O. Schnürer, J. Ehrt Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 1

Aufgabe 1:

Zeige, dass die Menge der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

bezüglich der komponentenweisen Addition und der Matrixmultiplikation einen Körper bilden. Beweise die Isomorphie aus Definition 1.3.

Aufgabe 2:

Wir betrachten die in der Vorlesung eingeführte stereographische Projektion

$$\mathcal{P} : \mathbb{C} \longrightarrow \partial B_{\frac{1}{2}}\left(\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

a) Zeige, dass das Bild eines Kreises in der komplexen Zahlenebene unter der stereographischen Projektion wieder ein Kreis ist.

b) Zeige, dass das Bild einer Geraden in der komplexen Zahlenebene unter der stereographischen Projektion ein Kreis auf der Kugel ist, dem der Pol $(0, 0, 1)$ fehlt (dem Kreis fehlt also genau ein Punkt, dieser ist immer der Pol der Kugel $(0, 0, 1)$).

c) Zeige, dass das Urbild eines Kreises unter der stereographischen Projektion ein Kreis oder eine Gerade ist. Eine Gerade erhält man genau dann, wenn der Kreis in der Zahlenkugel $\partial B_{1/2}((0,\ 0,\ 1/2))$ durch den Nordpol $(0,\ 0,\ 1)$ verläuft.

Aufgabe 3:

Sie $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom. Zeige, dass gilt:

$$P(x, y) \text{ ist analytisch} \iff P(x + iy, 0) = P(x, y).$$

Aufgabe 4:

a) Sei $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann $\bar{z}$ auch eine Nullstelle von P ist.

b) Bestimme die Nullstellen der Polynome $f(z) = z^4 + 1$ sowie $g(z) = z^3 - i$.

Abgabe: Bis Di., 26.04.2005, 14.00 Uhr, in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.