von D_2 ist.

(ii) *Jeder Automorphismus h von D_1 ist von der Form $f^{-1} \circ g \circ f$, wobei g ein Automorphismus von D_2 ist.*

Beweis.
(i) f und h sind konforme Abbildungen von D_1 auf D_2. Somit ist $h \circ f^{-1}$ ein Automorphismus von D_2 und es gilt $h = g \circ f$ mit $g = h \circ f^{-1}$.
(ii) Sie h eine Automorphismus von D_1. Dann ist $g : f \circ h \circ f^{-1}$ ein Automorphismus von D_2. Es folgt $h = f^{-1} \circ g \circ f$. □

Wir wollen nun alle Automorphismen der Einheitskreisscheibe bestimmen.

Lemma 12.21. *Die einzigen Automorphismen f der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ mit $f(0) = 0$ sind von der Form $f(z) = e^{i\vartheta} z$ mit $\vartheta \in \mathbb{R}$.*

Beweis. f bilde $B_1(0)$ als $1-1$ Abbildung auf sich ab und es gelte $f(0) = 0$. Das Schwarzsche Lemma, Theorem 7.2, impliziert, dass $|f(z)| \le |z|$ für $|z| < 1$ gilt. f^{-1} bildet ebenfalls $B_1(0)$ als $1-1$ Abbildung auf sich ab und es gilt $f^{-1}(0) = 0$. Wie oben folgt daher $\left|f^{-1}(z)\right| \le |z|$ für $|z| < 1$. Zusammengenommen erhalten wir $|f(z)| = |z|$ für alle $|z| < 1$. Aufgrund des Schwarzschen Lemmas erhalten wir daher $f(z) = e^{i\vartheta} z$. □

Dies legt das folgende Resultat nahe.

Theorem 12.22. *Die Automorphismen der Einheitskreisscheibe sind von der Form*

$$g(z) = e^{i\vartheta} \left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} \right)$$

für ein α mit $|\alpha| < 1$.

Beweis. Setze $g(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Zeige zunächst, dass dies ein Automorphismus ist: Für $|z| = 1$ gilt

$$|g(z)|^2 = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{1-\alpha\bar{z}} = \frac{|z|^2 - z\bar{\alpha} - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2}{1 - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + |\alpha|^2 |z|^2} = 1.$$

Es gilt $g(\alpha) = 0$. Also ist $g \not\equiv$ konstant. Daher ist $g(B_1(0))$ eine offene Menge, deren Rand gerade – denn g ist als bilineare Abbildung bijektiv und $g(\partial B_1(0)) \subset \partial B_1(0)$ – $\partial B_1(0)$ ist. Wir schließen, dass $g(B_1(0)) = B_1(0)$ gilt und somit ist g ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe.
Sei nun f ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe mit $f(\alpha) = 0$. Dann ist $h = f \circ g^{-1}$ ein Automorphismus mit $h(0) = 0$. Nach Lemma 12.21 folgt daher $h(z) = e^{i\vartheta} z$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. Somit ist

$$f(z) = h \circ g(z) = e^{i\vartheta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

□

13. Der Riemannsche Abbildungssatz

Theorem 13.1. *Seien R_1, R_2 zwei einfach zusammenhängende Gebiete $\neq \mathbb{C}$. Dann sind R_1 und R_2 konform äquivalent.*

Dies folgt aus dem folgenden Theorem.

Theorem 13.2. *Sei $R \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_0 \in R$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte konforme Abbildung φ von R auf $U \equiv B_1(0)$, so dass $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$ gelten.*

Beweis – Eindeutigkeit. Seien φ_1 und φ_2 zwei solche Abbildungen. Dann ist $\Phi := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ein Automorphismus der Einheitskreisscheibe mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi'(0) > 0$. Nach Theorem 12.22 gilt daher $\Phi(z) = e^{i\vartheta} z$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. Da aber $0 < \Phi'(0) = e^{i\vartheta}$ ist, folgt $\Phi(z) = z$ und daher auch $\varphi_1 = \varphi_2$. □

Für den Existenzbeweis werden wir bis zum Ende des Kapitels brauchen.

Lemma 13.3. *Sei $\alpha \in U$ und $f : U \to U$ analytisch. Dann wird $\max\{|f'(\alpha)|\}$ unter allen Funktionen f wie beschrieben für eine Funktion f mit $f(\alpha) = 0$ angenommen.*

Beweis. Sei zunächst für eine feste analytische Funktion $f : U \to U$ die Bedingung $f(\alpha) \neq 0$ erfüllt. Definiere
$$g(z) = \frac{f(z) - f(\alpha)}{1 - \overline{f(\alpha)} f(z)}.$$
Die Abbildung
$$w \mapsto \frac{w - f(\alpha)}{1 - \overline{f(\alpha)} w}$$
mit $|f(\alpha)| < 1$ ist ein Automorphismus von U. Somit ist $|g(z)| < 1$ für $z \in U$. Eine direkte Rechnung liefert
$$g'(z) = \frac{f'(z)\left(1 - \overline{f(\alpha)} f(z)\right) + (f(z) - f(\alpha))\overline{f(\alpha)} f'(z)}{\left(1 - \overline{f(\alpha)} f(z)\right)^2}.$$

Somit gilt
$$g'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)}{1 - |f(\alpha)|^2}$$
und wir schließen, dass $|g'(\alpha)| > |f'(\alpha)|$ ist. Damit kann das Maximum höchstens für eine Funktion f mit $f(\alpha) = 0$ angenommen werden.
Definiere
$$B_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$$
und die Inverse
$$B_\alpha^{-1}(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}$$
sowie
$$h : U \to U,$$
$$h(z) := f \circ B_\alpha^{-1}(z).$$
Es gilt
$$h'(0) = f'|_{B_\alpha^{-1}(0)} \cdot \left(B_\alpha^{-1}\right)'(0) = f'(\alpha) \cdot \left(1 - |\alpha|^2\right).$$
Nach dem Schwarzschen Lemma, Theorem 7.2, folgt
$$|h'(0)| \le 1 \tag{13.1}$$

und daher $|f'(\alpha)| \le \frac{1}{1-|\alpha|^2}$. Nun gilt

$$B'_\alpha(z)|_{z=\alpha} = \frac{1}{1-|\alpha|^2},$$

das Maximum wird also für die Funktion B_α angenommen. $\square$

Bemerkung 13.4. Gilt in (13.1) Gleichheit, so ist aufgrund des Schwarzschen Lemmas $h(z) = e^{i\vartheta}z$ und daher folgt

$$f(z) = e^{i\vartheta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

Damit wird das Maximum genau an den konformen Selbstabbildungen von U mit $f(\alpha) = 0$ angenommen.
Dies legt die folgende Beweisstrategie nahe:
Sei $R \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $z_0 \in R$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller analytischen $1-1$ (injektiven) Funktionen $f : R \to U$ mit $f'(z_0) > 0$. Wähle φ, so dass

$$\varphi'(z_0) = \sup_{f\in\mathcal{F}} f'(z_0).$$

Dann folgt der Riemannsche Abbildungssatz, falls wir noch folgendes zeigen:

(i) $\mathcal{F}$ ist nichtleer.
(ii) $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} f'(z_0) = M < \infty$ und es gibt eine Funktion $\varphi \in \mathcal{F}$, so dass $\varphi'(z_0) = M$.
(iii) Eine Funktion φ wie in (ii) ist eine konforme surjektive Abbildung von R auf U mit $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) > 0$. ($\varphi(z_0) = 0$ und die Surjektivität stecken noch nicht in (ii) drin.)

Beweis von Theorem 13.2 – Ende.

(i) **$\mathcal{F}$ ist nichtleer:**
Falls $B_\delta(\rho_0) \subset \complement R$ ist, ist $f(z) = e^{i\vartheta}\frac{\delta}{z-\rho_0} \in \mathcal{F}$. Möglicherweise enthält $\complement R$ aber gar keine Kreisscheibe.
Sei $\rho_0 \notin R$. Da R einfach zusammenhängend ist, ist $\frac{z-\rho_0}{z_0-\rho_0}$ nullstellenfrei. Somit existiert eine analytische Funktion g mit $g(z) = \sqrt{\frac{z-\rho_0}{z_0-\rho_0}}$ und $g(z_0) = 1$. Wir behaupten, dass g von -1 weg beschränkt ist, dass also eine positive untere Schranke für $|g(z) - (-1)|$, $z \in R$, existiert. Sonst gibt es $\xi_n \in R$, so dass

$$g(\xi_n) = \sqrt{\frac{\xi_n - \rho_0}{z_0 - \rho_0}} \to -1$$

konvergiert. Hieraus folgt durch Quadrieren $\frac{\xi_n-\rho_0}{z_0-\rho_0} \to 1$ und daher $\xi_n \to z_0$. Dies widerspricht aber der Stetigkeit von g im Punkt z_0. Daher gibt es ein $\eta > 0$, so dass

$$|g(z) - (-1)| = |g(z) + 1| > \eta \quad \text{für } z \in R$$

gilt. Definiere daher

$$f(z) = \frac{\eta}{g(z)+1}.$$

Es gilt $|f(z)| < 1$. Man sieht direkt, dass f die Verknüpfung von $1-1$ Funktionen und daher selber $1-1$ ist. Es gilt

$$g'(z_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{z_0-\rho_0} \neq 0.$$

Daher gibt es ein $\vartheta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\tilde{f} : z \mapsto e^{i\vartheta} f(z)$$

$\tilde{f}'(z_0) > 0$ erfüllt. Somit ist $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ und wir schließen, dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(ii) Es gilt $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} f'(z_0) < \infty$:
R ist offen. Daher gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_{2\delta}(z_0) \subset R$ ist. Sei $f \in \mathcal{F}$ beliebig. Es folgt mit der M-L-Abschätzung, denn für $f : R \to U$ folgt $|f(z)| < 1$

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_\delta(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right| \le \frac{1}{\delta}.$$

Wir behaupten, dass das Supremum auch angenommen wird:
Sei $M = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} f'(z_0)$. Wähle $f_n \in \mathcal{F}$, so dass $|f_n'(z_0)| \to M$ für $n \to \infty$ konvergiert. Wir wollen nun eine Teilfolge der f_n's finden, die auf kompakten Teilmengen von R gleichmäßig konvergiert.

Aus Integralabschätzungen wie oben schließen wir, dass f_n' auf kompakten Teilmengen von R gleichmäßig beschränkt ist. Nach Arzelà-Ascoli gibt es daher eine nicht umbenannte Teilfolge der f_n, so dass $f_n \to \varphi$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von R konvergiert. (Dies benötigt ein Diagonalfolgenargument.) Nach Theorem 7.5 ist φ als gleichmäßiger Grenzwert analytischer Funktionen wieder analytisch. Nach Theorem 10.21 gilt $f_n' \to \varphi'$ gleichmäßig auf Kompakta, denn die C^0-Konvergenz und die Integralformel liefern auch C^1-Konvergenz. Somit erhalten wir nach Definition von $\mathcal{F}$

$$\varphi'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0) = M > 0.$$

Daher ist φ keine Konstante. Deshalb ist aber φ nach Theorem 10.25 als lokal gleichmäßiger Limes von $1-1$ Funktionen wieder $1-1$.

(Wir bemerken, dass in Wirklichkeit sogar die gesamte Folge konvergiert, da jede Teilfolge wiederum eine konvergente Teilfolge besitzt und da der Grenzwert eindeutig ist, falls auch (iii) gezeigt ist.)

(iii) Wir behaupten, dass $\varphi(z_0) = 0$ gilt:
Falls nicht, so ist $\varphi(z_0) = \alpha$ mit $0 < |\alpha| < 1$. Die letzte strikte Ungleichung folgt dabei aus der Offenheit der Abbildung. Dann ist

$$f(z) = \frac{\varphi(z)-\alpha}{1-\bar{\alpha}\varphi(z)}$$

ebenfalls eine $1-1$ Abbildung von R nach U. Es gilt dann

$$f'(z_0) = \frac{\varphi'(z_0)}{1-|\alpha|^2} > \varphi'(z_0)$$

im Widerspruch zur Maximalität.

Zur Surjektivität:
Ist φ nicht surjektiv, so gibt es $0 \neq w \in B_1(0)$, so dass $\varphi(z) \neq w$. Wir schreiben $w = -t^2 e^{i\vartheta}$ für ein $0 < t < 1$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Wir wollen nun φ in mehreren Schritten so modifizieren, dass wir in diesem Fall zu einem Widerspruch zur Maximalität der Ableitung kommen.

Definiere $g(z) := e^{-i\vartheta}\varphi(z)$. g bildet dann R nach U ab, es gilt $g(z_0) = 0$ und $|g'(z_0)| = \varphi'(z_0)$. Weiterhin ist $g(z) \neq -t^2$ für alle $z \in R$.

Als nächstes verknüpfen wir g mit der Abbildung $z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, $\alpha = -t^2$, einer Selbstabbildung von U. Daher bildet auch f_1 mit

$$f_1(z) = \frac{g(z) + t^2}{1 + t^2 g(z)}$$

von R nach U ab. Es ist $f_1(z_0) = t^2$. Da $g(z) \neq -t^2$ ist, erhalten wir $f_1(z) \neq 0$. Daher gibt es genau eine analytische Wurzel $f_2(z) = \sqrt{f_1(z)}$, so dass $f_2(z_0) = t$ gilt.

Definiere nun noch

$$f_3(z) = \frac{f_2(z) - t}{1 - t f_2(z)}.$$

Es ist $f_3 : R \to U$ und $f_3(z_0) = 0$. Die Abbildung f_3 ist als Verkettung von $1-1$ Abbildungen selbst wieder $1-1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_1'(z_0) &= g'(z_0) - t^2 t^2 g'(z_0) \quad \text{da } g(z_0) = \varphi(z_0) = 0\\
&= g'(z_0) \cdot \left(1 - t^4\right),\\
f_2'(z_0) &= \frac{f_1'(z_0)}{2\sqrt{f_1(z_0)}} = \frac{f_1'(z_0)}{2t} \quad \text{da } \sqrt{f_1(z_0)} = t,\\
f_3'(z_0) &= \frac{f_2'(z_0)}{1 - t^2} \quad \text{da } f_2(z_0) = t.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Kettenregel folgt nun

$$f_3'(z_0) = \frac{g'(z_0)\left(1 + t^2\right)}{2t}.$$

Für $0 < t < 1$ gilt aber $1 + t^2 > 2t$. Damit folgt $|f_3'(z_0)| > \varphi'(z_0)$. f_3 ist $1-1$ und analytisch. Multiplizieren wir also f_3 mit $e^{i\vartheta'}$, $\vartheta' \in \mathbb{R}$ geeignet, so ist $e^{i\vartheta'} f_3 \in \mathcal{F}$ und wegen $e^{i\vartheta'} f_3'(z_0) > M$ erhalten wir einen Widerspruch. Somit war φ schon surjektiv.

Der Riemannsche Abbildungssatz folgt. □

Literatur

1. Joseph Bak and Donald J. Newman, *Complex analysis*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.
2. John B. Conway, *Functions of one complex variable*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978.
3. Wolfgang Fischer and Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, vol. 47, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980, Aufbaukurs Mathematik.
4. Eberhard Freitag and Rolf Busam, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch., Springer-Verlag, Berlin, 1993.
5. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
6. Martin Väth, *Einführung in die Funktionentheorie I*, 2004, Lecture Notes, Freie Universität Berlin.

Oliver C. Schnürer, Universität Konstanz, 78457 Konstanz, Germany

E-mail address: Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de