O. Schnürer, J. Ehrt Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionentheorie

Blatt 8

Aufgabe 29:

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und $\mathcal{K}$ sei die Menge aller kompakten nichtleeren Teilmengen von D. Zeige, dass dann $\mathcal{K}$ zusammen mit dem in der Vorlesung definierten Hausdorffabstand d_H einen metrischen Raum bildet.
Zeige ferner, dass $(\mathbb{P}(D),\ d_H)$ keinen metrischen Raum bildet.
Zusatz: $(\mathcal{K},\ d_H)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Aufgabe 30:

Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = z^2$. Zeige, dass dann gilt

$$J(f) = J_0(f) = S^1.$$

Hinweis: Auch das erste Gleichheitszeichen ist zu beweisen, da wir den Satz, dass dies für Polynome gilt, nicht bewiesen haben.

Aufgabe 31:

(i) Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein analytisches Polynom mit $\deg(f) \geq 2$. Zeige, dass dann für die Menge der nicht normalen Punkte $J_0(f)$ gilt:

$J_0(f)$ ist kompakt und nicht leer.

(ii) Sei $F_0(f)$ das Komplement von $J_0(f)$ in $\mathbb{C}$. Zeige, dass dann gilt $f(F_0(f)) \subset F_0(f)$.[1]

Aufgabe 32:

Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \in \mathbb{C}$, so dass die Windungszahl $n(\gamma, a)$ von γ um a ungleich null ist. Betrachte γ als stetige Abbildung der Kreislinie nach $\mathbb{C}$. Zeige, dass dann jede stetige Fortsetzung der Kurve γ auf die abgeschlossene Kreisscheibe irgendwo den Funktionswert a annimmt.

Zusatzaufgabe:

Sei $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definiert durch $f(x) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda \geq 0$. Für $\lambda > 4$ gibt es Punkte, die nicht mehr in das Intervall $[0, 1]$ abgebildet werden.
Sei nun $\lambda = 9/2$. Gibt es Punkte, die unter beliebigen Iterationen von f das Intervall $[0, 1]$ nicht verlassen? Wenn ja, wie sieht die Menge dieser Punkte aus? (Beschreibung und Beweis, dass dies genau die Menge ist.)

Abgabe: Bis Di, 14.06.2005, 14.00 Uhr, in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.

[1] $F_0(f)$ heißt Fatou Menge oder stabile Menge. Sie ist als Menge der Punkte definiert, in denen die Familie $\{f^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ normal ist.