FUNDAMENTALGRUPPEN

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Fundamentalgruppen an der Universität Konstanz im Wintersemester 2009/10.

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation – Beispiele

1.1. **Was macht man in der (algebraischen) Topologie?** In der Topologie betrachtet man Objekte nur bis auf stetige Deformationen. Man will also beispielsweise nicht zwischen einer Tasse und einem Ring unterscheiden, da sich diese beiden Objekte stetig ineinander überführen lassen.

In der algebraischen Topologie versucht man, topologischen Objekten algebraische Invarianten zuzuordnen, die sich unter solchen Deformationen nicht ändern. Mit diesen Invarianten kann man dann Objekte unterscheiden. Sie geben Obstruktionen (= Hindernisse) für mögliche Deformationen an.

Beachte aber, dass es hochgradig nichttrivial ist, so viele algebraische Invarianten anzugeben, dass bei Übereinstimmung aller dieser Invarianten auch eine Deformation zwischen den betrachteten Objekten möglich ist.

1.2. **Beispiele für topologische Invarianten.** Eine ganz einfache Invariante erhält man, wenn man die Zusammenhangskomponenten eines Raumes zählt.

Die Fundamentalgruppe beschreibt, welche nicht stetig ineinander überführbaren Möglichkeiten es gibt, eine $\mathbb{S}^1$ in einen Raum abzubilden.

Definition 1.1. Sei X ein topologischer Raum. (Ein topologischer Raum ist eine Verallgemeinerung eines metrischen Raumes.)

(i) Eine geschlossene Kurve (in X) ist eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 54-01, 55-01, 57-01; 57M05, 57M10.

(ii) Eine geschlossene Kurve ist *nullhomotop* (oder zusammenziehbar), wenn es eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$, eine Homotopie, mit den folgenden Eigenschaften gibt:
- $f(p,0) = \gamma(p)$ für alle $p \in \mathbb{S}^1$,
- $f(p,1) = f(q,1)$ für alle $p, q \in \mathbb{S}^1$.

Die Anfangskurve wird also in stetiger Weise zu einem konstanten Weg deformiert.

Beispiele 1.2.

(i) Wir betrachten hier $\mathbb{S}^1$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$
Die geschlossene Kurve $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ mit $p \mapsto p$ ist nullhomotop. Eine Homotopie f die dies zeigt ist $f(p,t) = (1-t)p$.

(ii) Die geschlossene Kurve $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $p \mapsto p$ ist „offensichtlicherweise" nicht nullhomotop. Dies ist nichttrivial und erfordert einen Beweis.

(iii) Betrachte eine Tasse mit einem geschlossenen Seil (eine $\mathbb{S}^1$) durch den Henkel. Dann lassen sich Seil und Tasse nicht trennen, d. h. so stetig deformieren, dass am Ende beide auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegen.

(iv) Betrachte eine Fläche vom Geschlecht 2, eine „Tasse mit zwei Henkeln". Führe ein geschlossenes Seil durch genau einen Henkel. Dann lassen sich Tasse und Seil so stetig deformieren, dass am Ende das Seil durch beide Henkel verläuft. Überraschenderweise ist also die Zahl, die angibt, durch wieviele Henkel ein Seil verläuft, keine Invariante.

Eine Visualisierung gibt es unter `www.youtube.com/watch?v=S5fPwE7GQOA`

Beispiel 1.3. Es gibt eine Möglichkeit, ein Bild mit Hilfe eines Seiles so an zwei Nägeln aufzuhängen, so dass es herunterfällt, wenn man einen beliebigen der beiden Nägel entfernt.

Dies ist die umgangssprachliche Formulierung zu dem folgenden Problem. (Ganz äquivalent sind die beiden Formulierungen jedoch nicht, da sich das Seil nicht selbst durchdringen kann. Probleme in diesem Zusammenhang vermeidet man jedoch, indem man das Seil stets von oben auf den bereits „verlegten" Teil des Seiles legt.)

Behauptung: Es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus N$, die für $N = \{(1,0)\}$ und $N = \{(0,1)\}$ nullhomotop ist, jedoch nicht für $N = \{(1,0),(0,1)\}$.

Die zweielementige Menge entspricht dabei der Situation, in der beide Nägel in der Wand stecken, die einelementige Menge genau einem Nagel in der Wand. Ist die Abbildung nullhomotop kann man daran kein Bild aufhängen, es fällt herunter.

Die (wahrscheinlich erst später verständliche Begründung) für das Hängenbleiben ist wie folgt: Die Abbildung γ ist im Wesentlichen dadurch charakterisiert, wie sich ihr Bild um die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ herumwindet. Beschreibe a eine Kurve, die sich einmal im Uhrzeigersinn um $(1,0)$ herumwindet und b eine Kurve, die sich einmal im Uhrzeigersinn um $(0,1)$ herumwindet. Dann ist γ als $ab^{-1}a^{-1}b$ definiert.

Hier ist die Konvention, dies von links nach rechts zu lesen, die Kurve windet sich also einmal im Uhrzeigersinn um $(1, 0)$ herum, dann einmal im Gegenuhrzeigersinn um $(0, 1)$, einmal im Gegenuhrzeigersinn um $(1, 0)$ und schließlich im Uhrzeigersinn um $(0, 1)$ herum. Dies ist gerade der Kommutator der beiden (erzeugenden) Elemente a und b^{-1}: $[a, b^{-1}]$. Wir werden später lernen, dass alle Kurven in der doppelt punktierten Ebene durch die freie Gruppe mit zwei Erzeugern beschrieben werden können.

Offensichtlich ist, dass die Kurve nullhomotop ist, wenn man einen der beiden Nägel entfernt. Man braucht nur die offensichtliche Homotopie als Formel hinzuschreiben. Algebraisch: Das Entfernen eines Nagels entspricht einer zusätzlichen Relation $a = 1$ und $b^{-1}b$ ist trivial.

In der einfach punktierten Ebene genügt die (vielleicht aus der Funktionentheorie oder vom Abbildungsgrad her bekannte) Umlaufzahl. Diese ist nach Entfernen von einem der beiden Nägel trivial und damit ist die Kurve zusammenziehbar. Bei zwei Nägeln ist die Umlaufzahl um jeden einzelnen der beiden Nägel ebenfalls Null. Trotzdem ist die Kurve aber nicht zusammenziehbar.

Beachte: Solange beide Nägel in der Wand stecken ist keineswegs offensichtlich, dass die Kurve nicht nullhomotop ist. Dies beruht darauf, dass $ab^{-1}a^{-1}b$ ein nichttriviales Element der Fundamentalgruppe ist. Die Details dazu gibt es später in der Vorlesung.

Aufgabe 1.1. Wie hängt man ein Bild mit einem Seil so an drei Nägel, dass das Bild herunterfällt, wenn man einen beliebigen Nagel entfernt?

Zusatz: Untersuche weitere Fragen wie beispielsweise: Wie hängt man ein Bild so an drei Nägel, dass es herunterfällt, wenn man zwei beliebige Nägel entfernt? Wie lassen sich mit einem solchen Vorgehen logische Formeln umsetzen? Welche Bedingungen muss eine logische Formel erfüllen, damit sie sich in dieser Weise logisch umsetzen lässt?

Das folgende Theorem wurde 2002/3 von Grisha Perelman (in allgemeinerer Form) bewiesen.

Theorem 1.4. *Sei M eine geschlossene einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist M homöomorph zu einer dreidimensionalen Sphäre.*

Diese Version ist als Poincarévermutung bekannt. Die zentrale Annahme ist, dass M einfach zusammenhängend ist, also eine triviale Fundamentalgruppe hat; wir werden das später noch genau definieren. Die Poincarévermutung wurde mit Hilfe des Ricciflusses bewiesen. Der Beweis macht noch allgemeinere Aussagen über dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeiten.

Zur Poincarévermutung gibt es Verallgemeinerungen für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Hierbei nimmt man an, dass alle Homotopiegruppen mit denen der Sphäre übereinstimmen. Diese Vermutung ist für alle n bekannt:

- $n = 0, 1, 2$: Gibt es nicht bzw. einfach
- $n \geq 5$: Stephen Smale 1960, Fields-Medaille
- $n = 4$: Michael Freedman 1982, Fields-Medaille

- $n = 3$: Grischa Perelman 2002/3, Fields-Medaille, abgelehnt

Homotopiegruppen sind Verallgemeinerungen der Fundamentalgruppe. Statt Abbildungen von $\mathbb{S}^1$ in einen topologischen Raum betrachtet man Abbildungen von $\mathbb{S}^n$. Homotopiegruppen werden in der algebraischen Topologie betrachtet.

2. Grundlagen der menengentheoretischen Topologie

2.1. **Topologische Räume.**

Definition 2.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X bzw. eine Menge von Teilmengen von X oder $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h.
$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i \in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h.
$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

Definition 2.2 (Topologischer Raum)**.**

(i) Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist. (Wir werden später auch sagen, dass X ein topologischer Raum ist, wenn es bei der Wahl der Topologie nicht zu Verwechslungen kommen kann.)

(ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt genau dann offen, wenn $A \in \mathcal{O}$ gilt.

(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt genau denn abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, $(X \setminus A) \in \mathcal{O}$.

Definition 2.3 (Umgebung)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt Umgebung von x, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subset U$ gibt. Ist U zusätzlich offen, so heißt U eine offene Umgebung von x. Die Menge aller Umgebungen von x heißt Umgebungssystem und wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

Definition 2.4 (Rand, . . .)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) $x \in X$ heißt Berührpunkt von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.

(ii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt Abschluss (oder abgeschlossene Hülle) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

(iii) Ein Punkt x ist ein innerer Punkt von A, falls A eine Umgebung von x ist.

(iv) Das Innere von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\dot{A}$ bezeichnet, der einfachereren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.

(v) Ein Punkt x heißt Randpunkt, $x \in \partial A$, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

2.2. **Stetige Abbildungen.**

Definition 2.5 (Stetigkeit)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig (von $(X, \mathcal{O}_1)$ nach $(Y, \mathcal{O}_2)$), falls die Urbilder beliebiger offener Mengen in $(Y, \mathcal{O}_2)$ offene Mengen in $(X, \mathcal{O}_1)$ sind, d. h.

$$\underset{O \in \mathcal{O}_2}{\forall} f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1.$$

Der folgende kurze Beweis zeigt die Vorteile der topologischen Definition der Stetigkeit gegenüber der ε-δ-Definition.

Satz 2.6. *Seien $(X, \mathcal{O}_1)$, $(Y, \mathcal{O}_2)$ und $(Z, \mathcal{O}_3)$ topologische Räume. Sind die Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so ist auch die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Ist $A \subset Z$ offen, so auch $g^{-1}(A)$ und $f^{-1} \circ g^{-1}(A)$ und damit $(g \circ f)^{-1}(A)$. □

Die Bilder von offenen oder abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen sind im allgemeinen nicht offen oder abgeschlossen.

Definition 2.7 (Homöomorphismus)**.** Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Homöomorphismus oder topologische Abbildung, falls f und f^{-1} stetig sind.

Definition 2.8 (Induzierte Topologie)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann ist das Mengensystem

$$\mathcal{O}_A := \{B \subset A : \exists\, C \in \mathcal{O} \text{ so dass } B = C \cap A\}$$

eine Topologie auf A, die induzierte Topologie, Relativtopologie, Unterraumtopologie oder Spurtopologie.

Bemerkung 2.9. Man rechnet direkt nach, dass $\mathcal{O}_A$ tatsächlich eine Topologie auf A ist.

Satz 2.10. *Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes und*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für alle i die Restriktionen $f|_{A_i}$ stetig sind.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $O \subset Y$ offen. Aufgrund der Stetigkeit ist auch $f^{-1}(O) \subset X$ offen. Nach Definition der Relativtopologie, Definition 2.8, ist somit

$$(f|_{A_i})^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A_i \subset A$$

offen. Daher ist $f|_{A_i}$ stetig.

„$\Longleftarrow$“: Sei B eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Wir wollen nachweisen, dass $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) =& f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \\ =& \bigcup_{i=1}^n \left(f^{-1}(B) \cap A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (f|_{A_i})^{-1}(B) \end{aligned}$$

Da $f|_{A_i}$ stetig ist, ist $(f|_{A_i})^{-1}(B)$ in A_i abgeschlossen. Da A_i selber abgeschlossen ist, ist $(f|_{A_i})^{-1}(B)$ auch in X abgeschlossen. Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen. Also ist $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen. □

Definition 2.11 (Feinheit)**.** Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf einer Menge X. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ gröber als $\mathcal{O}_1$, falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ ist, d. h., falls jede offene Menge bezüglich der Topologie von $\mathcal{O}_2$ auch bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_1$ offen ist.

2.3. **Erzeugung topologischer Räume.**

Definition 2.12 (Finaltopologie)**.** Sei E eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_i : X_i \to E)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Eine Topologie auf E heißt Finaltopologie bezüglich der Familie $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$, falls sie die folgende Eigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & E \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : E \to Y$ ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für jedes $i \in I$ stetig ist.

Satz 2.13 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.** *Definiere*

$$\mathcal{M}_i := \left\{ O \subset E : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i \right\}$$

und $\mathcal{M} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$. *Dann ist* $\mathcal{M}$ *die Finaltopologie auf* E.

Die Finaltopologie auf E *bezüglich der Familie* $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$ *ist die feinste Topologie auf* E*, für die alle Abbildungen* f_i *stetig sind. Sie ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nehme an, E trage die Finaltopologie. Setze $Y = E$ und $g = \mathrm{id}$. Dann ist g stetig. Somit ist nach Definition der Finaltopologie auch $f_i : X_i \to E$ stetig.

Sei $h : A \to B$ eine stetige Abbildung. Betrachtet man eine feinere Topologie auf B, so wird h möglicherweise unstetig, betrachtet man eine gröbere Topologie auf B, so bleibt h stetig. Die feinste Topologie auf E, so dass die Abbildung f_i stetig ist, ist durch $\mathcal{M}_i := \{O \subset E : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i\}$ gegeben. Wegen $h^{-1}(A \cap B) = h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$ und $h^{-1}(A \cup B) = h^{-1}(A) \cup h^{-1}(B)$ und den entsprechenden Verallgemeinerungen auf beliebige Schnitte und Vereinigungen handelt es sich dabei tatsächlich um eine Topologie. Weiterhin ist $\mathcal{M} := \bigcap\limits_{i\in I}$ eine Topologie auf E. Dies ist die feinste Topologie auf E, so dass alle $f_i : X_i \to E$ stetig sind.

Sei $\mathcal{O}$ eine weitere Topologie auf E, die die Eigenschaften der Finaltopologie erfüllt. Dann kann $\mathcal{O}$ höchstens gröber als $\mathcal{M}$ sein. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & (E,\mathcal{O}) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ & (E,\mathcal{M}). \end{tikzcd}$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Abbildungen f_i stetig sind. Ist aber $\mathcal{M}$ echt feiner als $\mathcal{O}$, so ist die Identität nicht stetig. Nach Definition der Finaltopologie ist daher auch $f_i : X_i \to (E, \mathcal{M})$ nicht stetig. Widerspruch. Somit ist die Finaltopologie, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt.

Wir müssen noch die Eigenschaften der Finaltopologie für $\mathcal{M}$ nachrechnen. Sei $g : E \to Y$ stetig. Dann ist auch $g \circ f_i$ stetig. Sei umgekehrt $g \circ f_i$ stetig. Sei $A \subset Y$ offen. Dann ist $f_i^{-1}(g^{-1}(A))$ für alle $i \in I$ offen. Nach Definition von $\mathcal{M}_i$ ist daher $g^{-1}(A)$ in allen Mengen $\mathcal{M}_i$ enthalten und somit auch in $\mathcal{M}$. Daher ist $g^{-1}(A)$ in $(E, \mathcal{M})$ offen. g ist also stetig und $(E, \mathcal{M})$ erfüllt die Definition der Finaltopologie. $\square$

Definition 2.14 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion auf die Äquivalenzklassen $X/\sim$. Die finale Topologie auf $X/\sim$ bezüglich π heißt Quotiententopologie auf $X/\sim$. Versehen mit dieser Topologie heißt $X/\sim$ Quotientenraum oder Faktorraum bezüglich der Relation $\sim$.

Beispiele 2.15.

(i) Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Der Quotientenraum $\mathbb{R}/\sim$ ist homöomorph zum Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

(ii) Sei $E := \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} X_i$ die disjunkte Vereinigung topologischer Räume. Seien f_i die Inklusionsabbildungen. Dann ist eine Menge A in E bezüglich der Finaltopologie genau dann offen, wenn $A \cap f_i(X_i)$ für alle i offen ist.

Definition 2.16 (Zusammenkleben von Räumen)**.** Seien X und Y disjunkte topologische Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren auf $X \cup Y$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z_1 \sim z_2 :\iff \begin{cases} (z_1,\, z_2 \in A & \text{und} \quad f(z_1) = f(z_2)) \quad \text{oder} \\ (z_1 \in A,\, z_2 \in f(A) & \text{und} \quad f(z_1) = z_2) \quad \text{oder} \\ (z_2 \in A,\, z_1 \in f(A) & \text{und} \quad f(z_2) = z_1) \quad \text{oder} \\ & \quad (z_1 = z_2). \end{cases}$$

Den Faktorraum $(X \cup Y)/\sim$ bezeichnen wir mit $Y \cup_f X$. $Y \cup_f X$ heißt der durch Zusammenkleben von X mit Y mittels f entstandene Raum.

CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead eingeführt. Sie werden induktiv definiert. (CW steht für "closure-finite weak topology".)

Definition 2.17 (CW-Komplex)**.** Ein nulldimensionaler CW-Komplex ist eine Menge von Punkten, die mit der diskreten Topologie versehen ist.

Ein n-dimensionaler CW-Komplex ist ein Raum der Form $X \cup_f e_I^n$, wobei f stetig, X ein k-dimensionaler CW-Komplex mit $k < n$ und $e_I^n = \bigcup\limits_{i \in I} (e_i^n \times \{i\})$ die topologische Summe von n-Zellen mit $n \geq 1$ ist.

Beispiele 2.18.

(i) $\mathbb{S}^2$ ist homöomorph zu einem zweidimensionalen CW-Komplex. Man klebt zunächst eine 1-Zelle e^1 an einen Punkt und erhält einen zu $\mathbb{S}^1$ homöomorphen Raum. Durch Ankleben von zwei 2-Zellen e_1^2 und e_2^2 an den entstandenen Raum erhält man einen zu $\mathbb{S}^2$ homöomorphen Raum.

(ii) Man erhält auch einen zu einer $\mathbb{S}^2$ homöomorphen CW-Komplex, indem man eine 2-Zelle an einen Punkt klebt.

(iii) Klebt man eine n-Zelle an einen Punkt, so erhält man einen n-dimensionalen CW-Komplex homöomorph zu $\mathbb{S}^n$.

Definition 2.19 (Basis)**.** Eine Familie $\mathcal{B}$ von offenen Mengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, wenn jede offene Menge von $(X, \mathcal{O})$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Definition 2.20 (Produkttopologie)**.** Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Definiere $X := \prod\limits_{i \in I} X_i$ sowie die natürlichen Projektionen $p_i : X \to X_i$ durch $X \ni x = (x^j)_{j \in I} \mapsto x^i \in X_i$.

Auf X definieren wir Elementarmengen: Sei $K \subset I$ endlich und $O_k \subset X_k$ für alle $k \in K$ offen. Dann heißt

$$\bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(O_k)$$

Elementarmenge von X. Die Elementarmengen bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ (da insbesondere endliche Schnitte von Elementarmengen wieder offen sind). Diese Topologie heißt Produkttopologie. $(X, \mathcal{O})$ heißt Produktraum oder topologisches Produkt der $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$.

Die Produkttopologie ist ein Beispiel für eine Initialtopologie (ohne Beweis):

Definition 2.21 (Initialtopologie)**.** Sei E eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $(f_i : E \to X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. Eine Topologie auf E heißt Initialtopologie bezüglich $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i \in I}$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : Y \to E$ ist g genau dann eine stetige Abbildung, wenn $f_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig ist.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & E \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd}$$

Beispiele 2.22.

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ stimmt die natürliche Topologie mit der Produkttopologie überein.

(ii) Seien X_i topologische Räume und $A_i \subset X_i$. Dann stimmt auf $\prod A_i \subset \prod X_i$ die Unterraumtopologie der Produkttopologie von $\prod X_i$ mit der Produkttopologie der Unterraumtopologie der $A_i \subset X_i$ überein.

3. Die Fundamentalgruppe: Erste Konstruktionen

Die Fundamentalgruppe beschreibt in einem gegebenen Raum alle geschlossenen Kurven bis auf stetige Deformationen. Wie in Beispiel 1.3 kann man mit ihrer Hilfe angeben, dass sich ein Knoten nicht auflösen lässt. Weitere Beispiele befinden sich in [2], wonach wir auch vorgehen.

3.1. **Wege und Homotopien.**

Definition 3.1.

(i) Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $f : I \equiv [0,1] \to X$.

(ii) Eine *Homotopie* von Wegen in X ist eine Familie $f_t : I \to X$, $0 \le t \le 1$, so dass

   (a) die Endpunkte (bzw. Anfangspunkte) $f_t(0) =: x_0$ und $f_t(1) =: x_1$ von t unabhängig sind.

   (b) die Abbildung $F : I \times I \to X$ mit $F(s,t) := f_t(s)$ stetig ist.

(iii) Gibt es zwischen zwei Wegen f_0 und f_1 eine solche Homotopie f_t, so heißen sie *homotop*. Wir schreiben $f_0 \simeq f_1$.

(iv) Ein Weg f heißt *nullhomotop*, wenn er homotop zu einem konstanten Weg c ist. (Ein Weg c heißt konstant, wenn $c(s) = x_0$ für ein $x_0 \in X$ und für alle $0 \le s \le 1$ gilt.)

Beispiel 3.2. Seien f_0 und f_1 im $\mathbb{R}^n$ Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten x_0 bzw. x_1. Dann sind f_0 und f_1 homotop, $f_0 \simeq f_1$. Es genügt konvex zu interpolieren: $f_t(s) := (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$. Daher gilt eine solche Aussage auch für Wege in konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.3. *Die Homotopierelation auf Wegen mit fixierten Endpunkten in einem topologischen Raum ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexivität $f \simeq f$ ist klar, $f_t = f$ ist die gewünschte Homotopie. Ist f_t eine Homotopie zwischen f und g, so ist f_{1-t} eine Homotopie zwischen g und f. Somit folgt die Symmetrie.

Zur Transitivität: Sei $f_0 \simeq f_1$ vermöge der Homotopie f_t und $g_0 \simeq g_1$ vermöge der Homotopie g_t. Sei $f_1 = g_0$. Dann ist h_t, definiert durch

$$h_t := \begin{cases} f_{2t} & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g_{2t-1} & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen f_0 und g_1. Diese beiden Teildefinitionen stimmen für $t = \frac{1}{2}$ überein und die Stetigkeit von $H(s,t) := h_t(s)$ folgt aus Satz 2.10. □

Definition 3.4 (Homotopieklasse)**.** Die Äquivalenzklasse aller zu einem festen Weg f homotopen Wege heißt *Homotopieklasse* von f und wird mit $[f]$ bezeichnet.

Das nun definierte Produkt von Wegen bezeichnet das Nacheinander-Durchlaufen von zwei Wegen mit doppelter Geschwindigkeit.

Definition 3.5 (Produkt von Wegen)**.** Seien f, $g : I \to X$ Wege in einem topologischen Raum mit $f(1) = g(0)$. Dann definieren wir ein Produkt von f und g als

$$f \cdot g(s) := \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ g(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Bemerkung 3.6. Beachte, dass bei dieser Definition zunächst der links stehende Weg durchlaufen wird (anders als bei der Verkettung von Abbildungen).

Diese Definition des Produktes von Wegen induziert auch ein Produkt auf Homotopieklassen von Wegen. Denn seien $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$ homotop vermöge Homotopien f_t und g_t, so dass $f_0(1) = g_0(0)$ ist (also $f_0 \cdot g_0$ definiert ist), dann ist auch $f_t \cdot g_t$ definiert und liefert eine Homotopie, die $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ zeigt. Wir definieren $[f_0] \cdot [g_0] := [f_0 \cdot g_0]$.

Definition 3.7.

(i) Wege, bei denen $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ gilt, heißen geschlossene Wege. x_0 heißt Basispunkt.

(ii) Die Menge aller Homotopieklassen $[f]$ geschlossener Wege $f : I \to X$ mit Basispunkt x_0 wird mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet. $\pi_1(X, x_0)$ heißt *Fundamentalgruppe* (oder *erste Homotopiegruppe*) von X zum Basispunkt x_0.

Die folgende Proposition rechtfertigt den Namen Fundamentalgruppe.

Proposition 3.8. *Sei X ein topologischer Raum mit $x_0 \in X$. Dann ist die Menge $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe bezüglich des Produktes $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$.*

Beweis. Da wir nur Wege mit Endpunkten x_0 betrachten, können wir solche Wege hintereinander durchlaufen. Wir hatten gesehen, dass die angegebene Produktoperation unabhängig vom gewählten Repräsentanten der Homotopieklasse, also wohldefiniert, ist.

Assoziativität: Zeige, dass $(f \cdot g) \cdot h \simeq f \cdot (g \cdot h)$ für alle f, g, h mit $[f]$, $[g]$, $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt, was äquivalent zu $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ ist.

Zunächst einmal betrachten wir Umparametrisierungen. Sei $\varphi : I \to I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann ist die Verknüpfung $f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von f. Unter Reparametrisierungen ändert sich die Homotopieklasse nicht, denn $f \circ \varphi \simeq f$ vermöge der Homotopie $f \circ \varphi_t$ mit $\varphi_t(s) := (1-t)\varphi(s) + ts$, da $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1(s) = s$ gelten. Da $\varphi_t(s) \in I$ für alle $(s,t) \in I^2$ gilt, ist $f \circ \varphi_t$ wohldefiniert.

Für f, g, h mit $[f]$, $[g]$, $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$. Also sind die Verknüpfungen wohldefiniert. In $(f \cdot g) \cdot h$ und $f \cdot (g \cdot h)$ werden jeweils die Wege

f, g und h hintereinander durchlaufen, jedoch in unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die beiden Produkte sind also gerade Umparametrisierungen voneinander, also insbesondere homotop zueinander.

Auch die Verknüpfung von einem Weg f mit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ mit dem konstanten Weg $c(s) = x_0$ für alle $s \in I$ ist lediglich eine Umparametrisierng von f. Es gilt daher $[f] = [f \cdot c] = [c \cdot f]$.

Die Aussagen der letzten beiden Abschnitte bleiben richtig, sobald $f \cdot g$ wohldefiniert ist. Man benötigt hierfür nicht, dass alle Endpunkte übereinstimmen.

Sei $f : I \to X$ ein Weg von $f(0) = x_0$ nach $f(1) = x_1$. Definiere den dazu inversen Weg $\overline{f} : I \to X$ durch $\overline{f}(s) := f(1-s)$. Definiere weiterhin

$$f_t(s) := \begin{cases} f(s) & 0 \leq s \leq 1-t, \\ f(1-t) & 1-t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist $h_t := f_t \cdot \overline{f_t}$ eine Homotopie, die zeigt, dass $f \cdot \overline{f}$ homotop zu einem konstanten Weg ist. Analog folgt auch, dass $\overline{f} \cdot f$ homotop zu einem konstanten Weg ist. Somit ist $\overline{f}$ ein beidseitiges Inverses zu f mit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

Daher ist $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe. □

Beispiel 3.9. Es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da sich im $\mathbb{R}^n$, wie wir in Beispiel 3.2 gesehen haben, alle geschlossenen Wege zu einem Punkt zusammenziehen lassen.

Wir wollen nun die Homotopiegruppen für unterschiedliche Basispunkte vergleichen.

Proposition 3.10. *Sei X ein topologischer Raum, x_0, $x_1 \in X$. Sei h ein Weg von x_0 nach x_1 und $\overline{h}$ der umgekehrt durchlaufene Weg. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \beta_h : \pi_1(X, x_1) &\to \pi_1(X, x_0), \\ \beta_h[f] &:= \left[h \cdot f \cdot \overline{h}\right] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir benutzen die Abkürzung $\beta_h[f]$ für $\beta_h([f])$.

Zunächst einmal ist zu zeigen, dass die Definition von der Wahl des Repräsentanten in der Homotopieklasse unabhängig ist. Ist f_t eine Homotopie zwischen Wegen mit Basispunkt x_1, so ist $h \cdot f_t \cdot \overline{h}$ eine Homotopie zwischen Wegen mit Basispunkt x_0. Daher ist β_h auf Homotopieklassen wohldefiniert.

Die Abbildung β_h ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt

$$\begin{aligned} \beta_h([f] \cdot [g]) &= \beta_h[f \cdot g] = \left[h \cdot f \cdot g \cdot \overline{h}\right] = \left[h \cdot f \cdot \overline{h} \cdot h \cdot g \cdot \overline{h}\right] \\ &= \left[h \cdot f \cdot \overline{h}\right] \cdot \left[h \cdot g \cdot \overline{h}\right] = \beta_h[f] \cdot \beta_h[g]. \end{aligned}$$

Die Inverse von β_h ist durch $\beta_{\overline{h}}$ gegeben, denn es gilt $\beta_h \beta_{\overline{h}}[f] = \beta_h \left[\overline{h} \cdot f \cdot h\right] = \left[h \cdot \overline{h} \cdot f \cdot h \cdot \overline{h}\right] = [f]$. Analog rechnet man für die Inverse nach, dass $\beta_{\overline{h}} \beta_h[f] = [f]$ gilt. □

Bemerkung 3.11. Ist also X wegzusammenhängend, so hängt $\pi_1(X,x_0)$ – bis auf Gruppenisomorphismen – nicht vom Basispunkt x_0 ab. Daher schreiben wir auch $\pi_1(X)$ oder $\pi_1 X$. Wir sprechen dann auch einfach von der Fundamentalgruppe ohne einen Basispunkt explizit zu erwähnen.

Definition 3.12 (einfach zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend ist und eine triviale Fundamentalgruppe (aus nur einem Element bestehend) besitzt.

Proposition 3.13. *Ein Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte x_0, $x_1 \in X$ bis auf Homotopie nur genau einen Weg von x_0 nach x_1 gibt.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg, der zwei beliebige Punkte in X miteinander verbindet. Nehme an, dass $\pi_1(X) = \{1\}$ gilt. Seien x_0, $x_1 \in X$ und seien f und g zwei Wege von x_0 nach x_1. Nach Voraussetzung sind dann die geschlossenen Wege $\overline{g} \cdot g$ und $f \cdot \overline{g}$ nullhomotop, denn sie haben jeweils gleiche Start- und Endpunkte. Also gilt $f \simeq f \cdot \overline{g} \cdot g \simeq g$ und die Behauptung folgt.

„$\Longleftarrow$“: Gibt es – bis auf Homotopie – nur einen Weg von x_0 nach x_0, dann ist nach Definition die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ trivial. □

3.2. **Die Fundamentalgruppe des Kreises.** Wir wollen nun nachweisen, dass $\pi_1\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{Z}$ ist, also – bis auf einen Gruppenisomorphismus – $\pi_1\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{Z}$ übereinstimmen. Wir sagen dann auch, dass $\mathbb{Z}$ die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^1$ ist. Dies folgt aus dem folgenden Theorem. Den Beweis führen wir so, dass er implizit das Konzept einer Überlagerung benutzt, das wir später noch allgemeiner kennenlernen werden.

Theorem 3.14. *Die Abbildung $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$, wobei eine ganze Zahl n auf die Homotopieklasse des Weges $[0,1] \ni s \mapsto \omega_n(s) := (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$ (mit Basispunkt $(1,0)$) abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Beweisidee ist es, Wege in $\mathbb{S}^1$ mit solchen in $\mathbb{R}$ zu vergleichen. Dazu verwenden wir die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, definiert durch $p(x) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Diese Abbildung lässt sich geometrisch durch die Einbettung von $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^3$ als Helix, parametrisiert duch $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, s)$, visualisieren. Dann ist p gerade die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ auf die ersten beiden Komponenten $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Somit ist der geschlossene Weg ω_n gerade die Verknüpfung $p \circ \tilde{\omega}_n$, wobei $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ identifiziert mit der Helix) gerade die Abbildung mit $\tilde{\omega}_n(s) = ns$ ist, die 0 mit n verbindet und sich dabei $|n|$-mal um die Helix (nach oben oder unten, je nach Vorzeichen von n) windet. Die Identität $\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n$ besagt dann gerade, dass $\tilde{\omega}_n$ der Abbildung ω_n überlagert ist. (Dies werden wir in Kapitel 5 noch genau definieren.)

Die Abbildung Φ kann man nun auch wie folgt definieren: Definiere $\Phi(n)$ als die Homotopieklasse der geschlossenen Kurve $p \circ \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}$ ein beliebiger Weg in $\mathbb{R}$ von 0 nach n ist. Solch eine Abbildung $\tilde{f}$ ist zu $\tilde{\omega}_n$ vermöge der linearen Homotopie $(1-t)\tilde{f} + t\tilde{\omega}_n$ homotop. Daher ist auch $p \circ \tilde{f}$ zu $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ homotop und somit stimmt die alte Definition von $\Phi(n)$ mit der neuen überein.

Um nachzuweisen, dass Φ ein Homomorphismus ist, definieren wir für $m \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\tau_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Translation $\tau_m(x) := x + m$. Dann ist $\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ ein Weg von 0 nach $m + n \in \mathbb{R}$, also ist $\Phi(m + n)$ die Homotopieklasse in $\mathbb{S}^1$ dieses Weges unter der Abbildung p. Es gilt aber $p(\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)) = \omega_m \cdot \omega_n$. Somit ist $\Phi(m + n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n)$.

Um nachzuweisen, dass Φ ein Isomorphismus ist, wollen wir die folgenden beiden Tatsachen benutzen (und später beweisen):

(i) Zu jedem Weg $f : I \to \mathbb{S}^1$, der im Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^1$ beginnt, und zu jedem Punkt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, die f überlagert ist, d. h., es gibt eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{f}$, die das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

(ii) Zu jeder Homotopie $f_t : I \to \mathbb{S}^1$ von Wegen, die in x_0 beginnen und für jedes $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ gibt es eine eindeutige überlagernde Homotopie $\tilde{f}$ von Wegen, die in $\tilde{x}_0$ beginnen. Die folgenden Diagramme sind also kommutativ:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & \tilde{f}_t(s) \arrow[d, mapsto, "p"] \\ (s,t) \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f_t(s). \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun zunächst mit diesen beiden Tatsachen das Theorem beweisen und dann die Beweise für die angegebenen Aussagen in einem Lemma nachholen.

Surjektivität: Um zu zeigen, dass die Abbildung Φ surjektiv ist, betrachten wir einen Weg $f : I \to \mathbb{S}^1$ mit Basispunkt $(1, 0)$, der ein Element in $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ repräsentiert. Nach (i) finden wir einen dem Weg f überlagerten Weg $\tilde{f}$, der im Punkt 0 beginnt. Dieser Weg $\tilde{f}$ endet in einer ganzen Zahl n, da $p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = (1, 0)$ gilt und $p^{-1}(\{(1, 0)\}) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist. Wir benutzen nun die erweiterte Definition von Φ und erhalten $\Phi(n) = \left[p \circ \tilde{f}\right] = [f]$. Daher ist Φ surjektiv.

Injektivität: Nehme an, dass $\Phi(m) = \Phi(n)$ ist. Wir wollen also nachweisen, dass $m = n$ ist. Nach Definition folgt aus $\Phi(m) = \Phi(n)$ gerade, dass $\omega_m \simeq \omega_n$ ist. Sei also f_t eine Homotopie von $\omega_m = f_0$ nach $\omega_n = f_1$. Nach (ii) gibt es eine eindeutig bestimmte f überlagerte Homotopie $\tilde{f}_t$, die im Punkt 0 beginnt. Ebenso gibt es nach (i) überlagernde Abbildungen $\tilde{\omega}_m$ und $\tilde{\omega}_n$ zu ω_m und ω_n, die auch jeweils im Punkte 0 starten. Aufgrund der Eindeutigkeit der überlagernden Abbildungen gilt daher $\tilde{f}_0 = \tilde{\omega}_m$ und $\tilde{f}_1 = \tilde{\omega}_n$. Nun ist aber $\tilde{f}_t$ eine Homotopie von Wegen. Also ist insbesondere der Endpunkt $\tilde{f}_t(1)$ unabhängig von t. Für $t = 0$ gilt $\tilde{f}_0(1) = \tilde{\omega}_m(1) = m$ und für $t = 1$ erhalten wir $\tilde{f}_1(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$. Somit gilt $m = n$. □

Statt die beiden Behauptungen (i) und (ii) zu beweisen, zeigen wir die folgende allgemeinere Behauptung:

Lemma 3.15. *Sei Y ein topologischer Raum, $F : Y \times I \to \mathbb{S}^1$ stetig und $\tilde{F} : Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ eine $F|_{Y\times\{0\}}$ überlagerte Abbildung, d. h. es gilt $p \circ \left(\tilde{F}|_{Y\times\{0\}}\right) = F|_{Y\times\{0\}}$ mit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ wie in Theorem 3.14. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde{F} : Y \times I \to \mathbb{R}$, die F überlagert ist, d. h. es gilt $p \circ \tilde{F} = F$, so dass $\tilde{F}$ eine Fortsetzung der oben angegebenen Abbildung $\tilde{F} : Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ ist.*

Hieraus folgen dann die Behauptungen (i) und (ii) im Theorem 3.14, wenn wir für Y einen einpunktigen Raum $\{q\}$ bzw. I wählen. Behauptung (i) ist damit direkt klar, da wir $\tilde{F}((q,0))$ vorgeben. Für Behauptung (ii) betrachten wir wie üblich die Abbildung $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$, die durch $F(s,t) := f_t(s)$ definiert ist. Wir wenden nun (i) an, um die eindeutig bestimmte überlagernde Abbildung $\tilde{F} : I \times \{0\} \to \mathbb{R}$ mit vorgegebenem Anfangspunkt $\tilde{F}(0,0)$ zu bekommen. Dann liefert Lemma 3.15 eine eindeutig bestimmte überlagernde Abbildung $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$. Die Einschränkungen $\tilde{F}|_{\{0\}\times I}$ und $\tilde{F}|_{\{1\}\times I}$ sind konstanten Wegen überlagert, also aufgrund der Eindeutigkeit der überlagernden Abbildungen mit fixiertem Anfangspunkt wieder konstante Wege. Somit ist $\tilde{f}_t(s) := \tilde{F}(s,t)$ eine Homotopie von Wegen und $\tilde{f}_t$ ist f_t überlagert, denn es gilt $p \circ \tilde{F} = F$.

Beweis von Lemma 3.15. Wir wollen benutzen, dass es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von $\mathbb{S}^1$ gibt, so dass für jedes α die Mengen $p^{-1}(U_\alpha)$ sich als disjunkte Vereinigung von Mengen homöomorph zu U_α darstellen lassen und die Abbildung p ein solcher Homöomorphismus ist. Dies ist offensichtlich, wenn wir $\mathbb{S}^1$ nur fein genug zerlegen (zwei offene Kreisbögen genügen). Beachte für später, wenn wir eine analoge Aussage für allgemeinere Überlagerungen zeigen wollen, dass wir im Folgenden nur diese Eigenschaft von p ausnützen.

Sei $y_0 \in Y$. Wir wollen zunächst eine überlagernde Abbildung $\tilde{F} : N \times I \to \mathbb{R}$ konstruieren, wobei N eine Umgebung von y_0 ist. Da die Abbildung F stetig ist, besitzt jeder Punkt $(y_0, t) \in Y \times I$ eine Umgebung in Produktform der Gestalt $N_t \times (a_t, b_t)$ (geschnitten mit dem Definitionsbereich), so dass $F(N_t \times (a_t, b_t)) \subset U_\alpha$ für ein α gilt. Aufgrund der Kompaktheit überdecken bereits endlich viele dieser Umgebungen die Menge $\{y_0\} \times I$. Daher können wir eine feste Umgebung N von y_0 wählen und Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, so dass für jedes i die Menge $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ in einem U_α enthalten ist. Dieses wollen wir mit U_i bezeichnen. Nehme nun induktiv an, dass $\tilde{F}$ auf $N \times [0, t_i]$ bereits konstruiert sei. Nach Voraussetzung gilt $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Daher gibt es eine Menge $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}$, die unter p homöomorph auf U_i abgebildet wird und die $\tilde{F}(y_0, t_i)$ enthält. Nun braucht nicht $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subset \tilde{U}_i$ zu gelten (z. B. wenn N nicht zusammenhängend ist), aber wir können dies erreichen, indem wir die Umgebung $N \in \mathcal{U}(y_0)$ verkleinern; wir wählen dazu statt $N \times \{t_i\}$ die Menge $\left(\tilde{F}|_{N\times\{t_i\}}\right)^{-1}\left(\tilde{U}_i\right)$, schreiben aber weiterhin N. Nun können wir $\tilde{F}$ auf $N \times [t_i, t_{i+1}]$ durch $\tilde{F} := p_i^{-1} \circ F$ definieren, wobei $p_i : \tilde{U}_i \to U_i$ der Homöomorphismus ist, den man aus p durch Einschränkung erhält. Nach endlich vielen solchen Schritten erhalten wir dann eine überlagernde Abbildung $\tilde{F} : N \times I \to \mathbb{R}$ für eine Umgebung N von y_0.

Wir betrachten nun die Eindeutigkeit in dem Falle, dass Y einpunktig ist. In diesem Spezialfall lassen wir Y in den Bezeichnungen ersatzlos weg. Nehme also an, dass $\tilde{F}$ und $\tilde{F}'$ zwei überlagernde Abbildungen von $F : I \to \mathbb{S}^1$ sind, so dass $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$ gilt. Wie im Existenzteil wählen wir Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, so dass $F([t_i, t_{i+1}])$ stets in einer Menge U_i wie oben enthalten ist. Wir wollen induktiv annehmen, dass wir schon wissen, dass $\tilde{F} = \tilde{F}'$ auf $[0, t_i]$ gilt. Das Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ ist zusammenhängend und damit auch $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ sowie $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$. Somit muss $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ in einer der Mengen $\tilde{U}_i$ enthalten sein, die unter p homöomorph auf U_i abgebildet werden. Auch $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$ muss in einer solchen Menge enthalten sein und zwar in derselben, da $\tilde{F}'(t_i) = \tilde{F}(t_i)$ gilt. Da $p|_{\tilde{U}_i}$ injektiv ist und $p \circ \tilde{F} = p \circ \tilde{F}'$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ gilt, folgt dass auch $\tilde{F} = \tilde{F}'$ auf dieser Menge gilt. Der Induktionsschritt folgt.

Wir beobachten nun, dass die oben auf Mengen der Form $N \times I$ konstruierten überlagernden Abbildungen eindeutig bestimmt sind, wenn wir sie auf Mengen der Form $\{y\} \times I$ einschränken. Daher stimmen sie im Schnitt von Mengen der Form $N \times I$ überein und wir können sie damit auf ganz $Y \times I$ definieren und erhalten eine wohldefiniert überlagernde Abbildung $\tilde{F} : Y \times I \to \mathbb{R}$. Die Eindeutigkeit folgt, da die Einschränkungen auf Mengen der Form $\{y\} \times I$ eindeutig bestimmt sind. Die Abbildung $\tilde{F}$ ist auch stetig, da die Einschränkungen $\tilde{F} : N \times I \to \mathbb{R}$ stetig sind, woraus folgt, dass $\tilde{F}$ insgesamt stetig ist. $\square$

Hieraus erhalten wir die Aussage, dass jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt.

Theorem 3.16 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $p(z) := z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $n \geq 1$, ein(e) Polynom(funktion) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann besitzt p eine Nullstelle.*

Beweis. Wenn $p(z)$ keine Nullstelle besitzt, dann definiert für jede Zahl $r \geq 0$ die Formel

$$f_r(s) := \frac{p\left(re^{2\pi i s}\right)/p(r)}{\left|p\left(re^{2\pi i s}\right)/p(r)\right|}$$

eine geschlosse Kurve $f_r : I \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ mit Basispunkt 1. In r ist f_r eine Homotopie von geschlossenen Wegen mit Basispunkt 1. Da f_0 ein trivialer geschlossener Weg ist, folgt, dass $[f_r] \in \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ für alle $r \geq 0$ das neutrale Element ist. Wir betrachten nun ein großes r mit $r \geq 1 + \max\{|a_1| + \cdots + |a_n|, 1\}$. Dann gilt für $|z| = r$ die Abschätzung

$$|z|^n = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)|z|^{n-1} \geq \left|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right|.$$

Wir schließen also, dass die Polynome $p_t(z) := z^n + t \cdot \left(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right)$ für $0 \leq t \leq 1$ keine Nullstellen auf dem Kreis $|z| = r$ besitzen. Damit induzieren sie, in die obige Formel für f_r statt p eingesetzt, eine Homotopie von f_r zu $\omega_n(s) := e^{2\pi i n s}$. Nach Theorem 3.14 ist ω_n gerade die n-mal ein Erzeuger der unendlichen zyklischen Gruppe $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ und somit vom neutralen Element verschieden. Dies widerspricht $[f_0] = 1$. Somit hat p doch eine Nullstelle. $\square$

Wir erhalten auch einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes in zwei Dimensionen:

Theorem 3.17 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Selbstabbildung* $h : D^2 \to D^2$ *der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe* D^2 *besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Falls h keinen Fixpunkt besitzt, definieren wir eine stetige Retraktion von D^2 nach $\mathbb{S}^1$, d. h. eine stetige Abbildung $r : D^2 \to \mathbb{S}^1$, so dass $r|_{\mathbb{S}^1}$ die Identität ist. Sei $x \in D$. Definiere $r(x)$ als den Punkt, in dem eine Halbgerade, die in $h(x)$ startet und durch x geht, den Rand $\partial D^2 = \mathbb{S}^1$ schneidet. Aufgrund der Stetigkeit von h und der Fixpunktfreiheit ist dies eine stetige Abbildung $D^2 \to \mathbb{S}^1$. Nach Definition ist auch klar, dass r eine Retraktion ist.

Wir zeigen nun, dass es keine solche Retraktion geben kann. Sei f_0 ein geschlossener Weg in $\mathbb{S}^1$. In D^2 gibt es eine Homotopie zu einem konstanten Weg, beispielsweise die lineare Homotopie $f_t(s) := (1-t)f_0(s) + tx_0$, wobei x_0 der Basispunkt von f_0 ist. Da die Retraktion r auf $\mathbb{S}^1$ die Identität ist, ist die Verkettung $r \circ f_t$ eine Homotopie in $\mathbb{S}^1$ von $r \circ f_0 = f_0$ zu einem konstanten Weg im Basispunkt x_0. Dies geht aber nicht, denn $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ ist nichttrivial und f_0 ist ein beliebiger geschlossener Weg. □

In beliebigen Dimensionen beweist man den Brouwerschen Fixpunktsatz beispielsweise in der algebraischen Topologie.

Aus dem angegebenen Beweis folgt noch:

Korollar 3.18. *Es gibt keine stetige Retraktion (vergleiche auch Definition 3.27) von* D^2 *auf* $\mathbb{S}^1$*.*

Das folgende Resultat zeigt beispielsweise, dass es auf der Erde stets zwei gegenüberliegende Punkte gibt, in denen die Temperatur und die Niederschlagsmenge übereinstimmen (falls diese sich stetig verhalten und die Erde topologisch eine Kugel ist).

Theorem 3.19 (Borsuk-Ulam)**.** *Sei* $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ *stetig. Dann gibt es* $x \in \mathbb{S}^2$*, so dass* f *an den beiden antipodalen Punkten* x *und* $-x$ *übereinstimmt,* $f(x) = f(-x)$*.*

In einer Dimension ist das analoge Resultat offensichtlich, da die Funktion $f(x) - f(-x)$ das Vorzeichen wechselt, wenn man ein halbes Mal um $\mathbb{S}^1$ herumläuft.

Im allgemeinen gibt es nicht mehr als dieses eine Paar von Punkten, betrachte beispielsweise die Orthogonalprojektion von $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Die Verallgemeinerung für Abbildungen $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt ebenfalls, erfordert aber einen anderen Beweis.

Beweis von Theorem 3.19. Falls nicht, dann können wir eine stetige Abbildung $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ durch

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

definieren. Definiere eine geschlossene Kurve $\eta : I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, die den Äquator entlangläuft durch $\eta(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$. Definiere weiterhin $h : I \to \mathbb{S}^1$ durch $h := g \circ \eta$. Nach Definition von g gilt $g(-x) = -g(x)$, also folgt $h\left(s + \frac{1}{2}\right) = -h(s)$ für alle s im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Wie wir bei der Berechnung der Fundamentalgruppe von $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ gesehen haben, lässt sich der Weg $h : I \to \mathbb{S}^1$ zu einem Weg $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ „liften“, d. h. wir finden eine Abbildung $\tilde{h}$, so dass $\tilde{h}$ der Abbildung h überlagert ist. Die Gleichung $h\left(s + \frac{1}{2}\right) = -h(s)$ liefert nun, dass $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ für eine ungerade Zahl $q \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir behaupten, dass q nicht von s abhängt. Dies folgt aber direkt aus der definierenden Gleichung $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ für q, in der alle anderen Summanden stetig von s abhängen. Dies gilt daher auch für q und da $q \in \mathbb{Z}$ ist, ist q von s unabhängig. Es gilt insbesondere $\tilde{h}(1) = \tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{q}{2} = \tilde{h}(0) + q$. Dies bedeutet, dass h, als Element von $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ aufgefasst, gerade q-mal der Erzeuger von $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ ist. Da q ungerade ist, ist h damit nicht nullhomotop. Aber nach Definition ist $h = g \circ \eta : I \to \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ und die Abbildung η ist offensichtlich in $\mathbb{S}^2$ nullhomotop. Durch Komposition der entsprechenden Homotopie mit g sehen wir also, dass auch h nullhomotop ist. Dies ist ein Widerspruch und das Theorem folgt. □

Korollar 3.20. *Die Mengen $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph. $\mathbb{S}^2$ ist auch zu keiner Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ homöomorph.*

Beweis. Die erste Aussage folgt auch noch leicht aus der Kompaktheit von $\mathbb{S}^2$, die zweite nicht mehr. Für einen Homöomorphismus f gibt es aufgrund der Injektivität natürlich kein $x \in \mathbb{S}^2$, so dass $f(x) = f(-x)$ gilt. □

Korollar 3.21. *Seien A_1, A_2, $A_3 \subset \mathbb{S}^2$ drei abgeschlossene Teilmengen mit $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{S}^2$. Dann gibt es eine Menge A_i, die ein Paar von antipodalen Punkten $\{x, -x\}$ enthält.*

Beweis. Sei $d_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ die Distanz zu A_i, d. h. $d_i(x) := \inf\limits_{y \in A_i} |x - y|_{\mathbb{R}^3}$. Dies ist eine stetige Funktion. Daher können wir den Satz von Borsuk-Ulam auf die Abbildung $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (d_1(x), d_2(x))$ anwenden. Wir finden also ein $x \in \mathbb{S}^2$ mit $d_1(x) = d_1(-x)$ und $d_2(x) = d_2(-x)$. Ist einer dieser beiden Abstände Null, so liegen x und $-x$ beide in A_1 oder beide in A_2. Falls weder $d_1(x) = 0$ noch $d_2(x) = 0$ gilt, so liegt x weder in A_1 noch in A_2. Analog erhält man, dass auch $-x$ nicht in $A_1 \cup A_2$ liegt. Aufgrund der Überdeckungseigenschaft gilt daher $x \in A_3$ und $-x \in A_3$. Die Behauptung folgt. □

Hier ist die Anzahl der Mengen scharf, wie man sich überlegt, wenn man vier Mengen betrachtet, die die Symmetrien eines Tetraeders haben. In höheren Dimensionen bekommt man eine ähnliche Aussage, wenn man $\mathbb{S}^n$ mit $n + 1$ abgeschlossenen Mengen überdeckt.

Das folgende Resultat liefert eine erste Möglichkeit, bei der Konstruktion eines topologischen Raumes die Fundamentalgruppe des neu konstruierten Raumes aus der seiner Komponenten zu bestimmen. Wir betrachten nur den Fall, dass X und Y wegzusammenhängend sind. Den allgemeinen Fall erhält man dann, indem man das Resultat auf Wegzusammenhangskomponenten anwendet.

Proposition 3.22. *Sind X und Y wegzusammenhängend, so ist $\pi_1(X \times Y)$ isomorph zu $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Beweis. Sei Z ein topologischer Raum und $f : Z \to X \times Y$ eine Abbildung. Definiere g und h durch $f(z) = (g(z), h(z))$. Dann ist nach Definition der Produkttopologie f genau dann stetig, wenn $g : Z \to X$ und $h : Z \to Y$ stetig sind. Daher lassen sich Wege in $X \times Y$ mit Basispunkt $z_0 = (x_0, y_0)$ bijektiv auf Paare von Wegen abbilden, wobei der eine Weg in X mit Basispunkt x_0 und der andere in Y mit Basispunkt y_0 ist. Genauso entspricht eine Homotopie f_t von Wegen in $X \times Y$ bijektiv Paaren (g_t, h_t) von Homotopieen, wobei g_t eine Homotopie von Wegen in X und h_t eine Homotopie von Wegen in Y ist. Somit erhalten wir die Bijektion $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ mit $[f] \mapsto ([g], [h])$, wobei g und h die Verkettungen von h mit den jeweiligen Projektionen sind. Auf der rechten Seite multiplizieren wir komponentenweise. Die angegebene Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus. Da sie bijektiv ist, ist es ein Gruppenisomorphismus. $\square$

Beispiel 3.23. Für einen zweidimensionalen Torus gilt $\pi_1\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \times \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Bis auf Homotopie ist also eine geschlossene Kurve durch zwei ganze Zahlen charakterisiert. (Beispiel, etwa $(2, 3)$, im Bild veranschaulichen.)

Induktiv folgt, dass die Fundamentalgruppe eines n-dimensionalen Torus isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist.

Insbesondere sind diese Fundamentalgruppen also abelsch. (Für "Doughnut" und Rechteck mit identifizierten Seiten skizzieren.)

3.3. **Induzierte Homomorphismen.** Sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung, die den Basispunkt $x_0 \in X$ auf den Basispunkt $y_0 \in Y$ abbildet. Wir kürzen dies mit $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ab. Dann induziert φ einen Homomorphismus $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, definiert durch $\varphi_*[f] := [\varphi \circ f]$ für einen geschlossenen Weg $f : I \to X$ mit Basispunkt x_0.

(i) Die Abbildung ist wohldefiniert, denn wenn f_t eine Homotopie in X ist, dann ist $\varphi \circ f_t$ eine Homotopie in Y.

(ii) Die angegebene Abbildung ist ein Homomorphismus, denn es gilt $\varphi \circ (f \cdot g) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)$, da beide Seiten für $0 \le s \le \frac{1}{2}$ mit $\varphi \circ f(2s)$ und für $\frac{1}{2} \le s \le 1$ mit $\varphi \circ g(2s - 1)$ übereinstimmen.

Zwei grundlegende Eigenschaften induzierter Homomorphismen sind:

(i) Es gilt $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ für Abbildungen $(X, x_0) \xrightarrow{\psi} (Y, y_0) \xrightarrow{\varphi} (Z, z_0)$.

(ii) $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, d. h. die Identität $\mathbb{1} : X \to X$ induziert die Identität $\mathbb{1} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Die erste Behauptung folgt, das die Komposiition von Abbildungen assoziativ ist: $(\varphi \circ \psi) \circ f = \varphi \circ (\psi \circ f)$, die zweite ist offensichtlich.

Diese beiden Eigenschaften besagen, das die Abbildung, die jedem Punktierten Raum (X, x_0) die Fundamentalgruppe zum Basispunkt x_0 zuordnet, ein Funktor ist. Ein Funktor ist eine Abbildung zwischen Kategorien, die Objekte auf Objekte und Morphismen auf Morphismen abbildet. Hier wird die Anwendung auf Morphismen mit $\cdot_*$ bezeichnet. Ein Funktor muss $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ und $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ erfüllen. Die Definition eines Funktors brauchen wir in diesem Kurs nicht mehr.

Sei φ ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung ψ. Dann ist φ_* ein Isomorphismus und die Umkehrabbildung ist durch ψ_* gegeben, denn es gilt $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = \mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ und analog folgt auch $\psi_* \circ \varphi_* = \mathbb{1}$.

Wir berechnen nun die Fundamentalgruppen für alle Sphären. Da wir schon wissen, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z}$ ist und da $\pi_1\left(\mathbb{S}^0, p\right)$ für $p \in \mathbb{S}^0$ einelementig ist, bleibt noch, $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ für $n \geq 2$ zu bestimmen.

Proposition 3.24. *Die Gruppen $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ sind für $n \geq 2$ trivial, d. h. sie bestehen nur aus einem Element.*

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{S}^n$ beliebig und f ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0. Nehme zunächst an, dass das Bild von f einen Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ auslässt. Dann ist f nullhomotop, denn $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und der ist einfach zusammenhängend. Daher genügt es, wenn wir eine gegebene Abbildung so homotopieren können, dass sie irgendeinen Punkt auf der Sphäre vermeidet, also nicht surjektiv ist. Fixiere dazu $x \neq x_0$, $x \in \mathbb{S}^n$, und eine offene Kugel $B \subset \mathbb{S}^n$ um x mit $x_0 \notin \overline{B}$. Wir wollen nun zeigen, dass die Anzahl, wie oft f in diese Kugel hineinkommt, x als Wert annimmt und wieder B verlässt, endlich ist und dass auf jedem dieser Intervalle die Abbildung f mit Hilfe einer Homotopie so deformiert werden kann, dass sie außerhalb von B unverändert ist und den Punkt x vermeidet. (Beachte, dass so etwas nicht vollkommen trivial ist, da es raumfüllende Kurven gibt. Würden wir beispielsweise nur stückweise C^1-Kurven betrachten, gäbe es keine Probleme, solch einen Punkt zu finden.)

Die Menge $f^{-1}(B)$ ist eine offen Teilmenge von $(0,1)$ und daher eine (möglicherweise unendliche) disjunkte Vereinigung offener Intervalle der Form (a_i, b_i). Die Menge $f^{-1}(\{x\})$ ist abgeschlossen, in $(0,1)$ enthalten und da $x_0 \notin B$ ist, auch kompakt. Somit wird sie von endlich vielen Intervallen der Form (a_i, b_i) überdeckt. Nur auf ihnen brauchen wir f abzuändern. Schränken wir f auf die Intervalle $[a_i, b_i]$ ein und definieren $f_i := f|_{[a_i,b_i]}$ für diese endliche Kollektion von Intervallen, so sind die Bilder der f_i in $\overline{B}$ enthalten, es gilt insbesondere $f_i(a_i)$, $f_i(b_i) \in \overline{B}$. Da $n \geq 2$ ist, finden wir einen Weg g_i in $\overline{B}$ von $f_i(a_i)$ nach $f_i(b_i)$, der x vermeidet. Da $\overline{B}$ konvex ist (genauer: homöomorph zu einer konvexen Menge ist), ist f_i zu g_i in $\overline{B}$ homotop. Wenden wir die entsprechenden Homotopien auf jedes der endlich vielen Intervalle an, die $f^{-1}(x)$ enthalten, erhalten wir einen zu f homotopen geschlossenen Weg g, so dass $x \notin g(I)$ gilt. Zusammen mit den obigen Überlegungen folgt nun die Behauptung. □

Beispiel 3.25. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Nach Proposition 3.22 ist also $\pi_1\left(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$. Diese Gruppe ist also isomorph zu $\mathbb{Z}$ für $n = 2$ und trivial für $n > 2$.

Korollar 3.26. *Für $n \neq 2$ ist der $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist zunächst einmal $n \neq 1$, da $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aber wegzusammenhängend ist. (Das Argument funktioniert auch, wenn wir einen beliebigen anderen Punkt entfernen, etwa $f^{-1}(0)$ oder $f(0)$.)

Ist $n > 2$, so können wir $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht von $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ anhand der Zusammenhangskomponenten unterscheiden, die Fundamentalgruppen $\pi_1\left(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}\right)$ und $\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)$ sind aber nicht isomorph. Das ist unmöglich, wenn f ein Homöomorphismus ist. Widerspruch. □

In der algebraischen Topologie zeigt man mit Hilfe von lokalen Homologiegruppen dass es auch keine Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ gibt, wenn $m \neq n$ ist.

Mit Hilfe von induzierten Homomorphismen können wir Relationen auf topologischen Räumen auf ihre Fundamentalgruppen übertragen. Wir betrachten nun ein Beispiel hierfür:

Definition 3.27 (Retrakte)**.** Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

(i) Dann ist A ein *Retrakt* von X, wenn es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ (*Retraktion*) gibt, so dass $r|_A = \mathbb{1}_A$ ist.

(ii) Dann ist A ein *Deformationsretrakt* von X, wenn es eine stetige Familie $(f_t)_{t\in I}$ von stetigen Abbildungen $f_t : X \to X$ gibt, so dass $f_0 = \mathbb{1}_X$, $f_1(X) = A$ und $f_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ gelten. Genauer verlangt die (oben recht vage beschriebene) Stetigkeitsforderung, dass die Abbildung $X \times I \to X$ mit $(x,t) \mapsto f_t(x)$ stetig ist.

Beispiele 3.28.

(i) $\partial B_1((-1,0)) \cup \partial B_1((1,0))$ ist ein Retrakt und ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

(ii) Die Menge $\partial B_1((1,0))$ ist ein Retrakt, aber kein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

Die Tatsache, dass es sich nicht um einen Deformationsretrakt handelt, sieht man mit Hilfe von Proposition 3.29, da die Fundamentalgruppen von $\mathbb{S}^1$ und zwei in einem Punkt zusammengeklebten Kopien von $\mathbb{S}^1$ nicht übereinstimmen (Vergleiche Kapitel 4), was aber der Fall sein müsste, wenn es sich in beiden Fällen um einen Deformationsretrakt handeln würde.

Proposition 3.29. *Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $x_0 \in A$. Sei $i : A \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusionsabbildung. Lässt sich X auf A retrahieren, so ist der Homomorphismus $i_* : \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ injektiv. Ist A ein Deformationsretrakt von X, dann ist i_* sogar ein Isomorphismus.*

Beweis. Ist $r : X \to A$ eine Retraktion, dann gilt $r \circ i = \mathbb{1}_A$. Somit folgt $r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{A*} = \mathbb{1}_{\pi_1(A,x_0)}$. Daher ist i_* injektiv.

Ist $r_t : X \to X$ eine Familie von Abbildungen, die belegt, dass A ein Deformationsretrakt von X ist, so gilt $r_0 = \mathbb{1}_X$, $r_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ und $r_1(X) \subset A$. Sei $f : I \to X$ ein geschlossener Weg (in X) mit $x_0 \in A$ als Basispunkt, dann ist $r_t \circ f$ eine Homotopie von f zu einem Weg in A. Somit ist i_* auch surjektiv. □

Bemerkung 3.30. Wir sehen hieraus nochmals (siehe auch Korollar 3.18), dass $\mathbb{S}^1$ kein Retrakt von D^2 ist, da die durch die Inklusionsabbildung induzierte Abbildung $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \to \pi_1\left(D^2\right)$ ein Homöomorphismus von (bis auf Isomorphie) $\mathbb{Z}$ auf eine einelementige Gruppe ist, also nicht injektiv sein kann, wie es aber nach Proposition 3.29 im Falle eines Retraktes der Fall wäre.

Definition 3.31 (Homotopie)**.**

(i) Eine *Homotopie* ist eine Familie $(\varphi_t)_{t\in I}$ von Abbildungen $\varphi_t : X \to Y$, so dass die Abbildung $\Phi : X \times I \to Y$, definiert durch $\Phi(x,t) := \varphi_t(x)$, stetig ist.

(ii) Eine Homotopie $\varphi_t : X \to Y$ heißt *relativ* zu einer Menge $A \subset X$, wenn $\varphi_t(a)$ für beliebiges aber festes $a \in A$ unabhängig von $t \in A$ ist. (Einen Spezialfall davon haben wir bereits beim Deformationsretrakt kennengelernt. Dort hatten wir gefordert, dass $\varphi_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ gilt.)

(iii) Zwei Abbildungen f_0, $f_1 : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie $(g_t)_{t\in I}$ mit $g_t : X \to Y$, $g_0 = f_0$ und $g_1 = f_1$ gibt. Wir schreiben $f_0 \simeq f_1$. (Wir kennen diese Definition bereits im Spezialfall von homotopen Wegen.)

(iv) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ gelten. (Einen Spezialfall davon haben wir beim Deformationsretrakt gesehen. (Eigentlich müsste man nun beim Definitionsbereich exakter sein.) Sei $f_t : X \to X$ eine Deformation mit $f_t|_A = \mathbb{1}_A$, $r := f_1$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt $r \circ i = \mathbb{1}_A$ und $i \circ r \simeq \mathbb{1}_X$, wobei die zugehörige Homotopie durch f_t gegeben ist.)

(v) Zwei topologische Räume X und Y haben den gleichen *Homotopietyp* oder sind bis auf Homotopie äquivalent oder sind *homotopieäquivalent*, wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt. Wir schreiben $X \simeq Y$.

(vi) Sei $\varphi_t : X \to Y$ eine Homotopie und seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Falls $\varphi_t(A) \subset B$ für alle $t \in I$ gilt, so sprechen wir von einer Homotopie von Paaren $\varphi_t : (X,A) \to (Y,B)$. Im Spezialfall, dass $A = \{x_0\}$ und $B = \{y_0\}$ gelten, sprechen wir von einer Homotopie von punktierten Räumen und schreiben $\varphi_t : (X,x_0) \to (Y,y_0)$.

(vii) Entsprechend heißen punktierte Räume (X,x_0) und (Y,y_0) *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $\varphi : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ und $\psi : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ gibt, so dass $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$ gelten, wobei „$\simeq$“ sich auf Homotopien punktierter Räume bezieht. Die Abbildungen φ und ψ heißen dann *Homotopieinverse* voneinander. Wir schreiben $(X,x_0) \simeq (Y,y_0)$.

Bemerkung 3.32.

(i) Ist $\varphi_t : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ eine Homotopie von punktierten Räumen, so gilt $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$.

Es gilt nämlich (unter Verwendung von φ_t beim mittleren Gleichheitszeichen) $(\varphi_0)_*[f] = [\varphi_0 \circ f] = [\varphi_1 \circ f] = (\varphi_1)_*[f]$, wobei f ein beliebiger geschlossener Weg mit Basispunkt $x_0 \in X$ ist.

(ii) Seien (X,x_0) und (Y,y_0) homotopieäquivalent vermöge der Abbildungen $\varphi : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ und $\psi : (Y,y_0) \to (X,x_0)$. Dann folgt aus $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$, dass $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = \mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ gilt, und aus $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$, dass $\psi_* \circ \varphi_* = \mathbb{1}$ gilt. Somit sind φ_* und ψ_* inverse Isomorphismen und es gilt $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,y_0)$.

Dieses formale Argument zeigt nochmals, dass eine Deformationsretraktion einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert, da eine Deformationsretraktion von X auf $A \subset X$ die Homotopieäquivalenz $(X, x_0) \simeq (A, x_0)$ für einen beliebigen Punkt $x_0 \in A$ liefert.

Bemerkung 3.32 (ii) wollen wir noch als Proposition festhalten:

Proposition 3.33. *Die Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter punktierter Räume sind isomorph.*

Bei Fundamentalgruppen ist der Basispunkt in vielen Fällen unerheblich. Dies folgt aus dem folgenden Resultat. Es verallgemeinert Proposition 3.33 von homotopieäquivalenten punktierten Räumen auf homotopieäquivalente Räume.

Proposition 3.34. *Sei $\varphi : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist der induzierte Homomorphismus $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ für beliebiges $x_0 \in X$ ein Isomorphismus.*

Für den Beweis wollen wir das folgende Resultat benutzen.

Lemma 3.35. *Sei $\varphi_t : X \to Y$ eine Homotopie und $h(s) := \varphi_s(x_0)$ der Weg, den man als Bild des Basispunktes $x_0 \in X$ unter der Homotopie bekommt. Dann gilt $(\varphi_0)_* = \beta_h \circ (\varphi_1)_*$, wobei $\beta_h[f] := \left[h \cdot f \cdot \overline{h}\right]$ in der Notation von Proposition 3.10 definiert ist. Das folgende Diagramm kommutiert also:*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \arrow[dd, "\beta_h"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "(\varphi_1)_*"] \arrow[dr, "(\varphi_0)_*"'] & \\ & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)). \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei h_t die Einschränkung von h auf das Intervall $[0, t]$ mit einer Umparametrisierung, so dass der Definitionsbereich wieder I wird, genauer: $h_t(s) := h(ts)$. Ist nun f eine geschlossene Kurve in X mit Basispunkt x_0, so ist $h_t \cdot (\varphi_t \circ f) \cdot \overline{h}_t$ eine Homotopie von Wegen mit Basispunkt $\varphi_0(x_0)$. Wir betrachten diese Homotopie an den Endpunkten $t = 0$ und $t = 1$ und erhalten $(\varphi_0)_*([f]) = [\varphi_0 \circ f] = \left[h_1 \cdot (\varphi_1 \circ f) \cdot \overline{h}_1\right] = \beta_{h_1}[\varphi_1 \circ f] = \beta_h((\varphi_1)_*([f]))$. □

Beweis von Proposition 3.34. Sei $\psi : Y \to X$ eine Homotopie-Inverse zu φ, d. h. eine Abbildung mit $\varphi \circ \psi \simeq 1\!\!1_Y$ und $\psi \circ \varphi \simeq 1\!\!1_X$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi \circ \varphi(x_0)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi \circ \psi \circ \varphi(x_0)).$$

Die Verknüpfung der ersten beiden Abbildungen ist ein Isomorphismus, denn aus $\psi \circ \varphi \simeq 1\!\!1$ folgt nach Lemma 3.35, dass $\psi_* \circ \varphi_* = \beta_h$ für einen Weg h in X gilt. Da $\psi_* \circ \varphi_* = \beta_h$ nach Proposition 3.10 ein Isomorphismus ist, ist φ_* insbesondere injektiv. Wenden wir dasselbe Argument auf die zweite und die dritte Abbildung an, so folgt, dass ψ_* injektiv ist. (Beachte aber, dass die Notation φ_* für die dritte

Abbildung zwar korrekt ist, dies aber nicht dieselbe Abbildung wie die erste ist, da sich der Basispunkt gegenüber der ersten Abbildung geändert hat.) Nun sind die ersten beiden Abbildungen im obigen Diagramm injektiv und ihre Verknüpfung ist ein Isomorphismus. Daher muss φ_* auch surjektiv sein. Es folgt, dass φ_* ein Isomorphismus ist. □

4. Das van Kampen Theorem

Können wir einen topologischen Raum in geeigneter Weise in Teilräume zerlegen, deren Fundamentalgruppen wir kennen, so gibt das van Kampen Theorem eine Möglichkeit, die Fundamentalgruppe zu bestimmen.

4.1. **Freie Produkte von Gruppen.** Wie wir in Beispiel 1.3 bereits erwähnt haben, hat $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, definiert als die disjunkte topologische Summe von zwei $\mathbb{S}^1$-en, wobei wir einen Punkt auf der ersten $\mathbb{S}^1$ mit einem Punkt auf der zweiten $\mathbb{S}^1$ identifizieren ($\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist also homöomorph zur Figur „8“), als Fundamentalgruppe die freie Gruppe, die von zwei Elementen erzeugt wird.

Die universelle Eigenschaft aus Lemma 4.2 hat andere Pfeile als die der Produkttopologie. Daher wäre es algebraisch korrekter, von einem Koprodukt von Gruppen zu sprechen.

Definition 4.1 (Freie Gruppe)**.** Sei $(G_\alpha)_\alpha$ eine Familie von Gruppen. Definiere $*_\alpha G_\alpha$, das freie Produkt der Gruppen G_α, wie folgt:

(i) Ein Wort aus Elementen der Gruppen G_α ist eine endliche Folge $g_1g_2g_3 \cdots g_m$ von Elementen, genannt Buchstaben, wobei $g_i \in G_{\alpha_i}$ für alle $1 \le i \le m$ gilt und α_i geeignete Indizes sind.

(ii) Auf Worten definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch
$$(g_1 \cdots g_m) \circ (h_1 \cdots h_n) := g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n.$$

(iii) Wir definieren das Inverse eines Wortes $g_1 \cdots g_m$ als $g_m^{-1} \cdots g_1^{-1}$.

(iv) Wir bezeichnen das leere Wort mit e.

(v) Mit diesen Definitionen bilden die Worte keine Gruppe.

(vi) Ein reduziertes Wort ist definiert als ein Wort $g_1 \cdots g_m$ ohne Einselemente, in dem benachbarte Buchstaben g_i und g_{i+1} von verschiedenen Gruppen her kommen: $g_i \in G_{\alpha_i}$ und $g_{i+1} \in G_{\alpha_{i+1}} \Longrightarrow \alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Wir erhalten aus einem Wort ein reduziertes Wort, indem wir benachbarte Elemente g_i und g_{i+1}, die zur selben Gruppe G_α gehören, durch deren Produkt in G_α ersetzen. Weiterhin lassen wir die Eins einer Gruppe und aufeinanderfolgende Buchstaben der Form gg^{-1} ganz weg. Beachte insbesondere, dass das Produkt reduzierter Wörter im Allgemeinen nicht reduziert ist.

(vii) Man rechnet nach, z. B. in einer Algebravorlesung, dass die reduzierten Worte eine Gruppe bilden, die *freie Gruppe* der Gruppen G_α.

Nachzuweisen ist insbesondere:

- Assoziativität.

- Fassen wir Worte, die durch Reduktion auseinander hervorgehen als äquivalent auf (ebenso, wenn mehrere solche Schritte dazwischenliegen), so liegt in jeder Äquivalenzklasse genau ein reduziertes Wort.

(viii) Die Gruppe G_β ist in $*_\alpha G_\alpha$ kanonisch als Untergruppe enthalten. G_β ist isomorph zu den einbuchstabigen Worten der Form g in $*_\alpha G_\alpha$, für die $g \in G_\beta$ gilt.

(ix) Wir schreiben $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ für das freie Produkt von zwei Kopien von $\mathbb{Z}$.

Lemma 4.2. *Sei $(G_\alpha)_\alpha$ eine Familie von Gruppen und sei H eine Gruppe. Seien $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ Gruppenhomomorphismen. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi : *_\alpha G_\alpha \to H$, der φ_α für alle Untergruppen $G_\alpha \subset *_\alpha G_\alpha$ fortsetzt. Dieser ist gegeben durch*

$$\varphi(g_1 \cdots g_n) := \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n),$$

wenn die Indices α_i so gewählt sind, dass $g_i \in G_{\alpha_i}$ gilt.

Beweis. Beachte insbesondere, dass φ auf gekürzten und äquivalenten ungekürzten Wörtern denselben Wert ergibt. Vergleiche eine Algebravorlesung für Details. □

4.2. **Das van Kampen Theorem.** Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Seien A_α wegzusammenhängende Mengen, die X überdecken, d. h. $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = X$ erfüllen, und die alle x_0 enthalten, also $x_0 \in A_\alpha$ für alle α erfüllen. Die Inklusionen $A_\alpha \hookrightarrow X$ induzieren Homomorphismen $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$. Nach Lemma 4.2 lassen sich diese Homomorphismen zu einem Homomorphismus $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ erweitern. Nach dem van Kampen Theorem ist Φ oft surjektiv.

Im Allgemeinen können wir nicht erwarten, dass Φ auch injektiv ist. Bezeichnen wir nämlich mit $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ den durch die Inklusion $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ induzierten Homomorphismus, so gilt $j_\alpha \circ i_{\alpha\beta} = j_\beta \circ i_{\beta\alpha}$, denn beide Verkettungen sind durch die Inklusion $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$ induziert.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A_\alpha) \arrow[dr, "j_\alpha"] & \\
\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[rr] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & \pi_1(X) \\
 & \pi_1(A_\beta) \arrow[ur, "j_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Somit enhält der Kern von Φ mindestens alle Elemente der Form $i_{\alpha\beta}(\omega)(i_{\beta\alpha}(\omega))^{-1}$ für $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$, denn nach Definition von Φ werden diese unter Φ auf

$$(j_\alpha i_{\alpha\beta}(\omega)) \left(j_\beta i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}\right) = (j_\alpha i_{\alpha\beta}(\omega))(j_\beta i_{\beta\alpha}(\omega))^{-1} = 1$$

abgebildet. Das Theorem von van Kampen (oder Seifert-van Kampen) gibt nun insbesondere Bedingungen an, unter denen diese Elemente bereits den Kern erzeugen.

Theorem 4.3 (van Kampen)**.** *Sei X die Vereinigung von offenen wegzusammenhängenden Mengen A_α, die jeweils den Basispunkt $x_0 \in X$ enthalten. Ist jeder Schnitt der Form $A_\alpha \cap A_\beta$ wegzusammenhängend, so ist der Homomorphismus Φ :*

$*_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ surjektiv. Ist zusätzlich noch jeder Schnitt der Form $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ wegzusammenhängend, dann ist der Kern von Φ gerade die normale Untergruppe N, die von allen Elementen der Form $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ mit $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ erzeugt wird. Somit induziert Φ in diesem Fall einen Isomorphismus $\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$.

Als Homomorphismus muss Φ ein Normalteiler als Kern haben. Auf den angegebenen Elementen verschwindet Φ, somit auch auf dem kleinsten Normalteiler, der diese Elemente enthält. Der kleinste Normalteiler ist wohldefiniert, da der Schnitt zweier Normalteiler wieder ein Normalteiler ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass Φ surjektiv ist. Sei dazu $f : I \to X$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0. Dann gibt es Zahlen s_i mit $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$, so dass jedes Intervall $[s_i, s_{i+1}] \subset I$ unter f in eine einzige Menge A_α abgebildet wird. Solch eine Partition existiert, denn da f stetig ist, gibt es für jeden Punkt $s \in I$ eine offene Umgebung, ohne Einschränkung ein offenes Intervall V_s , das in ein A_α abgebildet wird. Durch Verkleinern der Intervalle können wir ohne Einschränkung annehmen, dass auch noch die Abschlüsse jeweils in eine Menge A_α abgebildet werden. Aufgrund der Kompaktheit überdecken nun bereits endlich viele dieser (in I relativ) offenen Intervalle ganz I. Als Zahlen s_i kann man nun gerade die Endpunkte dieser Intervalle nehmen.

Wir bezeichnen nun die Menge A_α, die $f([s_{i-1}, s_i])$ enthält, mit A_i. Definiere $f_i := f|_{[s_{i-1}, s_i]}$. Dann gilt $f = f_1 \cdots f_m$, wobei f_i ein Weg in A_i ist. Nun sind nach Voraussetzung die Mengen $A_i \cap A_{i+1}$ jeweils wegzusammenhängend und enthalten den Basispunkt x_0. Wir können daher Wege g_i von x_0 nach $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$ in $A_i \cap A_{i+1}$ wählen. Dann ist der Weg

$$(f_1 \cdot \overline{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \overline{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \overline{g}_3) \cdots (g_{m-1} \cdot f_m)$$

homotop zu f. Er ist aber auch eine Hintereinanderausführung von Wegen, die jeweils in einer einzigen Menge A_i liegen, wie die Klammern andeuten. Daher ist $[f] \in \operatorname{im} \Phi$, Φ ist also surjektiv.

Der komplizierte Teil des Beweises ist nun, dass $\ker \Phi = N$ gilt, falls alle Mengen der Form $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ wegzusammenhängend sind. Dafür führen wir zunächst noch folgende Bezeichnung ein. Eine *Faktorisierung* eines Elementes $[f] \in \pi_1(X)$ ist ein formales Produkt $[f_1] \cdots [f_k]$, wobei

(i) jedes f_i ein geschlossener Weg in einer Menge A_α mit Basispunkt x_0 und $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ die Homotopieklasse von f_i ist.

(ii) der Weg f zu $f_1 \cdots f_k$ in X homotop ist.

(Dabei kommt es natürlich insbesondere nicht darauf an, welchen Repräsentanten f_i wir wählen, um eine Homotopieklasse $[f_i]$ zu beschreiben; wir könnten auch einen zu f_i homotopen Weg verwenden.)

Eine Faktorisierung von $[f]$ ist also ein (möglicherweise nicht reduziertes) Wort in $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, das unter Φ auf $[f]$ abgebildet wird. Wie wir beim Beweis der Surjektivität gesehen haben, besitzt jedes $[f] \in \pi_1(X)$ eine Faktorisierung.

Wir untersuchen nun die Eindeutigkeit einer Faktorisierung. Dazu nennen wir zwei Faktorisierungen von $[f] \in \pi_1(X)$ äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge der folgenden beiden Operationen oder ihrer Inversen auseinander hervorgehen.

(i) Kombiniere aufeinanderfolgende Ausdrücke $[f_i][f_{i+1}]$ in einen einzigen Ausdruck $[f_i \cdot f_{i+1}]$, wenn $[f_i]$ und $[f_{i+1}]$ in derselben Gruppe $\pi_1(A_\alpha)$ liegen.

(ii) Betrachte den Ausdruck $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ als einen Ausdruck in der Gruppe $\pi_1(A_\beta)$ statt in $\pi_1(A_\alpha)$, falls f_i ein geschlossener Weg in $A_\alpha \cap A_\beta$ ist.

Die erste Operation ändert das durch die Faktorisierung in $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$ definierte Element nicht. Nach Definition von N ändert die zweite Operation nicht das Bild dieses Elementes in der Quotientengruppe $Q := *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$. Somit ergeben äquivalente Faktorisierungen dasselbe Element in Q.

Nun fehlt nur noch der Nachweis, dass je zwei Faktorisierungen einer Homotopieklasse $[f]$ äquivalent sind. Dann folgt nämlich, dass die von $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ induzierte Abbildung $Q \to \pi_1(X)$ injektiv ist. Dann ist $\ker \Phi = N$ und das Theorem folgt.

Seien also $[f_1] \cdots [f_k]$ und $[f'_1] \cdots [f'_l]$ zwei Faktorisierungen von $[f]$. Dann sind die Wege $f_1 \cdots f_k$ und $f'_1 \cdots f'_l$ homotop. Sei also $F : I \times I \to X$ eine Homotopie von $f_1 \cdots f_k$ nach $f'_1 \cdots f'_l$. Ähnlich wie beim Beweis der Surjektivität dürfen wir annehmen (verwende nun Mengen der Form $[a, b] \times [c, d] \subset I \times I$ statt Intervallen), dass Zahlen s_i und t_j existieren mit $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so dass jedes der Rechtecke $R_{ij} := [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ in eine einzige Menge A_α abgebildet wird. Wir wollen diese Menge mit A_{ij} bezeichnen. Wir dürfen annehmen, dass die s-Unterteilung die Hintereinanderausführungen $f_1 \cdots f_k$ und $f'_1 \cdots f'_l$ liefert. Da F auch eine Umgebung von R_{ij} in A_{ij} abbildet, können wir bei den Rechtecken, die nicht zu $t = 0$ oder $t = 1$ gehören, die durch die s-Koordinate definierten Begrenzungen so verschieben, dass jeder Punkt in $I \times I$ zu höchstens drei der abgeschlossenen Rechtecke gehört. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $n \geq 4$ für den Index bei t_n gilt. Wir wollen die Rechtecksgrenzen so verschieben, dass weiterhin ein Rechteck R_{ij} in eine Menge A_{ij} abgebildet wird. Die Eigenschaft, dass kein Punkt zu mehr als drei Rechtecken gehören soll, korrespondiert zu der Schnittbedingung mit $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$, die auch drei Mengen beinhaltet. Wir nummerieren die Rechtecke wie folgt neu durch (horizontal $\leftrightarrow s$, vertikal $\leftrightarrow t$)

$R_{m(n-1)+1}$	$R_{m(n-1)+2}$	$\cdots$	R_{mn}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
R_1	R_2	$\cdots$	R_m

.

Ist nun γ ein Weg in $I \times I$ von ganz links ($s = 0$) nach ganz rechts ($s = 1$) (vergleiche das Bild), dann ist $F \circ \gamma$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0, da $F(\{0\} \times I) = F(\{1\} \times I) = \{x_0\}$ gilt.

Wähle nun (im Wesentlichen eindeutig bestimmte) Wege γ_r, die die ersten r Rechtecke $R_1, \ldots, R_r$ von den übrigen Rechtecken trennen. Wir können diese Wege so wählen, dass wir von γ_r zu γ_{r+1} kommen, indem wir den Weg γ_r in R_{r+1} modifizieren, ihn also „über R_{r+1} hinüberziehen“. Dann ist γ_0 ein Weg entlang der unteren Kante und γ_{mn} ein Weg entlang der oberen Kante.

Die Ecken der Dreiecke R_r nennen wir Knoten. Wähle für jeden Knoten ν mit $F(\nu) \neq x_0$ einen Weg g_ν von x_0 nach $F(\nu)$. Da wir angenommen haben, dass der Schnitt von jeweils drei Mengen der Form A_α, also $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$, wegzusammenhängend ist und da jeder Knoten nach Konstruktion in höchstens drei Rechtecken liegt, können wir den Weg g_ν so wählen, dass er im Schnitt der Mengen A_{ij} liegt, in die die Rechtecke in denen ν enthalten ist, unter F abgebildet werden.

Wenn wir nun in $F \circ \gamma_r$ an den jeweils den Knoten entsprechenden Stellen ähnlich wie beim Beweis der Surjektivität Wege der Form $\overline{g}_\nu g_\nu$ einfügen, so erhalten wir eine Faktorisierung der Homotopieklasse $[F \circ \gamma_r]$. Dabei fassen wir die Teile des Weges, die einem Entlanglaufen an einer gemeinsamen Kante von Rechtecken entsprechen, als Wege in einer beliebigen der entsprechenden Mengen A_{ij} auf. Wählen wir hier andere Mengen, so erhalten wir eine zur gewählten Faktorisierung $[F \circ \gamma_r]$ äquivalente Faktorisierung.

Nach Wahl der Rechtecke sind nun die Faktorisierungen, die wir zu $[F \circ \gamma_r]$ und $[F \circ \gamma_{r+1}]$ erhalten, äquivalent, denn sie unterscheiden sich (wenn wir oben jeweils geeignete Mengen A_{ij} gewählt haben) nur durch eine Homotopie in einer entsprechenden Menge A_{ij}: Dazu dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass wir die von den Kanten des zugehörigen Rechtecks induzierten Wege alle als Wege in ein und demselben A_{ij} auffassen. Dann ist die Homotopie in A_{ij} gegeben durch $F \circ \gamma^r_t$, wobei γ^r_t gerade den Teil des Weges γ_r, der links und unten an R_{r+1} entlangführt, in R_{r+1} zu einem Weg homotopiert, der oben und rechts an R_{r+1} entlangführt, also gerade eine Homotopie von γ_r zu γ_{r+1} auf dem Teil ist, auf dem sich diese beiden Wege unterscheiden.

Wir wollen nun einsehen, dass die Faktorisierung zu γ_0 äquivalent zur gegebenen Faktorisierung $[f_1] \cdots [f_k]$ ist. Dies beendet den Beweis, da dann $[f_1] \cdots [f_k]$ induktiv äquivalent zu den Faktorisierungen zu $[F \circ \gamma_0]$, $[F \circ \gamma_1]$, ..., $[F \circ \gamma_{mn}]$ ist. Analog zur noch ausstehenden Behauptung ist dann auch $[F \circ \gamma_{mn}]$ äquivalent zur Faktorisierung $[f'_1] \cdots [f'_l]$. Somit sind dann auch $[f_1] \cdots [f_k]$ und $[f'_1] \cdots [f'_l]$ äquivalent.

Um zu sehen, dass $[f_1] \cdots [f_k]$ und die zu $[F \circ \gamma_0]$ gehörende Faktorisierung äquivalent sind, unterscheiden wir zwei Fälle. Gehört ein Knoten ν in der unteren Kante zu einem Endpunkt eines Weges f_i, so gilt $F(\nu) = x_0$ und wir brauchen an dieser Stelle überhaupt keinen Weg der Form $\overline{g}_\nu g_\nu$ einzuschieben. (Das Ergebnis wäre ohnehin eine zur gegebenen Faktorisierung äquivalente Faktorisierung.) Für die anderen Knoten ν in der unteren Kante benutzen wir nochmals die Bedingung über dreifache Schnitte und wählen einen Weg g_ν, den wir als $\overline{g}_\nu g_\nu$ einschieben, der nicht nur in den Mengen A_{ij} enthalten ist, die zu den Rechtecken gehören, in denen ν liegt, sondern der auch in der Menge A_i liegt, die zu dem Teilstück $[f_i]$ gehört, zu dem ν gehört. Dies beendet den Beweis. □

Definition 4.4 (Einpunktvereinigung)**.** Seien $(X_i, x_i)_{i \in I}$ punktierte topologische Räume, d. h. topologische Räume X_i mit einem ausgezeichneten Punkt $x_i \in X_i$. Dann definieren wir ihre *Einpunktvereinigung* durch

$$\bigvee_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} X_i / \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \equiv \coprod_{i \in I} X_i / \coprod_{i \in I} \{x_i\},$$

also als disjunkte Vereinigung, die in den ausgezeichneten Punkten zusammengeklebt ist. Wir schreiben auch beispielsweise $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, wenn der ausgezeichnete Punkt irrelevant ist.

Die Einpunktvereinigung wird auch Bouquet, Wedgeprodukt oder Koprodukt in der Kategorie der punktierten topologischen Räume genannt.

Beispiel 4.5 (Einpunktvereinigung)**.** Seien $(X_\alpha, x_\alpha)_\alpha$ punktierte topologische Räume, so dass $x_\alpha \in X_\alpha$ eine offene Umgebung $U_\alpha \subset X_\alpha$ besitzt, so dass $\{x_\alpha\}$ Deformationsretrakt von U_α ist. Dann ist X_α Deformationsretrakt der offenen Umgebung $A_\alpha := X_\alpha \vee \bigvee\limits_{\beta\neq\alpha} U_\beta$. (Beachte dazu, dass die aus den einzelnen Homotopien zusammengesetzte Homotopie nach Definition 2.12 stetig ist.) Der Schnitt von zwei oder mehr verschiedenen Mengen A_α ist $\bigvee\limits_\alpha U_\alpha$, was einen Punkt als Deformationsrektrakt besitzt. Daher ist nach dem Theorem von van Kampen die Abbildung $\Phi : *_\alpha \pi_1(X_\alpha) \to \pi_1\left(\bigvee\limits_\alpha X_\alpha\right)$ ein Isomorphismus.

Insbesondere ist für $\bigvee\limits_\alpha \mathbb{S}^1$, die Einpunktvereinigung von Kreisen, $\pi_1\left(\bigvee\limits_\alpha \mathbb{S}^1\right)$ isomorph zum freien Produkt von (entsprechend vielen) Kopien von $\mathbb{Z}$. Beispielsweise gilt $\pi_1\left(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

In moderner algebraischer Sprache induziert also das Koprodukt von punktierten topologischen Räumen (mit deformationsretrahierbaren offenen Umgebungen der Basispunkte) einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen in das Koprodukt dieser Gruppen.

Es gilt der allgemeine Satz, dass die Fundamentalgruppen von Graphen freie Gruppen sind, siehe [2, Proposition 1.A.2, S. 84]. Wir behandeln hier nur ein Beispiel.

Beispiel 4.6. Wir wollen die Fundamentalgruppe des Graphen X berechnen, der aus den zwölf Kanten des Einheitswürfels $[0,1]^3 \in \mathbb{R}^3$ besteht.

Es gibt einen einfach zusammenhängenden Teilgraphen T aus sieben Kanten, der alle Knoten enthält. Dann ist $\pi_1(X) \cong \bigvee\limits_{i=1}^{5} \mathbb{Z}$, wobei fünf auch gerade die Anzahl der Kanten ist, die nicht in T enthalten sind. Definiere zu jeder Kante $e_\alpha \notin T$ eine offene Umgebung A_α in X, die $e_\alpha \cup T$ als Deformationsretrakt enthält. Der Schnitt von mindestens zwei solcher Mengen besitzt T als Deformationsretrakt, ist also einfach zusammenhängend. Es gilt $X = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{5} A_\alpha$. Auf diese Mengen ist das Theorem von van Kampen anwendbar und da alle Schnitte von verschiedenen Mengen A_α einfach zusammenhängend sind, tritt kein Kern auf, es gilt

$$\pi_1(X) \cong *_{\alpha=1}^5 \pi_1(A_\alpha) \cong *_{\alpha=1}^5 \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Die Fundamentalgruppe ist von geschlossenen Wegen erzeugt, die in T verlaufen und genau eine Kante e_α einmal monoton durchlaufen, die nicht in T enthalten ist.

Beispiel 4.7 (Verschlingungen)**.**

(i) Sei A eine in $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \ni (x,y) \mapsto (x,y,0)$. Dann ist $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus A$. (Deformiere alternativ das Komplement auf eine $\mathbb{S}^2$

mit einem Durchmesser des Äquators. Das Ergebnis ist dann homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$. Dies sieht man beispielsweise, indem man an die Wege vom ausgezeichneten Punkt zu den Endpunkten des Durchmessers Streifen einklebt und beobachtet, dass die beiden betrachteten Räume jeweils Deformationsretrakte hiervon sind.) Also gilt $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus A\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) \cong \mathbb{Z} * \{1\} \cong \mathbb{Z}$.

(ii) Seien A und B zwei unverschlungen in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathbb{S}^1$-en. Unverschlungen sind diese beiden eingebetteten $\mathbb{S}^1$-en beispielsweise, wenn sie beide Radius eins und Abstand zehn haben, $\mathbb{S}^1_A \ni (x, y) \mapsto (x + 6, y, 0)$, $\mathbb{S}^1_B \ni (x, y) \mapsto (x - 6, y, 0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)\right) &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1\right)\\ &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)\\ &\cong \{1\} * \mathbb{Z} * \{1\} * \mathbb{Z}\\ &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(iii) Seien A und B nun zwei verschlungen in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathbb{S}^1$-en, beispielsweise mittels $\vartheta \mapsto (\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$ und $\vartheta \mapsto (1 + \sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist. Dann ist $\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) \vee \mathbb{S}^2 \equiv \mathbb{T}^2 \vee \mathbb{S}^2$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$, wobei der Torus der Rand eines Volltorusses um eine eingebettete $\mathbb{S}^1$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)\right) &\cong \pi_1\left(\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) \vee \mathbb{S}^2\right)\\ &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right)\\ &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \times \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)\\ &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Da (vergleiche eine Algebravorlesung) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht abelsch ist, aber $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abelsch ist, gibt es keinen Homöomorphismus des $\mathbb{R}^3$ der die unverschlungen und die verschlungen eingebetteten $\mathbb{S}^1$-en ineinander überführt, da ein Homöomorphismus die Homotopiegruppen der Komplemente invariant lässt.

Eigentlich sind wir aber nicht daran interessiert, auch noch den umgebenden Raum zu deformieren. Dies spielt aber zumindest im glatten Fall keine Rolle, da sich glatte Deformationen glatter Kurven leicht zu stetigen Deformationen des umgebenden Raumes fortsetzen lassen: Um eine glatte Kurve gibt es eine Tubenumgebung. Auf diese lässt sich eine kleine Deformation der Kurve leicht fortsetzen. Außerhalb der Tubenumgebung deformieren wir nichts. Die Hintereinanderausführung solcher Deformationen des umgebenden Raumes ist dann die gesuchte Deformation.

Definition 4.8 (Abbildungszylinder)**.** Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist der *Abbildungszylinder* M_f als $(X \times I) \coprod Y/\sim$ definiert, wobei $\sim$ die durch $X \times I \ni (x, 1) \sim f(x) \in Y$ induzierte Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung 4.9. Der Abbildungszylinder M_f besitzt Y als Deformationsretrakt, da wir das Segment $\{x\} \times I \subset M_f$ auf $f(x)$ schieben können.

Beispiel 4.10 (Torusknoten)**.** Seien $m,\ n\in\mathbb{N}$ teilerfremd (was die Injektivität sichert) und sei $g:\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\equiv\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}^3$ eine Standardeinbettung des Torus. Definiere $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ durch $f(\exp(2\pi i\vartheta))=(\exp(2\pi im\vartheta),\exp(2\pi in\vartheta))$. Definiere $K_{m,n}\equiv K:=g\circ f\left(\mathbb{S}^1\right)$. Wir wollen $\pi_1\left(\mathbb{R}^3\setminus K\right)$ bestimmen.

Wir können den $\mathbb{R}^3$ auch kompaktifizieren, K als Teilmenge von $\mathbb{S}^3$ auffassen, und die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^3\setminus K$ ausrechnen. Das Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis in $\mathbb{R}^3$ überein: Wenden wir nämlich das van Kampen Theorem auf $\mathbb{R}^3$ und auf einen Ball B um den unendlich fernen Punkt an, so sind B und $B\cap\mathbb{R}^3$, was homöomorph zu $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ ist, nullhomotop. Also folgt $\pi_1\left(\mathbb{R}^3\setminus K\right)\cong\pi_1\left(\mathbb{S}^3\setminus K\right)$.

Wir behaupten, dass $\mathbb{S}^3\setminus K$ als Deformationsretrakt einen Raum $X=X_{m,n}$ homöomorph zu $\left(\mathbb{S}^1\times I\right)/{\sim}$ besitzt, wobei die Äquivalenzrelation für $z\in\mathbb{S}^1$ durch $(z,0)\sim(\exp(2\pi i/m)z,0)$ und $(z,1)\sim(\exp(2\pi i/n)z,1)$ induziert ist. Seien X_m und X_n die beiden Hälften von X, die sich als Quotienten von $\mathbb{S}^1\times[0,1/2]$ beziehungsweise $\mathbb{S}^1\times[1/2,1]$ ergeben, also die Abbildungszylinder von $\mathbb{S}^1\ni z\mapsto z^m$ und $z\mapsto z^n$. Dann ist $X_m\cap X_n$ homöomorph zu einer $\mathbb{S}^1$.

Betrachte die Standardzerlegung von $\mathbb{S}^3$ in zwei Volltori $\mathbb{S}^1\times D^2$ und $D^2\times\mathbb{S}^1$. Beachte dazu, dass $\mathbb{S}^3$ homöomorph zu

$$\begin{aligned}\partial D^4=&\partial\left(D^2\times D^2\right)\\ =&\left(\partial D^2\times D^2\right)\cup\left(D^2\times\partial D^2\right)\\ =&\left(\mathbb{S}^1\times D^2\right)\cup\left(D^2\times\mathbb{S}^1\right)\end{aligned}$$

ist. Visualisieren lässt sich dies in $\mathbb{R}^3$ als ein Volltorus vereinigt mit einem Volltorus, dessen Rand mit dem Rand des anderen Torus verklebt wird („Breitenkreise auf Längenkreise“).

Im ersten Volltorus schneidet K die Kreise $\{x\}\times\partial D^2$ in m gleichverteilten Punkten. In $\{x\}\times D^2$ können diese Punkte durch jeweils dazwischenliegende Punkte und radiale Verbindungsstrecken zu $\{x\}\times\{0\}$ getrennt werden. Durchläuft nun x einmal $\mathbb{S}^1$, so durchlaufen die radialen Strecken gerade eine Kopie des Abbildungszylinders X_m im ersten Volltorus. Analoges funktioniert für den zweiten Volltorus und X_n. Anhand eines Bildes kann man sich überzeugen, dass es im ersten Volltorus eine Deformationsretraktion, jeweils innerhalb der entsprechenden Scheibe $\{x\}\times D^2$, gibt, die das Komplement von K auf X_m deformiert. Wählt man die Deformationen auch noch so, dass sie insbesondere $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ nicht verlassen, wenn sie dort starten, so kann man durch Modifikation der Deformation nahe $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ die beiden Deformationen stetig zusammenfügen und erhält, dass $X_{m,n}$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{S}^3\setminus K$ ist.

Zerlegt man X in X_m und X_n (genauer: in kleine geeignete offene Umgebungen davon), so gibt es Deformationsretrakte von X_m und X_n auf Mengen homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ in X_m beziehungsweise X_n. Nun ist $X_m\cap X_n$ homöoomorph zu einer $\mathbb{S}^1$. Alle diese Bausteine haben also eine Fundamentalgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$. Eine geschlossene Kurve in $X_m\cap X_n$, die einen Erzeuger der Fundamentalgruppe repräsentiert, wird unter der Inklusion $X_m\cap X_n\hookrightarrow X_m$ zu dem m-fachen eines Repräsentanten eines Erzeugers von $\pi_1(X_m)$ und unter $X_m\cap X_n\hookrightarrow X_n$ zum n-fachen eines Repräsentanten eines Erzeugers von $\pi_1(X_n)$. Daher ist nach dem Theorem von van Kampen $\pi_1(X)$ isomorph zur freien von a und b erzeugten Gruppe, aus der die von

$a^m b^{-n}$ erzeugte normale Untergruppe herausgeteilt ist. Bezeichne diese Gruppe mit $G_{m,n}$.

Man kann nun mit etwas Algebra zeigen, dass $G_{m,n}$ für natürliche Zahlen m, $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nur zu $G_{n,m}$ isomorph ist, aber zu keiner anderen Gruppe in dieser Familie. Somit können die entsprechenden Torusknoten für unterschiedliche Werte von $0 \le m \le n$ durch einen Homöomorphismus des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{S}^3$ nicht ineinander überführt werden.

4.3. **Klassifikation zweidimensionaler Flächen.** Wir kleben 2-Zellen $(e^2_\alpha)_\alpha$ mit Abbildungen $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^1 \to X$ an einen wegzusammenhängenden Raum X an und nennen das Ergebnis Y. Sei $x_0 \in X$. Die Abbildung φ_α induziert einen geschlossen Weg $\tilde{\varphi}_\alpha$ (später einfach auch wieder mit φ_α bezeichnet) in X mit einem Basispunkt $\varphi_\alpha(s_0)$. Wähle einen Weg γ_α von x_0 nach $\varphi_\alpha(s_0)$. Dann ist $\gamma_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ ein geschlossener Weg zum Basispunkt x_0. Nach Ankleben der Zellen sind alle diese Wege nullhomotop, liegen also im Kern der Abbildung $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$, die von $X \hookrightarrow Y$ induziert ist. Sei N die von diesen Wegen erzeugte normale Untergruppe. (Wir bemerken, dass die von diesen Elementen erzeugte normale Untergruppe nicht von der Wahl von γ_α abhängt, denn für einen anderen solchen Weg η_α sind $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ und $\eta_\alpha \varphi_\alpha \overline{\eta}_\alpha = (\eta_\alpha \overline{\gamma}_\alpha) \gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha (\gamma_\alpha \overline{\eta}_\alpha)$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert, erzeugen also dieselbe normale Untergruppe, da für jedes Gruppenelement g und einen Normalteiler N stets $gNg^{-1} = N$ gilt.)

Proposition 4.11. *Die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ induziert eine Surjektion $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ mit Kern N. Es gilt also $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N$.*

Beweis. Statt Y betrachten wir einen Raum Z, der aber als Deformationsretrakt den Raum Y besitzt. Dazu kleben wir an Y die Quadrate $Q_\alpha = I \times I$ entlang $I \times \{0\}$ und entlang der Wege γ_α ein. Wir identifizieren die Kanten $\{1\} \times I$ mit einem kleinen Wegstück von $\gamma_\alpha(1)$ in e^2_α und alle Kopien von $\{0\} \times I$ identifizieren wir zu einem Einheitsintervall I. (Stellt man sich X in der Ebene vor und die angeklebten e^2_α's als Halbkugeln, so „sitzen" die angeklebten $I \times I$'s gerade über den Wegen γ_α. Daher ist auch Y ein Deformationsretrakt von Z.) Wähle Punkte $y_\alpha \in e^2_\alpha$, die disjunkt vom Weg sind, entlang dessen $I \times I$ angeklebt wird. Definiere $A := Z \setminus \bigcup\limits_\alpha \{y_\alpha\}$ und $B := Z \setminus X$. Dann besitzt A als Deformationsretrakt den Raum X und B ist kontrahierbar, d. h. besitzt einen Punkt als Deformationsretrakt. Also ist $\pi_1(B) = \{1\}$. Nach dem Theorem von van Kampen, angewandt auf A und B ist $\pi_1(Z) \cong \pi_1(A)/L$, wobei L die vom Bild der Abbildung $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ erzeugte normale Untergruppe ist. Es genügt also einzusehen, dass $\pi_1(A \cap B)$ von zu Wegen der Form $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ homotopen Wegen in $A \cap B$ erzeugt wird. Dazu wenden wir noch einmal das Theorem von van Kampen an. Diesmal überdecken wir $A \cap B$ mit den offenen Mengen $A_\alpha := (A \cap B) \setminus \bigcup\limits_{\beta \neq \alpha} e^2_\beta$. Da A_α als Deformationsretrakt das Bild einer $\mathbb{S}^1$ in $e^2_\alpha \setminus \{y_\alpha\}$ besitzt, gilt $\pi_1(A_\alpha) \cong \mathbb{Z}$, wobei die Gruppe von einem Weg der Form $\gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ erzeugt wird. Ein Kern tritt hier nicht auf, da $A_\alpha \cap A_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ zusammenziehbar (= kontrahierbar) ist. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 4.12. Wir folgen [3]: Plausibel sind die folgenden Überlegungen:

(i) Jede glatte geschlossene Fläche M, d. h. jede zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, lässt sich triangulieren, d. h. in Mengen $(D_i)_{1 \le i \le N}$

homöomorph zu Dreiecken zerlegen, so dass $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} D_i$ gilt. Dabei ist $D_i \cap D_j$ entweder (bis auf einen Homöomorphismus) ein Dreieck, eine Dreiecksseite oder ein Punkt.

(ii) Sei M nun stets eine glatte geschlossene Fläche. Nehme an, dass M zusammenhängend ist. Wir stellen nun M als ein reguläres Polygon dar, an dem wir Kanten identifizieren. Dazu wählen wir ein festes „Dreieck“ D_1. Nehme ohne Einschränkung an, dass $D_1 \cap D_2$ eine Menge homöomorph zu einer Kante enthält. Dann ist $D_1 \cap D_2$ homöomorph zu einem Quadrat, gegebenenfalls bis auf Außenkanten, die wir identifizieren müssen, falls $D_1 \cap D_2$ aus mehr als aus einer Kante besteht. Iterativ fügen wir nun stets ein weiteres Dreieck an und sehen am Ende, dass M homöomorph zu einem regulären Polygon ist, wenn wir die Außenkanten geeignet identifizieren.

(iii) Die unterschiedlichen (Außen-)Kanten des Polygons bezeichnen wir nun mit Buchstaben und drücken die Identifizierungen symbolisch aus durch Worte, beispielsweise durch $aba^{-1}b^{-1}$ für einen Torus. a^{-1} drückt dabei aus, dass die Kante in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Wir schreiben auch aa für den projektiven Raum und $aba^{-1}b$ oder $aacc$ für die Kleinsche Flasche. Die letzten beiden Darstellungen sind äquivalent, wie man sich durch Aufschneiden entlang einer Diagonalen überlegt.

(iv) Die letzten beiden Beispiele sind nicht orientierbar. Eine zweidimensionale Fäche heißt *orientierbar*, wenn es auf ihr zwei linear unabhängige stetige Vektorfelder gibt. Man überlegt sich, dass eine Fläche genau dann orientierbar ist, wenn in einer Darstellung wie oben zu jeder Kante a auch a^{-1} vorkommt. Tritt eine Kante b doppelt auf, so ist M nicht orientierbar. Wir wollen ab jetzt nur noch orientierbare Flächen betrachten.

(v) Die symbolische Darstellung der Randkanten ist nicht eindeutig. Wir werden uns nun überlegen, dass eine orientierbare geschlossene Fläche sich aber immer in Normalform darstellen lässt. Die Normalform ist entweder aa^{-1} oder $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-2}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ für ein $1 \le p \in \mathbb{N}$. Im zweiten Fall sind alle Ecken äquivalent. In drei Schritten werden wir nun die oben hergeleitete Darstellung auf Normalform bringen.

(vi) Zunächst einmal lassen wir alle Ausdrücke der Form aa^{-1} in der Darstellung ersatzlos weg, wenn die Darstellung noch weitere Zeichen enthält.

(vii) Wir wollen die Darstellung nun so modifizieren, dass alle Ecken äquivalent sind. Wir schreiben zunächst die Ecken als Großbuchstaben mit in die Darstellung hinein. Tritt eine Kante PaQ mit $P \neq Q$ auf und sind wir nicht im Fall aa^{-1}, so liegt neben a eine von a verschiedene Kante, also ohne Einschränkung $PaQbR$, wobei R nicht notwendigerweise von P und Q verschieden sein muss. Wir schneiden das Polygon entlang einer Hilfskante PcR im Inneren auf und kleben die beiden Teile entlang QbR und $Rb^{-1}Q$ (das auch vorkommen muss) wieder zusammen. Wir erhalten dann ein Polygon, das an einer Stelle PcR enthält und an einer anderen Stelle $Rc^{-1}PaQ$ und beobachten, dass die Anzahl der Ecken Q sich um eins vermindert hat. Wir setzen dies fort, bis maximal einmal Q als Ecke auftritt. Sind alle Ecken Q verschwunden, sind wir (mit diesem Eckpunkt) fertig, tritt genau einmal Q auf, dann sind wir in einer Situation der Form aQa^{-1}, das haben wir aber schon im ersten Schritt weggelassen, wenn die Darstellung mehr als zwei Buchstaben enthält.

(viii) Wir sagen, dass zwei Kanten a und b gekreuzt sind, wenn in der Darstellung von M, in genau dieser Reihenfolge $\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1} \ldots$ auftaucht. Außer im Fall, wenn die gesamte Darstellung die Form aa^{-1} hat, ist nun jede Kante c mit einer anderen Kante gekreuzt. Wäre nämlich c mit keiner anderen Kante gekreuzt, so würden alle Kanten zwischen c und c^{-1} bereits miteinander identifiziert. Dies widerspricht aber der bereits erreichten Normalisierung, denn wir hatten gesehen, dass die Kanten so identifiziert werden, dass dadurch auch automatisch alle Ecken identifiziert werden. Die Ecken, die in der Darstellung von M außerhalb von c und c^{-1} liegen, werden nun aber mit einem anderen Punkt identifiziert, als die, die innerhalb davon liegen. Somit ist jede Kante mit mindestens einer weiteren Kante gekreuzt.

(ix) Wir modifizieren nun das Polygon, so dass jeweils zwei miteinander gekreuzte Kanten in der Darstellung nebeneinander liegen. Die Darstellung sei nicht von der Form aa^{-1}. Bezeichne $(k_i)_{1\le i\le 4}$ eine nicht näher spezifizierte Folge von Kanten. Sei die Darstellung gegeben durch $aPk_1bk_2Qa^{-1}k_3b^{-1}k_4$. Die markierten Ecken dienen hier nur der einfacheren Bezeichnungsweise beim Hinzufügen von Hilfskanten. Durch künstliches Einfügen einer inneren Kante PcQ und Verkleben der Teile entlang von b und b^{-1} erhalten wir die Darstellung $acRa^{-1}k_3k_2Sc^{-1}k_1k_4$. Füge nun RdS ein und identifiziere a und a^{-1}. Wir erhalten $cdc^{-1}k_1k_4k_3k_2d^{-1}$ und da wir einen Buchstaben vom Ende an den Anfang stellen dürfen eine zusätzliche Folge der Form $d^{-1}cdc^{-1}$ ohne die Kantenzahl vergrößert zu haben. Per Induktion kommen wir nun auf die behauptete Normalform.

(x) Wir schreiben $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$.

Sei M eine geschlossene orientierbare Fläche. Sie lässt sich darstellen, indem wir an die in Bemerkung 4.12 erhaltene Normalform eine 2-Zelle entlang des Weges $[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]$ einkleben. Wir bezeichnen diese Fläche mit M_g. Als Fundamentalgruppe erhalten wir die von den Elementen $a_1,\, b_1,\, \ldots,\, a_g,\, b_g$ erzeugte freie Gruppe modulo der von $[a_1,\, b_1]\cdots[a_g,\, b_g]$ erzeugten normalen Untergruppe.

Zu Proposition 4.11 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.13 (Klassifikationssatz)**.** *Die Flächen M_g und M_l sind für $g\neq l$ weder homöomorph noch homotopieäquivalent zueinander.*

Beweis. Wir machen die Gruppe $\pi_1(M_g)$ künstlich abelsch und erhalten die direkte Summe von $2g$ Kopien von $\mathbb{Z}$. Für homöomorphe oder homotopieäquivalente Flächen M_g und M_l folgt $\pi_1(M_g)\cong\pi_1(M_l)$, also auch $g=l$. □

5. Überlagerungen

Definition 5.1 (Überlagerungen)**.** Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $\tilde{X}$ zusammen mit einer Abbildung $p:\tilde{X}\to X$ eine Überlagerung von X, wenn es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ von X gibt, so dass $p^{-1}(U_\alpha)$ für alle α eine disjunkte (möglicherweise leere) Vereinigung von offenen Mengen ist, die jeweils unter p homöomorph auf U_α abgebildet werden.

Die wichtigsten Existenzaussagen für Abbildungen in Überlagerungen sind:

Wie im Falle $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ zeigt man

Proposition 5.2. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f_t : Y \to X$ eine Homotopie. Gibt es eine f_0 überlagerte Abbildung $\tilde{f}_0 : Y \to \tilde{X}$, d. h. gilt $p \circ \tilde{f}_0 = f_0$, so existiert eine eindeutig bestimmte Homotopie $\tilde{f}_t : Y \to \tilde{X}$, die f_t überlagert ist, also $p \circ \tilde{f}_t = f_t$ erfüllt, so dass $\tilde{f}_0$ in beiden Definitionen übereinstimmt.*

In diesem Falle heißt $\tilde{f}_t$ eine f_t überlagerte Abbildung oder ein *Lift* von f_t.

Es gilt das folgende allgemeinere Liftbarkeitskriterium

Proposition 5.3. *Sei $p : \left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, d. h. $p : \tilde{X} \to X$ sei eine Überlagerung wie oben definiert und es gelte $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann gibt es zu einer stetigen Abbildung $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ genau dann einen Lift $\tilde{f} : (Y, y_0) \to \left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)$, wenn $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)\right)$ gilt.*

Beweis. Siehe [2, Proposition 1.33, S. 61]. □

Anhang A. Brouwerscher Fixpunktsatz

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass jede stetige Abbildung f von der abgeschlossenen Einheitskugel D^n in sich einen Fixpunkt besitzt, d. h. es gibt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$. Wir folgen dabei [1].

Wir führen den Beweis hier nur für $n = 2$. Für $n = 1$ folgt der Brouwersche Fixpunktsatz aus dem Zwischenwertsatz und für $n \geq 3$ lässt sich das Spernersche Lemma, geeignet verallgemeinert, per Induktion beweisen.

Das Spernersche Lemma gilt auch für andere Triangulierungen, für uns genügt aber hier die folgende Version.

Satz A.1 (Spernersches Lemma)**.** *Sei V ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$, das in 4^k, $k \geq 1$, kleinere kongruente gleichseitige Dreiecke aufgeteilt ist. Dann bilden die Kanten und Ecken der kleineren Dreiecke einen Graphen G. Seien die Ecken so gefärbt (wir verwenden die Farben 1, 2 und 3), dass die Ecken des großen Dreiecks drei verschiedene Farben haben und auf jeder Kante des großen Dreiecks nur genau zwei verschiedene Farben vorkommen. Dann gibt es ein kleines Dreieck, dessen Ecken drei verschiedene Farben haben.*

Beweis. Wir betrachten einen neuen Graphen G', den dualen Graphen zum gegebenen Graphen. Er besteht aus jeweils einer Ecke in jedem der kleinen Dreiecke und einer Ecke außerhalb des großen Dreiecks. Zwei Ecken sind nun genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es einen Weg zwischen den Ecken gibt, der nur eine Kante von G genau einmal kreuzt und wenn diese Kante in G eine Ecke der Farbe 1 und eine Ecke der Farbe 2 hat.

Da entlang der äußeren Ecken in G eine ungerade Anzahl von Farbwechseln zwischen 1 und 2 stattfindet, gibt es in G' eine ungerade Anzahl von Kanten, $2l+1$, die an der Ecke außerhalb des großen Dreiecks starten oder enden. Aus den Möglichkeiten, ein kleines Dreieck zu färben, folgt, dass in den Ecken von G' im Inneren des großen Dreiecks maximal zwei Kanten beginnen oder enden können. Wenn in solch einem Punkt (Ecke) genau eine Kante beginnt oder endet, so haben wir ein dreifarbiges Dreieck, wie wir es gesucht haben. Es gibt also in G' Punkte innerhalb des großen Dreiecks mit 0, 1 oder 2 Kanten. Ihre Anzahl wollen wir mit E_0, E_1 und E_2 bezeichnen. Sei k die Anzahl der Kanten in G'. Dann gilt

$$2k = 0 \cdot E_0 + 1 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + (2l+1).$$

Es folgt, dass E_1 ungerade ist. Wir finden also eine ungerade Anzahl von dreifarbigen kleinen Dreiecken. $\square$

Satz A.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Dann gibt es einen Fixpunkt $x \in D^n$, d. h. es gibt einen Punkt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Auch hier wollen wir wieder nur den zweidimensionalen Fall betrachen. Die n-dimensionale Variante folgt analog.

Da D^2 homöomorph zu einem Dreieck Δ ist, genügt es, die Existenz eines Fixpunktes für stetige Abbildungen $f : \Delta \to \Delta$ zu beweisen. Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ das Dreieck mit Ecken $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$. Es gilt $x \in \Delta$ genau dann, wenn $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist und alle $x_i \geq 0$ sind.

Wir unterteilen nun das Dreieck Δ wie im Spernerschen Lemma in 4^k Dreiecke. Diese wollen wir einfärben. Wir wollen annehmen, dass es eine Abbildung $f : \Delta \to \Delta$ gibt, die keinen Fixpunkt besitzt. Dann ist $f(x) - x \neq 0$ für alle $x \in \Delta$. Wir wollen nun einer Ecke $x \in \Delta$ die Farbe i geben, wenn dies die kleinste natürliche Zahl ist, für die $\langle f(x) - x, e_i \rangle$ negativ ist. Dies ist eine wohldefinierte Färbung. Denn wenn wir $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ schreiben, gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 1$. Da nicht $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$ und $x_3 = f_3(x)$ für $x \in \Delta$ gilt, gibt es für jedes $x \in \Delta$ mindestens ein i, so dass $f_i(x) - x_i = \langle f(x) - x, e_i \rangle$ negativ ist und ein i, so dass $f_i(x) - x_i$ positiv ist. Damit ist die Färbung wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass dies eine Färbung wie im Spernerschen Lemma ist. Für die Ecke e_i kann nur $f_i(e_i) - e_i$ negativ sein, also hat sie die Farbe i. Liegt x auf der Ecke gegenüber von e_i, so gilt dort $x_i = 0$. Also kann $f_i(x) - x_i$ nicht negativ sein und somit kann x nicht die Farbe i bekommen. Somit erhalten wir eine Färbung der gewünschten Art.

Wir finden also nach dem Spernerschen Lemma ein kleines Dreieck mit Eckpunkten v_1^k, v_2^k und v_3^k, so dass diese die Farben 1, 2 und 3 bekommen. Daher gilt $\langle f(v_1^k) - v_1^k, e_1 \rangle < 0$, $\langle f(v_2^k) - v_2^k, e_2 \rangle < 0$ und $\langle f(v_3^k) - v_3^k, e_3 \rangle < 0$. Diese Punkte haben jeweils einen Abstand von genau $\sqrt{2} \cdot 2^{-k}$ (oder Null).

Wir betrachten nun eine Folge von Punkten $(v_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Da Δ eine kompakte Menge ist, konvergiert eine (nicht umbenannte) Teilfolge, $v_1^k \to x \in \Delta$ für $k \to \infty$. Man überzeugt sich mit Hilfe der Dreiecksungleichung direkt, dass auch die Folgen v_2^k und v_3^k gegen denselben Grenzwert konvergieren. Da die Funktion f stetig ist, folgt damit $f_1(x) - x_1 \le 0$, $f_2(x) - x_2 \le 0$ und $f_3(x) - x_3 \le 0$. Hieraus erhalten wir

$$1 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \le x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

mit Gleichheit genau dann, wenn in den obigen drei Ungleichungen Gleichheit gilt. Daher hat f eine Fixpunkt. Widerspruch. □

Korollar A.3. *Es gibt keine stetige Retraktion von D^n nach $\mathbb{S}^{n-1}$, d. h. es gibt keine stetige Abbildung $f : D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, so dass $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt.*

Beweis. Falls doch, so ist $g : D^n \to D^n$ mit $g(x) := -f(x)$ eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt. Sei nämlich $x \in D^n$ mit $g(x) = x$. Da $f(D^n) = \mathbb{S}^{n-1}$ ist, folgt $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Es gilt also $g(x) = -f(x) = -x$. Widerspruch zum Brouwerschen Fixpunktsatz. □

Korollar A.4. *Sei $V : D^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit $\langle V(x), x\rangle \le 0$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann gibt es $x \in D^n$ mit $V(x) = 0$, das Vektorfeld besitzt also eine Nullstelle.*

Beweisskizze. Wir wollen annehmen, dass $V(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt.

Betrachte die Abbildung $f : D^n \to D^n$ mit $x \mapsto x + \varepsilon V(x)$ für ein kleines $\varepsilon > 0$. Die Abbildung ist genau dann eine fixpunktfreie Selbstabbildung von D^n, wenn $V(x)$ keine Nullstelle besitzt.

Um sicherzustellen, dass es sich bei f um eine Selbstabbildung von D^n handelt, genügt es nicht, f wie oben definiert zu betrachten. Durch Hinzufügen eines Annulus und nullstellenfreies Fortsetzen des Vektorfeldes kann man ohne Einschränkung annehmen, dass sogar $V(x) = -x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ klein genug, so ist die oben definierte Abbildung f eine Selbstabbildung von D^n. □

Literatur

1. Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Including illustrations by Karl H. Hofmann, Corrected reprint of the 1998 original.
2. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`.
3. Jürgen Jost, *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
4. Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Hochschultext.

Oliver C. Schnürer, Universität Konstanz, Universitätsstr. 10, 78464 Konstanz, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`