O. Schnürer, J. Ehrt Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 3

Aufgabe 9:

Zeige:
Eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, die nur reelle (oder nur rein imaginäre) Werte animmt, ist konstant.

Aufgabe 10:

Sei f eine ganze Funktion und C ein Kreis um den Ursprung. Zeige zuerst, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{k+1}} \mathrm{d}w \, .$$

Zeige dann hiermit den Satz von Liouville.

Aufgabe 11:

Verwende die vorherige Aufgabe um folgendes zu zeigen:

a) Sei f eine ganze Funktion und auf $|z| = R$ durch M beschränkt (es gelte also $|f(z)| \leq M \,\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$). Zeige, dass dann die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von f um den Ursprung beschränkt sind durch

$$|C_k| \leq \frac{M}{R^k}.$$

b) Sei g ein analytisches Polynom, das auf der Einheitskreisscheibe durch eins beschränkt ist. Zeige, dass dann die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von g auch durch eins beschränkt sind.

Aufgabe 12:

Beweise: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
- $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$,
- $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$.

Abgabe: Bis Di., 10.05.2005, 14.00 Uhr in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.