GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT GEOMETRISCHEN ANWENDUNGEN

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Geometrische Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen an der Universität Konstanz im Wintersemester 2012/13 und 2016/17.

In dieser Vorlesung betrachten wir ausgewählte geometrische Fragestellungen, die analytisch durch gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt werden können.

Inhaltsverzeichnis

1. Geometrische Grundbegriffe

1.1. Hyperflächen.

Definition 1.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$

(i) Immersion, falls $dX(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für alle $x \in \Omega$ injektiv ist.
(ii) Einbettung, falls X eine Immersion und $X : \Omega \to X(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist, wobei wir auf $X(\Omega)$ die Unterraumtopologie betrachen.

Definition 1.1.2 (Parametrisierte Hyperfläche)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}\right)$ eine Immersion, besitze also die Ableitung $dX(x)$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ den Rang n. Dann heißt X eine parametrisierte oder immersierte Hyperfläche.

Ist $X : \Omega \to X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Homöomorphismus, wobei $X(\Omega)$ die Unterraumtopologie trägt, so heißt X eingebettete Hyperfläche.

Wir nennen auch das Bild $X(\Omega)$ eine immersierte Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Date: 12. Mai 2021.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53C44, 37B25.

Vielen Dank an Jonas Blessing, Ben Lambert, Wolfgang Maurer und Lena Reichle für Anregungen und an Elisabeth Greiler für die Mithilfe beim Setzen.

Ist $n = 2$, so heißen Hyperflächen auch Flächen.

Wir werden nun sehen, dass Untermannigfaltigkeiten und Niveauflächen Beispiele für Hyperflächen sind.

Definition 1.1.3 (Untermannigfaltigkeit)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$, falls es für jedes $x_0 \in M$ eine Umgebung U von x_0 und einen C^k-Diffeomorphismus (bzw. Homöomorphismus im Falle $k = 0$) $\psi\colon U \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\psi(M \cap U) = \psi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ gibt.

Lemma 1.1.4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit. Sei $k \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in M$ eine Umgebung U, so dass $M \cap U$ eine eingebettete Hyperfläche ist.*

Beweis. Benutze $X(x) := \psi^{-1}(x, 0)$ für den Diffeomorphismus ψ aus der Definition einer Untermannigfaltigkeit. $\square$

Definition 1.1.5 (Niveauflächen)**.** Sei $f \in C^1\left(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}\right)$ mit $df(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(\{0\})$. Dann heißt $f^{-1}(\{0\})$ Niveaufläche (von f zum Niveau 0).

Lemma 1.1.6. *Eine Niveaufläche $f^{-1}(\{0\})$ ist eine Untermannigfaltigkeit.*

Im Beweis werden wir sehen, dass sich eine Niveaufläche lokal als Graph darstellen läßt.

Beweis. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es zu jedem $x_0 \in f^{-1}(\{0\})$ nach Umbenennen der Koordinaten, so dass $\frac{\partial f}{\partial x^{n+1}}(x_0) \neq 0$ gilt, eine offene Umgebung U von x_0 und eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für eine offene Umgebung Ω von $\hat{x}_0 \equiv \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$, so dass $f(x) = 0$ genau dann gilt, wenn es ein $\hat{y} \in \Omega$ mit $x = (\hat{y}, u(\hat{y}))$ gibt. Dann ist $\psi\colon U \cap (\Omega \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\psi\left(\hat{x}, x^{n+1}\right) = \left(\hat{x}, x^{n+1} - u(\hat{x})\right)$ der gesuchte Diffeomorphismus. $\square$

Beispiel 1.1.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^1(\Omega)$. Dann ist

$$\operatorname{graph} u = \{(x, u(x))\colon x \in \Omega\},$$

der Graph von u, eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, denn $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(x) = (x, u(x))$ ist die zugehörige Immersion. Da $X : \Omega \to X(\Omega)$ injektiv, stetig und offen ist, ist X sogar eine Einbettung.

Alternativ kann man $\operatorname{graph} u = f^{-1}(\{0\})$ mit $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(\hat{x}, x^{n+1}\right) := x^{n+1} - u(\hat{x})$, schreiben.

1.2. **Normale, Metrik, zweite Fundamentalform und mittlere Krümmung.**

Definition 1.2.1 (Normale)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine immersierte Hyperfläche. Dann heißt eine stetige Funktion $\nu\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

(i) $|\nu(x)| = 1$ für alle $x \in \Omega$ und
(ii) $\nu(x) \perp X_i(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $1 \leq i \leq n$, wobei $X_i \equiv \frac{\partial X}{\partial x^i}$ ist,

ein Einheitsnormalenfeld an X. $\nu(x)$ heißt (Einheits-)Normale an X im Punkt x bzw. $X(x)$.

Definition 1.2.2. Eine kompakte Untermannigfaltigkeit heißt geschlossene Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung 1.2.3 (Vorzeichenkonvention)**.** Bei geschlossenen Hyperflächen wollen wir stets die äußere Normale und bei graphischen Hyperflächen stets die untere Normale wählen.

Bemerkung 1.2.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $T > 0$. Sei $u\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann schreiben wir

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x^n}\right)$$

und $\nabla u = Du^T$, den transponierten Vektor zu Du. Weder Du noch ∇u beinhalten eine Zeitableitung $\dot{u}$.

Später schreiben wir auch laxerweise Du statt ∇u, wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Beispiel 1.2.5. Ist $X(x) = (x, u(x))$ ein Graph, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^1(\Omega)$ sind, so gilt für die „untere“ Normale, $\nu(x) = \frac{(\nabla u(x), -1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2(x)}}$.

Beweis. Es gilt $X_i = (e_i, u_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Wir erhalten

$$\langle X_i, \nu\rangle = \frac{\langle e_i, \nabla u\rangle_{\mathbb{R}^n} - u_i}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0.$$

Weiterhin gilt $|\nu| = 1$. $\square$

Bemerkung 1.2.6 (Einsteinsche Summenkonvention)**.** Tauchen in einem Ausdruck lateinische Indices doppelt und zwar als obere und untere Indices auf, so wird über sie von 1 bis n summiert, über paarweise ebenfalls oben und unten auftretende griechische Indices wird von 1 bis $n+1$ summiert. Es gilt also

$$X_i^\alpha \eta_\alpha g^{ij} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n+1} X_i^\alpha \eta_\alpha g^{ij},$$

wobei wir auf der rechten Seite die Einsteinsche Summenkonvention nicht anwenden.

Ab sofort gilt die Einsteinsche Summenkonvention überall.

Definition 1.2.7 (Metrik)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei X eine immersierte Hyperfläche. Definiere die Metrik $g = (g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mit $g_{ij} = g_{ij}(x)$ von X durch

$$g_{ij}(x) := \langle X_i, X_j\rangle \equiv X_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_j^\beta.$$

Mit $\left(g^{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$ bezeichnen wir die Inverse von (g_{ij}). Es gilt also $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

Bemerkung 1.2.8.

(i) $(g_{ij}(x))$ ist positiv definit und symmetrisch, ebenso $\left(g^{ij}(x)\right)$.

(ii) Sei $\alpha\colon [a,b] \to \Omega$ eine C^1-Kurve. Dann ist die Länge von $X \circ \alpha$ durch

$$L(X\circ\alpha) = \int_a^b \left|\frac{d}{dt} X(\alpha(t))\right| dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\alpha(t))(\alpha')^i(t)(\alpha')^j(t)}$$

gegeben. Dies bestimmt ein symmetrisches g bereits eindeutig.

Beispiel 1.2.9. Ist $X(x) = (x, u(x))$, so gilt $X_i = (e_i, u_i)$. Wir erhalten also

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle = \langle (e_i, u_i), (e_j, u_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle_{\mathbb{R}^n} + u_i u_j = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

Weiterhin gilt

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2},$$

wobei wir $u^i := \delta^{ik} u_k$ gesetzt haben.

Definition 1.2.10 (Zweite Fundamentalform)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei X eine immersierte C^2-Hyperfläche mit Normale ν. Dann definieren wir die zweite Fundamentalform $(h_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ von X durch

$$h_{ij} = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle$$

mit $X_{,ij} := \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}$. (h_{ij}) ist symmetrisch.

Beispiel 1.2.11. Ist $X(x) = (x, u(x))$, so gilt $X_{,ij} = (0, u_{ij})$, wobei wir mit u_{ij} die partiellen zweiten Ableitungen von u bezeichnen, und wir erhalten nach Definition der Normalen

$$h_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Definition 1.2.12. Seien $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und $(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ zwei symmetrische quadratische Formen. Dann heißt $\xi = \left(\xi^k\right)$ Eigenvektor von (a_{ij}) bezüglich (b_{ij}) zum Eigenwert λ, falls $\xi \neq 0$ ist und

$$a_{ij}\xi^j = \lambda b_{ij}\xi^j$$

für alle $1 \le i \le n$ gilt.

Definition 1.2.13 (Hauptkrümmungen)**.** Die Eigenwerte von h_{ij} (genauer (h_{ij})) bezüglich g_{ij} heißen Hauptkrümmungen und werden mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezeichnet.

Bemerkung 1.2.14. Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch sowie B positiv definit, d. h. gilt $\xi^T B\xi > 0$ für $\xi \neq 0$, so besitzt A bezüglich B mit Vielfachheit gezählt n Eigenwerte. Mit B ist nämlich auch $\sqrt{B}$ invertierbar und $A\xi = \lambda B\xi$ ist äquivalent zu

$$\left(\sqrt{B}^{-1} A \sqrt{B}^{-1}\right)\left(\sqrt{B}\xi\right) = \lambda\sqrt{B}^{-1} B \sqrt{B}^{-1}\sqrt{B}\xi = \lambda\left(\sqrt{B}\xi\right).$$

Die Matrix auf der linken Seite ist symmetrisch. Sei nämlich B durch eine orthogonale Matrix O diagonalisiert, $B = O^T DO$, so ist $\sqrt{B}$ durch $\sqrt{B} = O^T\sqrt{D}O$ definiert. Die symmetrische Matrix auf der linken Seite besitzt n Eigenwerte.

Definition 1.2.15. Elementarsymmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen sind wohldefiniert. Wir nennen $S_1(\lambda) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n =: H$ die mittlere Krümmung und $S_n(\lambda) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n =: K$ die Gaußkrümmung.

Beispiel 1.2.16. Im graphischen Fall gelten

$$H = g^{ij}h_{ij} = \frac{\delta^{ij}u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u^j u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}^3} = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)$$

sowie

$$K = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{\det D^2u}{\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

Die folgende Bemerkung werden wir noch sehr häufig verwenden.

Bemerkung 1.2.17. Sei $u\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = |x| = \sqrt{x^i\delta_{ij}x^j}$$

gegeben. Dann gelten

$$u_i(x) = \frac{x_i}{|x|} \equiv \frac{\delta_{ij}x^j}{|x|} \quad \text{und} \quad u_{ij}(x) = \frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right).$$

Die Matrix $(u_{ij})_{1\le i,j\le n}$ hat bezüglich $(\delta_{ij})_{1\le i,j\le n}$ den Eigenwert 0 zum Eigenvektor x und den $n-1$-fachen Eigenwert $\frac{1}{|x|}$ mit Eigenvektoren senkrecht zu x.

Beweis. Übungsaufgabe unter Verwendung der Definition

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2\right)^{1/2} = \left(x^i\delta_{ij}x^j\right)^{1/2}. \qquad \square$$

Beispiele 1.2.18. Sei $R > 0$.

(i) Die Hauptkrümmungen einer Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ sind alle gleich 0.
(ii) Die Hauptkrümmungen einer Sphäre vom Radius R, $\mathbb{S}^n_R(x_0) \equiv \partial B_R(x_0) \equiv \partial B^{n+1}_R(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, sind alle gleich $\frac{1}{R}$.
(iii) Die Hauptkrümmungen eines runden Zylinders $\partial B^{k+1}_R(x_0)\times\mathbb{R}^{n-k}$, $x_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$, sind 0 mit Vielfachheit $n-k$ und $\frac{1}{R}$ mit Vielfachheit k.

Beweis.

(i) Klar.
(ii) Ohne Einschränkung betrachten wir $x_0 = 0$ und die Funktion

$$u(x) = -\sqrt{R^2 - |x|^2} \equiv \varphi(|x|)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
u_i &= \varphi' \frac{x_i}{|x|},\\
u_{ij} &= \varphi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \varphi' \frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right),\\
\sqrt{1+|Du|^2} &= \sqrt{1+\varphi'^2},\\
g_{ij} &= \delta_{ij} + \varphi'^2 \frac{x_i x_j}{|x|^2},\\
h_{ij} &= \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.
\end{aligned}$$

Man liest direkt ab, dass $g_{ij}x^j = \left(1+\varphi'^2\right)\delta_{ij}x^j$ und $g_{ij}\xi^j = \delta_{ij}\xi^j$ für alle $\xi \perp x$ sowie $h_{ij}x^j = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\varphi''\delta_{ij}x^j$ und $h_{ij}\xi^j = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\frac{\varphi'}{|x|}\delta_{ij}\xi^j$ für alle $\xi \perp x$ im Falle $x \neq 0$ gilt. Somit ist x ein Eigenvektor von h_{ij} bezüglich g_{ij} zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}}$ und jedes $\xi \perp x$ mit $\xi \neq 0$ ein Eigenvektor von h_{ij} bezüglich g_{ij} zum Eigenwert $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{\varphi'}{|x|\sqrt{1+\varphi'^2}}$. Wir erhalten mit $r = |x|$ für $0 < r < R$

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}},\\
1+\varphi'^2 &= 1 + \frac{r^2}{R^2-r^2} = \frac{R^2}{R^2-r^2},\\
\varphi''(r) &= \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} + \frac{r^2}{\left(R^2-r^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot\left(1+\frac{r^2}{R^2-r^2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot\frac{R^2}{R^2-r^2},\\
\lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot\frac{R^2}{R^2-r^2}\cdot\frac{\left(R^2-r^2\right)^{3/2}}{R^3} = \frac{1}{R},\\
\lambda_2 &= \frac{\varphi'}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} = \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

Da u von der Klasse C^2 ist, gilt dies auch für $x = 0$. Eine analoge Rechnung funktioniert auch für die obere Hemisphäre mit der oberen Normalen. Die Behauptung gilt schließlich aus Stetigkeitsgründen auch auf dem noch fehlenden Äquator.

(iii) Übung, analog zur Sphäre. □

1.3. **Der graphische mittlere Krümmungsfluss.**

Definition 1.3.1 (Mittlerer Krümmungsfluss)**.** Eine Familie $(X(\cdot,t))_{t\in[0,T)}$, $T > 0$, von immersierten Hyperflächen $X(\cdot,t)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt den mittleren Krümmungsfluss, falls

$$\frac{d}{dt}X = -H\nu$$

für alle $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ gilt und X auf $\Omega \times [0,T)$ stetig ist.

Der mittlere Krümmungsfluss wird häufig mit MCF (mean curvature flow) abgekürzt.

Theorem 1.3.2. *Sei $(X(\cdot,t))_{t\in[0,T)}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, so dass* $\operatorname{im} X(\cdot,t) = \operatorname{graph} u(\cdot,t)$ *für alle $t \in [0,T)$ für eine $C^{2;1}$-Funktion u gilt. (Dabei bezeichnet $C^{2;1}$ den Raum der im Ort zweimal stetig und in der Zeit einmal stetig differenzierbaren Funktionen.) Dann erfüllt u die Differentialgleichung*

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right).$$

Beweis. Sei X auf $\Omega \times [0,T)$ definiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in Ω mit ξ. Wir bezeichnen die orthogonale Projektion von $X(\xi,t)$ auf die Hyperebene $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\}$ mit $x(\xi,t)$. Dann gilt

$$X(\xi,t) = (x(\xi,t), u(x(\xi,t),t)).$$

Aus der Evolutionsgleichung folgt

$$\frac{d}{dt}X = \left(\dot x, u_i \dot x^i + \dot u\right) = -H\nu = H\frac{(-u^1,\ldots,-u^n,1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

Dabei bezeichnet $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Durch Komponentenvergleich erhalten wir

$$\dot x^i = \frac{-Hu^i}{\sqrt{1+|Du|^2}},$$
$$\dot u = \frac{H}{\sqrt{1+|Du|^2}} - u_i\dot x^i = \frac{H}{\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{H|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot H.$$

Bis hier gelten die Rechnungen auch für andere Normalengeschwindigkeiten als H. Die Formel für H im graphischen Fall haben wir bereits oben hergeleitet. Somit folgt die Behauptung. □

1.4. **Der mittlere Krümmungsfluss als geometrische Evolutionsgleichung.**

Aus der obigen Herleitung kann man bereits erkennen, dass die Evolutionsgleichung in einem gedrehten Koordinatensystem wieder dieselbe Form hat, weil wir die auftretenden Größen in "invarianter Weise", d. h. koordinatensystemunabhängig eingeführt haben. Die explizite Rechnung dazu ist wie folgt:

Lemma 1.4.1. *Sei $X\colon \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ oder eine Lösung, deren Normalengeschwindigkeit gerade die mittlere Krümmung ist: $\left\langle \frac{d}{dt}X, \nu\right\rangle = -H$. Sei $R \in O(n+1)$ eine orthogonale Abbildung und $\psi\colon \hat\Omega \times [0,T) \to \Omega$ glatt, so dass $\psi(\cdot,t)\colon \hat\Omega \to \Omega$ für alle $t \in [0,T)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist die Normalengeschwindigkeit von*

$\hat X(x,t) := RX(\psi(x,t),t)$, in Koordinaten $\hat X^\alpha(x,t) = R^\alpha_\beta X^\beta(\psi(x,t),t)$, gerade die mittlere Krümmung:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\hat X, \hat\nu\right\rangle = -\hat H.$$

Weiterhin gilt $\hat H(x,t) = H(\psi(x,t),t)$.

Den Diffeomorphismus ψ kann man verwenden, um die Hyperflächen anders zu parametrisieren. Daher kann man nicht mehr erwarten, dass die Tangentialgeschwindigkeit verschwindet, wenn wir ψ verwenden. Die Bilder von X und $X\circ\psi$ stimmen aber überein. Daher passiert in beiden Fällen geometrisch das Gleiche.

Beweis. Größen zu $\hat X$ bezeichnen wir mit $\hat\nu$, $\hat H$, $\hat g_{ij}$, ...

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat X^\alpha =& R^\alpha_\beta\frac{\partial}{\partial t}X^\beta + R^\alpha_\beta X^\beta_k\dot\psi^k,\\ \hat X^\alpha_i =& R^\alpha_\beta X^\beta_k\psi^k_i,\\ \hat X^\alpha_{,ij} =& R^\alpha_\beta X^\beta_k\psi^k_{ij} + R^\alpha_\beta X^\beta_{,kl}\psi^k_i\psi^l_j.\end{aligned}$$

Wählen wir $\hat\nu^\alpha = R^\alpha_\beta\nu^\beta$, also $\hat\nu = R\nu$, so ist dies eine Normale an die Fläche $\hat X$, da $\langle R\nu, R\nu\rangle = \langle\nu,\nu\rangle = 1$ und $\left\langle R\nu, \left(R^\alpha_\beta X^\beta_k\psi^k_i\right)_\alpha\right\rangle = \langle\nu, X_k\rangle\psi^k_i = 0$ für alle $1\le i\le n$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{d}{dt}\hat X,\hat\nu\right\rangle =& \frac{\partial}{\partial t}X^\alpha R^\beta_\alpha\delta_{\beta\gamma}R^\gamma_\delta\nu^\delta + \dot\psi^i X^\alpha_i R^\beta_\alpha\delta_{\beta\gamma}R^\gamma_\delta\nu^\delta\\ =& -H\nu^\alpha\delta_{\alpha\delta}\nu^\delta + \dot\psi^i X^\alpha_i\delta_{\alpha\delta}\nu^\delta\\ =& -H + 0.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\hat g_{ij} =& \hat X^\alpha_i\delta_{\alpha\beta}\hat X^\beta_j = \psi^k_i X^\gamma_k R^\alpha_\gamma\delta_{\alpha\beta}R^\beta_\delta X^\delta_l\psi^l_j = \psi^k_i X^\gamma_k\delta_{\gamma\delta}X^\delta_l\psi^l_j = \psi^k_i g_{kl}\psi^l_j,\\ \hat h_{ij} =& -\left\langle\hat X_{,ij},\hat\nu\right\rangle = -\psi^k_{ij}X^\beta_k R^\alpha_\beta\delta_{\alpha\gamma}R^\gamma_\delta\nu^\delta - \psi^k_i\psi^l_j X^\beta_{,kl}R^\alpha_\beta\delta_{\alpha\gamma}R^\gamma_\delta\nu^\delta\\ =& -\psi^k_{ij}X^\beta_k\delta_{\beta\delta}\nu^\delta + \psi^k_i\left(-X^\beta_{,kl}\delta_{\beta\delta}\nu^\delta\right)\psi^l_j = 0 + \psi^k_i h_{kl}\psi^l_j.\end{aligned}$$

ψ ist ein Diffeomorphismus. Also ist $\left(\psi^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ eine invertierbare Matrix und die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij} und von $\hat h_{ij}$ bezüglich $\hat g_{ij}$ stimmen überein: Sei nämlich ξ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d. h. gelte

$$\lambda g_{ij}\xi^j = h_{ij}\xi^j$$

und $\xi\neq 0$. Dann folgt für $\hat\xi^i := \Psi^i_k\xi^k$ mit $\Psi(\cdot,t) := (\psi(\cdot,t))^{-1}$

$$\lambda\hat g_{kl}\hat\xi^l = \lambda\psi^i_k g_{ij}\psi^j_l\Psi^l_m\xi^m = \lambda\psi^i_k g_{ij}\xi^m = \psi^i_k h_{ij}\xi^j = \psi^i_k h_{ij}\psi^j_l\Psi^l_m\xi^m = \hat h_{kl}\hat\xi^l.$$

Andersherum argumentiert man analog. Somit folgt $\hat H(x,t) = H(\psi(x,t),t)$ und damit die Behauptung. □

1.5. **Kontrahierende Sphären.** Wir haben gerade in Lemma 1.4.1 gesehen, dass die mittlere Krümmung sich unter Rotationen nicht ändert. Da $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ unter Rotationen invariant ist, d. h. es gilt $R\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n$ für alle $R\in O(n+1)$, ist die mittlere Krümmung der Sphäre überall gleich. Daher erhalten wir eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, die aus zentrierten Sphären besteht. Der Nachweis, dass es keine weitere Lösung gibt ist nicht ganz so trivial, wie man am Beispiel der partiellen Differentialgleichung $\dot u = \Delta u$ mit $u(\cdot,0) = 0$ im $\mathbb{R}^n$ sieht (aber nicht in dieser Vorlesung).

Der folgende Satz beschreibt die Evolution runder Sphären unter dem mittleren Krümmungsfluss.

Theorem 1.5.1. *Sei* $Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *eine Einbettung einer offenen Menge einer Sphäre. Sei* $X\colon \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *durch* $X(x,t) = r(t)Y(x)$ *mit* $r(0) = r_0 > 0$ *eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses. Dann gilt für* $0 \le t < \min\left\{\frac{r_0^2}{2n}, T\right\}$

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2nt}.$$

Natürlich handelt es sich auch für beliebige $t < 0$ noch um eine Lösung; die angegebene Lösung ist eine sogenannte "ancient solution". Eine "eternal solution" wäre eine Lösung, die für alle $-\infty < t < \infty$ existiert. Solch eine Lösung kann aber nicht mehr kompakt sein, da keine solche Lösung aufgrund des Vergleichsprinzips (nicht Inhalt dieser Vorlesung) für beliebige positive Zeiten existieren kann.

Als Vorbereitung überlegen wir uns, wie sich geometrische Größen unter Skalierungen ändern.

Lemma 1.5.2. *Sei* $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *eine Immersion. Sei* $\mu > 0$. *Dann gilt für* $\tilde{X} := \mu X$, *wenn wir sämtliche geometrische Größen der Einbettung* $\tilde{X}$ *mit Schlangen markieren*

$$g_{ij} = \mu^2 g_{ij}, \quad \tilde{\nu} = \nu, \quad \tilde{h}_{ij} = \mu h_{ij} \quad \textit{und} \quad \tilde{H} = \frac{1}{\mu} H.$$

Beweis. Es gilt

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \right\rangle = \mu^2 \left\langle X_i, X_j \right\rangle = \mu^2 g_{ij}.$$

Die Normale ν steht nicht nur auf den Tangentialvektoren X_i, sondern auch auf $\tilde{X}_i = \mu X_i$ senkrecht. Deshalb gilt $\tilde{\nu} = \nu$. Für die zweite Fundamentalform erhalten wir

$$\tilde{h}_{ij} = -\left\langle \tilde{X}_{,ij}, \tilde{\nu} \right\rangle = -\langle \mu X_{,ij}, \nu \rangle = \mu h_{ij}.$$

Somit ergibt sich schließlich für die mittlere Krümmung

$$\tilde{H} = \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} = \frac{1}{\mu^2} g^{ij} \mu h_{ij} = \frac{1}{\mu} H. \qquad \square$$

Beweis von Theorem 1.5.1. Wir benutzen Lemma 1.5.2 um eine Evolutionsgleichung für $r(t)$ zu erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X &= \frac{d}{dt}(r(t)Y) = \dot{r}(t) Y \\ = \frac{d}{dt} X &= -H\nu = -\frac{1}{r(t)} H^Y \nu = -\frac{1}{r(t)} H(1) Y, \end{aligned}$$

wobei H^Y die mittlere Krümmung der Einbettung Y bezeichnet. Wegen $H^Y = n$, siehe Beispiele 1.2.18 erfüllt $r(t)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} r(t) = -\frac{n}{r(t)}.$$

Also folgt nach Multiplikation mit $r(t)$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2(t)\right) = r(t)\dot{r}(t) = -n$$

und daher die oben angegebene Lösung. $\square$

Aufgabe 1.5.3. Benutze die lokale Graphendarstellung $u(x,t) = -\sqrt{r^2(t) - |x|^2}$ in $B_{r(t)}(0)$ und die Gleichung des graphischen mittleren Krümmungsflusses um Theorem 1.5.1 nochmals zu beweisen.

Aufgabe 1.5.4. Bestimme das Verhalten von Sphären, die sich mit Normalengeschwindigkeit $|A|^2$, K, $-\frac{1}{H}$, $-\frac{1}{K}$ oder H^k, $k > 0$, bewegen.

2. Unter dem mittleren Krümmungsfluss translatierende ganze Graphen

Wir folgen teilweise [5].
Ein ganzer Graph ist der Graph einer Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

2.1. **Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.** Wir betrachten stets in vertikaler Richtung translatierende Lösungen.

Lemma 2.1.1. *Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ eine translatierende Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses, d. h. gelte*

$$\lambda = \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt $u(x,t) = U(x) + \lambda t$. Sei $U \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und gelte $U(x) = \Phi(|x|)$. Dann folgt

$$\lambda = \frac{\Phi''}{1+(\Phi')^2} + \Phi' \frac{n-1}{r},$$

wobei wir $r = |x|$ benutzt haben.

Beweis. Es gilt

$$\lambda = \Delta U - \frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2},$$

wobei wir $U^i \equiv \delta^{ij}U_j$ abkürzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
U_i &= \Phi' \frac{x_i}{|x|}, \\
U_{ij} &= \Phi' \frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) + \Phi'' \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \\
\Delta U &= \Phi' \frac{n-1}{|x|} + \Phi'', \\
U_{ij}U^iU^j &= \Phi''(\Phi')^2, \\
1+|DU|^2 &= 1+(\Phi')^2, \\
\Delta U - \frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2} &= \Phi' \frac{n-1}{r} + \Phi'' - \frac{\Phi''(\Phi')^2}{1+(\Phi')^2} = \Phi' \frac{n-1}{r} + \frac{\Phi''}{1+(\Phi')^2}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.2.

(i) Haben wir die gewöhnliche Differentialgleichung für eine rotationssymmetrische translatierende Lösung gelöst und damit eine translatierende Lösung gefunden, so erhalten wir weitere rotationssymmetrische translatierende Lösungen durch Addition einer Konstanten.

(ii) Wir werden später translatierende Lösungen mit Geschwindigkeit eins betrachten. Dann erfüllt $\varphi := \Phi'$ die Differentialgleichung

$$\varphi' = \left(1+\varphi^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi\right). \tag{2.1}$$

(iii) Im Fall von Kurven, also $n = 1$, können wir die Differentialgleichung explizit lösen. Ist $\Phi(r) = -\log\cos(r)$, $-\frac{\pi}{2} < r < \frac{\pi}{2}$, so gilt $\varphi(r) = \Phi'(r) = \frac{\sin r}{\cos r}$, $\varphi'(r) = \frac{\cos^2 r + \sin^2 r}{\cos^2 r} = \frac{1}{\cos^2 r}$ und somit löst φ die Differentialgleichung. Nur in diesem Falle ist die Lösung lediglich auf einer beschränkten Menge definiert.

Lemma 2.1.3 (Reduktion auf Geschwindigkeit eins)**.** *Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ eine translatierende Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses, d. h. gelte*

$$\lambda = \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Die Funktion $\hat{u}(x,t) := -u(x,t)$ ist eine mit Geschwindigkeit $-\lambda$ translatierende Lösung.

(ii) Ist $\lambda > 0$, so ist $\hat{u}(x,t) := \lambda u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right)$ eine mit (vertikaler) Geschwindigkeit 1 translatierende Lösung.

Beweis.

(i) Klar.

(ii) Es gilt $\dot{\hat{u}} = \frac{1}{\lambda}\dot{u}$, $\hat{u}_i = u_i$, $\hat{u}_{ij} = \frac{1}{\lambda}u_{ij}$. Die Differentialgleichung können wir durch Ausrechnen der Divergenz auch als

$$\dot{u} = \Delta u - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2}$$

schreiben. Diese wird auch von $\hat{u}$ erfüllt. Somit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.4. Aus dem obigen Beweis liest man ab, dass man durch Spiegelungen oder parabolische Skalierungen in Raum und Zeit die Eigenschaft, eine Lösung des (graphischen) mittleren Krümmungsflusses zu sein, erhält.

Es genügt also, translatierende Lösungen mit Geschwindigkeit 0 oder 1 zu betrachten.

Bemerkung 2.1.5 (Geschwindigkeit Null)**.** Sei $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ein Lösung von

$$\varphi' = -\left(1+\varphi^2\right)\varphi\frac{n-1}{r},$$

wobei φ zu einer C^2-Lösung u gehört. Diese Differentialgleichung wird von einer translatierenden Lösung mit Geschwindigkeit Null erfüllt. Dann gilt $\varphi \equiv 0$.

Beweis. Für $r \to 0$ gilt $\varphi \to 0$, da der zugehörige Graph im Ursprung von der Klasse C^2 sein soll. Ist $\varphi > 0$, so folgt $\varphi' < 0$ und umgekehrt. Dies ist nur für $\varphi \equiv 0$ möglich. □

2.2. **Existenz nahe $r = 0$.**

Lemma 2.2.1 (Regularität im Ursprung)**.** *Die Funktion $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, mit $U(x) = \Phi(|x|)$ mit $\Phi \in C^2_{loc}((0,\infty))$ ist genau dann in einer Umgebung des Ursprungs von der Klasse C^2, wenn*

(i) $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{\Phi'(r)}{r}$ in $\mathbb{R}$ existiert und

(ii) $\Phi'(r) \to 0$ sowie

(iii) $-\frac{\Phi'(r)}{r} + \Phi''(r) \to 0$

für $r \searrow 0$ gelten oder

(i) $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{\varphi(r)}{r}$ existiert in $\mathbb{R}$ und

(ii) $\varphi(r) \to 0$ sowie

(iii) $-\frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r) \to 0$

für $r \searrow 0$ gelten.

Beweis. Die folgt direkt aus den Ausdrücken für U_i und U_{ij} in Lemma 2.1.1. Benutze den Beweis des Satzes von Taylor. □

Lemma 2.2.2. *Die Differentialgleichung* (2.1) *für* $r \in (0, \infty)$ *ist äquivalent zu*

$$\psi' = \left(1 + \psi^2\right) \cdot \left((n-1) \cdot \psi - e^{-r}\right) \tag{2.2}$$

mit $\psi(r) := \varphi\left(e^{-r}\right)$ *und* $r \in \mathbb{R}$.

Die Regularitätsbedingungen aus Lemma 2.2.1 werden zu

(i) $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{e^{-r}}$ *existiert in* $\mathbb{R}$,
(ii) $\psi(r) \to 0$ *sowie*
(iii) $e^r\left(\psi(r) + \psi'(r)\right) \to 0$

für $r \to \infty$.

Beweis. Aus (2.1) erhalten wir an der Stelle e^{-r} nach Durchmultiplizieren mit e^{-r}

$$e^{-r}\varphi'\left(e^{-r}\right) = \left(1 + \varphi^2\left(e^{-r}\right)\right) \cdot \left(e^{-r} - (n-1) \cdot \varphi\left(e^{-r}\right)\right).$$

Wir setzen $\psi(r) := \varphi\left(e^{-r}\right)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\psi'(r) &= \varphi'\left(e^{-r}\right) \cdot (-1) \cdot e^{-r} \\ &= \left(1 + \varphi^2\left(e^{-r}\right)\right) \cdot \left((n-1) \cdot \varphi\left(e^{-r}\right) - e^{-r}\right) \\ &= \left(1 + \psi^2(r)\right) \cdot \left((n-1) \cdot \psi - e^{-r}\right).\end{aligned}$$

(i) Es gilt $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\varphi\left(e^{-r}\right)}{e^{-r}} = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{e^{-r}}$.
(ii) Ist klar.
(iii) Es gilt $0 \overset{!}{\leftarrow} e^r(\psi(r) + \psi'(r)) = e^r\left(\varphi\left(e^{-r}\right) - e^{-r}\varphi'\left(e^{-r}\right)\right) = \frac{\varphi\left(e^{-r}\right)}{e^{-r}} - \varphi'\left(e^{-r}\right)$ für $r \to \infty$ oder $e^{-r} \to 0$. □

Theorem 2.2.3. *Sei* $n \geq 2$. *Es gibt genau ein* $a \in (0,1)$, *so dass* (2.2), *also*

$$\psi'(r) = \left(1 + \psi^2(r)\right) \cdot \left((n-1) \cdot \psi(r) - e^{-r}\right),$$

mit $\psi(0) = a$ *eine Lösung* ψ *für alle* $r \in [0, \infty)$ *besitzt. Diese Lösung* ψ *erfüllt die Regularitätsbedingungen aus Lemma 2.2.2.*

Beweis.

(i) Wegen

$$\left(1 + \psi^2\right)(n-1)\psi \geq \psi' \geq \left(1 + \psi^2\right)((n-1)\psi - 1)$$

für $r \geq 0$ gibt es zu jeder Lösung mit $\psi(r_0) \in [0,1]$, $r_0 \geq 0$, ein $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ so dass die maximale Lösung mindestens bis $r_0 + \varepsilon$ existiert.

(ii) Ist ψ eine Lösung mit $(n-1)\psi(r_0) - e^{-r_0} \geq 0$ für ein $r_0 \geq 0$, so existiert diese Lösung nicht auf ganz $[0, \infty)$: Setze $w(r) := (n-1)\psi(r) - e^{-r}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}w(r) &= (n-1)\psi'(r) + e^{-r} > (n-1)\psi'(r) \\ &= (n-1)\left(1 + \psi^2(r)\right)w(r).\end{aligned}$$

Somit gibt es ein $\delta > 0$, so dass $w(r) > \delta$ für alle $r \geq r_0 + 1$ gilt. Wir erhalten für $r \geq r_0 + 1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}w(r) &\geq (n-1)\left(1 + \psi^2(r)\right)\delta > (n-1)\delta\psi^2(r) \geq (n-1)\delta\left(\frac{w(r)}{n-1}\right)^2 \\ &\equiv \tilde{\delta}w^2(r).\end{aligned}$$

Diese Differentialungleichung besitzt keine Lösung $w(r) > \delta$ für alle $r_0 + 1 \leq r < \infty$: $\hat{w}(r) := \frac{1}{\tilde{\delta}(R-r)}$ löst die Differentialgleichung und es gilt $(w - \hat{w})' \geq \tilde{\delta}w^2 - \tilde{\delta}\hat{w}^2 = \tilde{\delta}(w + \hat{w})(w - \hat{w})$. Ist also $R \gg 1$ so groß gewählt, dass anfangs, d. h. für $r = r_0 + 1$, die Ungleichung $w - \hat{w} \geq 0$ gilt, so gilt sie für alle größeren

r ebenfalls. Wegen $\lim\limits_{r\nearrow R} \hat{w} = \infty$ kann auch w, und damit ψ, nicht für alle $r \in [r_0, \infty)$ existieren.

Damit gilt für eine Lösung, die bis $r = \infty$ existiert, stets $w < 0$ und daher auch $\psi' < 0$.

Dies gilt insbesondere auch für $r = 0$. Für die gesuchte globale Lösung muss also $a < \frac{1}{n-1}$ gelten.

(iii) Eine auf $[0, \infty)$ definierte Lösung erfüllt $\psi(r) > 0$ für alle r: Sonst erhalten wir $\psi'(r_0) < 0$ für ein r_0 und somit $\psi(r_1) \le -\delta$ für ein $r_1 > 0$ und ein $\delta > 0$. Diese Ungleichung gilt auch für alle $r > r_1$: Sei $r_2 > r_1$ minimal mit $\psi(r_2) = 0$ oder setze $r_2 := \infty$ falls kein solches r_2 existiert. Dann gilt $\psi(r) \le 0$ für $r \in [r_1, r_2]$ und aufgrund der Differentialgleichung $\psi'(r) < 0$ ebenfalls für $r \in [r_1, r_2]$. Integrieren liefert dort $\psi(r) \le \psi(r_1) \le -\delta$.

Folglich ist $r_2 = \infty$ und es gilt

$$\psi'(r) = \left(1 + \psi^2(r)\right)\left((n-1)\psi(r) - e^{-r}\right) \le -\delta\psi^2(r).$$

Ebenso wie oben sehen wir, dass solch eine Lösung nicht für alle $r \ge 0$ existieren kann.

(iv) Sei ψ_a die Lösung von (2.2) mit Anfangswert $\psi_a(0) = a$, $a \in [0, 1]$. Dann existiert ψ_a mindestens auf $[0, \varepsilon]$. Es gilt aufgrund der obigen Überlegungen $\psi_1(\varepsilon) > 1$ und $\psi_0(\varepsilon) < 0$. Die Lösungen hängen stetig vom Anfangswert $a \in [0, 1]$ ab und für $a \ne b$ gilt aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit $\psi_a(r) \ne \psi_b(r)$ für alle $r \in [0, \varepsilon]$. Somit gibt es ein maximales abgeschlossenes Intervall $I_1 \subset [0, 1]$ mit $\psi_a(\varepsilon) \in [0, 1]$ für alle $a \in I_1$.

Hieraus folgt, dass ψ_a für alle $a \in I_1$ mindestens auf dem Intervall $[0, 2\varepsilon]$ existiert. Sei I_2 das maximale abgeschlossene Intervall in I_1 mit $\psi_a(2\varepsilon) \in [0, 1]$ für alle $a \in I_2$. Iterativ erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$ Intervalle I_k, so dass ψ_a mindestens auf $[0, k\varepsilon]$ existiert und dort $\psi_a \in [0, 1]$ erfüllt, falls $a \in I_k$ gilt, denn Lösungen, die bereits vorher eine der beiden Grenzen erreichen, können nicht mehr in das Intervall $[0, 1]$ zurückkehren.

Setze $I := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}_+} I_k$. Da $I \ne \emptyset$ ist, haben wir eine Lösung von (2.2) gefunden.

(v) Zur Eindeutigkeit: Bestehe I aus mehr als einem Punkt. Seien ψ und χ zwei zugehörige unterschiedliche Lösungen von (2.2). Setze $w := \psi - \chi$. Sei ohne Einschränkung $w \ge 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
w' &= \psi' - \chi' = \left(1 + \psi^2\right)\left((n-1)\psi - e^{-r}\right) - \left(1 + \chi^2\right)\left((n-1)\chi - e^{-r}\right) \\
&= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\left\{\left(1 + (t\psi + (1-t)\chi)^2\right)\left((n-1)(t\psi + (1-t)\chi) - e^{-r}\right)\right\} dt \\
&= 2\int\limits_0^1 (t\psi + (1-t)\chi)\left((n-1)(t\psi + (1-t)\chi) - e^{-r}\right) dt \cdot (\psi - \chi) \\
&\quad + \int\limits_0^1 \left(1 + (t\psi + (1-t)\chi)^2\right)(n-1)\, dt \cdot (\psi - \chi).
\end{aligned}$$

Aus $e^{-r} \ge (n-1)\psi \ge 0$ und einer entsprechenden Ungleichung für χ erhalten wir

$$w' \ge (n - 3/2)w$$

für $r \ge r_0$. Wir dürfen ohne Einschränkung $w(r_0) > 0$ annehmen, da sonst $w \equiv 0$ gilt. Somit wächst w exponentiell, was $|w| \le 2e^{-r}$ widerspricht.

(vi) Die Regularitätsbedingung $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ ist aufgrund der obigen Überlegungen erfüllt.

(vii) Definiere $w(r) := e^r\psi(r)$ für die Lösung ψ. Wir wissen bereits, dass $0 \le \psi \le \frac{1}{n-1}e^{-r}$ und somit $0 \le w \le \frac{1}{n-1}$ gilt. Wir erhalten als Differentialgleichung für w

$$\begin{aligned} w' &= e^r\psi + e^r\psi' \\ &= e^r\psi + e^r\left(1+\psi^2\right)\left((n-1)\psi - e^{-r}\right) \\ &= e^r\psi + (n-1)e^r\psi - 1 + (n-1)e^r\psi\psi^2 - \psi^2 \\ &= \left(n + (n-1)\psi^2\right)w - 1 - \psi^2. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\lim_{r\to\infty} w = \frac{1}{n} \tag{2.3}$$

gilt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $r_0 \gg 1$ mit $(n-1)\psi^2 \le \varepsilon$ für $r \ge r_0$. Somit erhalten wir die Differentialungleichungen

$$nw - 1 - \varepsilon \le w' \le (n+\varepsilon)w - 1 \quad \text{für } r \ge r_0.$$

Um (2.3) zu zeigen, beweisen wir: Es gilt

$$\frac{1}{n+\varepsilon} \le w(r) \le \frac{1+\varepsilon}{n} \tag{2.4}$$

für alle $r \ge r_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

Obere Schranke: Unsere Strategie ist es, eine untere Barriere w_1 zu konstruieren, konkreter eine Funktion, die $w_1' = nw_1 - 1 - \varepsilon$ erfüllt zu finden (wobei „$\le$" auch reichen würde). Ist dann die obere Schranke verletzt, gilt $w(r_1) \ge w_1(r_1)$ für ein $r_1 \ge r_0$ und aufgrund der Barriereneigenschaft folgt dann $w(r) \ge w_1(r)$ für alle $r \ge r_1$, was zu einem Widerspruch führen wird:

Sei also w_1 eine Lösung von $w' = nw - 1 - \varepsilon$. Definiere $u := w_1 - \frac{1+\varepsilon}{n}$. Wir erhalten die Differentialgleichung $u' = w_1' = nw_1 - 1 - \varepsilon = nu$, also $u = Ae^{nr}$ und $w_1 = Ae^{nr} + \frac{1+\varepsilon}{n}$. Die Funktion w_1 ist eine untere Barriere für w. Falls die rechte Ungleichung in (2.4) verletzt ist, finden wir $r_1 \ge r_0$ mit $w(r_1) > \frac{1+\varepsilon}{n}$. Dann gibt es ein kleines $A > 0$ mit $w_1(r_1) = Ae^{nr_1} + \frac{1+\varepsilon}{n} < w(r_1)$. Aufgrund der Differentialungleichung folgt $w_1(r) < w(r)$ für alle $r \ge r_1$. Dies liefert aber einen Widerspruch, da w_1 exponentiell wächst und $w \le \frac{1}{n-1}$ gilt.

Untere Schranke: Wir argumentieren ähnlich wie für die obere Schranke. Sei w_2 eine Lösung von $w' = (n+\varepsilon)w - 1$. Wir erhalten mit $u := w_2 - \frac{1}{n+\varepsilon}$ die Differentialgleichung $u' = w_2' = (n+\varepsilon)w_2 - 1 = (n+\varepsilon)u$ und daher $u(r) = Ae^{(n+\varepsilon)r}$ sowie $w_2 = Ae^{(n+\varepsilon)r} + \frac{1}{n+\varepsilon}$. Falls die linke Ungleichung in (2.4) verletzt wäre, gäbe es ein $r_1 \ge r_0$ mit $w(r_1) < \frac{1}{n+\varepsilon}$. Für ein betragsmäßig kleines $A < 0$ erhalten wir $w(r_1) < w_2(r_1)$. Da w_2 eine obere Barriere für w ist, folgt

$$0 \le w(r) < w_2(r) = Ae^{(n+\varepsilon)r} + \frac{1}{n+\varepsilon}$$

für alle $r \ge r_1$. Wegen $A < 0$ erhalten wir für $r \to \infty$ einen Widerspruch.

(2.3) folgt.

(viii) Multiplizieren wir die Differentialgleichung mit e^r, so konvergiert die rechte Seite aufgrund der obigen Überlegungen,

$$e^r\psi' = \left(1+\psi^2\right)\left((n-1)e^r\psi - 1\right) \to 1 \cdot \left(\frac{n-1}{n} - 1\right) = -\frac{1}{n}.$$

Wir erhalten $e^r(\psi(r) + \psi'(r)) \to 0$ für $r \to \infty$. □

Wir haben somit in $B_1(0)$ die Existenz einer rotationssymmetrischen translatierenden Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses mit Geschwindigkeit eins gezeigt. Bis auf additive Konstanten ist diese Lösung eindeutig bestimmt.

Alternativ können wir den Existenzbeweis aus Theorem 2.2.3 wie folgt führen:

Theorem 2.2.4. *Es gibt eine Lösung $\psi \in C^1([0,\infty))$ der Differentialgleichung*

$$\psi'(r) = \left(1+\psi^2(r)\right)\left((n-1)\psi - e^{-r}\right)$$

mit $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$.

Beweis.

(i) Wir betrachten die Differentialgleichung auf dem Intervall $[0,k]$ mit Anfangswert $\psi(k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, und wollen zeigen, dass die zugehörigen Lösungen ψ_k auf ganz $[0,k]$ existieren und a priori Abschätzungen erfüllen, die es erlauben, zu zeigen, dass zumindest eine Teilfolge der ψ_k für $k \to \infty$ gegen eine Lösung mit $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ konvergiert.

(ii) Da wir den Anfangswert lieber an der linken als an der rechten Intervallgrenze vorgeben, definieren wir $\chi(r) = \psi(-r)$ und schreiben das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \psi'(r) = \left(1+\psi^2(r)\right)\left((n-1)\psi - e^{-r}\right), & r \in [0,k], \\ \psi(+k) = 0 \end{cases}$$

äquivalent um:

$$\begin{cases} \chi'(r) = -\psi'(-r) \;=\; \left(1+\chi^2(r)\right)\left(e^{r} - (n-1)\chi(r)\right), & r \in [-k,0], \\ \chi(-k) = 0. \end{cases}$$

Dieses Anfangswertproblem besitzt eine Lösung χ_k auf einem maximalen Existenzintervall $I_k \subset [-k,0]$ mit $-k \in I_k$.

Wir leiten nun Abschätzungen für χ_k her. Dabei schreiben wir χ statt χ_k.

(iii) Es gilt $\chi > 0$ auf $I_k \backslash \{-k\}$: Aufgrund der Differentialgleichung gilt $\chi'(-k) = e^r > 0$. Somit gilt die Behauptung für r nahe $-k$. Angenommen, es gibt ein minimales $r_0 \in I_k$ mit $r_0 > -k$ und $\chi(r_0) = 0$. Wegen $\chi(r_0) \le \chi(r)$ für alle r mit $-k \le r \le r_0$ erhalten wir $\chi'(r_0) \le 0$. Andererseits gilt aufgrund der Differentialgleichung $\chi'(r_0) > 0$. Widerspruch. Somit existiert kein solches r_0 und die Behauptung folgt.

(iv) Es gilt $\chi(r) < \frac{e^r}{n-1}$ für $r \in I_k$: Zunächst gilt $\chi(-k) = 0 < \frac{e^{-k}}{n-1}$. Angenommen, es gibt $r_0 \in I_k$ mit $\chi(r_0) = \frac{e^{r_0}}{n-1}$, so erhalten wir $e^{r_0} - (n-1)\chi(r_0) = 0$ und somit $\chi'(r_0) = 0$. Weiterhin gilt für $r = r_0$

$$\left(e^r - (n-1)\chi(r)\right)' = e^r - (n-1)\chi'(r) = e^r > 0.$$

Wie oben sehen wir, dass dies nicht möglich ist und erhalten $e^r - (n-1)\chi(r) > 0$ für $r \in I_k$ oder $\chi(r) < \frac{e^r}{n-1}$.

(v) Aufgrund der Abschätzung $0 \le \chi_k(r) < \frac{e^r}{n-1}$ in I_k könnten wir die Lösung im Falle $I_k \subsetneq [-k,0]$ über I_k hinaus fortsetzen und erhielten einen Widerspruch. Somit gilt $I_k = [-k,0]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $r \le 0$ gilt $e^r \le 1$ und wir erhalten aus der Differentialgleichung gleichmäßige Abschätzungen für $\chi_k'(r)$, unabhängig von k und r. Wir setzen nun χ_k vermöge $\chi_k(r) := 0$ für $r \le -k$ auf $(-\infty,0]$ fort, wenden den Satz von Arzelà-Ascoli an und erhalten eine Teilfolge χ_{k_l} mit $\chi_{k_l} \to \chi$ in $C^0_{loc}((-\infty,0])$. Wegen $\chi_k \ge \chi_l$ für $k \ge l$ konvergiert sogar die gesamte Folge. In der zur Differentialgeichung äquivalenten Integralformulierung

$$\chi_k(r) = \chi_k(r_0) + \int\limits_{r_0}^{r} \left(1+\chi_k^2(\rho)\right)\left(e^\rho - (n-1)\chi_k(\rho)\right)\,d\rho$$

können wir zum Grenzwert $k \to \infty$ übergehen und erhalten, dass χ die Integralgleichung und somit auch die Differentialgleichung löst. Schließlich folgt aus der Abschätzung

$$0 \leq \chi_k(r) < \frac{e^r}{n-1}$$

auch

$$0 \leq \chi(r) \leq \frac{e^r}{n-1}$$

und somit $\chi(r) \to 0$ für $r \to -\infty$ bzw. $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$. □

2.3. Asymptotisches Verhalten für $r \to \infty$.

Lemma 2.3.1. *Sei $n \geq 2$. Eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.1),*

$$\varphi' = \left(1+\varphi^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi\right),$$

mit gegebenem Anfangswert $\varphi(r_0)$, $r_0 > 0$ existiert für alle $r \in [r_0, \infty)$.

Beweis. Es genügt der Nachweis, dass die Lösung auf kompakten Teilintervallen beschränkt ist. Für $\varphi(r) > r$ ist $\varphi' < 0$ und für $\varphi < -r$ ist $\varphi' > 0$. Dies liefert die erforderlichen Schranken. □

Bemerkung 2.3.2. Computeralgebrarechnungen legen nahe, dass sich jede Lösung φ von (2.1) für $n \geq 2$ auf $[r_0, \infty)$ mit $r_0 > 0$ für $r \to \infty$ wie folgt verhält:

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + (n-1)(n-4)\frac{1}{r^3} - (n-1)^2\left(n^2 - 12n + 31\right)\frac{1}{r^5} \\ & + (n-1)^3\left(n^3 - 24n^2 + 164n - 330\right)\frac{1}{r^7} \\ & - (n-1)^4\left(n^4 - 40n^3 + 510n^2 - 2554n + 4315\right)\frac{1}{r^9} + O(r^{-11}).\end{aligned}$$

Lemma 2.3.3. *Sei φ eine Lösung von (2.1) mit Anfangswert $\varphi(r_0)$, $r_0 > 0$, und $n \geq 2$. Dann gilt*

$$\varphi(r) = \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + \frac{(n-1)(n-4)}{r^3} + o\left(r^{-3}\right)$$

für $r \to \infty$.

Den Nachweis der Korrektheit der folgenden Terme in der asymptotischen Entwicklung lassen wir als Übungsaufgabe.

Beweis.

(i) Zu $\varepsilon > 0$ und $r_1 > r_0$ gibt es ein $r_2 > r_1$ mit

$$\varphi(r_2) \geq \frac{r_2}{n-1}(1-\varepsilon).$$

Sonst gälte $\varepsilon \leq 1 - \frac{n-1}{r}\varphi(r)$ und somit $\varphi'(r) \geq \left(1+\varphi^2\right)\varepsilon$ für alle $r \geq r_1$. Dies ist jedoch unmöglich, da φ auf ganz $[r_0, \infty)$ existiert.

(ii) Definiere $\zeta := \frac{r}{n-1}(1-\varepsilon)$ für ein $0 < \varepsilon < 1$. Dann folgt

$$\zeta' \leq \left(1+\zeta^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\zeta\right)$$

für hinreichend großes r, also $r \geq r_3$. Sei ohne Einschränkung $r_1 > r_3$. Dann ist $\varphi \geq \zeta$ für $r = r_2$. Dies gilt dann auch für alle $r \geq r_2$.

(iii) Es gilt $\varphi \le \frac{r}{n-1}$ für $r \ge r_4$, $r_4 \gg 1$, denn sonst gilt aufgrund der Differentialgleichung $\varphi' \le 0$ bis die Ungleichung erfüllt ist. Also erhalten wir
$$\frac{r}{n-1}(1-\varepsilon) \le \varphi(r) \le \frac{r}{n-1}$$
für beliebiges $\varepsilon > 0$, falls $r \gg 1$ groß genug ist. Somit gilt
$$\varphi(r) = \frac{r}{n-1} + o(r).$$

(iv) Schreibe nun $\varphi(r) = \frac{r}{n-1} + \psi(r)$ mit einem sublinear wachsenden ψ, d. h. es gilt für jedes $c > 0$ die Ungleichung $|\psi(r)| \le cr$, falls wir nur r groß genug wählen. Für große Werte von r gilt aufgrund unserer bisherigen Überlegungen $\psi(r) \le 0$. Für ψ erhalten wir die Differentialgleichung
$$\begin{aligned}\psi' &= \varphi' - \frac{1}{n-1}\\ &= \left(1+\varphi^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi\right) - \frac{1}{n-1}\\ &= \left(1 + \left(\frac{r}{n-1} + \psi\right)^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\left(\frac{r}{n-1} + \psi\right)\right) - \frac{1}{n-1}\\ &= -\frac{n-1}{r}\psi\left(1 + \left(\frac{r}{n-1} + \psi\right)^2\right) - \frac{1}{n-1}.\end{aligned}$$

(v) Wir wollen nun zeigen, dass $\psi \to 0$ für $r \to \infty$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten Punkte $r \gg 1$ mit $\psi(r) \le -\varepsilon$. Da ψ sublinear wächst, dürfen wir annehmen, dass dort auch $\frac{-r}{(2n-2)} < \psi(r)$ gilt. Dann erhalten wir dort
$$\psi'(r) \ge \frac{\varepsilon(n-1)}{r}\left(1 + \frac{r^2}{4(n-1)^2}\right) - \frac{1}{n-1} \ge c > 0$$
für r groß genug. Somit bleibt $\psi \le -\varepsilon$ nicht lange erhalten. Es folgt daher $\psi(r) \ge -\varepsilon$ falls r groß genug ist.

(vi) Definiere nun $\lambda(r) := r\psi(r)$. Wir möchten nachweisen, dass $\lambda \to -1$ gilt. Da $\psi = \lambda/r$ gilt sowie $\psi \to 0$, erhalten wir für beliebiges $\mu > 0$ die Abschätzung $|\lambda(r)| \le \mu r$, falls r groß genug ist. Für λ erhalten wir die Differentialgleichung
$$\begin{aligned}\lambda' &= \psi + r\psi'\\ &= \frac{\lambda}{r} - \frac{n-1}{r}\lambda\left(1 + \left(\frac{r}{n-1} + \frac{\lambda}{r}\right)^2\right) - \frac{r}{n-1}\\ &= -\frac{r}{n-1}\left(1 + \lambda + 2(n-1)\frac{\lambda^2}{r^2}\right) - (n-2)\frac{\lambda}{r} - (n-1)\frac{\lambda^3}{r^3}.\end{aligned}$$

(vii) Nehme an, dass $\lambda(r) \ge -1 + \varepsilon$ gilt. Dann folgt in solch einem Punkt
$$\lambda' \le -\frac{r}{n-1}\underbrace{(1+\lambda)}_{\ge\varepsilon} + \mu(n-2) + \mu^3(n-1) \le -c$$
für ein beliebiges $c > 0$ falls r groß genug ist. Daher erhalten wir $\lambda(r) \le -1+\varepsilon$ falls r groß genug ist. $\lambda \ge -1 + \varepsilon$ kann also nicht lange erfüllt bleiben.

(viii) Wir erinnern für die folgende Abschätzung an $\psi \le 0$, was $\lambda \le 0$ impliziert. Nehmen wir nun $\lambda(r) \le -1-\varepsilon$ an, so erhalten wir aus der Differentialgleichung für λ
$$\lambda' \ge -\frac{r}{n-1}\left(-\varepsilon + 2(n-1)\mu^2\right) \ge c$$

für ein beliebiges $c > 0$, wobei wir hier zunächst $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$ klein und dann r groß gewählt haben. Somit erhalten wir $\lambda(r) \geq -1 - \varepsilon$ für große Werte von r.

Zusammen mit dem letzten Schritt erhalten wir $\lambda \to -1$ für $r \to \infty$.

(ix) Wir schreiben nun $\lambda(r) = -1 + \frac{\eta(r)}{r^2}$ und behaupten, dass $\eta \to (n-4)(n-1)$ für $r \to \infty$ gilt. Da wir bereits wissen, dass $\eta/r^2 \to 0$ gilt, erhalten wir für beliebiges $\mu > 0$ und r groß genug die Ungleichung $|\eta(r)| \leq \mu r^2$. Wir leiten nun die Differentialgleichung für η her. Es gilt

$$\begin{aligned}
\eta &= r^2(\lambda + 1), \\
\eta' &= r^2\lambda' + 2r(\lambda + 1) \\
&= -\frac{r^3}{n-1}\left(\frac{\eta}{r^2} + 2(n-1)\frac{1}{r^2}\left(-1 + \frac{\eta}{r^2}\right)^2\right) - (n-2)r\left(-1 + \frac{\eta}{r^2}\right) \\
&\quad - \frac{n-1}{r}\left(-1 + \frac{\eta}{r^2}\right)^3 + 2r\frac{\eta}{r^2} \\
&= \frac{r}{n-1}(-2(n-1) + (n-2)(n-1) - \eta) + \frac{1}{r}(4\eta - (n-2)\eta + (n-1) + 2\eta) \\
&\quad + \frac{1}{r^3}(-2\eta^2 - 3(n-1)\eta) + 3(n-1)\frac{\eta^2}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3}{r^7} \\
&= \frac{r}{n-1}[(n-4)(n-1) - \eta] + \frac{1}{r}[(8-n)\eta + (n-1)] \\
&\quad - \frac{\eta}{r^3}[2\eta + 3(n-1)] + 3(n-1)\frac{\eta^2}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3}{r^7}.
\end{aligned}$$

Nehme nun an, dass für große r die Ungleichung $\eta(r) \geq (n-4)(n-1) + \varepsilon$ gilt. Dann erhalten wir

$$\eta' \leq \frac{r}{n-1}[-\varepsilon] + |8-n|\mu r + \frac{n-1}{r} + 0 + O(1) \leq -c$$

für ein $c > 0$, wobei wir zunächst $\mu > 0$ klein gewählt haben und dann angenommen haben, dass r groß ist. Somit erhalten wir $\eta(r) \leq (n-4)(n-1) + \varepsilon$, falls r groß genug ist.

(x) Sei Schließlich $\eta(r) \leq (n-4)(n-1) - \varepsilon$ für große r. Dann erhalten wir dort analog zu oben

$$\eta' \geq \frac{r}{n-1}\left[\varepsilon - \mu|8-n|(n-1) - 2(n-1)\mu^2\right] + O(1) \geq c$$

und damit $\eta(r) \geq (n-4)(n-1) - \varepsilon$ falls r groß genug ist. Wir erhalten, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein r_5 gibt, so dass für alle $r \geq r_5$

$$(n-4)(n-1) - \varepsilon \leq \eta(r) \leq (n-4)(n-1) + \varepsilon$$

gilt.

(xi) Wir benutzen nun die Definitionen von $\lambda(r)$ und $\psi(r)$, um daraus die Behauptung zu erhalten. Aufgrund der Länge der Formeln benutzen wir dabei $N := (n-4)(n-1)$. Nacheinander erhalten wir

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{N}{r^2} - \frac{\varepsilon}{r^2} &\leq -1 + \frac{\eta(r)}{r^2} = \lambda(r) \leq -1 + \frac{N}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^2}, \\
-\frac{1}{r} + \frac{N}{r^3} - \frac{\varepsilon}{r^3} &\leq \frac{\lambda(r)}{r} = \psi(r) \leq -\frac{1}{r} + \frac{N}{r^3} + \frac{\varepsilon}{r^3}
\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + \frac{N}{r^3} - \frac{\varepsilon}{r^3} \leq \frac{r}{n-1} + \psi(r) = \varphi(r) \leq \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + \frac{N}{r^3} + \frac{\varepsilon}{r^3}$$

und damit die Behauptung. □

Alternativ kann man eine solche Asymptotik auch direkt in einem Schritt zeigen. Dazu macht man einen Ansatz wie beispielsweise

$$\varphi(r) = \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + \frac{\psi(r)}{r}$$

und versucht zu beweisen, dass $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ gilt. Wir illustrieren dieses Vorgehen hier nur für eine Ordnung weniger in der Asymptotik und $n \geq 3$. Für $n = 2$ gilt die Aussage ebenfalls, erfordert jedoch eine genauere Untersuchung.

Theorem 2.3.4. *Sei $n \geq 3$. Sei $\varphi : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\varphi' = \left(1 + \varphi^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi\right).$$

Dann gilt

$$\varphi(r) = \frac{r}{n-1} + \psi(r)$$

mit $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$.

Beweis. Wir leiten eine Differentialgleichung für ψ her:

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= \varphi(r) - \frac{r}{n-1}, \\
\psi' &= \varphi' - \frac{1}{n-1} \\
&= \left(1 + \varphi^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\varphi\right) - \frac{1}{n-1} \\
&= \left(1 + \left(\frac{r}{n-1} + \psi\right)^2\right)\left(1 - \frac{n-1}{r}\left(\frac{r}{n-1} + \psi\right)\right) - \frac{1}{n-1} \\
&= \left(1 + \frac{r^2}{(n-1)^2} + 2\frac{r\psi}{n-1} + \psi^2\right) \cdot \left(1 - 1 - \frac{n-1}{r}\psi\right) - \frac{1}{n-1} \\
&= -\frac{n-1}{r}\psi - \frac{r}{n-1}\psi - 2\psi^2 - \frac{n-1}{r}\psi^3 - \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Solange ψ positiv ist, erhalten wir $\psi' \leq -\frac{1}{n-1}$. Folglich kann ψ nur auf einem endlichen Intervall positiv sein.

Da die Situation für negative ψ etwas komplizierter ist, definieren wir $\chi := -\psi$ und dürfen daher für den Rest des Beweises $\chi \geq 0$ annehmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\chi' = -\psi' &= \frac{n-1}{r}\psi + \frac{r}{n-1}\psi + 2\psi^2 + \frac{n-1}{r}\psi^3 + \frac{1}{n-1} \\
&= -\frac{n-1}{r}\chi - \frac{r}{n-1}\chi + 2\chi^2 - \frac{n-1}{r}\chi^3 + \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Wir können zwar

$$2\chi^2 \leq \frac{r}{n-1}\chi + \frac{n-1}{r}\chi^3$$

abschätzen, die Differentialungleichung

$$\chi' \leq -\frac{n-1}{r}\chi + \frac{1}{n-1}$$

erlaubt es jedoch nicht, $\chi(r) \to 0$ für $r \to \infty$ zu zeigen.

Ohne Abschätzung erhalten wir

$$\chi' = -\frac{n-1}{r}\chi - \chi\left(\sqrt{\frac{r}{n-1}} - \sqrt{\frac{n-1}{r}}\chi\right)^2 + \frac{1}{n-1}.$$

Wir definieren

$$\alpha := \frac{1}{2}\frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)^2}$$

und unterscheiden die Fälle $\alpha r \le \chi$ und $0 \le \chi \le \alpha r$. Je nach Wert von r kann für eine Lösung der eine oder der andere Fall auftreten.

Sei zunächst $\chi \ge \alpha r$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\chi' \le & -(n-1)\alpha + \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{2}\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n-1}\\ \le & \frac{1}{n-1}\left(-\frac{3}{2}+1\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{n-1},\end{aligned}$$

da $n \ge 3$. Somit fällt χ in diesem Fall hinreichend schnell.

Sei nun $0 \le \chi \le \alpha r$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{r}{n-1}} - \sqrt{\frac{n-1}{r}}\chi \ge \sqrt{r}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \alpha\sqrt{n-1}\right) = & \sqrt{\frac{r}{n-1}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{n}{n-1}\right)\\ = & \sqrt{\frac{r}{n-1}}\frac{n-2}{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\chi' \le -\chi\frac{r}{n-1}\left(\frac{n-2}{2(n-1)}\right)^2 + \frac{1}{n-1}.$$

Also gilt $\chi' \le -1$ für $\chi \ge \varepsilon > 0$ und r hinreichend groß.

Hieraus folgt die behauptete Konvergenz $\chi(r) \to 0$ und damit $\psi(r) \to 0$ für $r \to \infty$. □

Das folgende Lemma stammt aus [4]. Die Differentialgleichung hat mit rotationssymmetrischen Solitonen des Kähler-Ricci-Flusses zu tun und dient hier als Übung für das Arbeiten mit asymptotischen Entwicklungen.

Lemma 2.3.5. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi(s)$, eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\varphi^{n-1}\varphi' e^{\varphi} = e^{ns}$$

mit $\varphi \to 0$ für $s \to -\infty$. Dann hat φ für $s \to \infty$ die folgende asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}\varphi = & ns - \log\left(n^n s^{n-1}\right) + (n-1)\frac{\log\left(n^n s^{n-1}\right)}{ns} + (n-1)\frac{1}{ns}\\ & + \frac{1}{2}(n-1)\frac{\log^2\left(n^n s^{n-1}\right)}{n^2s^2} - (n-1)(n-2)\frac{\log\left(n^n s^{n-1}\right)}{n^2s^2}\\ & - \frac{1}{2}(n-1)(3n-5)\frac{1}{n^2s^2} + \frac{1}{3}(n-1)\frac{\log^3\left(n^n s^{n-1}\right)}{(ns)^3}\\ & - \frac{1}{2}(n-1)(3n-5)\frac{\log^2\left(n^n s^{n-1}\right)}{(ns)^3}\\ & + (n-1)\left(n^2-6n+7\right)\frac{\log\left(n^n s^{n-1}\right)}{(ns)^3}\\ & + \frac{1}{6}(n-1)\left(11n^2-46n+47\right)\frac{1}{(ns)^3} + o\left(\frac{1}{s^3}\right),\end{aligned}$$

Beweis. Aufwändigere Übung. □

3. Flügelartige translatierende Lösungen

Neben den translatierenden rotationssymmetrischen graphischen Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind, gibt es noch weitere rotationssymmetrische Lösungen des mittleren Krümmungsflusses. Diese bestehen aus zwei Graphen, die beide auf $\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$ definiert sind und am Rand $\partial B_r(0)$ zusammengesetzt sind (Skizze).

3.1. **Lokale Existenz im gekipptem Koordinatensystem.**

Theorem 3.1.1. *Sei $n \geq 2$ und $R > 0$. Dann gibt es rotationssymmetrische Funktionenösungen W_R^+ und $W_R^-: (\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die im Inneren ihres Definitionsgebietes Lösungen des graphischen mittleren Krümmungsflusses sind, mit $\dot{W}_R^+ \equiv 1 \equiv \dot{W}_R^-$ mit $|DW_R^\pm| \to \infty$ für $|x| \searrow R$.*

Nach Lemma 2.3.3 gilt

$$W_R^\pm(x,t) = c^\pm + t + \frac{|x|^2}{2(n-1)} - \log|x| - \frac{(n-1)(n-4)}{2r^2} + o\left(r^{-2}\right)$$

für $|x| \equiv r \to \infty$ und geeignet gewählte Konstanten $c^\pm$. Bei geeigneter Wahl von $c^\pm$ ist $\operatorname{graph} W_R^+ \cup \operatorname{graph} W_R^-$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Nach Lemma 2.3.3 genügt es, eine Lösung nahe $|x| = R$ zu finden, so dass für die noch zu definierende Funktion h außer in einem Punkt mit $h = R$ stets $h' \neq 0$ gilt. Solange $DW_R^\pm \neq 0$ gilt, lässt sich $\operatorname{graph} W_R^+ \cup \operatorname{graph} W_R^-$ lokal für ein Intervall I auch in der Form

$$\bigcup_{x^{n+1} \in I} h\left(x^{n+1}, t\right) \cdot \mathbb{S}^{n-1} \times \left\{x^{n+1}\right\} \tag{3.1}$$

für eine Funktion h schreiben. Da sich die Hyperflächen mit Geschwindigkeit 1 in Richtung x^{n+1} bewegen, gilt $h(x^{n+1}, t) = h(x^{n+1} - t, 0)$. Zur Zeit t gehört demnach eine zentrierte Sphäre mit Radius $h(x^{n+1} - t, 0)$ in der Ebene mit vorgegebener Koordinate x^{n+1} zur translatierenden Lösung. Für Punkte $\left(x^i\right)_{1 \leq i \leq n+1}$ auf der Hyperfläche gilt demnach

$$h^2(x^{n+1} - t, 0) = \sum_{i=1}^n \left(x^i\right)^2.$$

Die in (3.1) beschriebenen Punkte sind durch diese Gleichheit sogar charakterisiert. Wir betrachten einen solchen Punkt mit $x^n > 0$. Dann ist die Hyperfläche lokal wegen

$$x^n = \sqrt{h^2(x^{n+1} - t, 0) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(x^i\right)^2}$$

durch die Funktion

$$u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^{n+1}, t\right) = \sqrt{h^2(x^{n+1} - t, 0) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(x^i\right)^2} \equiv \sqrt{h^2 - \rho^2}$$

gegeben. Da der mittlere Krümmungsfluss eine geometrische Differentialgleichung ist, erfüllt auch u die partielle Differentialgleichung in Theorem 1.3.2. Wir bezeichnen Ableitungen von h nach der ersten Komponente mit h' und h'' und erhalten

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{-hh'}{u}, \\
Du &= \left(-\frac{x_1}{u}, \ldots, -\frac{x_{n-1}}{u}, \frac{hh'}{u}\right), \\
u_{n+1\, n+1} &= \frac{h'^2 + hh''}{u} - \frac{h^2 h'^2}{u^3} = \frac{h'^2(h^2 - \rho^2) + hh'' u^2 - h^2 h'^2}{u^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{u^2hh'' - \rho^2h'^2}{u^3},\\
D^2u &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{u}\left(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{u^2}\right)\right)_{1\le i,j\le n-1} & \left(\frac{hh'x_i}{u^3}\right)_{1\le i\le n-1} \\ \left(\frac{hh'x_i}{u^3}\right)_{1\le i\le n-1} & \frac{h'^2+hh''}{u} - \frac{h^2h'^2}{u^3} \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{u^3}\begin{pmatrix} \left(-u^2\delta_{ij} - x_ix_j\right)_{i,j} & (hh'x_i)_i \\ (hh'x_i)_i & u^2hh'' - \rho^2h'^2 \end{pmatrix},\\
1 + |Du|^2 &= 1 + \frac{1}{u^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(x^i\right)^2 + \frac{h^2h'^2}{u^2} = \frac{h^2 - \rho^2 + \rho^2 + h^2h'^2}{u^2} = \frac{h^2\left(1+h'^2\right)}{u^2},\\
\Delta u &= \frac{1}{u^3}\left(-u^2(n-1) - \rho^2 + u^2hh'' - \rho^2h'^2\right),\\
D^2u\langle Du, Du\rangle &= \frac{1}{u^5}\left(-u^2\rho^2 - \rho^4 - 2\rho^2h^2h'^2 + h^2h'^2\left(u^2hh'' - \rho^2h'^2\right)\right),\\
0 &= u^3\left(\dot u - \Delta u + \frac{D^2u\langle Du, Du\rangle}{1+|Du|^2}\right)\\
&= -u^2hh' - \underbrace{\left(-u^2(n-1) - \rho^2 + u^2hh'' - \rho^2h'^2\right)}_{=u^3\Delta u}\\
&\quad + \frac{1}{h^2\left(1+h'^2\right)}\underbrace{\left(-u^2\rho^2 - \rho^4 - 2\rho^2h^2h'^2 + u^2h^3h'^2h'' - \rho^2h^2h'^4\right)}_{=u^5\cdot D^2u\langle Du,Du\rangle}
\end{aligned}
$$

und nach Durchmultiplizieren mit $h^2\left(1+h'^2\right)$

$$
\begin{aligned}
0 &= -u^2h^3h'\left(1+h'^2\right) + u^2h^2\left(1+h'^2\right)(n-1) + \rho^2h^2 + \rho^2h^2h'^2\\
&\quad - u^2h^3h'' - u^2h^3h'^2h'' + \rho^2h^2h'^2 + \rho^2h^2h'^4 - h^2\rho^2 + \rho^4 - \rho^4\\
&\quad - 2\rho^2h^2h'^2 + u^2h^3h'^2h'' - \rho^2h^2h'^4\\
&= -u^2h^3h'\left(1+h'^2\right) + u^2h^2\left(1+h'^2\right)(n-1) - u^2h^3h''\\
&= u^2h^2\left\{\left(1+h'^2\right)((n-1) - hh') - hh''\right\}.
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$h'' = \left(\frac{n-1}{h} - h'\right)\left(1+h'^2\right).$$

Als Anfangswertproblem mit $h(0) = R$, $h'(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung eine Lösung für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Wegen $h''(t) > 0$ für t nahe 0 können wir die für festes t als rotierter Graph dargestellte Menge in (3.1) für $I = [0, \varepsilon)$ und $I = (-\varepsilon, 0]$ und ein $\delta > 0$ als rotationssymmetrischen Graph über $B_{R+\delta} \setminus B_R$ darstellen. Die Existenz auf ganz $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ bekommt man nun mit Hilfe von Lemma 2.3.3. Schließlich betrachten wir Differentialgleichung für φ für die beiden Graphen. Für den oberen Graphen bezeichnen wir die Lösung mit φ^+, für den unteren mit φ^-. Ist r etwas größer als R, so gilt $\varphi^+(r) > \varphi^-(r)$. Da diese Ungleichung aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung auch für alle größeren r gilt, ist der vertikale Abstand der beiden Graphen in r wachsend und wir erhalten eine glatte Untermannigfaltigkeit. □

Bemerkung 3.1.2. Alternativ kann man die gewöhnliche Differentialgleichung wie folgt herleiten: Wir schreiben y statt x^{n+1} und rotieren die Kurve $y \mapsto (h(y), y)$, die in der $x^1 - x^{n+1}$-Ebene liege.

Dabei ist es nicht wichtig, dass sie als Graph einer Funktion h dargestellt ist, analoge Überlegungen kann man auch auf Kurven der Form $y \mapsto (\alpha(y), \beta(y))$ anwenden.

In $\mathbb{R}^3$ liefert die rotierte Kurve die Fläche $(\varphi, y) \mapsto (\cos\varphi \cdot h(y), \sin\varphi \cdot h(y), y)$. Suchen wir nun eine mit Geschwindigkeit eins in Richtung e_3 translatierende Lösung, so ist h so zu wählen, dass für

$$X : (\varphi, y, t) \mapsto (\cos\varphi \cdot h(y), \sin\varphi \cdot h(y), y + t)$$

die Normalengeschwindigkeit gleich der mittleren Krümmung ist.

Analog suchen wir in $\mathbb{R}^{n+1}$ also eine Funktion h, so dass für

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n+1}, \\ (p, y, t) &\mapsto (h(y) \cdot x(p), y + t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

die Normalengeschwindigkeit gleich der mittleren Krümmung ist, wobei y auch auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert sein kann und $x : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ eine Einbettung einer offenen Teilmenge von $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

Wir bestimmen Tangentialvektoren

$$\begin{aligned} X_i &= (h\, x_i, 0), \quad 1 \le i \le n-1, \\ X_n &= (h'\, x, 1), \end{aligned}$$

sowie einen Normalenvektor

$$\nu = \frac{(x, -h')}{\sqrt{1 + h'^2}}.$$

Ist $\sigma_{ij} := \langle x_i, x_j \rangle$ die Metrik von $\mathbb{S}^{n-1}$, so ist

$$(g_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (\langle X_i, X_j \rangle)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \left(h^2 \sigma_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n-1} & (0) \\ (0) & 1 + h'^2 \end{pmatrix}$$

die induzierte Metrik. Für geeignete tangentiale Vektoren an die Sphäre $\tau_{ij}, 1 \le i, j \le n-1$, die also $\langle \tau_{ij}, x \rangle = 0$ erfüllen, folgt

$$x_{,ij} = -h_{ij}^{\mathbb{S}^{n-1}} \nu^{\mathbb{S}^{n-1}} + \tau_{ij} = -\sigma_{ij} x + \tau_{ij},$$

da sämtliche Hauptkrümmungen der Sphäre eins sind. (Die tangentialen Vektoren ließen sich vermeiden, indem wir auf $\mathbb{R}^{n-1}$ kovariante Ableitungen bezüglich der von x induzierten Metrik betrachteten, was jedoch über den Inhalt dieser Vorlesung hinausgeht.) Es gilt

$$\begin{aligned} X_{,ij} &= (h\, x_{,ij}\,, 0) = (-h\sigma_{ij} x + h\tau_{ij}, 0)\,, \quad 1 \le i, j \le n-1, \\ X_{,in} &= (h' x_i, 0)\,, \quad 1 \le i \le n-1, \\ X_{,nn} &= (h'' x, 0)\,. \end{aligned}$$

Für die zweite Fundamentalform erhalten wir somit

$$\begin{aligned} (h_{ij})_{1 \le i,j \le n} &= (-\langle X_{,ij}\,, \nu \rangle)_{1 \le i,j \le n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + h'^2}} \begin{pmatrix} (h\, \sigma_{ij})_{1 \le i,j \le n-1} & (0) \\ (0) & -h'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit sind die Hauptkrümmungen $\frac{1}{h\sqrt{1+h'^2}}$ mit Vielfachheit $n-1$ und $\frac{-h''}{(1+h'^2)^{3/2}}$ mit Vielfachheit 1. Es folgt

$$H = \frac{n-1}{h\sqrt{1 + h'^2}} - \frac{h''}{\left(1 + h'^2\right)^{3/2}}.$$

Hätten wir $-\nu$ statt ν als Normale gewählt, so hätten wir $(-h_{ij})$ statt (h_{ij}) als zweite Fundamentalform erhalten. $-H\nu$ hätte sich also nicht geändert.

Die Normalenkomponente von $\dot{X} = ((0), 1)$ ist $-H$, also

$$\left\langle \dot{X}, \nu \right\rangle = -H,$$

falls

$$\frac{-h'}{\sqrt{1-h'^2}} = -\left(\frac{n-1}{h\sqrt{1+h'^2}} - \frac{h''}{(1+h'^2)^{3/2}}\right)$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$h'' = \left(\frac{n-1}{h} - h'\right)\left(1+h'^2\right)$$

wie behauptet.

Bemerkung 3.1.3. Als Übung empfehlen wir, sich den Fall von Flächen in $\mathbb{R}^3$ mit expliziter Parametisierung von $\mathbb{S}^1$ nochmals separat anzusehen. Eine weitere Übung ist, den Fall nicht graphischer Kurven, $y \mapsto (\alpha(y), \beta(y))$, zu betrachten.

4. Homothetisch expandierende Lösungen

4.1. **Homothetisch expandierende Lösungen des mittleren Krümmungsflusses.** Wir betrachten ganze Graphen, die homothetisch expandieren, d. h. die Mengen $\operatorname{graph} u(\cdot, t_1)$ und $\operatorname{graph} u(\cdot, t_2)$ stimmen für alle relevanten t_i, hier $t_i > 0$, $i = 1, 2$, bis auf eine Homothetie (hier: zentrische Streckung mit einem Streckfaktor $\mu \neq 0$) überein:

$$\{(x, u(x, t_1)) \colon x \in \mathbb{R}^n\} = \mu(t_1, t_2) \cdot \{(y, u(y, t_2)) \colon y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ist $\mu > 1$ für $t_1 > t_2$, so heißt $\operatorname{graph} u$ eine expandierende Lösung. Ist $\mu < 1$ für $t_1 > t_2$, so heißt $\operatorname{graph} u$ eine kontrahierende Lösung. Ist $\mu \equiv 1$, so heißt $\operatorname{graph} u$ eine stationäre Lösung. (Die Ebene ist sowohl eine expandierende als auch kontrahierende oder stationäre aber nicht besonders interessante Lösung.)

Bei homothetisch expandierenden Lösungen erwartet man für $t \searrow 0$ Hausdorffkonvergenz von $\operatorname{graph} u(\cdot, t)$ gegen Kegel, d. h. gegen Mengen, die mit x auch $\lambda \cdot x$ für alle $\lambda > 0$ enthalten.

Bemerkung 4.1.1 (Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung)**.**

(i) Sei $u \colon \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine homothetisch expandierende Lösung. Wir fordern

$$\mu(t) \cdot \{(y, u(y, 1/2)) \colon y \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, u(x, t)) \colon x \in \mathbb{R}^n\}$$

für $\mu(t) \neq 0$ und schreiben $U(y) := u(y, 1/2)$. Es folgen $\mu(t)y = x$ sowie $\mu(t)U(y) = u(x, t)$. Somit gilt $u(x, t) = \mu(t) U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)$.

(ii) Erfüllt u die Differentialgleichung des graphischen mittleren Krümmungsflusses $\dot{u} = \Delta u - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2}$, so erhalten wir daraus eine Differentialgleichung für U.

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,t) &= \dot{\mu}(t) U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) + \mu(t) U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) \cdot \left(-\frac{x^i}{\mu^2(t)}\dot{\mu}(t)\right)\\
&= \dot{\mu}(t)\left\{U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)}\right\},\\
u_i(x,t) &= U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right),\\
u_{ij}(x,t) &= \frac{1}{\mu(t)} U_{ij}\left(\frac{x}{\mu(t)}\right),\\
\dot{u}(x,t) &= \dot{\mu}(t)\left\{U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right) - U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\frac{x^i}{\mu(t)}\right\}\\
&= \Delta u - \frac{u_{ij}u^iu^j}{1+|Du|^2}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\mu(t)}\Delta U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)-\frac{1}{\mu(t)}\frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2}\left(\frac{x}{\mu(t)}\right).$$

Wir weisen darauf hin, dass $U_i\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)$ für $\frac{\partial}{\partial x^i}U(x)\big|_{x=\frac{x}{\mu(t)}}$ und nicht etwa für $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(U\left(\frac{x}{\mu(t)}\right)\right)$ steht. Benutze nun $y=\frac{x}{\mu(t)}$. Wir erhalten

$$\dot\mu(t)\cdot\mu(t)\left\{U(y)-U_i(y)y^i\right\}=\Delta U(y)-\frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2}(y).$$

Wir erhalten daraus eine zeitunabhängige Differentialgleichung für U, falls $\dot\mu(t)\cdot\mu(t)=c$ für eine reelle Konstante c ist. Im expandierenden Fall ist $c>0$. Im Falle $c\neq 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$\mu(t)=\pm\sqrt{2c\left(t-t_0+\frac{1}{2c}\right)}$$

für Zeiten t, so dass der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist. Ohne Einschränkung darf man im Falle $c>0$ annehmen, dass $\dot\mu(t)\cdot\mu(t)=1$ gilt. Ansonsten bekommt man eine Lösung U, deren Graph homothetisch gestreckt ist. Löst nämlich U die Differentialgleichung

$$U-U_ix^i=\Delta U-\frac{U_{ij}U^iU^j}{1+|DU|^2},$$

so folgt für $V(x):=\mu U\left(\frac{x}{\mu}\right)$ mit $\mu>0$

$$\begin{aligned}V(x)-V_i(x)x^i=&\mu\left(U\left(\tfrac{x}{\mu}\right)-U_i\left(\frac{x}{\mu}\right)\frac{x^i}{\mu}\right)\\=&\mu\left(\Delta U\left(\tfrac{x}{\mu}\right)-\frac{U^i\left(\frac{x}{\mu}\right)U^j\left(\frac{x}{\mu}\right)U_{ij}\left(\frac{x}{\mu}\right)}{1+|DU|^2\left(\frac{x}{\mu}\right)}\right)\\=&\mu^2\left(\Delta V(x)-\frac{V_{ij}(x)V^i(x)V^j(x)}{1+|DV|^2(x)}\right).\end{aligned}$$

Daher liefert eine andere positive Konstante nur eine Skalierung von U. Weiterhin wählen wir den Ursprung der Zeit so, dass $\mu(1/2)=1$ gilt. Dann erhalten wir $\mu(t)=\sqrt{2t}$. Somit erhalten wir als partielle Differentialgleichung für U

$$U(x)-U_i(x)x^i=\Delta U(x)+\frac{U_{ij}(x)U^i(x)U^j(x)}{1+|DU(x)|^2}.$$

Diese Gleichung sichert, dass $\mu(t)\cdot\operatorname{graph}U$ eine homothetisch expandierende Lösung des mittleren Krümmungsflusses ist. Wir haben wieder x statt y geschrieben.

(iii) Nehmen wir zusätzlich an, dass U rotationssymmetrisch ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}U(x)=&V(|x|)\equiv V(r),\\U_i(x)=&V'(r)\frac{x_i}{|x|},\\U_{ij}(x)=&V''(r)\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|}+V'(r)\frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij}-\frac{x_ix_j}{|x|^2}\right),\\V(r)-V'(r)r=&U(x)-U_i(x)x^i\\=&\Delta U(x)-\frac{U_{ij}(x)U^i(x)U^j(x)}{1+|DU(x)|^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= V''(r) + \frac{n-1}{r}V'(r) - \frac{V''(V')^2}{1+(V')^2}\\ &= \frac{V''}{1+(V')^2} + \frac{n-1}{r}V'(r).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$V'' = \left(1+(V')^2\right)\cdot\left(V - V'r - \frac{n-1}{r}V'\right).$$

Hier sind nun ähnliche Untersuchungen wir für translatierende graphische Lösungen möglich, insbesondere in der Nähe des Ursprungs und für $r\to\infty$.

(iv) Wir werden uns im nächsten Kapitel insbesondere mit dem eindimensionalen Fall beschäftigen. Nach Umbenennung der Funktion und Variablen werden wir also die Differentialgleichung

$$u'' = \left(1+u'^2\right)(u-u'x)$$

studieren.

Bemerkung 4.1.2. Wir leiten die gewöhnliche Differentialgleichung noch auf eine andere Art und Weise her: Sei $X(x,t) = \mu(t)(x,u(|x|))$ eine Familie von Hyperflächen, deren Normalengeschwindigkeit gleich der mittleren Krümmung sein soll. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot X &= \dot\mu(x,u),\\ X_i &= \mu\left(e_i, u'\frac{x_i}{|x|}\right),\\ X_{,ij} &= \mu\left(0, u''\frac{x_ix_j}{|x|^2} + \frac{u'}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{|x|^2}\right)\right),\\ g_{ij} &= \mu^2\left(\delta_{ij} + u'^2\frac{x_ix_j}{|x|^2}\right),\\ \nu &= \frac{\left(u'\frac{x}{|x|}, -1\right)}{\sqrt{1+u'^2}},\\ h_{ij} &= -\left\langle X_{,ij},\nu\right\rangle = \frac{\mu}{\sqrt{1+u'^2}}\left(u''\frac{x_ix_j}{|x|^2} + \frac{u'}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{|x|}\right)\right),\\ H &= \frac{1}{\mu\sqrt{1+u'^2}}\left((n-1)\frac{u'}{|x|} + \frac{u''}{1+u'^2}\right),\\ \left\langle\dot X,\nu\right\rangle &= \frac{\mu(u'|x|-u)}{\sqrt{1+u'^2}},\\ -(u'|x|-u) &\overset{!}{=} (n-1)\frac{u'}{|x|} + \frac{u''}{1+u'^2},\\ u'' &\overset{!}{=} \left(u - u'|x| - \frac{n-1}{r}u'\right)\left(1+u'^2\right)\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Resultat.

4.2. **Perspektiven.** Andere mögliche und verwendete Parametrisierungen für solche Flächen benutzen den Winkel von der e_{n+1}-Achse bzw. die Stützfunktion im nicht symmetrischen Fall, beschreiben die Fläche als radialen Graphen über einer Teilmenge von $\mathbb{S}^n$ oder in welchem Abstand vom Ursprung eine Gerade durch den Ursprung und $(\hat x, 1)$ die Fläche schneidet.

Mit homothetisch expandierenden Flächen kann man Kegel in natürlicher Weise blättern.

Benutzt man andere Normalengeschwindigkeiten als die mittlere Krümmung, erhält man damit ebenso Blätterungen von Kegeln. Durch die Auswahl der Normalengeschwindigkeit kann man nun versuchen, geeignete Eigenschaften dieser Blätterungen zu bekommen.

5. Homothetisch expandierende Netzwerke

Wir betrachten selbstähnlich expandierende Netzwerke von Kurven unter dem mittleren Krümmungsfluss (MCF) oder in einer Dimension "curve shortening flow" (CSF) und folgen dabei [13].

5.1. **Problemstellung.** Homothetisch expandierende Kurven des "curve shortening" Flusses

$$\dot{u} = \frac{u''}{1+u'^2} \tag{CSF}$$

erfüllen

$$u'' = \left(1+u'^2\right) \cdot (u - xu')\,. \tag{$\star$}$$

Die folgende Definition ist etwas einschränkend aber für die Zwecke dieses Kapitels ausreichend.

Definition 5.1.1. Ein Netzwerk aus drei Kurven mit 120°-Bedingung im Tripelpunkt besteht aus drei Kurven $\alpha_i\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, die regulär ($\alpha_i'(t) \neq 0$ für alle t) und unendlich lang ($\int_0^\infty |\alpha_i'| = \infty$) sind, alle in einem Punkt, dem Tripelpunkt, starten, also $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0)$ erfüllen, und sich dort im 120°-Winkel treffen, d. h.

$$\frac{\alpha_1'(0)}{|\alpha_1'(0)|} + \frac{\alpha_2'(0)}{|\alpha_2'(0)|} + \frac{\alpha_3'(0)}{|\alpha_3'(0)|} = 0$$

erfüllen. Zwei Netzwerke bestehend aus Kurven $(\alpha_i)_i$ bzw. $(\beta_i)_i$ heißen gleich, falls nach Umindizierung bei den Kurvennummern α_i und β_i für alle i durch Umparametrisierungen auseinander hervorgehen.

Mit solchen Netzwerken beschreibt man die Grenzen zwischen unterschiedlichen Kristallen oder Ausrichtungen von Kristallen in Materialien. Die Grenzkurven bewegen sich dabei unter dem curve shortening Fluss, da dieser der L^2-Gradientenfluss des Längenfunktionals ist. Zwischen den Kurven stellt sich dabei im Tripelpunkt die 120°-Bedingung ein.

Hauptresultat von [13] ist

Theorem 5.1.2. *Zu drei verschiedenen Ursprungshalbgeraden in $\mathbb{R}^2$ gibt es genau ein Netzwerk aus drei Kurven mit 120°-Bedingung im Tripelpunkt, so dass jede der Kurven ein Teil einer unter dem mittleren Kümmungsfluss* (CSF) *homothetisch expandierenden Kurve zur Zeit $t = 1/2$ ist, also als Graph dargestellt* ($\star$) *löst und zu je einer der Halbgeraden asymptotisch ist.*

Wir sagen, dass solch ein Netzwerk das homothetisch expandierende Netzwerk ist, das bei drei Halbgeraden startet. Bis auf den Tripelpunkt ist das Netzwerk eingebettet, wie man an den Monotonieen im Beweis sieht, wenn man den Tripelpunkt auf die y-Achse rotiert.

Bemerkung 5.1.3 (Beweisstrategie)**.**

(i) Wir zeigen zunächst, dass Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung für homothetisch expandierende Lösungen mit beliebigen Anfangswerten global existieren.

(ii) Zu jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$ und jeder Halbgeraden gibt es eine solche homothetisch expandierende Lösung, die durch diesen Punkt geht und deren eine Seite asymptotisch zur vorgegebenen Halbgeraden ist. Dies können wir auch für drei Halbgeraden machen. Damit erhalten wir die Existenzaussage für die Kurven α_i bis auf die 120°-Bedingung.

(iii) Wir variieren nun diesen Punkt P im $\mathbb{R}^2$ und zeigen, dass

$$\left\langle \frac{\alpha_1'(0)}{|\alpha_1'(0)|} + \frac{\alpha_2'(0)}{|\alpha_2'(0)|} + \frac{\alpha_3'(0)}{|\alpha_3'(0)|}, P \right\rangle < 0$$

gilt, falls $|P|$ groß ist. Der Brouwersche Fixpunktsatz (jede stetige Abbildung $\overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ besitzt einen Fixpunkt) impliziert dann, dass auch ein Startpunkt P existiert, in dem die 120°-Bedingung erfüllt ist.

(iv) Die Eindeutigkeit benutzt den Satz von Gauß-Bonnet und die Monotonie von Schnittwinkeln. Wir werden sie hier nicht beweisen.

5.2. **Existenz einer Kurve.** Wir zeigen hier, dass es zu jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und zu jeder Halbgeraden eine homothetisch expandierende Lösung von (CSF) bzw. $(\star)$, wenn wir uns die Lösung zur Zeit $t = 1/2$ anschauen, gibt, die durch P verläuft und zur gegebenen Halbgeraden asymptotisch ist.

In uninteressanten Fällen können wir eine Ursprungsgerade wählen. Sonst folgt dies nach einer Drehung aus der folgenden analytischen Umformulierung

Theorem 5.2.1. *Sei $h > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so dass die Lösung u von $(\star)$ mit Anfangswerten $u(0) = h$ und $u'(0) = b$ für alle $x \geq 0$ existiert und $u(x) - ax \to 0$ für $x \to \infty$ erfüllt.*

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis dieses Theorems.

Lemma 5.2.2. *Existiert eine Lösung u von $(\star)$ mit $u(0) > 0$ auf einem Intervall $0 \leq x < x_{max}$, so ist u strikt konvex.*

Beweis. Aufgrund der Differentialgleichung gilt $u''(0) > 0$. Angenommen, es gibt ein x_0 mit $0 < x_0 < x_{max}$ mit $u''(x_0) = 0$. Dann folgt $u(x_0) - x_0 u'(x_0) = 0$. Dort stimmen also die Steigung von u und die Steigung der Ursprungsgeraden durch $(x_0, u(x_0))$ überein. Jede Ursprungsgerade ist eine Lösung von $(\star)$. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen mit gegebenen Anfangswerten stimmen u und $x \mapsto x \cdot u'(x_0)$ auf $[0, x_{max})$ überein. Also folgt $u(0) = 0$. Widerspruch. □

Lemma 5.2.3. *Die Gleichung $(\star)$ mit Anfangswerten $u(0)$ und $u'(0)$ besitzt eine Lösung für alle $x \geq 0$.*

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung $u(0) > 0$ annehmen. Sei $[0, x_{max})$ das maximale Existenzintervall einer Lösung. Wir nehmen $x_{max} < \infty$ an.

Aufgrund der Konvexität ist u' wachsend. Ist $u'(0) < 0$, so gibt es ein maximales Intervall $[0, \tilde{x}) \subset [0, x_{max})$, so dass dort $u' < 0$ gilt. Dort fällt $|u'|$ und bleibt daher beschränkt. Somit sind x und u dort ebenfalls beschränkt. Daher existiert die Lösung noch über $\tilde{x}$ hinaus (wir hatten $\tilde{x} \leq x_{max} < \infty$ vorausgesetzt) und es gilt $u'(x) > 0$ auf $(\tilde{x}, x_{max})$.

Somit gibt es aufgrund der Konvexität ein ε mit $0 < \varepsilon < x_{max}$ mit $u'(\varepsilon) > 0$. Aufgrund der Konvexität folgt $u'(x) > 0$ für $x > \varepsilon > 0$. Nochmals aufgrund der Konvexität erhalten wir unter Benutzung von $(\star)$ $u - xu' > 0$. Somit folgt

$$u > xu'(x) \geq \varepsilon u'(x) \quad \text{für } x > \varepsilon > 0.$$

Somit kann u aufgrund des Vergleichsprinzips für gewöhnliche Differentialgleichungen für $x \geq \varepsilon$ höchstens exponentiell wachsen. Wegen $u > \varepsilon u'$ und $u' \geq 0$ ist auch

u' durch eine exponentiell wachsende Funktion beschränkt. Daher existiert u für alle $x \geq 0$. $\square$

Bemerkung 5.2.4.
(i) Wir haben gesehen, dass Lösungen zu $(\star)$ mindestens auf $[0, \infty)$ fortgesetzt werden können. Daher wollen wir auch ab jetzt annehmen, dass sie dort existieren.
(ii) Ist $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung zu $(\star)$, so ist $u(-x)$ eine Lösung zu $(\star)$ auf $(-\infty, 0]$. Deshalb genügt es Eigenschaften von u für $x \geq 0$ zu untersuchen.
(iii) Ist $u \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung zu $(\star)$, so ist auch $-u \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung zu $(\star)$. Daher werden wir häufiger nur den Fall $u(0) > 0$ untersuchen.

Wir wollen zeigen, dass u für $x \to \infty$ gegen eine Ursprungsgerade konvergiert. Dazu ist es nützlich, $u - xu'$ zu untersuchen. Diese Größe verschwindet für Lösungen von $(\star)$ genau dann (in einem Punkt), wenn $\operatorname{graph} u$ in einer Ursprungsgeraden enthalten ist.

Lemma 5.2.5. *Sei u eine Lösung von $(\star)$ mit $u(0) > 0$. Dann konvergiert $x \mapsto u - xu'$ für $x \to \infty$ exponentiell gegen Null.*

Beweis. Da u strikt konvex ist, folgt aus $(\star)$ $u - xu' > 0$. Mit Hilfe von $(\star)$ bekommen wir nun eine Evolutionsungleichung für $u - xu'$ auf $\{x \geq \varepsilon > 0\}$

$$(u - xu')' = -xu'' = -x(u - xu')\left(1 + (u')^2\right) \leq -\varepsilon(u - xu').$$

Somit konvergiert $u - xu'$ exponentiell gegen Null. $\square$

In der Nähe von $x = 0$, schneidet $\operatorname{graph} u$ Ursprungsgeraden $\{(x, ax) : x \in \mathbb{R}\}$ falls $a \gg 1$ ist. Da u konvex ist, ist u' nach unten beschränkt. Somit schneidet u (genauer: $\operatorname{graph} u$) keine Ursprungsgerade der Form $\{(x, ax) : x \in \mathbb{R}\}$ falls $a \ll -1$ ist. Wir möchten herausfinden, zu welcher Ursprungsgeraden u für $x \to \infty$ asymptotisch ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass u jede Ursprungsgerade höchstens einmal schneidet. Dann zeigen wir, dass u gegen eine Ursprungsgerade mit einer Steigung konvergiert, die mit dem Infimum der Steigungen von Ursprungsgeraden übereinstimmt, die u schneidet.

Lemma 5.2.6. *Sei u eine Lösung von $(\star)$ mit $u(0) > 0$. Dann ist $x \mapsto \frac{u(x)}{x}$ für $x > 0$ strikt monoton fallend.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$\left(\frac{u(x)}{x}\right)' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} = \frac{xu' - u}{x^2} < 0. \qquad \square$$

Daraus folgt

Korollar 5.2.7. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und u eine Lösung von $(\star)$ mit $u(0) > 0$. Gilt $u(x_0) = ax_0$ für ein $x_0 > 0$, dann gelten $u(x) > ax$ für $0 \leq x < x_0$ und $u(x) < ax$ für $x > x_0$. Somit schneiden sich die Graphen von u und $x \mapsto ax$ für $x \geq 0$ höchstens einmal.*

Wir erhalten nun, dass u für $x \to \infty$ gegen eine Halbgerade konvergiert.

Lemma 5.2.8. *Sei u eine Lösung von $(\star)$ mit $u(0) > 0$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, das von $u(0)$ und $u'(0)$ abhängt, so dass $u(x) - ax \to 0$ exponentiell in C^∞ für $x \to \infty$ konvergiert.*

Beweis. Definiere $a := \lim\limits_{x \to \infty} \frac{u(x)}{x}$. Da u konvex ist, fällt u höchstens linear ab, $\frac{u(x)}{x}$ ist also nach unten beschränkt. Somit ist $a \in \mathbb{R}$ nach Lemma 5.2.6 wohldefiniert.

Nach Lemma 5.2.5, konvergiert $u(x) - xu'(x) \to 0$ exponentiell für $x \to \infty$. Daher gilt

$$\lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} = a.$$

Aus der Gleichung $(\star)$ erhalten wir daher, dass auch $u''(x) \to 0$ exponentiell für $x \to \infty$ konvergiert. Wir integrieren und erhalten für $y \to \infty$

$$a - u'(x) \leftarrow u'(y) - u'(x) = \int_x^y u''(\tau)\,d\tau \to \int_x^\infty u''(\tau)\,d\tau.$$

Das Integral auf der rechten Seite fällt wie der Integrand exponentiell ab. Somit konvergiert $u'(x) \to a$ exponentiell für $x \to \infty$. Daher konvergiert auch $u'(x)x - ax \to 0$ exponentiell (mit einer etwas schlechteren Rate) für $x \to \infty$. Wir benutzen nun Lemma 5.2.5 nochmals und erhalten, dass auch $u(x) - ax \to 0$ für $x \to \infty$ exponentiell in C^0 konvergiert. Wir differenzieren nun $(\star)$. Dadurch erhalten wir Evolutionsgleichungen der Form $u^{(k+1)}(x) = \ldots$ für $k \geq 2$, wobei auf der rechten Seite Summen von Produkten der Terme $\left(1 + (u')^2\right)$, u' und mindestens einem der Terme $u(x) - xu'(x)$, $u''(x)$, $\ldots$, $u^{(k)}(x)$, $xu''(x)$, $\ldots$, $xu^{(k)}(x)$ stehen. Die exponentielle Konvergenz von $u(x) - ax$, $u' - a$ und u'' haben wir bereits bewiesen. Per Induktion folgt aus den Differentialgleichungen für $u^{(k)}$, $k \geq 3$, nun die exponentielle Konvergenz für beliebige Ableitungen. $\square$

Im Beweis von Lemma 5.2.8 haben wir auch folgendes gesehen.

Korollar 5.2.9. *Sei u eine Lösung von $(\star)$ mit $u(0) > 0$. Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) \in \mathbb{R}$.*

Lemma 5.2.10. *Sei u eine Lösung von $(\star)$ (mit $u(0) > 0$). Dann gilt*

$$a = \lim_{x\to\infty} u'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x}$$

mit a wie in Lemma 5.2.8. Beide Konvergenzen sind exponentiell mit lokal gleichmäßigen Konstanten, d. h. für $(u(0), u'(0))$ in einer kompakten Menge gibt es $C > 0$ und $\lambda > 0$ mit $|a - u'(x)| \leq Ce^{-\lambda x}$ für alle x und alle Anfangsdaten aus dieser kompakten Menge.

Beweis. Wir haben in Lemma 5.2.5 und Lemma 5.2.8 gesehen, dass $u - u'(x)x$ und $u - ax$ für $x \to \infty$ exponentiell gegen Null konvergieren. Daraus folgt, dass $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) = a$ gilt und dass die Konvergenz exponentiell ist.

Dividieren wir $u - ax$ durch x, so konvergiert dies weiterhin exponentiell gegen Null und liefert die noch fehlende Gleichheit.

$u - u'x$ konvergiert ab $x = \varepsilon$ gleichmäßig gegen Null wenn der Wert dieses Ausdrucks für dieses x gleichmäßig beschränkt ist. (Diese gleichmäßige Schranke erhält man bereits mit der folgenden recht groben Methode: Sei $c \geq 2(1 + |u(0)| + |u'(0)|)$ für alle Anfangsdaten im fixierten Kompaktum. Solange $|x|, |u|, |u'| \leq c$ ist, gilt aufgrund der Differentialgleichung $|u''| \leq 4c^4$. Damit kann sich in einem kontrollierten Zeitintervall $|u'|$ nur so ändern, dass $|u'| \leq c$ für alle Anfangsdaten in diesem Kompaktum gilt. Da $|u'| \leq c$ gilt, kann sich aber auch $|u|$ nur so stark ändern, dass in einem gegebenenfalls kleineren Zeitintervall auch $|u| \leq c$ für alle Startwerte im Kompaktum gilt. Somit folgt die behauptete Abschätzung für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.) Daher gilt dies auch nach Division durch x. Wie im Beweis von Lemma 5.2.8 erhalten wir aus der Gleichung die lokal gleichmäßige exponentielle Konvergenz $u'' \to 0$. Dies überträgt sich wie in diesem Beweis auf die angegebenen Grenzwerte. $\square$

Zu weiteren Eigenschaften von Lösungen von $(\star)$:

Lemma 5.2.11. *Seien u und v zwei Lösungen zu $(\star)$ mit $u(0) > v(0) > 0$ und $u'(0) \ge v'(0)$. Dann gilt überall $u - v > 0$. Für $x \ge 0$ wächst diese Differenz sogar strikt als Funktion von x.*

Beweis. Ist $u'(0) > v'(0)$, so ist $u - v$ aus Stetigkeitsgründen für kleine $x > 0$ in x strikt monoton wachsend. Sonst gilt $u'(0) = v'(0)$ und die Differentialgleichung impliziert $u''(0) > v''(0)$. Somit ist die Differenz $u - v$ aus Stetigkeitsgründen für kleine $x > 0$ in x ebenfalls strikt monoton wachsend.

Wir betrachten nun ein maximales Intervall $(0, x_0)$, $0 < x_0 \le \infty$, auf dem $u' - v' > 0$ gilt. Wir möchten zeigen, dass $x_0 = \infty$ gilt. Falls $x_0 < \infty$ ist, so erhalten wir $u'(x_0) - v'(x_0) = 0$ sowie $u''(x_0) - v''(x_0) \le 0$. Da $u - v$ auf dem Intervall $(0, x_0)$ strikt wächst folgt $u(x_0) > v(x_0)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\ge u''(x_0) - v''(x_0) \\ &= \left(1 + (u'(x_0))^2\right)(u(x_0) - x_0 u'(x_0)) - \left(1 + (v'(x_0))^2\right)(v(x_0) - x_0 v'(x_0)) \\ &= \left(1 + (u'(x_0))^2\right)(u(x_0) - v(x_0)) > 0. \end{aligned}$$

Widerspruch. Somit ist $x_0 = \infty$ und $u - v$ ist in x strikt wachsend. $\square$

Lemma 5.2.12. *Seien u und v zwei Lösungen zu $(\star)$ mit $u(0) \ge v(0) > 0$ und $u'(0) > v'(0)$. Dann gilt $u - v > 0$ für $x > 0$. Diese Differenz wächst sogar strikt in x für $x \ge 0$.*

Beweis. Nach Annahme wächst $u - v$ für kleine $x \ge 0$ strikt. Angenommen, es gibt ein kleinstes $x_0 > 0$ mit $u'(x_0) - v'(x_0) = 0$. Im Punkt x_0 erhalten wir $u(x_0) > v(x_0)$ sowie $u''(x_0) \le v''(x_0)$. Dort folgt damit

$$u - xu' = \frac{u''}{1 + (u')^2} \le \frac{v''}{1 + (v')^2} = v - xv'.$$

Somit ist $u(x_0) \le v(x_0)$. Widerspruch. $\square$

Auch die Grenzwerte der Steigungen sind strikt monoton.

Lemma 5.2.13. *Seien u und v Lösungen von $(\star)$ mit $u(0) \ge v(0) > 0$ und $u'(0) \ge v'(0)$ aber $(u(0), u'(0)) \ne (v(0), v'(0))$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} > \lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{x}.$$

Insbesondere ist also

$$\lim_{x\to\infty} u'(x) > \lim_{x\to\infty} v'(x).$$

Beweis. Aus den Lemmata 5.2.11 und 5.2.12 erhalten wir dass $u(x) - v(x)$ für $x > 0$ positiv und wachsend ist. Da die exponentielle Konvergenz in Lemma 5.2.10 für Anfangswerte $(u(0), u'(0))$ in einer kompakten Menge gleichmäßig ist (was bei nur endlich vielen Lösungen jedoch ohnehin der Fall ist), unterscheiden sich die Grenzwerte $\frac{u(x)}{x}$ und $\frac{v(x)}{x}$: Sonst hätten wir

$$\frac{u(x)}{x} - ce^{-\lambda x} < \lim_{y\to\infty} \frac{u(y)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{v(y)}{y} < \frac{v(x)}{x} + ce^{-\lambda x}$$

für geeignete $c, \lambda > 0$ und alle $x \ge 0$ und somit

$$2cxe^{-\lambda x} > u(x) - v(x).$$

Dies ist unmöglich, da die rechte Seite positiv und wachsend ist.

Die zweite Behauptung folgt nun aus Lemma 5.2.10. $\square$

Wir werden nun die Steigungen u' nahe Unendlich für Lösungen u von $(\star)$ mit $u'(0) = 0$ genauer untersuchen. Für $u(0) = 0$, ist $u(x) \equiv 0$ eine Lösung. Zunächst zeigen wir, dass die Steigungen u' nahe Unendlich für große Werte von $u(0)$ ebenfalls groß werden.

Lemma 5.2.14. *Sei $\alpha > 0$. Dann gibt es ein $h \gg 1$, so dass jede Lösung u von $(\star)$ mit $u'(0) = 0$ und $u(0) \geq h$ nahe Unendlich eine Steigung größer als α hat,*

$$\lim_{x\to\infty} u'(x) > \alpha.$$

Nach Lemma 5.2.10 und Lemma 5.2.6 erhalten wir auch dass $\frac{u(x)}{x} \geq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} > \alpha$ und $u(x) > \alpha x$ für $x \geq 0$ gelten.

Beweis. Sei u eine solche Lösung. Wir sind fertig, falls $u'\left(\frac{1}{2}\right) \geq h$ für ein $h \gg 1$ (mit $h \geq \alpha$) gilt. Aufgrund der Konvexität und da der Grenzwert nach Korollar 5.2.9 existiert ist dann nämlich $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) \geq u'\left(\frac{1}{2}\right) \geq h$.

Sonst erhalten wir aus der Konvexität von u dass $0 \leq u'(x) \leq h$ und $h \leq u(x)$ für alle $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ gelten. In diesem Intervall gilt die Abschätzung

$$u'' = \left(1 + (u')^2\right) \cdot (u - xu') \geq 1 \cdot \left(h - \tfrac{1}{2}h\right) = \tfrac{1}{2}h.$$

Daher folgt

$$u'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \underbrace{u'(0)}_{=0} + \int\limits_0^{1/2} u''(x)\,dx \geq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{4}h.$$

Wie oben erhalten wir $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) > u'\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{4}h$ und damit die Behauptung. □

Für spätere Anwendungen zeigen wir eine Variante von Lemma 5.2.14.

Lemma 5.2.15. *Seien $a > 0$ und $\mu > 0$. Dann gibt es ein $h \gg 1$ so dass jede Lösung u zu $(\star)$ mit $u(0) \geq h$ und $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) \leq a$ auch $u'(0) \leq -\mu$ erfüllen muss.*

Beweis. Nach Lemma 5.2.13 ist die asymptotische Steigung in der Anfangshöhe $u(0)$ und der Anfangssteigung $u'(0)$ monoton. Daher genügt der Nachweis, dass eine Lösung u zu $(\star)$ mit $u(0) = h$ und $u'(0) = -\mu$ für geeignetes $h \gg 1$ auch $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) > a$ erfüllt. (Wenn die Behauptung des Lemmas nämlich falsch wäre, so gälte insbesondere bei diesen Anfangswerten aufgrund der Monotonien $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) \leq a$.)

Nach Lemma 5.2.13 folgt das Lemma für kleine μ, wenn wir es für große μ zeigen können. Daher dürfen wir annehmen, dass μ groß ist: $\mu > a$.

Solange $u \geq \frac{h}{2}$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ erfüllt ist, erhalten wir dort

$$u''(x) = \left(1 + (u'(x))^2\right)(u(x) - xu'(x)) \geq u(x) - xu'(x) \geq \frac{h}{2} - |u'(x)|.$$

Gibt es ein $x > 0$, so dass $u'(x) > \mu$ gilt, so folgt das Lemma direkt aus der Konvexität. Sonst dürfen wir annehmen, dass $\frac{h}{4} \geq \mu$ gilt. Wegen der Konvexität erhalten wir $|u'| \leq \mu$ und daher für $0 \leq x \leq 1$

$$u''(x) \geq \frac{h}{2} - \mu \geq \frac{h}{4}.$$

Die Differentialgleichung $v''(x) = \frac{h}{4}$ mit Anfangswerten $v(0) = h$, $v'(0) = -\mu$ besitzt die Lösung $v(x) = h - \mu x + \frac{h}{8}x^2$. Wir integrieren zweimal und berücksichtigen, dass die Anfangswerte von u und v übereinstimmen. Es gilt also $u(x) \geq v(x)$ für $0 \leq x \leq 1$, falls dort $u(x) \geq \frac{h}{2}$ ist. Die Funktion v nimmt ihr Minimum für $x = \frac{4\mu}{h}$ an. Es ist $v\left(\frac{4\mu}{h}\right) = h - \frac{2\mu^2}{h}$. Im Falle $h > 2\mu$ ist dies größer als $\frac{h}{2}$. Wir nehmen

$h > 2\mu$ ab jetzt ohne Einschränkung an. Damit rechtfertigen wir die oben verwendete Annahme, dass $u \ge \frac{h}{2}$ für große Werte von h auf dem Intervall $0 \le x \le 1$ gilt. Somit ist $u(x) \ge v(x)$ für $0 \le x \le 1$. Insbesondere ist daher $u(1) \ge v(1) \ge \frac{9}{8}h - \mu$. Wir nehmen nun weiterhin an, dass $h \ge 16\mu$ gilt. Dann folgt $u(1) - u(0) \ge \mu$. Somit gibt es ein $x \in [0, 1]$ mit $u'(x) \ge \mu$. Das Lemma folgt nun aus der Konvexität von u. □

Wir zeigen, dass es für jede Ursprungshalbgerade eine Anfangshöhe h gibt, so dass die Lösung u von $(\star)$ mit $u'(0) = 0$ für $x \to \infty$ gegen diese Halbgerade konvergiert.

Lemma 5.2.16. *Sei $a > 0$. Dann gibt es eine Anfangshöhe $u(0) = h$, so dass die Lösung u zu $(\star)$ mit $u'(0) = 0$*

$$\lim_{x\to\infty} u(x) - ax = 0$$

erfüllt. Die Abbildung $h \mapsto a$ vermöge u ist stetig.

Beweis. Nach Lemma 5.2.8 existiert zu jedem h ein Wert $\tilde{a}$, so dass die Behauptung mit $\tilde{a}$ gilt. Nach Lemma 5.2.8 und Lemma 5.2.10 genügt also der Nachweis, dass $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x) = a$ für ein geeignetes $h > 0$ ist.

Sei $A(h)$ die Funktion, die einer Anfangshöhe h die zugehörige asymptotische Steigung zuordnet. Nach Lemma 5.2.14 gilt

$$-\infty = \lim_{h\to-\infty} A(h) < A(0) = 0 < \lim_{h\to\infty} A(h) = \infty.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass A stetig ist. Seien h_0 und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Lemma 5.2.10 ist die Konvergenz von u' mit lokal gleichmäßigen Konstanten exponentiell in den Anfangsdaten. Für Starthöhen in $[h_0 - 1, h_0 + 1]$ und $u'(0) = 0$ ist sie daher gleichmäßig. Sei daher $r > 0$, so dass für alle Anfangshöhen in $[h_0 - 1, h_0 + 1]$

$$\left| u_h'(r) - \lim_{x\to\infty} u_h'(x) \right| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

gilt, wobei wir mit u_h für den Moment die Lösung von $(\star)$ mit $u(0) = h$ und $u'(0) = 0$ bezeichnet haben. $h \mapsto u_h'(r)$ ist stetig. Daher gibt es ein δ mit $0 < \delta \le 1$, so dass $|h - h_0| < \delta$ auch $|u_h'(r) - u_{h_0}'(r)| < \frac{\varepsilon}{3}$ impliziert. Daher folgt aus $|h - h_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
&\left| \lim_{x\to\infty} u_h'(x) - \lim_{x\to\infty} u_{h_0}'(x) \right| \\
\le &\left| \lim_{x\to\infty} u_h'(x) - u_h'(r) \right| + |u_h'(r) - u_{h_0}'(r)| + \left| u_{h_0}'(r) - \lim_{x\to\infty} u_{h_0}'(x) \right| \\
\le &\tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist A stetig und die Existenz folgt aus dem Zwischenwertsatz. Aufgrund der Monotonie in den Anfangswerten, siehe Lemma 5.2.13, ist h auch eindeutig bestimmt. □

Die vermöge einer Lösung einander zugeordneten Werte a und h sind durch einen Homöomorphismus miteinander verknüpft.

Lemma 5.2.17. *Seien a und h vermöge einer Lösung u zu $(\star)$ wie in Lemma 5.2.16 einander zugeordnet. Indem wir* graph u *reflektieren, setzen wir diese Abbildung zu einer Abbildung $\mathbb{R} \ni h \mapsto a \in \mathbb{R}$ fort. Dann ist dies ein Homöomorphismus mit $a(h) \to \pm\infty$ für $h \to \pm\infty$.*

Beweis. Lemma 5.2.14 sichert die Behauptung über das asymptotische Verhalten. Die Surjektivität und die Stetigkeit folgen aus Lemma 5.2.16. Lemma 5.2.13 liefert die Injektivität.

Aus der Topologie, siehe z. B. [16, Satz 8.12 and Satz 8.24], ist bekannt, dass eine bijektive stetige und eigentliche Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus ist. Somit ist $h \mapsto a(h)$ ein Homöomorphismus. □

Wir möchten nun zeigen, dass es zu jedem Punkt P und jeder Ursprungshalbgeraden eine homothetisch expandierende Kurve zur Zeit $t = 1/2$ gibt, die durch P verläuft und zu dieser Halbgeraden asymptotisch ist. Dies ist klar, falls P bereits auf der zu einer Geraden verlängerten Halbgeraden liegt. Nach einer Rotation und gegebenenfalls einer Spiegelung dürfen wir annehmen, dass P auf der y-Achse liegt und die Halbgerade als $\{(x, ax) : x \geq 0\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

Lemma 5.2.18. *Sei $P \in \mathbb{R}^2$ und l eine Ursprungshalbgerade. Dann gibt es eine Lösung u von $(\star)$ mit $u(0) = h$ sowie $u'(0) = 0$, deren Graph nach einer Rotation P enthält und auf einer Seite zu l asymptotisch ist. Der Tangentialvektor in P in Richtung auf l zu an die Kurve hängt stetig von P ab.*

Beweis. Sei l ohne Einschränkung die positive x-Achse.

(i) Wir definieren zunächst eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Für den Beweis des Lemmas wird insbesondere wichtig sein, dass Φ ein Homöomorphismus ist.

(ii) Sei $(x, h) \in \mathbb{R}^2$. Sei u die Lösung von $(\star)$ mit $u(0) = h$ und $u'(0) = 0$. Sei R_h die Drehung, die $\operatorname{graph} u|_{x\geq 0}$ so dreht, dass die Kurve zur positiven x-Achse asymptotisch wird. Dann ist die durch $\Phi : (x, h) \mapsto R_h(x, u(x))$ definierte Abbildung Φ stetig.

(iii) Die Injektivität von Φ folgt aus einer Monotonie wie in Lemma 5.2.13: Es gibt nicht zwei verschiedene Kurven, die durch denselben Punkt verlaufen und zur selben Halbgeraden asymptotisch sind.

(iv) Die Kurven $x \mapsto \Phi(x, h)$ hängen stetig von h ab. Sie sind jeweils zu zwei Halbgeraden asymptotisch. Davon ist die eine stets die positive x-Achse. Nach Lemma 5.2.14 (asymptotisches Verhalten) und Lemma 5.2.13 (Monotonie) rotiert die andere um 360° wenn h variiert. Somit liegt jeder Punkt im $\mathbb{R}^2$ auf einer solchen Kurve (für $x \gg 1$ umläuft die Kurve $h \mapsto \Phi(x, h)$ den Punkt P nicht während sie ihn für $x \ll -1$ umläuft – wobei wir die Kurven jeweils für $|h| \approx \infty$ leicht abändern – und diese Kurven wären ohne Surjektivität in $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ homotop). Daher ist Φ surjektiv.

(v) Für $|h| \to \infty$ folgt $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |\Phi(x, h)| \to \infty$ aufgrund der Konvexität aus Lemma 5.2.14. Wegen $|(x, u(x))| \geq |x|$ ist $\inf\limits_{h\in\mathbb{R}} |\Phi(x, h)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$ klar. Somit ist Φ eigentlich.

(vi) Wir benutzen nochmals [16, Satz 8.12 and Satz 8.24] und erhalten, dass Φ ein Homöomorphismus ist.

Damit folgt das Lemma. □

5.3. **Existenz von drei Kurven.** Wir zeigen nun die Existenzaussage aus Theorem 5.1.2. Dazu benutzen wir die Kurven aus Lemma 5.2.18, zeigen dass diese für einen Punkt in $\mathbb{R}^2$ auch die 120°-Bedingung erfüllen und dass sie sich nicht außerhalb des Startpunktes schneiden.

Die Kurven sind eingebettet:

Lemma 5.3.1. *Verschiedene homothetisch expandierende Kurven mit einem gemeinsamen Startpunkt schneiden sich in keinem weiteren Punkt.*

Beweis. Zunächst rotieren wir das Koordinatensystem so dass der Startpunkt auf der Halbgeraden $\{(0, y) : y \geq 0\}$ liegt. Dann sind diese Kurven Graphen über $\{(x, 0) : x \geq 0\}$, $\{(x, 0) : x \leq 0\}$ oder Teil der Achse $\{0\} \times \mathbb{R}$. Daher genügt es, zwei Kurven zu betrachten, die als Graphen über der Halbgeraden $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ dargestellt sind. Diese Kurven beginnen auf derselben Höhe und haben verschiedene

Anfangssteigungen, da sie nicht übereinstimmen. Daher folgt nach Lemma 5.2.12, dass sich diese Kurven nur für $x = 0$ schneiden. □

Beweis von Theorem 5.1.2. Es fehlt noch der Nachweis, dass es mindestens ein $P \in \mathbb{R}^2$ gibt, in dem sich die Kurven mit einer vorgegebenen asymptotischen Halbgeraden im Winkel von 120° treffen. Definiere ein stetiges Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $V = \sum\limits_{i=1}^{3} T_i$, wobei T_i die zu den asymptotischen Halbgeraden hinweisenden (normierten) Tangentialvektoren sind.

Wir behaupten zunächst, dass für Punkte P, die weit vom Ursprung entfernt sind, stets $\langle P, V(P)\rangle < 0$ gilt: Sei $|P|$ groß. Liegt zwischen der Ursprungshalbgeraden durch P und der Ursprungshalbgeraden zu der die Kurve asymptotisch sein soll ein nach unten abgeschätzter positiver Winkel, so beginnt die selbstähnliche Lösung nach Lemma 5.2.15 beinahe in Richtung $-\frac{P}{|P|}$. Dies ist bei drei verschiedenen fixierten Ursprungshalbgeraden für jeden Punkt P für mindestens zwei der Kurven richtig. Somit folgt $\langle P, V(P)\rangle = \sum\limits_{i=1}^{3} \langle P, T_i\rangle < 0$ auf $\partial B_R(0)$ für hinreichend große $R \geq 1$. Wir können sogar annehmen, dass $P + V(P) \in \overline{B_R(0)}$ für alle $P \in \overline{B_R(0)}$ gilt. Die Abbildung $P \mapsto P + V(P) : \overline{B}_R(0) \to \overline{B}_R(0)$ ist stetig. Somit besitzt sie nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt P_0. (Den Brouwerschen Fixpunktsatz zeigen wir in Theorem A.2.1.) Dies ist äquivalent zu $V(P_0) = 0$. Somit finden wir ein $P_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\sum\limits_{i=1}^{3} T_i = 0$. Dies bedeutet, dass in P_0 die 120°-Bedingung erfüllt ist. Die Existenzaussage des Theorems folgt. □

6. Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung

Diese wurden 1841 von C. Delaunay gefunden [6] und heißen auch Delaunayflächen. Wir folgen teilweise [8]. Siehe auch [7]

Bemerkung 6.1.1. Einige dieser Flächen lassen sich ähnlich wie in Kapitel 3.1 beschreiben. Wir geben hier ein paar Zwischenschritte an und lassen die Details als Übung. Anschließend geben wir noch einen alternativen Zugang an.

Schreibe die Rotationsfläche lokal als Graph von u. Dann erhalten wir
$$u(\hat{x}, x^n) = -\sqrt{\varphi^2(x^n) - |\hat{x}|^2}.$$
In einem Punkt mit $\hat{x} = 0$ folgt
$$\begin{aligned}
Du &= (0, \ldots, 0, -\varphi'),\\
D^2u &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\varphi'' \end{pmatrix},\\
(g_{ij}) &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 + (\varphi')^2 \end{pmatrix},\\
(h_{ij}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi\sqrt{1+(\varphi')^2}}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \frac{-\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$
Solch eine Hyperfläche hat $(n-1)$-mal die Hauptkrümmung $\frac{1}{\varphi\sqrt{1+(\varphi')^2}}$ und einmal die Hauptkrümmung $\frac{-\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}}$. Somit hat solch eine Fläche konstante mittlere Krümmung 1, falls
$$\frac{n-1}{\varphi\sqrt{1+(\varphi')^2}} - \frac{\varphi''}{(1+(\varphi')^2)^{3/2}} = 1$$
gilt.

Bemerkung 6.1.2 (Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung)**.** Etwas allgemeinere Hyperflächen können wir durch eine Einbettung $X\colon \mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ mit

$$X(p,t)=(\alpha(t)\cdot p,\beta(t))^T$$

beschreiben. Dabei nehmen wir an, dass $t\mapsto(\alpha(t),\beta(t))$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t)>0$ für alle t ist. Damit gilt

$$\dot\alpha^2(t)+\dot\beta^2(t)=1.$$

Wir beschränken uns nun auf den Fall von Flächen in $\mathbb{R}^3$. Aus Platzgründen schreiben wir Vektoren als Zeilen. Es gilt

$$\begin{aligned}
X\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}&\to\mathbb{R}^3,\\
X(\varphi,t):=&\,(\cos\varphi\cdot\alpha(t),\sin\varphi\cdot\alpha(t),\beta(t)),\\
X_\varphi=&\,(-\sin\varphi\cdot\alpha(t),\cos\varphi\cdot\alpha(t),0),\\
X_t=&\left(\cos\varphi\cdot\dot\alpha(t),\sin\varphi\cdot\dot\alpha(t),\dot\beta(t)\right),\\
X_{\varphi\varphi}=&\,(-\cos\varphi\cdot\alpha(t),-\sin\varphi\cdot\alpha(t),0),\\
X_{\varphi t}=&\,(-\sin\varphi\cdot\dot\alpha(t),\cos\varphi\cdot\dot\alpha(t),0)\,,\\
X_{tt}=&\left(\cos\varphi\cdot\ddot\alpha(t),\sin\varphi\cdot\ddot\alpha(t),\ddot\beta(t)\right),\\
g_{tt}=&\,\langle X_t,X_t\rangle=\dot\alpha^2(t)+\dot\beta^2(t)=1,\\
\begin{pmatrix}g_{\varphi\varphi}&g_{\varphi t}\\g_{\varphi t}&g_{tt}\end{pmatrix}=&\begin{pmatrix}\alpha^2(t)&0\\0&1\end{pmatrix},\\
\nu=&\left(\cos\varphi\cdot\dot\beta(t),\sin\varphi\cdot\dot\beta(t),-\dot\alpha(t)\right),\\
h_{\varphi\varphi}=&-\langle X_{,\varphi\varphi},\nu\rangle=\alpha\dot\beta,\\
h_{\varphi t}=&\,0,\\
h_{tt}=&\,\dot\alpha\ddot\beta-\ddot\alpha\dot\beta,\\
\begin{pmatrix}h_{\varphi\varphi}&h_{\varphi t}\\h_{\varphi t}&h_{tt}\end{pmatrix}=&\begin{pmatrix}\alpha\dot\beta&0\\0&\dot\alpha\ddot\beta-\ddot\alpha\dot\beta\end{pmatrix},\\
\{\lambda_i\}_{i=1,2}=&\left\{\frac{\dot\beta}{\alpha},\dot\alpha\ddot\beta-\dot\beta\ddot\alpha\right\},\\
H=&\,\dot\alpha\ddot\beta-\ddot\alpha\dot\beta+\frac{\dot\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.1.3 (Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung)**.** Wegen $\dot\alpha^2+\dot\beta^2=1$ folgt $0=\dot\alpha\ddot\alpha+\dot\beta\ddot\beta$. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $\alpha\dot\alpha$ und erhalten unter Benutzung dieser beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha\dot\alpha H=&\,\alpha\dot\alpha^2\ddot\beta-\alpha\dot\beta\dot\alpha\ddot\alpha+\dot\alpha\dot\beta\\
=&\,\alpha\ddot\beta-\alpha\dot\beta^2\ddot\beta-\alpha\dot\beta\dot\alpha\ddot\alpha+\dot\alpha\dot\beta\\
=&\,\alpha\ddot\beta-\alpha\dot\beta\left(\dot\beta\ddot\beta+\dot\alpha\ddot\alpha\right)+\dot\alpha\dot\beta\\
=&\,\alpha\ddot\beta+\dot\alpha\dot\beta=\frac{d}{dt}\left(\alpha\dot\beta\right).
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir nach Multiplikation mit $\alpha\dot\beta$

$$\begin{aligned}
\alpha\dot\beta H=&\,\alpha\dot\alpha\dot\beta\ddot\beta-\alpha\dot\beta^2\ddot\alpha+\dot\beta^2\\
=&\,\alpha\dot\alpha\dot\beta\ddot\beta-\alpha\ddot\alpha+\alpha\dot\alpha^2\ddot\alpha+\dot\beta^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\dot\alpha\left(\dot\beta\ddot\beta + \dot\alpha\ddot\alpha\right) - \alpha\ddot\alpha + 1 - \dot\alpha^2 \\ &= 1 - \frac{d}{dt}(\alpha\dot\alpha). \end{aligned}$$

Wir setzen $u := \alpha\dot\alpha$ sowie $v := \alpha\dot\beta$ und erhalten das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -H \\ H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun speziell $H = 1$. Ist $H > 0$ eine andere Konstante, so erhalten wir die entsprechende Fläche aus der für $H = 1$ durch Skalierung. Eine Lösung ist für $\rho \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos t \\ \rho\sin t + 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Daraus erhalten wir mit $\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 = 1$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2 t + 1 + 2\rho\sin t + \rho^2\sin^2 t} \\ &= \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho\sin t}, \\ \beta(t) - \beta(0) &= \int_0^t \frac{v(\tau)}{\alpha(\tau)}\,d\tau = \int_0^t \frac{1 + \rho\sin\tau}{\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho\sin\tau}}\,d\tau. \end{aligned}$$

Hieran sieht man, dass wir periodische Flächen erhalten. Die Periode ist durch $\beta(2\pi) - \beta(0)$ gegeben.

Wir überprüfen, dass die Differentialgleichung $1 = \dot\alpha\ddot\beta - \ddot\alpha\dot\beta + \frac{\dot\beta}{\alpha}$ gilt:

$$\begin{aligned} \dot\alpha(t) &= \frac{\rho\cos t}{\alpha(t)}, \\ \ddot\alpha(t) &= \frac{-\rho\sin t}{\alpha(t)} - \frac{\rho^2\cos^2 t}{\alpha^3(t)}, \\ \dot\beta(t) &= \frac{1 + \rho\sin t}{\alpha(t)}, \\ \ddot\beta(t) &= \frac{\rho\cos t}{\alpha(t)} - \frac{(1 + \rho\sin t)\rho\cos t}{\alpha^3(t)}, \\ \dot\alpha\ddot\beta - \ddot\alpha\dot\beta + \frac{\dot\beta}{\alpha} &= \frac{\rho\cos t}{\alpha(t)}\left(\frac{\rho\cos t}{\alpha(t)} - \frac{(1 + \rho\sin t)\rho\cos t}{\alpha^3(t)}\right) \\ &\quad - \left(\frac{-\rho\sin t}{\alpha(t)} - \frac{\rho^2\cos^2 t}{\alpha^3(t)}\right)\frac{1 + \rho\sin t}{\alpha(t)} + \frac{1 + \rho\sin t}{\alpha^2(t)} \\ &= \frac{1}{\alpha^2(t)}\left(\rho^2\cos^2 t + \rho\sin t + \rho^2\sin^2 t + 1 + \rho\sin t\right) \\ &= \frac{1 + \rho^2 + 2\rho\sin t}{\alpha^2(t)} = 1. \end{aligned}$$

Zu $\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \dot\alpha^2 + \dot\beta^2 &= \frac{\rho^2\cos^2 t}{\alpha^2(t)} + \frac{1 + 2\rho\sin t + \rho^2\sin^2 t}{\alpha^2(t)} \\ &= \frac{1 + \rho^2 + 2\rho\sin t}{\alpha^2(t)} = 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.1.4. Das Vorzeichen von ρ spielt keine Rolle, die Flächen unterscheiden sich lediglich um eine Verschiebung entlang der Rotationsachse. Sei daher ohne Einschränkung $\rho \geq 0$.

Die Voraussetzung $\alpha(t) > 0$ ist für $\rho \neq 1$ stets erfüllt, denn dann gilt $\alpha(t) \geq \sqrt{1+\rho^2-2\rho} = \sqrt{(1-\rho)^2} = |1-\rho| > 0$.

(i) Für $\rho = 0$ erhalten wir einen Zylinder.

(ii) Für $0 < \rho < 1$ erhalten wir sogenannte Undoloide. Sie sind eingebettet, da überall $\dot\beta(t) > 0$ gilt.

(iii) Für $\rho = 1$ erhalten wir wie an einer Perlenkette angeordnete Sphären. Dazu genügt es (nach einer Umparametrisierung) zu zeigen, dass für

$$\alpha(t) = \sqrt{2+2\cos t},$$

$$\beta(t) = \int_0^t \frac{1+\cos\tau}{\sqrt{2+2\cos\tau}}\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \sqrt{1+\cos\tau}\,d\tau$$

und $-\pi \leq t \leq \pi$ stets $\alpha^2(t) + \beta^2(t) = 4$ gilt. Aus Symmetrie- und Stetigkeitsgründen genügt der Nachweis für $0 \leq t < \pi$. Es gilt $(\alpha,\beta)(0) = (2,0)$. Wir erraten nun einen Kandidaten für eine Stammfunktion von $\sqrt{1+\cos t}$. Benutze dazu die angestrebte Gleichung und rate

$$\beta(t) = \sqrt{4-\alpha^2(t)} = \sqrt{4-2-2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}.$$

Dies ist in der Tat für $0 < t < \pi$ eine Stammfunktion, denn es gilt dort für die erratene Funktion $\beta(t)$

$$\begin{aligned}\dot\beta(t) &= \sqrt{2}\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin t\cdot\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1-\cos t}\cdot\sqrt{1+\cos t}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin t\cdot\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin t\cdot\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{\sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos t}.\end{aligned}$$

Da auch $\beta(0) = 0$ gilt und $\beta(t)$ in $0 \leq t < \pi$ stetig ist, ist β die gesuchte Stammfunktion. Die Behauptung, dass es sich um einen Kreis handelt, folgt nun aus

$$\alpha^2(t) + \beta^2(t) = 2(1+\cos t) + 2(1-\cos t) = 4.$$

(iv) Für $\rho > 1$ erhalten wir sogenannte Nodoide. Sie sind nicht eingebettet, da $\dot\beta(t) < 0$ im Minimum von $\alpha(t)$ also für $t \in \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\cdot\mathbb{Z}$ und $\dot\beta(t) > 0$ im Maximum von $\alpha(t)$, also für $t \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\cdot\mathbb{Z}$ gelten und $\int_0^{2\pi} \frac{1+\rho\sin\tau}{\sqrt{1+\rho^2+2\rho\sin\tau}}\,d\tau > 0$ ist. Diese letzte Behauptung folgt aus

$$0 < \int_0^\pi \frac{1+\rho\sin t}{\sqrt{1+\rho^2+2\rho\sin t}} + \frac{1-\rho\sin t}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\sin t}}\,dt.$$

Da der Integrand für $t = 0$ positiv ist, genügt der Nachweis von

$$0 \leq \frac{1+t}{\sqrt{1+\rho^2+2t}} + \frac{1-t}{\sqrt{1+\rho^2-2t}}$$

für $0 \leq t \leq \rho$. Für $0 \leq t \leq 1$ ist dies trivial. Also möchten wir nach Quadrieren für $1 \leq t \leq \rho$

$$(t-1)^2(1+\rho^2+2t) \leq (1+t)^2(1+\rho^2-2t)$$

zeigen. Durch Ausmultiplizieren sieht man nach kurzer Rechnung, dass dies äquivalent zu $0 \leq 4t(\rho^2-t^2)$ ist und daher gilt.

(v) Undoloide erhält man als Spuren eines Brennpunktes beim Abrollen einer Ellipse auf einer Geraden, siehe [17].

Anhang A. Brouwerscher Fixpunktsatz

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass jede stetige Abbildung f von der abgeschlossenen Einheitskugel D^n in sich einen Fixpunkt besitzt, d. h. es gibt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$. Wir folgen dabei [2].

Wir führen den Beweis hier nur für $n = 2$. Für $n = 1$ folgt der Brouwersche Fixpunktsatz aus dem Zwischenwertsatz und für $n \geq 3$ lässt sich das Spernersche Lemma, geeignet verallgemeinert, per Induktion beweisen.

A.1. **Spernersches Lemma.**

Das Spernersche Lemma gilt auch für andere Triangulierungen, für uns genügt aber hier die folgende Version.

Theorem A.1.1 (Spernersches Lemma). *Sei V ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$, das in 4^k, $k \geq 1$, kleinere kongruente gleichseitige Dreiecke aufgeteilt ist. Dann bilden die Kanten und Ecken der kleineren Dreiecke einen Graphen G. Seien die Ecken so gefärbt (wir verwenden die Farben 1, 2 und 3), dass die Ecken des großen Dreiecks drei verschiedene Farben haben und auf jeder Kante des großen Dreiecks nur genau zwei verschiedene Farben vorkommen. Dann gibt es ein kleines Dreieck, dessen Ecken drei verschiedene Farben haben.*

Beweis. Wir betrachten einen neuen Graphen G', den dualen Graphen zum gegebenen Graphen. Er besteht aus jeweils einer Ecke in jedem der kleinen Dreiecke und einer Ecke außerhalb des großen Dreiecks. Zwei Ecken sind nun genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es einen Weg zwischen den Ecken gibt, der nur eine Kante von G genau einmal kreuzt und wenn diese Kante in G eine Ecke der Farbe 1 und eine Ecke der Farbe 2 hat.

Da entlang der äußeren Ecken in G eine ungerade Anzahl von Farbwechseln zwischen 1 und 2 stattfindet, gibt es in G' eine ungerade Anzahl von Kanten, $2l + 1$, die an der Ecke außerhalb des großen Dreiecks starten oder enden. Aus den Möglichkeiten, ein kleines Dreieck zu färben, folgt, dass in den Ecken von G' im Inneren des großen Dreiecks maximal zwei Kanten beginnen oder enden können. Wenn in solch einem Punkt (Ecke) genau eine Kante beginnt oder endet, so haben wir ein dreifarbiges Dreieck, wie wir es gesucht haben. Es gibt also in G' Punkte innerhalb des großen Dreiecks mit 0, 1 oder 2 Kanten. Ihre Anzahl wollen wir mit E_0, E_1 und E_2 bezeichnen. Sei k die Anzahl der Kanten in G'. Dann gilt

$$2k = 0 \cdot E_0 + 1 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + (2l + 1).$$

Es folgt, dass E_1 ungerade ist. Wir finden also eine ungerade Anzahl von dreifarbigen kleinen Dreiecken. □

A.2. **Brouwerscher Fixpunktsatz.**

Theorem A.2.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Dann gibt es einen Fixpunkt $x \in D^n$, d. h. es gibt einen Punkt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Auch hier wollen wir wieder nur den zweidimensionalen Fall betrachten. Die n-dimensionale Variante folgt analog.

Da D^2 homöomorph zu einem Dreieck Δ ist, genügt es, die Existenz eines Fixpunktes für stetige Abbildungen $f : \Delta \to \Delta$ zu beweisen. Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ das Dreieck mit Ecken $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$. Es gilt $x \in \Delta$ genau dann, wenn $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist und alle $x_i \geq 0$ sind.

Wir unterteilen nun das Dreieck Δ wie im Spernerschen Lemma in 4^k Dreiecke. Diese wollen wir einfärben. Wir wollen annehmen, dass es eine Abbildung $f : \Delta \to \Delta$ gibt, die keinen Fixpunkt besitzt. Dann ist $f(x) - x \neq 0$ für alle $x \in \Delta$. Wir wollen nun einer Ecke $x \in \Delta$ die Farbe i geben, wenn dies die kleinste natürliche Zahl ist, für die $\langle f(x) - x, e_i \rangle$ negativ ist. Dies ist eine wohldefinierte Färbung.

Denn wenn wir $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ schreiben, gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 1$. Da nicht $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$ und $x_3 = f_3(x)$ für $x \in \Delta$ gilt, gibt es für jedes $x \in \Delta$ mindestens ein i, so dass $f_i(x) - x_i = \langle f(x) - x, e_i \rangle$ negativ ist und ein i, so dass $f_i(x) - x_i$ positiv ist. Damit ist die Färbung wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass dies eine Färbung wie im Spernerschen Lemma ist. Für die Ecke e_i kann nur $f_i(e_i) - e_i$ negativ sein, also hat sie die Farbe i. Liegt x auf der Ecke gegenüber von e_i, so gilt dort $x_i = 0$. Also kann $f_i(x) - x_i$ nicht negativ sein und somit kann x nicht die Farbe i bekommen. Somit erhalten wir eine Färbung der gewünschten Art.

Wir finden also nach dem Spernerschen Lemma ein kleines Dreieck mit Eckpunkten v_1^k, v_2^k und v_3^k, so dass diese die Farben 1, 2 und 3 bekommen. Daher gilt $\langle f(v_1^k) - v_1^k, e_1 \rangle < 0$, $\langle f(v_2^k) - v_2^k, e_2 \rangle < 0$ und $\langle f(v_3^k) - v_3^k, e_3 \rangle < 0$. Diese Punkte haben jeweils einen Abstand von genau $\sqrt{2} \cdot 2^{-k}$ (oder Null).

Wir betrachten nun eine Folge von Punkten $(v_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Da Δ eine kompakte Menge ist, konvergiert eine (nicht umbenannte) Teilfolge, $v_1^k \to x \in \Delta$ für $k \to \infty$. Man überzeugt sich mit Hilfe der Dreiecksungleichung direkt, dass auch die Folgen v_2^k und v_3^k gegen denselben Grenzwert konvergieren. Da die Funktion f stetig ist, folgt damit $f_1(x) - x_1 \le 0$, $f_2(x) - x_2 \le 0$ und $f_3(x) - x_3 \le 0$. Hieraus erhalten wir

$$1 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \le x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

mit Gleichheit genau dann, wenn in den obigen drei Ungleichungen Gleichheit gilt. Daher hat f eine Fixpunkt. Widerspruch. □

Bemerkung A.2.2. Man überlege sich für einige topologische Räume X, ob jede stetige Selbstabbildung $f \colon X \to X$ bzw. jeder Homöomorphismus $f \colon X \to X$ einen Fixpunkt besitzt. Beispiele könnten $X = (-1, 1)$, $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^n$, ein Annulus, $B_1(0)$ oder ein Gebiet mit zwei Löchern sein.

Korollar A.2.3. *Es gibt keine stetige Retraktion von D^n nach $\mathbb{S}^{n-1}$, d. h. es gibt keine stetige Abbildung $f : D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, so dass $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt.*

Beweis. Falls doch, so ist $g : D^n \to D^n$ mit $g(x) := -f(x)$ eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt. Sei nämlich $x \in D^n$ mit $g(x) = x$. Da $f(D^n) = \mathbb{S}^{n-1}$ ist, folgt $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Es gilt also $g(x) = -f(x) = -x$. Widerspruch zum Brouwerschen Fixpunktsatz. □

Korollar A.2.4. *Sei $V : D^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit $\langle V(x), x \rangle \le 0$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann gibt es $x \in D^n$ mit $V(x) = 0$, das Vektorfeld besitzt also eine Nullstelle.*

Beweisskizze. Wir wollen annehmen, dass $V(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt.

Betrachte die Abbildung $f : D^n \to D^n$ mit $x \mapsto x + \varepsilon V(x)$ für ein kleines $\varepsilon > 0$. Die Abbildung ist genau dann eine fixpunktfreie Selbstabbildung von D^n, wenn $V(x)$ keine Nullstelle besitzt.

Um sicherzustellen, dass es sich bei f um eine Selbstabbildung von D^n handelt, genügt es nicht, f wie oben definiert zu betrachten. Durch Hinzufügen eines Annulus und nullstellenfreies Fortsetzen des Vektorfeldes kann man ohne Einschränkung annehmen, dass sogar $V(x) = -x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ klein genug, so ist die oben definierte Abbildung f eine Selbstabbildung von D^n. □

Anhang B. Rechnungen zu translatierenden Lösungen

Die folgenden Beispiele sind mit dem frei verfügbaren Programm SAGE, siehe `http://www.sagemath.org/`, geschrieben.

B.1. **In der Nähe des Ursprungs.** Das folgende SAGE-Programm erlaubt es, die Suche nach einem geeigneten Anfangswert a in Theorem 2.2.3 nachzuvollziehen. Damit erhält man Existenz nahe $r = 0$. Für $n = 2$ ist $a \approx 0.532$ ein geeigneter Anfangswert.

```
u,t=var('u t')
n=2
a=0.532
P=desolve_rk4((1+u^2)*((n-1)*u-e^(-t)),u,ics=[0.0,a],ivar=t,
  output='slope_field',end_points=[0.0,12.0],thickness=3,step=0.05)
plot(P).show(ymin=-0.2,ymax=0.6)
```

B.2. **Asymptotische Entwicklung.** Man schreibt jeweils einen neuen Term in die zweite Zeile. Den Parameter a bestimmt man so, dass die Gleichung, multipliziert mit einer immer höheren Potenz von r für $r \to \infty$ Null ergibt.

```
r,n,a=var('r n a')
phi=r/(n-1)+a/r
gleichung=diff(phi,r)-(1+phi^2)*(1-(n-1)/r*phi)
gleichung=expand(gleichung*r^0)
print gleichung
print limit(gleichung,r=infinity)
```

B.3. **Bild des ganzen Graphen.** Für geeignete Anfangswerte nahe $r = 0$ genügt es zu sehen, dass $\varphi(r) = \frac{r}{n}$ die beste lineare Approximation nahe $r = 0$ ist.

```
u,v,r=var('u v r')
n=2
eps=0.0001
translat=desolve_system_rk4([v,(1+v^2)*(1-(n-1)/r*v)],[u,v],
  ics=[eps,1/(2*n)*eps^2,eps/n],ivar=r,
  end_points=[eps,5],step=0.1)
xyvalues=[ [i,j] for i,j,k in translat]
gespiegelt=[[-i,j] for i,j,k in translat]
bild1=list_plot(xyvalues,plotjoined=True,thickness=3,
  aspect_ratio=1)
bild2=list_plot(gespiegelt,plotjoined=True,thickness=3,
  aspect_ratio=1)
(bild1+bild2).show()
```

B.4. **Flügelartige Lösungen.** Mit einem beliebigen inneren Lochdurchmesser erhalten wir flügelartige Lösungen indem wir je nach Punkt eine der gewöhnlichen Differentialgleichungen für translatierende Lösungen lösen.

```
u,v,r=var('u v r')
n=2
r0=3
hint=0.7
epsilon=0.01
xend=6
gedreht=desolve_system_rk4([v,((n-1)/u-v)*(1+v^2)],[u,v],
  ics=[0,r0,0],ivar=r,end_points=[-hint,hint])
xyvalues1=[ [j,i] for i,j,k in gedreht]
bild1=list_plot(xyvalues1,plotjoined=True,thickness=3,
  aspect_ratio=1,rgbcolor=(1,0,0))

xanf1=xyvalues1[0][0]
```

```
yanf1=xyvalues1[0][1]
aanf1=gedreht[0][2]
xanf2=xyvalues1[len(xyvalues1)-1][0]
yanf2=xyvalues1[len(xyvalues1)-1][1]
aanf2=gedreht[len(gedreht)-1][2]

translat1=desolve_system_rk4([v,(1+v^2)*(1-(n-1)/r*v)],[u,v],
  ics=[xanf1,yanf1,1/aanf1],ivar=r,end_points=[r0+epsilon,xend])
translat2=desolve_system_rk4([v,(1+v^2)*(1-(n-1)/r*v)],[u,v],
  ics=[xanf2,yanf2,1/aanf2],ivar=r,end_points=[r0+epsilon,xend])
xyvalues2=[ [i,j] for i,j,k in translat1]
xyvalues3=[ [i,j] for i,j,k in translat2]
bild2=list_plot(xyvalues2,plotjoined=True,thickness=1,
  aspect_ratio=1)
bild3=list_plot(xyvalues3,plotjoined=True,thickness=1,
  aspect_ratio=1)
(bild1+bild2+bild3).show()
```

Anhang C. Homothetisch expandierende Kurven

C.1. **Blätterung der Ebene.** Wir erzeugen homothetisch expandierende Kurven und versuchen mit mäßigem Erfolg, diese so zu kippen, dass jeweils eine Asymptote übereinstimmt.

```
u,v,r=var('u v r')
xend=6.0
hend=1.5
h=0
gesamt=line([(-xend,0),(xend,0)])
rotiert=line([(-xend,0),(xend,0)])
while (h<hend):
  h=h+0.15

  kurve=desolve_system_rk4([v,(u-r*v)*(1+v^2)],[u,v],
    ics=[0,h,0],ivar=r,end_points=[-xend,xend])

  xyvalues=[ [i,j] for i,j,k in kurve]
  bild=list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)
  gesamt=gesamt+bild

  phi=arctan(xyvalues[len(xyvalues)-1][1]/
    xyvalues[len(xyvalues)-1][0])

  xyvalues=[ [i,-j] for i,j,k in kurve]
  bild=list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)
  gesamt=gesamt+bild

  xyvalues=[ [i*cos(phi)+j*sin(phi),-i*sin(phi)+j*cos(phi)]
    for i,j,k in kurve]
  bild=list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)
  rotiert=rotiert+bild

  xyvalues=[ [i*cos(phi)+j*sin(phi),i*sin(phi)-j*cos(phi)]
    for i,j,k in kurve]
```

```
  bild=list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)
  rotiert=rotiert+bild

gesamt.show(ymin=-xend,ymax=xend)
rotiert.show(xmin=-xend,xmax=xend,ymin=-xend,ymax=xend)
```

C.2. **Expandierende Netzwerke.** Fügt man drei solcher Kurven im 120°-Winkel zusammen, so erhält man ein homothetisch expandierendes Netzwerk. φ bitte nur vorsichtig im Bereich $30° < \varphi < 90°$ anpassen.

```
u,v,r=var('u v r')

phi=60.0/180*pi
xend=6.0
h=1.0

kurve=desolve_system_rk4([v,(u-r*v)*(1+v^2)],[u,v],
  ics=[0,h,tan(phi).n()],ivar=r,end_points=[0,xend])
xyvalues=[ [i,j] for i,j,k in kurve]
gesamt=list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)

phi=phi-120/180*pi
kurve=desolve_system_rk4([v,(u-r*v)*(1+v^2)],[u,v],
  ics=[0,h,tan(phi).n()],ivar=r,end_points=[0,xend])
xyvalues=[ [i,j] for i,j,k in kurve]
gesamt=gesamt+list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)

phi=phi-120/180*pi
kurve=desolve_system_rk4([v,(u-r*v)*(1+v^2)],[u,v],
  ics=[0,h,tan(phi).n()],ivar=r,end_points=[-xend,0])
xyvalues=[ [i,j] for i,j,k in kurve]
gesamt=gesamt+list_plot(xyvalues,plotjoined=True,aspect_ratio=1)

gesamt.show(xmin=-xend,xmax=xend,ymin=-xend,ymax=xend)
```

Anhang D. Delaunayflächen

Dieses Programm führt die letzte Integration aus und zeichnet das Ergebnis.

```
t,x=var('t x')
rho=0.7
liste=[]
r=0
h=0
step=0.1
while (r<6*pi):
  r=r+step
  hinzu=numerical_integral(lambda x:
    (1+rho*cos(x))/(sqrt(1+rho^2+2*rho*cos(x))),
    r-step,r)[0]
  h=h+hinzu
  a=sqrt(1+rho^2+2*rho*cos(r))
  liste.append([h,a])

bild=list_plot(liste,plotjoined=True,thickness=3,aspect_ratio=1,
```

```
  ymin=-0.1,ymax=1+rho+.1)
bild.show()
```

Anhang E. Weitere Themen

In der folgenden Liste sind einige wenige Beispiele aufgeführt, bei denen ebenso geometrische Phänomene mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden.

(i) Raumartige Hyperflächen im Minkowskiraum (Troglösungen) [10, 15]
(ii) Abresch-Langer Kurven [1], ggf. [12]
(iii) Rotationssymmetrische homothetische Lösungen des mittleren Krümmungsflusses [3]
(iv) Translatierende Lösungen des Curve Diffusion Flusses, [9]
(v) Deformationslemma und Morsetheorie [11, 14, 18]

Literatur

1. Uwe Abresch and Joel Langer, *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, J. Differential Geom. **23** (1986), no. 2, 175–196.
2. Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Including illustrations by Karl H. Hofmann, Corrected reprint of the 1998 original.
3. Joshua S. Bode, *Mean curvature flow of cylindrical graphs*, Ph.D. thesis, Berlin: FU Berlin, 2007.
4. Albert Chau and Oliver C. Schnürer, *Stability of gradient Kähler-Ricci solitons*, Comm. Anal. Geom. **13** (2005), no. 4, 769–800.
5. Julie Clutterbuck, Oliver C. Schnürer, and Felix Schulze, *Stability of translating solutions to mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 281–293.
6. Charles-Eugène Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl. Sér. 1 **6** (1841), 309–320, With a note appended by M. Sturm.
7. James Eells, *The surfaces of Delaunay*, Math. Intelligencer **9** (1987), no. 1, 53–57.
8. Dirk Ferus, *Differentialgeometie I*, 2000, Skript zur Vorlesung.
9. Martin Franzen, *Das curve diffusion Problem. Homothetische und translatierende Lösungen*, 2010, Diplomarbeit.
10. Bo Guan, Huai-Yu Jian, and Richard M. Schoen, *Entire spacelike hypersurfaces of prescribed Gauss curvature in Minkowski space*, J. Reine Angew. Math. **595** (2006), 167–188.
11. John Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
12. Oliver C. Schnürer, Abderrahim Azouani, Marc Georgi, Juliette Hell, Nihar Jangle, Amos Koeller, Tobias Marxen, Sandra Ritthaler, Mariel Sáez, Felix Schulze, and Brian Smith, *Evolution of convex lens-shaped networks under the curve shortening flow*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 5, 2265–2294.
13. Oliver C. Schnürer and Felix Schulze, *Self-similarly expanding networks to curve shortening flow*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **6** (2007), no. 4, 511–528.
14. Oliver C. Schnürer, *Differentialtopologie*, 2011, Skript zur Vorlesung.
15. Andrejs E. Treibergs, *Entire spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Invent. Math. **66** (1982), no. 1, 39–56.
16. Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Hochschultext.
17. Wikipedia, `http://www.wikipedia.org`.
18. Michel Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

Oliver C. Schnürer, Mathematik, Universität Konstanz
Email address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`