O. Schnürer, J. Ehrt Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 4

Aufgabe 13:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= a\cos(2\pi t) + ia\sin(2\pi t), \\ \beta(t) &= a\cos(2\pi t) + ib\sin(2\pi t). \end{aligned}$$

a) Zeige:

$$\int_\alpha \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_\beta \frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

b) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}.$$

Aufgabe 14:

Zeige, dass das Bild eines Gebietes unter einer analytischen, nicht-konstanten Funktion f wieder ein Gebiet ist.

Aufgabe 15:

Sei f eine C-analytische, nicht-konstante Funktion auf einem beschränkten Gebiet D.

(i) Zeige, dass dann $\mathrm{Re}f$ und $\mathrm{Im}f$ ihre Maxima und Minima auf dem Rand annehmen.

(ii) Zeige: Ist $f(z)$ ein Randpunkt von $f(D)$, dann ist z Randpunkt von D.

Aufgabe 16:

Sei f eine auf der Einheitskreisscheibe C-analytische Funktion und es gelte:

$$f(S^1) = S^1 \quad \text{mit} \quad S^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

f bildet also den Einheiskreis auf sich selbst ab.
Zeige, dass dann f die ganze Einheiskreisscheibe auf sich abbildet.
(Hinweis: Verwende die vorangegangene Aufgabe.)

Abgabe: Bis Di., 17.05.2005, 14.00 Uhr in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.