O. Schnürer, J. Ehrt Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Zeige, dass $f(z) = f(x,\, y) = e^x(\cos y + i \sin y)$ folgende Relationen erfüllt:

(i) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

(ii) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Beweise folgende Aussagen:

(i) $|e^z| = e^x$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$

(ii) $e^z \neq 0$

(iii) Für $\alpha \neq 0$ hat die Gleichung $e^z = \alpha$ genau abzählbar viele Lösungen.

(iv) $(e^z)' = (e^z)_x = e^z$.

c) Zeige, dass $|\sin z| < 1$ im Allgemeinen falsch ist.
d) Wir definieren die komplexe Tangensfunktion als $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$.
Zeige, dass diese eine ungerade, $\pi-$periodische Funktion ist.
(Hinweis: Drücke den Tangens durch e^{2iz} aus.)

Aufgabe 6:

Entwickle die komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ um den Punkt $z = 0$ als Potenzreihe und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 7:

Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} .$$

Zeige, dass die partiellen Ableitungen von f im Punkt $z = 0$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, dass f in $z = 0$ jedoch nicht komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 8:

Sei $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1$, und C eine Kurve um den Ursprung, gegeben durch $C : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Zeige, dass dann $\int_C z^k \,\mathrm{d}z = 0$ gilt, indem Du

a) eine Stammfunktion benutzt,

b) das Integral direkt unter Verwendung der Parametrisierung der Kurve C ausrechnest.

Berechne nochmals

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Abgabe: Bis Di., 3.05.2005, 14.00 Uhr, in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.