GRAPHISCHER MITTLERER KRÜMMUNGSFLUSS

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Graphischer Mittlerer Krümmungsfluss.

Inhaltsverzeichnis

Date: 22. Februar 2024.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53E10.

Benutzt: Wintersemester 2014/15, Sommersemester 2018 und Wintersemester 2023/24 in Konstanz. Dank für Korrekturen an Maximilian Simon und weitere Hörer dieser Veranstaltung.

In der Vorlesung folgen wir insbesondere [8, 15, 19].

1. Dirichletrandwerte

1.1. **Kurzzeitexistenz.** Wir benutzen hier eine Methode, die einen Existenzsatz für lineare parabolische Gleichungen und den Satz über inverse Funktionen benutzt. Wir verweisen auf [11], siehe auch [9, 18].

Bei unserem Ansatz werden wir Kompatibilitätsbedingungen voraussetzen müssen und folgen für die lineare Theorie [16]. Will man dies nicht, so erhält man Lösungen, die in $\partial\Omega \times \{0\}$ weniger regulär sind, siehe [9].

Wir folgen nun [16].

Definition 1.1.

(i) Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine lokal gleichmäßige Lipschitzdarstellung, falls es $r > 0$ und $K < \infty$ gibt, so dass zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ die Menge $B_r(x) \cap \partial\Omega$ als Graph einer Funktion ω mit $\|\omega\|_{C^{0,1}} \le K$ geschrieben werden kann.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, erlaube eine lokal gleichmäßige Lipschitzdarstellung, sei aber nicht notwendigerweise beschränkt. Sei $0 < T \le \infty$. Dann betrachten wir die Menge $Q_T := \Omega \times [0, T)$.

(iii) Erinnerung: Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$ fixiert. Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beliebig. Definiere

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Definiere damit den üblichen Banachraum $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ aller $C^k(\Omega)$-Funktionen u, die sich samt ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig bis zum Rand fortsetzen lassen, und $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty$ erfüllen, wobei diese Norm durch

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\beta|\le k} \left\|D^\beta u\right\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta u\right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

definiert ist. Wir schreiben auch $C^{k+\alpha}$ statt $C^{k,\alpha}$.

(iv) Definiere $C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ als den Banachraum aller Funktionen, die sich samt ihren Ableitungen der Form $\left(\frac{d}{dt}\right)^r D^\beta u \equiv D_t^r D_x^s u$ mit $r, s \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ und $2r + s \equiv 2r + |\beta| \le k$ stetig auf $\overline{Q}_T$ fortsetzen lassen und deren nachfolgend definierte $\|u\|_{C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)}$-Norm endlich ist. (Ist k gerade, so schreiben wir auch $C^{k,\alpha;\frac{k}{2},\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ für $C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$.)

$$\|u\|_{C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)} := [u]_{C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)} + \sum_{2r+|\beta|\le k} \left\|D_t^r D_x^\beta u\right\|_{C^0(Q_T)},$$

wobei

$$\begin{aligned}[u]_{C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)} = {} & \sum_{2r+s=k} \sup_{t\in[0,T]} [D_t^r D_x^s u(\cdot,t)]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\ & + \sum_{0<k+\alpha-2r-s\equiv\gamma<2} \sup_{x\in\Omega} [D_t^r D_x^s u(x,\cdot)]_{C^{0,\gamma/2}((0,T))}\end{aligned}$$

ist und $D_x^s u$ für eine beliebige räumliche Ableitung der Ordnung s steht.

(v) $O^l\left(\overline{\Omega}\right)$, $l \in \mathbb{N}_{>0}$, bezeichnet den Raum aller stetigen Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ deren Ableitungen mit Ordnung $< l$ sich stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen und deren Ableitungen der Ordnung l in Ω beschränkt sind.

(vi) $O^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right)$ bezeichnet den Raum aller Funktionen $u\colon Q_T \to \mathbb{R}$, bei denen sich u, u_i, $1 \le i \le n$, stetig auf $\overline{Q}_T$ fortsetzen lässt und $\dot{u}, u_{ij}$, $1 \le i,j \le n$ in Q_T beschränkt sind.

(vii) Vektorwertige Funktionenräume sind analog definiert.

(viii) Die Normen von auf $\partial\Omega \times [0,T]$ definierten Funktionen definieren wir bei mindestens gleicher Regularität des Randes als das Infimum über die entsprechenden Fortsetzungen nach $\Omega \times [0,T]$. (Ist $k+\alpha > 1$, so besitzt ein Rand $\partial\Omega$, der eine $C^{k+\alpha}$-Untermannigfaltigkeit ist, eine lokale Graphendarstellung und die obige Definition ist zu einer Definition über eine lokale Darstellung des Randes äquivalent.)

Als Corollar zum Satz von Arzelà-Ascoli erhalten wir

Lemma 1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $T > 0$. Seien $0 \le \beta < \alpha \le 1$ und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \ge l$ sowie $k+\alpha > l+\beta$. Dann sind die folgenden Einbettungen kompakt:*

$$C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^\beta\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^{l,\beta}\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right) \hookrightarrow C^{l+\beta;\frac{l+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right).$$

Beweis. Der Fall $k > l$ ist einfach. Obwohl die Behauptung in allen Fällen aus der Behauptung für die dritte Einbettung folgt, behandeln wir aus didaktischen Gründen nur die erste Einbettung und lassen den Rest als Übungsaufgabe.

Sei $(u_k)_k \subset C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$ beschränkt. Dann konvergiert nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine Teilfolge davon in C^0. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die gesamte Folge konvergiert: $u_k \to u$ in C^0. Es gilt

$$\begin{aligned}&\frac{|(u_k-u)(x)-(u_k-u)(y)|}{|x-y|^\beta}\\ =&\left(\frac{|(u_k-u)(x)-(u_k-u)(y)|}{|x-y|^\alpha}\cdot|(u_k-u)(x)-(u_k-u)(y)|^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist aufgrund der Beschränktheit der Folge in C^α beschränkt und der zweite Faktor konvergiert wegen der C^0-Konvergenz gegen Null. Wir erhalten somit $u_k \to u$ in C^β. □

Definition 1.3. Der lineare Differentialoperator

$$Lu = \dot{u} - a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du$$

heißt gleichmäßig parabolisch, falls es $\nu, \mu > 0$ mit

$$\nu|\xi|^2 \le a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $(x,t) \in Q_T$ gibt.

Bemerkung 1.4 (Kompatibilitätsbedingungen)**.** Wir wollen das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } Q_T,\\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{in } \Omega,\\ u = \Phi & \text{in } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

in $C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ lösen.

(i) Ist $u \in C^0\left(\overline{Q}_T\right)$, so folgt $\varphi = \Phi(\cdot, 0)$ auf $\partial\Omega$, da diese Funktionen auf $\Omega \times \{0\}$ bzw. $\partial\Omega \times [0, T]$ mit u übereinstimmen. Die Bedingung $\varphi = \Phi(\cdot, 0)$ heißt 0-te Kompatibilitätsbedingung.

(ii) Ist $u \in C^{2;1}\left(\overline{Q}_T\right)$, so folgt $\varphi \in C^2$ sowie $\Phi(x, \cdot) \in C^1$. Sind die Koeffizienten von L in $C^0\left(\overline{Q}_T\right)$, so lassen sich alle Summanden von Lu stetig auf $\overline{Q}_T$ fortsetzen. In $\partial\Omega \times \{0\}$ können wir Lu aber auch mit φ und Φ berechnen: Es gilt daher

$$\dot{\Phi} = \dot{u} = a^{ij}u_{ij} - b^i u_i - du + f = a^{ij}\varphi_{ij} - b^i\varphi_i - d\varphi + f.$$

Die erste Gleichheit gilt in $\partial\Omega \times [0, T]$, die zweite aufgrund der Stetigkeit in ganz $\overline{Q}_T$ und die dritte für $t = 0$. Die Übereinstimmung der äußeren beiden Ausdrücke auf $\partial\Omega \times \{0\}$ heißt Kompatibilitätsbedingung der Ordnung eins.

(iii) Gelten $u \in C^{4;2}\left(\overline{Q}_T\right)$, $a^{ij}, b^i, d, f \in C^{2;1}$, so erhalten wir die Kompatibilitätsbedingung der Ordnung zwei wie folgt:

$$\begin{aligned}
\ddot{\Phi} = \ddot{u} &= \frac{d}{dt}\left(a^{ij}u_{ij} - b^i u_i - du + f\right)\\
&= \dot{a}^{ij}u_{ij} + a^{ij}\dot{u}_{ij} - \dot{b}^i u_i - b^i\dot{u}_i - \dot{d}u - d\dot{u} + \dot{f}\\
&= \dot{a}^{ij}u_{ij} + a^{kl}\left(a^{ij}u_{ij} - b^i u_i - du + f\right)_{kl}\\
&\quad - \dot{b}^i u_i - b^k\left(a^{ij}u_{ij} - b^i u_i - du + f\right)_k\\
&\quad - \dot{d}u - d\left(a^{ij}u_{ij} - b^i u_i - du + f\right) + \dot{f}\\
&= \dot{a}^{ij}\varphi_{ij} + a^{kl}\left(a^{ij}\varphi_{ij} - b^i\varphi_i - d\varphi + f\right)_{kl}\\
&\quad - \dot{b}^i\varphi_i - b^k\left(a^{ij}\varphi_{ij} - b^i\varphi_i - d\varphi + f\right)_k\\
&\quad - \dot{d}\varphi - d\left(a^{ij}\varphi_{ij} - b^i\varphi_i - d\varphi + f\right) + \dot{f}.
\end{aligned}$$

(iv) Man erhält Kompatibilitätsbedingungen der Ordnung k, indem man in

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \Phi = \left(\frac{d}{dt}\right)^k u$$

die Zeitableitungen von u sukzessive mit Hilfe der Differentialgleichung $Lu = f$ durch räumliche Ableitungen ersetzt, dann diese durch die entsprechenden Ableitungen von φ ersetzt und damit schließlich eine Bedingung in $\partial\Omega \times \{0\}$ bekommt. Diese Bedingung heißt k-te Kompatibilitätsbedingung.

(v) Wir werden im Existenzsatz genauso viele Kompatibilitätsbedingungen fordern, wie bei der behaupteten Regularität ohnehin gelten müssen.

(vi) Für positive Zeiten gelten den Kompatibilitätsbedingungen entsprechende Bedingungen wegen der Glattheit bzw. Regularität der Lösung automatisch bis zu der der Glattheit entsprechenden Ordnung.

Theorem 1.5 ([16, Theorem IV.5.2, S. 320])**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$. Definiere $Q_T := \Omega \times (0, T)$. Seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$. Seien die Koeffizienten des gleichmäßig parabolischen Operators*

$$L\colon u \mapsto \dot{u} - a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du$$

in $C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$. Sei $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ (im unbeschränkten Fall mit einer lokal gleichmäßigen $C^{k+2,a}$-Darstellung des Randes). Dann gibt es für beliebige Funktionen $f \in C^{k+\alpha;\frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$, beliebige $\varphi \in C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und beliebige $\Phi \in C^{k+2+\alpha;\frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$, die die Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $\left[\frac{k+\alpha}{2}\right] + 1 = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ erfüllen, eine Lösung

$u \in C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ *des Randwertproblems*

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} Lu = f & \textit{in } Q_T, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \textit{auf } \Omega, \\ u = \Phi & \textit{auf } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Ist Ω beschränkt, so ist u unter allen $C^{2;1}(Q_T) \cap C^0\left(\overline{Q}_T\right)$-Lösungen eindeutig bestimmt. Es gilt die Abschätzung

$$\text{(1.2)} \qquad \|u\|_{C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)} \le$$
$$\le c \cdot \left(\|f\|_{C^{k+\alpha; \frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)} + \|\varphi\|_{C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} + \|\Phi\|_{C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)} \right)$$

mit $c = c(\Omega, k, \alpha, L)$.

Beweisidee. Ein mögliches Vorgehen ist: Man zeigt zunächst die a priori Abschätzung für u, benutzt dann, dass das entsprechende Resultat für die Wärmeleitungsgleichung richtig ist und zeigt danach die Existenz mit Hilfe der Stetigkeitsmethode.

Die Eindeutigkeitsaussage ist klar. □

Wir interpretieren dieses Theorem nun funktionalanalytisch.

Bemerkung 1.6. Ab der Injektivität von $\mathcal{L}$ weiter unten benötigen wir die Beschränktheit von Ω. Wir wollen diese daher annehmen.

(i) Die Menge aller

$$(f, \varphi, \Phi) \in C^{k+\alpha; \frac{k+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right) \times C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \times C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\partial\Omega \times [0, T]\right),$$

so dass sich sämtliche Terme mit f in den Kompatibilitätsbedingungen gegenseitig aufheben und die die daher linearen Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $[k/2]+1$ erfüllen sind als endlicher Schnitt von Urbildern der Nullfunktion unter stetigen linearen Funktionen abgeschlossen und daher ein Banachraum. Wir bezeichnen ihn kurzfristig mit CBR (= Banachraum mit Kompatibilitätsbedingungen) ohne dass die Abhängigkeit von k in der Notation auftaucht.

(ii) Der Operator

$$\mathcal{L} \colon C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right) \to CBR,$$
$$u \mapsto \left(Lu, u|_{\Omega \times \{0\}}, u|_{\partial\Omega \times [0,T]}\right)$$

ist linear, stetig, injektiv, wenn wir als Zielraum den Raum $C^{k+\alpha; \frac{k+\alpha}{2}} \times C^{k+2+\alpha} \times C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}$ wählen. Ab jetzt wählen wir als Zielraum CBR. Die Definitionsmenge brauchen wir nicht zu modifizieren, da $(f, \varphi, \Phi) = \mathcal{L}u$ aufgrund der Regularität von u automatisch die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt: $\operatorname{im} \mathcal{L} \subset CBR$. Nach Theorem 1.5 ist $\mathcal{L}$ surjektiv und besitzt eine stetige Inverse. Somit ist $\mathcal{L}$ ein Banachraumisomorphismus.

(iii) Sei $k = 0$. Es gilt $(f, 0, 0) \in CBR$ (mit Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung 1), genau dann wenn $f|_{\partial\Omega \times \{0\}} = 0$ gilt. Wir wollen $\mathcal{L}$ auf das Urbild von

$$W \times \{0\} \times \{0\} \equiv \left\{ f \in C^{\alpha; \frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right) : f|_{\partial\Omega \times \{0\}} = 0 \right\} \times \{0\} \times \{0\}$$

einschränken. Dieses ist durch

$$\left\{ u \in C^{2+\alpha; \frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right) : u|_{\Omega \times \{0\}} = 0,\ u|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0 \text{ und } Lu|_{\partial\Omega \times \{0\}} = 0 \right\} =: V$$

gegeben. Somit erhalten wir, dass auch der Operator

$$\begin{aligned} L\colon V &\to W,\\ u &\mapsto Lu \end{aligned}$$

ein Banachraumisomorphismus ist.

(iv) Auch für den Satz von Arzelà-Ascoli und daraus abgeleitete Normkonvergenz benötigen wir die Beschränktheit von Ω.

Theorem 1.7. (Kurzzeitexistenz für den graphischen mittleren Krümmungsfluss). *Sei $\alpha \in (0,1)$. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $u_0 \in C^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\varphi \in C^{2+\alpha}\left(\partial\Omega \times [0,1]\right)$. Erfüllen u_0, φ die Kompatibilitätsbedingungen (die man im nichtlinearen Fall analog zum linearen Fall erhält) für die folgende Gleichung, dann gibt es zu jedem $\beta \in (0,\alpha)$ ein $T \in (0,1)$ und ein eindeutig bestimmtes*

$$u \in C^{2+\beta;\frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right),$$

das das Rand- und Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \times (0,T),\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega,\\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

löst und die $C^{2+\beta;\frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$-Norm ist durch β und die Daten kontrolliert.

Wir behaupten hier nicht, T nach unten durch eine positive Konstante kontrollieren zu können.

Beweis. Beim Beweis der Existenzaussage folgen wir [10], siehe auch [11, Theorem 2.5.7].

(i) Wir definieren

$$\begin{aligned} F\left(D^2u, Du\right) &:= \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)\\ &= \Delta u - \frac{u^i u^j u_{ij}}{1+|Du|^2}, \end{aligned}$$

also

$$F(r,p) := \left(\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{1+|p|^2}\right) r_{ij}.$$

(ii) Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip und gilt bereits für $C^{2;1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left(\overline{\Omega} \times [0,T)\right)$-Funktionen: Seien u_1, u_2 zwei Lösungen, so gilt für $w := u_1 - u_2$ die Rand- und Anfangsbedingung $w = 0$ und die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{u}_1 - \dot{u}_2\\ &= F\left(D^2u_1, Du_1\right) - F\left(D^2u_2, Du_2\right)\\ &= \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau} F\left(\tau D^2u_1 + (1-\tau)D^2u_2, \tau Du_1 + (1-\tau)Du_2\right)\, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 F^{ij}(\ldots)\,d\tau \cdot (u_1-u_2)_{ij} + \int_0^1 F_{p_i}(\ldots)\,d\tau \cdot (u_1-u_2)_i \\
&\equiv a^{ij} w_{ij} + b^i w_i.
\end{aligned}
$$

Es gilt $a^{ij} \succ 0$. Somit liefert das Maximumprinzip die Behauptung.

(iii) Wir kommen nun zum Existenzbeweis: Betrachte das lineare parabolische Problem

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{u}} - \Delta \tilde{u} = F\left(D^2 u_0, Du_0\right) - \Delta u_0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\
\tilde{u}(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega, \\
\tilde{u} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \times [0,T].
\end{cases}
$$

Da u_0 und φ die Kompatibilitätsbedingungen nullter und erster Ordnung für den mittleren Krümmungsfluss erfüllen, also $u_0 = \varphi$ und $F\left(D^2 u_0, Du_0\right) = \dot{\varphi}$ auf $\partial\Omega \times \{0\}$, sind sie auch hier erfüllt. Somit besitzt dieses lineare Anfangswertproblem eine Lösung $\tilde{u} \in C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right)$. Definiere

$$
\tilde{f} := \dot{\tilde{u}} - F\left(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}\right).
$$

Diese Definition ist so gemacht, dass $\tilde{u}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit entsprechend definierter rechter Seite $\tilde{f}$, also $\dot{\tilde{u}} - F\left(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}\right) = \tilde{f}$, ist. An dieser Stelle kann man das betrachtete Zeitintervall einschränken, so dass $\tilde{u}$ dort nahe bei u_0 bleibt (was bei einem allgemeineren F nötig ist) oder man nimmt größere Gradienten in Kauf (was wir machen). Es gelten $\tilde{f} \in C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right)$ und $\tilde{f}(\cdot,0) = 0$ auf Ω.

(iv) Sei nun $\beta \in (0,\alpha)$ beliebig. Wir betrachten hier einen etwas kleineren Hölderexponenten um später die Kompaktheit $C^\alpha \Subset C^\beta$ ausnutzen zu können.

Definiere

$$
V := \left\{\eta \in C^{2+\beta;\frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{Q}_1\right) : \eta|_{\Omega\times\{0\}} = 0 \text{ und } \eta|_{\partial\Omega\times[0,1]} = 0\right\}
$$

mit der $C^{2+\beta;\frac{2+\beta}{2}}$-Norm. Da die Randbedingungen abgeschlossene Teilmengen definieren, ist V ein Banachraum. Definiere weiterhin den Operator Φ durch

$$
\begin{aligned}
\Phi\colon V &\to \left\{f \in C^{\beta;\frac{\beta}{2}}\left(\overline{Q}_1\right) : f|_{\partial\Omega\times\{0\}} = 0\right\} =: W, \\
\eta &\mapsto \frac{d}{dt}(\tilde{u}+\eta) - F\left(D^2(\tilde{u}+\eta), D(\tilde{u}+\eta)\right).
\end{aligned}
$$

Nach Definition von V gilt $\Phi(\eta) \in W$ für alle $\eta \in V$, d. h. insbesondere ist die Bedingung $\Phi(\eta)|_{\partial\Omega\times\{0\}} = 0$ erfüllt. (Bei allgemeineren Funktionen F müsste man hier u auf eine Umgebung von 0 einschränken, so dass F wie oben wohldefiniert ist.) Wir wollen den Satz von der inversen Funktion anwenden. Nach Lemma 1.8 ist $\Phi \in C^1$ und es gilt

$$
D\Phi(0)\langle\eta\rangle = \frac{d}{dt}\eta - \underbrace{\left(\delta^{ij} - \frac{\tilde{u}^i\tilde{u}^j}{1+|D\tilde{u}|^2}\right)}_{=F_{r_{ij}}(D^2\tilde{u},D\tilde{u})}\eta_{ij} - F_{p_i}\left(D^2\tilde{u}, D\tilde{u}\right)\eta_i.
$$

Beachte, dass Lemma 1.8 auch für die Einschränkungen auf V bzw. W gilt. Nach Bemerkung 1.6 ist $D\Phi(0)\colon V \to W$ ein Banachraumisomorphismus. Somit ist Φ lokal um 0 ein Diffeomorphismus. Insbesondere gibt es also zu $f \in W$ mit hinreichend kleinem $\left\|f - \tilde{f}\right\|_W \equiv \|f - \Phi(0)\|_W$ ein $\eta \in V$ mit $\Phi(\eta) = f$.

Sei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $0 \le \rho \le 1$, $\rho(t) \equiv 0$ für $t \le 1$ und $\rho(t) = 1$ für $t \ge 2$. Setze $\rho_\varepsilon(t) := \rho(t/\varepsilon)$ und $f_\varepsilon(x,t) := \tilde f(x,t) \cdot \rho_\varepsilon(t)$. Dann gilt $\left\|\tilde f - f_\varepsilon\right\|_W \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0$: Nach Lemma 1.9 sind die $C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}$-Normen gleichmäßig beschränkt, es gilt $\tilde f - f_\varepsilon = \tilde f(1-\rho_\varepsilon) \to 0$ in C^0, da $\tilde f(\cdot,0) = 0$ ist, und somit folgt die Behauptung, da die Einbettungen $C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}} \hookrightarrow C^{\beta;\frac{\beta}{2}} \hookrightarrow C^0$ nach Arzelà-Ascoli kompakt sind, aus der Abschätzung

$$\left\|\tilde f - f_\varepsilon\right\|_{C^{\beta;\frac{\beta}{2}}} \le \delta \cdot \underbrace{\left\|\tilde f - f_\varepsilon\right\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}}_{\le c} + c(\delta) \cdot \underbrace{\left\|\tilde f - f_\varepsilon\right\|_{C^0}}_{\to 0}.$$

Fixiere $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass ein $\eta \in V$ mit $\Phi(\eta) = f_\varepsilon$ existiert. Definiere $u := (\tilde u + \eta)|_{\overline\Omega \times [0,\varepsilon]}$. Dann gilt $u \in C^{2+\beta;\frac{2+\beta}{2}}\left(\overline\Omega \times [0,\varepsilon]\right)$ und u löst

$$\begin{cases} \dot u - F(D^2u, Du) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\varepsilon), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon]. \end{cases}$$

Dies beweist Theorem 1.7 mit $T = \varepsilon$. □

Lemma 1.8. *Seien $\alpha, \beta \in (0,1)$. Sei $F \in C^{2;\beta}\left(\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n\right)$ (mehr Argumente sind mit einem nahezu identischen Beweis ebenfalls möglich; weiterhin sind $\beta = 1$ sowie $F \in C^3$ ebenfalls zugelassen). Definiere*

$$\begin{aligned} \Phi\colon C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right) &\to C^{\alpha\beta;\frac{\alpha\beta}{2}}\left(\overline{Q}_1\right), \\ u &\mapsto -\dot u + F\left(D^2u, Du\right). \end{aligned}$$

Dann ist $\Phi \in C^1$ und es gilt

$$D\Phi(u)\langle\eta\rangle = -\dot\eta + F_{r_{ij}}\left(D^2u, Du\right)\eta_{ij} + F_{p_i}\left(D^2u, Du\right)\eta_i.$$

Beweis. Es gilt für festes (x,t)

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{d\varepsilon}\Phi(u+\varepsilon\eta)\right|_{\varepsilon=0} &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\left(-\frac{d}{dt}(u+\varepsilon\eta) + F\left(D^2(u+\varepsilon\eta), D(u+\varepsilon\eta)\right)\right)\right|_{\varepsilon=0} \\ &= -\frac{d}{dt}\eta + F_{r_{ij}}\left(D^2u, Du\right)\eta_{ij} + F_{p_i}\left(D^2u, Du\right)\eta_i. \end{aligned}$$

Mit dieser Rechnung erhalten wir, falls diese existiert, die Richtungsableitung von Φ. Daher kommt nur der angegebenen Ausdruck als Ableitung von Φ in Frage. Aufgrund der Linearität ist die Aussage über die Zeitableitung klar. Da bis zu zweimaliges Ableiten als Abbildung $C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}} \to C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}$ linear und stetig ist, dürfen wir annehmen, dass Φ die Form

$$\begin{aligned} \Phi\colon C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right) &\to C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_1\right), \\ u &\mapsto \Phi(u) = ((x,t) \mapsto F(u(x,t))) \end{aligned}$$

hat, wobei u vektorwertig ist, was wir aber in der Notation unterdrücken; das neue u entspricht also (D^2u, Du). Formal bekommen wir dies, indem wir Φ als Verknüpfung mit dem Operator

$$\mathcal{D} : C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}} \to C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}},$$

$$u \mapsto (u, Du, D^2u, \dot{u})$$

schreiben: $\Phi(u)(x,t) = F(\pi_3(\mathcal{D}(u))(x,t), \pi_2(\mathcal{D}(u))(x,t))$.

Wir wollen zunächst zeigen, dass

$$\Phi(u) = \Phi(v) + DF(v)\langle u - v\rangle + o(\|u - v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}})$$

in $C^{\alpha\beta;\frac{\alpha\beta}{2}}$ gilt. Wir setzen

$$L(x,t) := F(u(x,t)) - F(v(x,t)) - DF(v(x,t))\langle u(x,t) - v(x,t)\rangle$$

und wollen also

$$\sup_{x,y,t} \frac{|L(x,t) - L(y,t)|}{|x-y|^{\alpha\beta}} = o(\|u - v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}), \tag{1.3}$$

$$\sup_{x,t_1,t_2} \frac{|L(x,t_1) - L(x,t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}}} = o(\|u - v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}) \tag{1.4}$$

und

$$\sup_{x,t} |L(x,t)| = o(\|u - v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}) \tag{1.5}$$

zeigen. Dabei dürfen und werden wir stets $\|u\|_{C^{\alpha\beta;\frac{\alpha\beta}{2}}} + \|v\|_{C^{\alpha\beta;\frac{\alpha\beta}{2}}} \le C$ annehmen.

Zunächst zu (1.3)**:** Da F zweimal stetig differenzierbar ist, liefert die Taylorapproximation mit Restglied in ausgewählter Form

$$\begin{aligned} F(u(x,t)) = {} & F(v(x,t)) + DF(v(x,t))\langle u(x,t) - v(x,t)\rangle \\ & + \int_0^1 (1-\zeta) D^2F(v(x,t) + \zeta(u(x,t) - v(x,t)))\, d\zeta \\ & \cdot \langle u(x,t) - v(x,t), u(x,t) - v(x,t)\rangle. \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber hier ein paar Zeilen Beweis dazu; am Ende ersetze man x durch $u(x,t)$ und y durch $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-\zeta) D^2F(y + \zeta(x-y))\, d\zeta \langle x-y, x-y\rangle \\ = {} & \int_0^1 (1-\zeta) \frac{d}{d\zeta} DF(y + \zeta(x-y))\, d\zeta \langle x - y\rangle \\ = {} & -\int_0^1 \frac{d}{d\zeta}(1-\zeta) DF(y + \zeta(x-y))\, d\zeta \langle x - y\rangle \\ & + (1-\zeta) DF(y + \zeta(x-y))\, d\zeta \langle x-y\rangle \Big|_0^1 \\ = {} & \int_0^1 DF(y + \zeta(x-y))\, d\zeta \langle x-y\rangle \quad - 1 \cdot DF(y)\langle x-y\rangle \\ = {} & \int_0^1 \frac{d}{d\zeta} F(y + \zeta(x-y))\, d\zeta - DF(y)\langle x-y\rangle \end{aligned}$$

$$= F(x) - F(y) - DF(y)\langle x-y\rangle.$$

Weiterhin folgt wegen $F \in C^{2,\beta}$

$$\left|D^2F(a) - D^2F(b)\right| \le C \cdot |a-b|^\beta.$$

Wir definieren die symmetrische Bilinearform

$$B(x,t) := D^2F(v(x,t) + \zeta(u(x,t) - v(x,t)))\langle \cdot,\cdot\rangle$$

und erhalten für $\zeta \in [0,1]$ in Abhängigkeit von den Höldernormen von u und v

$$\begin{aligned}
|B(x,t) - B(y,t)| &\le C \cdot |\zeta(u(x,t) - u(y,t)) + (1-\zeta)(v(x,t) - v(y,t))|^\beta \\
&\le C \cdot |u(x,t) - u(y,t)|^\beta + C \cdot |v(x,t) - v(y,t)|^\beta \\
&\le C \cdot |x-y|^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&|L(x,t) - L(y,t)| \\
&= \Bigg| \int_0^1 (1-\zeta) D^2F(v + \zeta(u-v))\, d\zeta\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(x,t)} \\
&\qquad - \int_0^1 (1-\zeta) D^2F(v + \zeta(u-v))\, d\zeta\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(y,t)} \Bigg| \\
&= \left| \int_0^1 (1-\zeta) B(x,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(x,t)} - (1-\zeta) B(y,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(y,t)}\, d\zeta \right| \\
&\le \sup_{\zeta\in[0,1]} \left| B(x,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(x,t)} - B(y,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(y,t)} \right| \\
&\le \sup_{\zeta\in[0,1]} \left| B(x,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(x,t)} - B(x,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(y,t)} \right| \\
&\quad + \sup_{\zeta\in[0,1]} \left| B(x,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(y,t)} - B(y,t)\, \langle u-v, u-v\rangle\big|_{(y,t)} \right| \\
&\le \sup_{\zeta\in[0,1]} \left| B(x,t)\langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t)} - B(x,t)\langle u-v, u-v\rangle|_{(y,t)} \right| \\
&\quad + c \cdot |x-y|^{\alpha\beta} \cdot |u(y,t) - v(y,t)|^2 \\
&\equiv I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$I_2 \le c \cdot |x-y|^\alpha \cdot \|u-v\|^2_{C^0} \le c \cdot |x-y|^{\alpha\beta} \cdot \|u-v\|^2_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}$$

und damit für diesen Teil eine Abschätzung wie wir sie für (1.3) benötigen. Weiterhin gilt aufgrund der Symmetrie von B wegen der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}
I_1 &= |B(x,t)\langle (u-v)(x,t) + (u-v)(y,t), (u-v)(x,t) - (u-v)(y,t)\rangle| \\
&\le c \cdot \left(|(u-v)(x,t)| + |(u-v)(y,t)|\right) \cdot |(u-v)(x,t) - (u-v)(y,t)| \\
&\le c \cdot \|u-v\|_{C^0} \cdot \|u-v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \cdot |x-y|^\alpha \\
&\le c \cdot \|u-v\|_{C^0} \cdot \|u-v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \cdot |x-y|^{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

da $\beta \le 1$ und $|x-y| \le 2$ gelten. Somit erhalten wir die gewünschte Abschätzung für (1.3).

Zur Abschätzung für (1.4)**:** Als Vorbereitung erhalten wir analog zu oben, wieder unter Benutzung der Hölderstetigkeit von u und v, für die Differenz $B(x,t_1) - B(x,t_2)$

$$\begin{aligned}|B(x,t_1) - B(x,t_2)| &\leq C \cdot |\zeta(u(x,t_1) - u(x,t_2)) + (1-\zeta)(v(x,t_1) - v(x,t_2))|^\beta \\ &\leq C \cdot |u(x,t_1) - u(x,t_2)|^\beta + C \cdot |v(x,t_1) - v(x,t_2)|^\beta \\ &\leq C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich ähnlich wie oben

$$\begin{aligned}&|L(x,t_1) - L(x,t_2)| \\ &= \left| \int_0^1 (1-\zeta) B(x,t_1) \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t_1)} - \int_0^1 (1-\zeta) B(x,t_2) \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t_2)} \right| \\ &\leq \sup_{\zeta\in[0,1]} \Big| B(x,t_1) \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t_1)} - B(x,t_1) \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t_2)} \Big| \\ &\quad + \sup_{\zeta\in[0,1]} \Big| B(x,t_1) \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t_2)} - B(x,t_2) \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t_2)} \Big| \\ &\leq C \cdot \big| (u-v)^2(x,t_1) - (u-v)^2(x,t_2) \big| + C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}} \cdot |u-v|^2(x,t_2) \\ &\leq C \cdot |(u-v)(x,t_1) - (u-v)(x,t_2)| \cdot |(u-v)(x,t_1) + (u-v)(x,t_2)| \\ &\quad + C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}} \cdot \|u-v\|^2_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \|u-v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \cdot \|u-v\|_{C^0} + C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}} \cdot \|u-v\|^2_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}} \cdot \|u-v\|^2_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}\end{aligned}$$

wie behauptet.

Zur Abschätzung für (1.5)**:** Hier gilt

$$\begin{aligned}|L(x,t)| &= \left| \int_0^1 (1-\zeta) D^2F(v(x,t) + \zeta(u(x,t) - v(x,t))) \, d\zeta \, \langle u-v, u-v\rangle|_{(x,t)} \right| \\ &\leq C \cdot \|u-v\|^2_{C^0}\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.

Damit hat die Ableitung von Φ die angegebene Form. Wir haben also die Fréchet-Differenzierbarkeit von Φ gezeigt.

Stetigkeit der Ableitung: Es fehlt noch der Nachweis, dass die Ableitung $D\Phi(x)\langle\cdot\rangle$ stetig von u abhängt. Da dies für den Term mit der Zeitableitung offensichtlich ist, betrachten wir wieder Φ wie oben. Wir wollen also

$$\|D\Phi(u) - D\Phi(v)\|_{L\left(C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}; C^{\alpha\beta;\frac{\alpha\beta}{2}}\right)} \to 0 \quad \text{für } (u-v) \to 0 \text{ in } C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}$$

zeigen. Wir wählen dazu $\eta \in C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}$ und beweisen dafür

$$\|D\Phi(u)\langle\eta\rangle - D\Phi(v)\langle\eta\rangle\|_{C^{\alpha\beta;\frac{\alpha\beta}{2}}} \leq C \cdot \|u-v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \cdot \|\eta\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}},$$

wobei

$$(D\Phi(u)\langle\eta\rangle)(x,t) = DF(u(x,t))\langle\eta(x,t)\rangle$$

ist. Wiederum sind die drei Bestandteile der Norm auf der linken Seite abzuschätzen.

Räumliche Hölderhalbnorm: Für diese Rechnungen unterdrücken wir das ohnehin nur konstante Argument t und nutzen die Notation wie für rein räumliche Hölderräume. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&[D\Phi(u)\langle\eta\rangle - D\Phi(v)\langle\eta\rangle]_{C^{\alpha\beta}} \\
&= [(DF(u) - DF(v))\langle\eta\rangle]_{C^{\alpha\beta}} \\
&\leq [DF(u) - DF(v)]_{C^{\alpha\beta}} \cdot \|\eta\|_{C^0} + \|DF(u) - DF(v)\|_{C^0} \cdot [\eta]_{C^{\alpha\beta}}.
\end{aligned}
$$

Bei der ersten Hölderhalbnorm auf der rechten Seite erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&|(DF(u) - DF(v))(x) - (DF(u) - DF(v))(y)| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\zeta} DF(\zeta u(x) + (1-\zeta)v(x))\, d\zeta - \int_0^1 \frac{d}{d\zeta} DF(\zeta u(y) + (1-\zeta)v(y))\, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_0^1 D^2F(\zeta u(x) + (1-\zeta)v(x))\, d\zeta \langle u(x) - v(x), \cdot\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^1 D^2F(\zeta u(y) + (1-\zeta)v(y))\, d\zeta \langle u(y) - v(y), \cdot\rangle \right| \\
&= \left| \int_0^1 B(x)\, d\zeta \langle u(x) - v(x), \cdot\rangle - \int_0^1 B(y)\, d\zeta \langle u(y) - v(y), \cdot\rangle \right| \\
&\leq \sup_{\zeta\in[0,1]} |B(x)\langle u(x) - v(x), \cdot\rangle - B(x)\langle u(y) - v(y), \cdot\rangle| \\
&\quad + \sup_{\zeta\in[0,1]} |B(x)\langle u(y) - v(y), \cdot\rangle - B(y)\langle u(y) - v(y), \cdot\rangle| \\
&\leq C \cdot |(u-v)(x) - (u-v)(y)| + C \cdot |x-y|^{\alpha\beta} \cdot |(u-v)(y)| \\
&\leq C \cdot \|u-v\|_{C^\alpha} \cdot |x-y|^{\alpha} + C \cdot |x-y|^{\alpha\beta} \cdot \|u-v\|_{C^0} \\
&\leq C \cdot \|u-v\|_{C^\alpha} \cdot |x-y|^{\alpha\beta},
\end{aligned}
$$

da $\beta \leq 1$ und $|x-y| \leq 2$ gelten. Nun behandeln wir die Supremumsnorm auf der rechten Seite. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&|DF(u)(x) - DF(v)(x)| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\zeta} DF(\zeta u(x) + (1-\zeta)v(x))\, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_0^1 D^2F(\zeta u(x) + (1-\zeta)v(x))\, d\zeta \langle u(x) - v(x), \cdot\rangle \right| \\
&\leq C \cdot \|u-v\|_{C^0} \\
&\leq C \cdot \|u-v\|_{C^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Zeitliche Hölderhalbnorm: Hier unterdrücken wir das konstante Argument x und nutzen die Notation für Hölderräume in einer Variablen. Analog zur räumlichen Hölderhalbnorm erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} &[D\Phi(u)\langle\eta\rangle - D\Phi(v)\langle\eta\rangle]_{C^{\frac{\alpha\beta}{2}}} \\ = &[(DF(u) - DF(v))\langle\eta\rangle]_{C^{\frac{\alpha\beta}{2}}} \\ \leq &[DF(u) - DF(v)]_{C^{\frac{\alpha\beta}{2}}} \cdot \|\eta\|_{C^0} + \|DF(u) - DF(v)\|_{C^0} \cdot [\eta]_{C^{\frac{\alpha\beta}{2}}}. \end{aligned}$$

Die Rechnungen für den ersten zeitlichen Hölderquotienten sind anfangs fast identisch zu denen für den ersten räumlichen Hölderquotienten oben. Daher kürzen wir die Rechnung etwas ab und erhalten

$$\begin{aligned} &|(DF(u) - DF(v))(t_1) - (DF(u) - DF(v))(t_2)| \\ \leq &\ldots \leq C \cdot |(u-v)(t_1) - (u-v)(t_2)| + C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}} \cdot |(u-v)(t_2)| \\ \leq &C \cdot \|u-v\|_{C^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} + C \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha\beta}{2}} \cdot \|u-v\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Noch weniger unterscheiden sich die Abschätzungen für $\|DF(u) - DF(v)\|_{C^0}$, nämlich nur beim letzten „$\leq$". Daher verzichten wir hier vollständig auf Details.

Supremumsnorm: Diesen Normbestandteil können wir nun auch noch leicht beschränken. Es gilt

$$\begin{aligned} &|D\Phi(u)\langle\eta\rangle - D\Phi(v)\langle\eta\rangle| \\ \leq &\sup_{(x,t)\in Q_1} |D\Phi(u) - D\Phi(v)| \cdot \|\eta\|_{C^0} \\ \leq &\sup_{(x,t)} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\tau u(x,t) + (1-\tau)v(x,t))\, d\tau \right| \cdot \|\eta\|_{C^0} \\ \leq &\sup_{(x,t)} \sup_{\zeta} \left|D^2 F\right| \cdot \sup_{(x,t)} |u(x,t) - v(x,t)| \cdot \|\eta\|_{C^0} \\ \leq &C \cdot \|u-v\|_{C^0} \cdot \|\eta\|_{C^0} \\ \leq &C \cdot \|u-v\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}} \cdot \|\eta\|_{C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Somit folgt die behauptete Stetigkeit und damit insgesamt $\Phi \in C^1$. $\square$

Lemma 1.9. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ und $Q_T := \Omega \times (0,T)$. Sei $f \in C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ mit $f(\cdot, 0) \equiv 0$. Sei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho(t) \equiv 0$ für $t \leq 1$ und $\rho(t) = 1$ für $t \geq 2$. Setze $\rho_\varepsilon(t) := \rho(t/\varepsilon)$ und $f_\varepsilon(x,t) := f(x,t) \cdot \rho_\varepsilon(t)$ für $0 < \varepsilon \leq 1$. Dann ist $f_\varepsilon \in C^{\alpha;\frac{\alpha}{2}}\left(\overline{Q}_T\right)$ mit gleichmäßigen Normabschätzungen.*

Beweis. Wir folgen [11, Lemma 2.5.8]. Es genügt, die Hölderhalbnorm bezüglich t zu beschränken. Sei $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. Wir wollen also

$$|f_\varepsilon(t_1) - f_\varepsilon(t_2)| \leq c \cdot |t_1 - t_2|^\gamma$$

mit einer gleichmäßigen Konstanten c zeigen, wobei wir die x-Abhängigkeit unterdrückt haben. Gelte ohne Einschränkung $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Wir schreiben die Differenz als

$$f_\varepsilon(t_1) - f_\varepsilon(t_2) = (f(t_1) - f(t_2))\rho_\varepsilon(t_2) + f(t_1)(\rho_\varepsilon(t_1) - \rho_\varepsilon(t_2)).$$

Aufgrund der Hölderstetigkeit von f ist der erste Term unproblematisch. Für den zweiten Term nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $t_1 \leq 2\varepsilon$ gilt, da dieser Term sonst verschwindet. Wir betrachten nun zwei Fälle:

(i) $t_2 \leq 3\varepsilon$: Wir benutzen $f(0) = 0$, die Hölderstetigkeit von f, die Lipschitzstetigkeit von ρ bzw. ρ_ε und erhalten

$$\begin{aligned}|f(t_1)(\rho_\varepsilon(t_1) - \rho_\varepsilon(t_2))| &= |f(t_1) - f(0)| \cdot |\rho_\varepsilon(t_1) - \rho_\varepsilon(t_2)| \\ &\leq c \cdot t_1^\gamma \cdot \varepsilon^{-1} \cdot |t_1 - t_2| \\ &\leq c \cdot t_2^\gamma \cdot \varepsilon^{-1} \cdot |t_1 - t_2|^{1-\gamma} \cdot |t_1 - t_2|^\gamma \\ &\leq c \cdot t_2^\gamma \cdot \varepsilon^{-1} \cdot t_2^{1-\gamma} \cdot |t_1 - t_2|^\gamma \\ &\leq c \cdot |t_1 - t_2|^\gamma.\end{aligned}$$

(ii) $t_2 \geq 3\varepsilon$: Es folgt $t_2 - t_1 \geq \varepsilon$. Nun gelten $t_1 \leq 2\varepsilon$, $\varepsilon \leq t_2 - t_1$ sowie $|\rho_\varepsilon(t_1) - \rho_\varepsilon(t_2)| \leq 1$ und wir erhalten

$$|f(t_1)(\rho_\varepsilon(t_1) - \rho_\varepsilon(t_2))| \leq |f(t_1) - f(0)| \cdot 1 \leq c \cdot t_1^\gamma \leq c \cdot |t_1 - t_2|^\gamma. \qquad \square$$

Theorem 1.10 (Höhere Regularität)**.** *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 1.7 und sei auch T wie dort. Sind*

$$u_0 \in C^{k+2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), \quad \varphi \in C^{k+2+\alpha; \frac{k+2+\alpha}{2}}\left(\partial\Omega \times [0, T]\right),$$

$\partial\Omega \in C^{k+2+\alpha}$ und erfüllen u_0, φ die Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$, so gilt für die Lösung u aus Theorem 1.7

$$u \in C^{k+2+\beta; \frac{k+2+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right)$$

mit $\beta \in (0, \alpha)$ für $k = 0$ und $\beta \in (0, \alpha]$ für $k \geq 1$. Die $C^{k+2+\beta; \frac{k+2+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right)$-Norm von u ist (in nichtlinearer Weise) durch β und die angegebenen Daten abgeschätzt.

Der folgende Beweis funktioniert spezifisch für den mittleren Krümmungsfluss und ist dadurch besonders kurz. Eine gute Referenz für höhere Regularität allgemeiner nichtlinearer Gleichungen in der „Ecke“ $\partial\Omega \times \{0\}$ habe ich derzeit nicht. Im allgemeinen Fall braucht man $k \geq 2$ für die letzte Aussage. In diesem Fall empfehle ich folgendes Vorgehen (ohne die Details geprüft zu haben):

- Biege den Rand gerade und führe das Problem durch Subtraktion der Randwerte auf „Nullrandwerte“ zurück.
- Spiegle und benutze Kompatibilitätsbedingungen für den Nachweis der Regularität der Spiegelung.
- Lokalisiere mit Hilfe einer Abschneidefunktion und betrachte Differenzenquotienten wie im inneren Fall [11, Theorem 2.5.9].

Beweis.

(i) Den Fall $k = 0$ haben wir bereits in Theorem 1.7 behandelt.

(ii) Wir betrachten den graphischen mittleren Krümmungsfluss als Gleichung der Form

$$\dot{u} = a^{ij} u_{ij} \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

mit $a^{ij} = \delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}$.

(iii) Ist $u \in C^{2+\beta; \frac{2+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right)$, so folgt direkt aus der Definition der Normen $Du \in C^{1+\beta; \frac{1+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right)$. Dies ist auch bei Multiplikation, Summe und Inversenbildung wie in a^{ij} von solchen Funktionen erhalten. Somit ist

$$a^{ij} \in C^{1+\beta; \frac{1+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right).$$

Da $\dot{u} = a^{ij} u_{ij}$ eine lineare Differentialgleichung ist, können wir die lineare Regularitätstheorie für Anfangs- und Dirichlet Randwertprobleme mit Kompatibilitätsbedingungen, die erhalten bleiben, auch wenn wir a^{ij} schreiben, aus Theorem 1.5 anwenden und erhalten eine $C^{3+\beta;\frac{3+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$-Lösung, die aufgrund der Eindeutigkeit mit u übereinstimmt. Da $C^{3+\beta;\frac{3+\beta}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ stetig nach $C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ einbettet, ist ab jetzt auch $\beta = \alpha$ erlaubt.

(iv) Der letzte Schritt nochmals mit $\alpha = \beta$ angewandt liefert nun

$$u \in C^{3+\alpha;\frac{3+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right).$$

(v) Nun erhalten wir $a^{ij} \in C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}$ (oder mit β) und mit Theorem 1.5 $u \in C^{4+\alpha;\frac{4+\alpha}{2}}$.

(vi) Analog folgen $a^{ij} \in C^{3+\alpha;\frac{3+\alpha}{2}}$ und $u \in C^{5+\alpha;\frac{5+\alpha}{2}}$. Dies können wir solange fortsetzen, wie es aufgrund der angenommenen Regularität von u_0, φ und Ω und aufgrund der angenommenen Kompatibilitätsbedingungen möglich ist.

(vii) Dieses Vorgehen wird auch als "bootstrapping argument" bezeichnet, auf Deutsch aber nicht als Schuhbinde- oder Münchhausenargument. $\square$

Korollar 1.11. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt $\partial\Omega \in C^\infty$, $u_0 \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,1])$. Erfüllen u_0 und φ Kompatibilitätsbedingungen beliebiger Ordnung, so gibt es ein $T \in (0,1]$, so dass das Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x,t) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ besitzt. Dabei sind die C^k-Normen von u durch die Daten kontrolliert.

Hier bezeichnet $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ keinen Banachraum, sondern $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Benutze Theorem 1.10. Beachte dabei, dass sich das Zeitintervall für Lösungen mit höherer Regularität nicht verringert. $\square$

1.2. **Supremums- und Gradientenschranken.** Wir leiten nun a priori Schranken her, mit deren Hilfe wir Langzeitexistenz zeigen. Dabei beschänken wir uns auf den Fall von zeitunabhängigen Randwerten φ.

Lemma 1.12 (C^0-Abschätzungen)**.** *Sei $u \in C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis. Wir vergleichen u mit konstanten Lösungen $\pm\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Das Maximumprinzip liefert dann die Behauptung. $\square$

Theorem 1.13 (C^1-Abschätzungen am Rand)**.** *Sei $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ und sei weiterhin $u \in C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \textit{in } \Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \textit{auf } \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x) & \textit{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Sei die mittlere Krümmung des Randes nichtnegativ. Dann gilt

$$|Du| \le c \quad \textit{auf } \partial\Omega \times [0,T]$$

mit einer nur von den Daten abhängigen Konstanten c.

Beweis. Wir konstruieren mit Hilfe der Distanzfunktion Barrieren.

(i) Sei $d\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die in Ω positive Distanzfunktion zu $\partial\Omega$. Wir haben in der Differentialgeometrie Vorlesung, siehe auch [22, Korollar 3.27], gesehen, dass es bei nichtnegativer mittlerer Krümmung des Randes ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega\colon d(x) < \varepsilon\}$$

$d \in C^2$ ist und dort $-\Delta d \ge 0$ gilt.

Weiterhin sei daran erinnert, dass aus $|Dd| = 1$ auch $d_{ij}d^j = 0$ folgt.

(ii) Für alle die [22] nicht kennen, geben wir hier einen davon unabhängigen Beweis im Falle $\Omega = B_R(0)$, dem in dieser Vorlesung wichtigsten Fall. Hier gilt

$$\begin{aligned} d &= R - |x|, \\ d_i &= -\frac{x_i}{|x|}, \\ d_{ij} &= -\frac{1}{|x|}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2}\right), \\ \Delta d &= -\frac{n-1}{|x|}. \end{aligned}$$

(iii) Betrachte eine $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$-Fortsetzung von $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ mit kontrollierter Norm, die wir wieder mit φ bezeichnen.

Wir wollen nun zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine Barriere der Form

$$w^\pm(x) = \varphi(x) \pm \psi(d(x))$$

in Ω_ε gibt, so dass $\psi(0) = 0$, $\psi' \ge \|Du_0\|_{L^\infty} + \|D\varphi\|_{L^\infty}$ in $[0,\varepsilon]$, $\psi(\varepsilon) \ge 2(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)})$ und für $w \equiv w^+$

$$\dot{w} - \sqrt{1+|Dw|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Dw}{\sqrt{1+|Dw|^2}}\right) \ge 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon$$

sowie die umgekehrte Ungleichung für w^- gelten. Dies sind statische Barrieren und dieselbe Konstruktion wie für Minimalflächen in der Variationsrechnung. Dann wirken $w^\pm$ zusammen mit den Barrieren aus den C^0-Abschätzungen als Barrieren und wir erhalten

$$w^-(x) \le u(x,t) \le w^+(x) \quad \text{für } (x,t) \in \overline{\Omega}_\varepsilon \times [0,T]$$

mit Gleichheit für $x \in \partial\Omega$. Somit folgt

$$\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \le \|D\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \psi'(0).$$

Daher genügt es, die Existenz von solchen Barrieren zu zeigen.

(iv) Wir machen den Ansatz

$$\psi(d) = \delta \log(1+\sigma d)$$

mit noch zu wählenden Konstanten $\sigma \gg 1$ sowie $1 \geq \delta > 0$. Es gelten

$$\begin{aligned}
w =& \varphi + \psi(d),\\
w_i =& \varphi_i + \psi' d_i,\\
w_{ij} =& \varphi_{ij} + \psi' d_{ij} + \psi'' d_i d_j,\\
0 \overset{!}{\leq} & - \left(\delta^{ij} - \frac{w^i w^j}{1+|Dw|^2}\right) w_{ij}\\
=& - \Delta\varphi \underbrace{-\psi'\Delta d}_{\geq 0} - \psi'' + \frac{w^i w^j}{1+|Dw|^2}\varphi_{ij} + \psi' \frac{w^i w^j}{1+|Dw|^2} d_{ij} + \psi'' \frac{\langle Dw, Dd\rangle^2}{1+|Dw|^2}
\end{aligned}$$

und wegen $d_{ij}d^i = 0$

$$\geq - c\left(D^2\varphi\right) - \psi'' + \underbrace{\psi' \frac{\varphi^i\varphi^j}{1+|Dw|^2} d_{ij}}_{\to 0 \quad \text{für } |Dw|\to\infty} + \psi'' \frac{(\langle D\varphi, Dd\rangle + \psi')^2}{1+|Dw|^2}.$$

Wir betrachten die relevanten Terme mit ψ'' separat und benutzen $\psi' > 0$ sowie $\psi'' < 0$

$$\begin{aligned}
& - \psi'' \left(1 - \frac{(\langle D\varphi, Dd\rangle + \psi')^2}{1+|Dw|^2}\right)\\
=& \frac{-\psi''}{1+|Dw|^2} \big(1 + |D\varphi|^2 + 2\psi'\langle D\varphi, Dd\rangle + (\psi')^2 \cdot 1\\
& \qquad - \langle D\varphi, Dd\rangle^2 - 2\psi'\langle D\varphi, Dd\rangle - \psi'^2\big)\\
=& \frac{-\psi''}{1+|Dw|^2} \left(1 + |D\varphi|^2 - \langle D\varphi, Dd\rangle^2\right)\\
\geq& \frac{-\psi''}{1+|Dw|^2}.
\end{aligned}$$

Nun gilt in Ω_ε mit $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$

$$\begin{aligned}
\psi(d) =& \delta \log(1+\sigma d),\\
\psi'(d) =& \delta \frac{\sigma}{1+\sigma d} \geq \delta \frac{\sigma}{1+\sqrt{\sigma}},\\
\psi''(d) =& - \delta \frac{\sigma^2}{(1+\sigma d)^2} = -\frac{1}{\delta}(\psi'(d))^2.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $\eta > 0$ und $\sigma \geq \sigma_0(\delta, D\varphi, \eta)$

$$\begin{aligned}
1 + |Dw|^2 =& 1 + \langle D\varphi + \psi' Dd, D\varphi + \psi' Dd\rangle\\
=& 1 + |D\varphi|^2 + 2\psi'\langle D\varphi, Dd\rangle + \psi'^2\\
\leq& c(\eta, D\varphi) + (1+\eta)\psi'^2
\end{aligned}$$

$$\le (1+2\eta)\psi'^2.$$

Somit erhalten wir für $\eta = \frac{1}{2}$

$$\frac{-\psi''}{1+|Dw|^2} \ge \frac{1}{\delta}\psi'^2 \frac{1}{2\psi'^2} = \frac{1}{2\delta}.$$

Fixieren wir also $\delta > 0$ hinreichend klein und dann σ hinreichend groß, so erhalten wir die Differentialungleichung und die behaupteten Ungleichungen für ψ. Genauer funktioniert dies wie folgt:

- $\psi(0) = 0$ ist klar.
- $\psi' \gg 1$: Wir nutzen insbesondere $\varphi'(d) \ge \delta \frac{\sigma}{1+\sqrt{\sigma}}$.
- $\psi(\varepsilon)$: Wir integrieren die Abschätzung für ψ'. Gegebenenfalls muss man δ und σ vorher geeignet anpassen.
- Differentialungleichung: Da $\varphi' \gg 1$ und somit $|Dw| \gg 1$ gilt, müssen wir lediglich $\frac{-\psi''}{1+|Dw|^2} \ge c$ erreichen. Es gilt wegen $\psi' \gg 1$

$$\frac{-\psi''}{1+|Dw|^2} \ge \frac{\frac{1}{\delta}(\psi')^2}{2(\psi')^2} = \frac{1}{2\delta}.$$

Somit bekommen wir Barrieren und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.14. Man überlege sich, dass man auch im Falle $|\dot{\varphi}| \le c$ Abschätzungen in C^0 und C^1 bekommt.

Nach der Definition von v erhalten wir aus der zugehörigen Evolutionsgleichung einen einfacheren und nicht so technischen Beweis des folgenden Satzes.

Theorem 1.15 (C^1-Abschätzungen im Inneren)**.** *Sei $T > 0$ und sei die Funktion $u \in C^{3+\alpha;\frac{3+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega\times[0,T]} |Du| \le \sup_{\Omega} |Du_0| + \max_{\partial\Omega\times[0,T]} |Du|.$$

Beweis. Wir differenzieren die Evolutionsgleichung und erhalten aus

$$\dot{u} = \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u_{ij}$$

zunächst

$$\dot{u}_k = \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u_{ijk} - 2\frac{u^i_k u^j u_{ij}}{1+|Du|^2} + \frac{u^i u^j}{(1+|Du|^2)^2} u_{ij} 2u^l u_{lk}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|Du|^2\right) - \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right)\left(\frac{1}{2}|Du|^2\right)_{ij} \\ &= u^k \dot{u}_k - \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right)\left(u^k u_{kij} + u^k_i u_{kj}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u^k u_{ijk}} - 2\frac{u^k u^i_k u^j u_{ij}}{1+|Du|^2} + 2\frac{u^i u^j u_{ij}}{\left(1+|Du|^2\right)^2} u^l u^k u_{lk} \\
&\quad \underline{- \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u^k u_{kij}} - \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u^k_i u_{kj} \\
&= -\frac{u^k u^i_k u^j u_{ij}}{1+|Du|^2} + 2\left(\frac{u^i u^j u_{ij}}{1+|Du|^2}\right)^2 - u^k_i u^i_k \le 0.
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung sieht man wie folgt ein: Wir setzen $\xi_k := \frac{u_k}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ und dürfen ohne Einschränkung nach einer Rotation des Koordinatensystems $\xi = he_1$ mit $|h| < 1$ annehmen. Somit ist für die behauptete Ungleichung zu zeigen, dass

$$2h^4 u_{11}^2 \le h^2 u^i_1 u_{i1} + u^k_i u^i_k$$

gilt. Dies ist offensichtlicherweise richtig. Somit folgt die Behauptung direkt aus der Evolutionsgleichung von $|Du|^2$ und dem Maximumprinzip. $\square$

Das folgende Theorem (de Giorgi-Nash-Moser Abschätzung) geben wir nur in einem Spezialfall an, den wir benötigen, um die Hölderstetigkeit von a^{ij} in der Gleichung

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u_{ij} \equiv a^{ij} u_{ij}$$

zu erhalten.

Theorem 1.16 ([16, Theorem IV.3.2.3, S. 533])**.** *Seien $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\partial\Omega \in C^2$. Sei $u \in C^{2;1}\left(\overline{Q}_T\right)$ mit $Q_T = \Omega \times (0,T)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} \dot u = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } Q_T, \\ u = \varphi & \text{auf } \mathcal{P}(\Omega \times (0,T)). \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|Du\|_{C^{\alpha;\alpha/2}\left(\overline{Q}_T\right)} \le c,$$

wobei $\alpha \in (0,1)$ und $c < \infty$ nur von $\|Du\|_{L^\infty(Q_T)}$, der C^2-Norm von Ω und der $C^{2;1}$-Norm von φ auf $\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))$ abhängen.

1.3. **Langzeitexistenz.**

Theorem 1.17 (Langzeitexistenz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und $\partial\Omega$ habe nichtnegative mittlere Krümmung. Seien $u_0 \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$. Erfüllen u_0 und φ Kompatibilitätsbedingungen beliebiger Ordnung, so gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ des Anfangs- und Randwertproblemes*

$$\begin{cases} \dot u = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{auf } \Omega, \\ u(x,t) = \varphi(x) & \text{für } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\infty). \end{cases}$$

Bemerkung 1.18.

(i) Da die Resultate aus [16] nicht von T abhängen, erhalten wir gleichmäßige C^k-Abschätzungen für alle k.
(ii) Langzeitexistenz gilt auch im Falle $|\dot\varphi| \le c$.

Beweis von Theorem 1.17. Nach Korollar 1.11 gibt es diese Lösung u auf einem Zeitintervall $[0,T]$ mit $T>0$. Sei $T>0$ mit dieser Eigenschaft maximal, wobei wir ggf. ein Intervall der Form $[0,T)$ betrachten. Angenommen es gilt $T<\infty$. Aufgrund der obigen C^1-Abschätzungen inklusive der Hölderabschätzungen für den Gradienten ist dann

$$\dot{u}=a^{ij}u_{ij}$$

mit $a^{ij}=\delta^{ij}-\frac{u^iu^j}{1+|Du|^2}$ eine gleichmäßig parabolische Gleichung mit gleichmäßig hölderstetigem a^{ij}. Aufgrund der linearen Theorie aus Theorem 1.5 ist dann

$$u\in C^{2+\alpha;\frac{2+\alpha}{2}}\left(\overline{\Omega}\times[0,\tau]\right)$$

für alle $0<\tau<T$ mit von τ unabhängigen Schranken. Wie beim Beweis der höheren Regularität in Theorem 1.10 erhalten wir sukzessive eine glatte Lösung mit a priori Schranken.

Wir können also die Grenzfunktion $u(\cdot,T):=\lim\limits_{t\nearrow T}u(\cdot,t)$ definieren, denn nach Arzelà-Ascoli existiert eine konvergente Teilfolge $u(\cdot,t_i)$ mit $t_i\nearrow T$ und dieser Grenzwert ist aufgrund der $\dot{u}$-Schranken eindeutig, für festes x ist nämlich $u(x,t)$ in t eine Cauchyfolge, denn es gilt

$$|u(x,t)-u(x,\tau)|=\left|\int\limits_\tau^t\dot{u}(x,s)\,ds\right|\le|t-\tau|\cdot\sup|\dot{u}|.$$

Für $0<t<T$ erfüllen glatte Lösungen automatisch Bedingungen, die den Kompatibilitätsbedingungen bis auf die Tatsache, dass wir nicht mehr $t=0$ betrachten, entsprechen. Aus Stetigkeitsgründen gelten diese auch im Grenzwert, also für den glatten Grenzwert $u(\cdot,T)$.

Nach Korollar 1.11 gibt es also eine glatte Lösung $\tilde{u}$ auf einem Zeitintervall $[T,T+\varepsilon]$ mit $\varepsilon>0$. Da $u(\cdot,T)=\tilde{u}(\cdot,T)$ gilt, stimmen aufgrund der Differentialgleichung auf $\Omega\times\{T\}$ sämtliche (räumlichen und zeitlichen) Ableitungen (bzw. deren einseitige Grenzwerte) überein und somit ist

$$U(x,t):=\begin{cases}u(x,t) & \text{für } 0\le t\le T,\\ \tilde{u}(x,t) & \text{für } T\le t\le T+\varepsilon\end{cases}$$

auf $[0,T+\varepsilon]$ eine glatte Lösung. Dies widerspricht der Maximalität von T. Somit ist $T=\infty$ und wir erhalten glatte Langzeitexistenz.

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. □

1.4. **Konvergenz.**

Theorem 1.19. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 1.17 konvergiert $u(\cdot,t)$ für $t\to\infty$ gegen eine glatte Funktion $U\colon\Omega\to\mathbb{R}$ mit Randwerten φ und*

$$H[U]:=\operatorname{div}\left(\frac{DU}{\sqrt{1+|DU|^2}}\right)=0.$$

Eine Funktion U mit $H[U]=0$ heißt Minimalfläche oder minimale Hyperfläche.

Beweis. Mit partieller Integration erhalten wir wegen $H[u]=0$ auf $\partial\Omega\times[0,\infty)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega\sqrt{1+|Du|^2}=\int\limits_\Omega\frac{u^k\dot{u}_k}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \frac{u^k}{\sqrt{1+|Du|^2}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{1+|Du|^2}\cdot H[u]\right) \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{u^k}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) \cdot \sqrt{1+|Du|^2}\cdot H[u] \\
&= -\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\cdot H^2[u].
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren mit -1 und integrieren. Es folgt

$$
\int_0^T \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\cdot H^2[u] = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\bigg|_{t=0} \underbrace{- \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\bigg|_{t=T}}_{\le 0}
$$

und somit erhalten wir

$$
\int_0^\infty \int_\Omega H^2[u] \le \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\bigg|_{t=0} < \infty.
$$

Aufgrund der in x und t gleichmäßigen Gradientenschranken für $H[u]$ folgt daraus $H[u] \to 0$ und $\dot{u} \to 0$ für $t \to \infty$.

Aufgrund der Abschätzungen erhalten wir zu jeder Folge $t_i \to \infty$ eine (nicht umbenannte) Teilfolge, so dass $u(\cdot, t_i)$ gegen eine Funktion U mit $H[U] = 0$ konvergiert. Nun liefert das Maximumprinzip, dass dieser Grenzwert U mit $H[U] = 0$ stets dieselbe Funktion sein muss. Somit konvergiert die gesamte Folge. □

Aufgabe 1.20. Seien wiederum die Voraussetzungen von Theorem 1.17 gegeben. Sei weiterhin eine glatte Lösung $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ des Randwertproblems

$$
\begin{cases}
H[u] = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla U}{\sqrt{1+|\nabla U|^2}}\right) & \text{in } \Omega, \\
u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega
\end{cases}
$$

gegeben. Zeige Theorem 1.19 erneut, diesmal jedoch mit Hilfe des (strikten) parabolischen Maximumprinzips.

2. Differentialgeometrie von Untermannigfaltigkeiten

2.1. **Hyperflächen.** Wir wiederholen nur die Differentialgeometrie von Hyperflächen im Euklidischen und sind teilweise etwas allgemeiner als für die Vorlesung nötig.

Bezeichne $X = X(x, t) = (X^\alpha)_{1\le\alpha\le n+1}$ den zeitabhängigen Einbettungsvektor einer Mannigfaltigkeit M^n nach $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\frac{d}{dt}X = \dot{X}$ die totale Zeitableitung. Definiere $M_t := X(M, t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir identifizieren häufig eine Mannigfaltigkeit mit ihrem Bild. Sei X glatt (genug). Sei M^n glatt, orientierbar und vollständig oder mit Rand ∂M^n. Sei $\nu = \nu(x) = (\nu^\alpha)_{1\le\alpha\le n+1}$ der nach unten weisende (oder äußere) Normalenvektor an M_t im Punkt $x \in M_t$. Die Einbettung $X(\cdot, t)$ induziert in jedem Punkt aus M_t eine Metrik $(g_{ij})_{1\le i,\,j\le n}$ und eine zweite Fundamentalform $(h_{ij})_{1\le i,\,j\le n}$. Mit (g^{ij}) bezeichnen wir die Inverse von (g_{ij}). Diese Tensoren sind symmetrisch. Wir definieren die Hauptkrümmungen

$(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ als Eigenwerte der zweiten Fundamentalform bezüglich dieser Metrik. Dies heißt, dass es in $p\in M$ zu jeder Hauptkrümmung λ_i ein $0\neq\xi\in T_pM\cong\mathbb{R}^n$ mit

$$\lambda_i\sum_{l=1}^n g_{kl}\xi^l=\sum_{l=1}^n h_{kl}\xi^l \text{ oder, äquivalent dazu, } \lambda_i\xi^l=\sum_{k,r=1}^n g^{lk}h_{kr}\xi^r$$

gibt. Wir führen Eigenwerte entsprechend ihrer Häufigkeit gegebenenfalls mehrfach auf. Sind sämtliche Hauptkrümmungen strikt positiv, so heißt eine Hyperfläche strikt konvex. Dies ist für eine Sphäre oder den Graphen einer strikt konvexen Funktion der Fall. Mit $\left(\tilde h^{ij}\right)_{1\le i,\,j\le n}$ bezeichnen wir die Inverse der zweiten Fundamentalform.

Lateinische Indices laufen von 1 bis n und beziehen sich auf Größen auf der Hyperfläche. Griechische Indices bezeichnen Komponenten im umgebenden Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ und laufen von 1 bis $n+1$. (Beim mittleren Krümmungsfluss ohne Singularitäten werden wir um eins erhöhte Dimensionen verwenden.) Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention. In $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten wir stets Euklidische Koordinatensysteme mit höchstens parallel verschobener $n+1$-Achse. Wir heben oder senken lateinische Indices mit Hilfe der Metrik oder ihrer Inversen (g^{ij}), für griechische Indices benutzen wir die flache Metrik $(\overline{g}_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le n+1}=(\delta_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le n+1}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$. Somit bekommt die definierende Gleichung für die Hauptkrümmungen die Gestalt $\lambda_i g_{kl}\xi^l=h_{kl}\xi^l$.

Bezeichnet $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{n+1}$, so gilt

$$g_{ij}=\langle X_{,i},\,X_{,j}\rangle=X^\alpha_{,i}\delta_{\alpha\beta}X^\beta_{,j},$$

wobei wir mit den $,i$-Indices partielle Ableitungen bezeichnen. Für kovariante Ableitungen bezüglich der induzierten Metrik benutzen wir Strichpunkte, also z. B. $h_{ij;\,k}$ oder $v_{;k}$. Sind keine Missverständnisse zu befürchten, lassen wir Kommata und Strichpunkte auch wieder weg. Definiere $X^\alpha_{;i}\equiv X^\alpha_{,i}$ und

$$X^\alpha_{;ij}=X^\alpha_{,ij}-\Gamma^k_{ij}X^\alpha_{,k}, \tag{2.1}$$

wobei

$$\Gamma^k_{ij}=\tfrac12 g^{kl}(g_{il,\,j}+g_{jl,\,i}-g_{ij,\,l})$$

die Christoffelsymbole der Metrik (g_{ij}) bezeichnen. Damit wird $X^\alpha_{;ij}$ ein Tensor.

Die Gaußformel lautet

$$X^\alpha_{;\,ij}=-h_{ij}\nu^\alpha. \tag{2.2}$$

Die Weingartengleichung ist

$$\nu^\alpha_{;\,i}=h^k_iX^\alpha_{;\,k}. \tag{2.3}$$

Mit der Gaußformel (2.2) oder der Weingartengleichung (2.3) können wir die zweite Fundamentalform bestimmen.

Symmetrische Funktionen der Hauptkrümmungen sind wohldefiniert. Wir nennen $H=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ die mittlere Krümmung, $|A|^2=\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2$ das Quadrat der Norm der zweiten Fundamentalform, $K=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n$ die Gaußkrümmung und schreiben $\operatorname{tr}A^k=\lambda_1^k+\ldots+\lambda_n^k$. Es ist häufig praktisch, Koordinatensysteme zu wählen, so dass in einem festen Punkt $g_{ij}=\delta_{ij}$ gilt und (h_{ij}) diagonal ist, also $(h_{ij})=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Dann ist

$$\sum\lambda_k h^2_{ij;k}=\sum_{i,\,j,\,k=1}^n\lambda_k h^2_{ij;k}=h^{kl}h^i_{j;\,k}h^j_{i;\,l}=h_{rs}h_{ij;\,k}h_{ab;\,l}g^{ia}g^{jb}g^{rk}g^{sl}.$$

Wir benutzen diese Notation nur wenn wir (zumindest implizit) angenommen haben, dass wir in solch einem Koordinatensystem sind.

Wir betrachten Normalengeschwindigkeiten F die als Funktion von $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ oder (h_{ij}, g_{ij}) aufgefasst werden können. Ist $F(\lambda_i)$ symmetrisch und glatt, so ist $F(h_{ij}, g_{ij})$ ebenfalls glatt, siehe [11, Theorem 2.1.20]. Definiere $F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial h_{ij}}$, $F^{ij,\,kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial h_{ij} \partial h_{kl}}$. In einem Koordinatensystem mit diagonaler zweiter Fundamentalform h_{ij} und $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist F^{ij} diagonal. Für $F = H$ gilt $F^{ij} = g^{ij}$, für $F = |A|^2$ gilt $F^{ij} = 2h^{ij} = 2\lambda_i g^{ij}$ und für $F = K^\alpha$, $\alpha \neq 0$, gilt $F^{ij} = \alpha K^\alpha \tilde{h}^{ij} = \alpha K^\alpha \lambda_i^{-1} g^{ij}$.

Mit der Gaußgleichung kann man den Riemannschen Krümmungstensor aus der zweiten Fundamentalform bestimmen.

$$R_{ijkl} = h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}. \tag{2.4}$$

In Euklidischen Koordinatensystemen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist $h_{ij;\,k}$ aufgrund der Codazzigleichungen in allen drei Indices symmetrisch.

Mit der Ricciidentität können wir zweite Ableitungen vertauschen. Für die zweite Fundamentalform gilt

$$h_{ik;\,lj} = h_{ik;\,jl} + h_k^a R_{ailj} + h_i^a R_{aklj}. \tag{2.5}$$

Sind A und B Tensoren, so schreiben wir $A_{ij} \succcurlyeq B_{ij}$ falls $(A_{ij} - B_{ij})$ positiv semidefinit ist.

Mit c bezeichnen wir universelle und abgeschätzte Konstanten.

Bemerkung 2.1. $\left(F^{ij}\right)_{ij}$ ist ein Tensor.

Beweis. Eine Krümmungsfunktion hänge nur von den Hauptkrümmungen ab, unabhängig vom Koordinatensystem. Somit folgt in suggestiver Notation in Koordinaten x bzw. y wegen

$$h^y_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} h^x_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

auch

$$\begin{aligned} F &= F\left(\left(h^x_{ij}\right), \left(g^x_{ij}\right)\right) \\ &= F\left(\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} h^x_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right), \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} g^x_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right)\right), \end{aligned}$$

und mit Kettenregel

$$F^{kl}_x = \frac{\partial F}{\partial h^x_{kl}} = F^{ij}_y \frac{\partial h^y_{ij}}{\partial h^x_{kl}} = F^{ij}_y \frac{\partial \frac{\partial x^r}{\partial y^i} h^x_{rs} \frac{\partial x^s}{\partial y^j}}{\partial h^x_{kl}} = F^{ij}_y \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \delta^k_r \delta^l_s \frac{\partial x^s}{\partial y^j} = F^{ij}_y \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}.$$

Diese Transformationsregel zeigt, dass F^{ij} ein Tensor ist. □

2.2. **Graphische Untermannigfaltigkeiten.**

Lemma 2.2. *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt. Dann ist* graph u *eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Metrik g_{ij}, die nach unten weisende Normale ν, die zweite Fundamentalform h_{ij}, die mittlere Krümmung H und die Gaußkrümmung K sind durch die folgenden Ausdrücke* *gegeben*

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \delta_{ij} + u_i u_j, \\
g^{ij} &= \delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}, \\
\nu &= \frac{((u_i), -1)}{\sqrt{1+|Du|^2}} \equiv \frac{(Du, -1)}{v}, \\
h_{ij} &= \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \equiv \frac{u_{ij}}{v}, \\
H &= \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right),
\end{aligned}$$

sowie

$$K = \frac{\det D^2 u}{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}},$$

wobei wir $u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i}$ *und* $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ *benutzen.*

Beachte, dass wir im Euklidischen nicht zwischen Du und ∇u zu unterscheiden brauchen.

Beweis.

(i) Sei $X(x) := (x, u(x))$, $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ der Einbettungsvektor. Dann ist die Euklidische Metrik die zurückgezogene euklidische Metrik des $\mathbb{R}^{n+1}$, also $g := X^* g_{\mathbb{R}^{n+1}_{\text{Eucl.}}}$. Es gilt $X_{,i} = (e_i, u_i)$. Somit folgt

$$g_{ij} = X^\alpha_{,i} \delta_{\alpha\beta} X^\beta_{,j} = \langle X_{,i}, X_{,j}\rangle = \langle (e_i, u_i), (e_j, u_j)\rangle = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

(ii) Man rechnet direkt nach, dass g^{ij} wie angegeben die Inverse von g_{ij} ist. Wir erinnern an $u^i := \delta^{ij} u_j$. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn wir ein Koordinatensystem mit $u_i = 0$ für $i < n$ wählen.

(iii) Die Vektoren $X_{,i} = (e_i, u_i)$ sind tangential an $\operatorname{graph} u$. Der Vektor $((-u_i), 1) \equiv (-Du, 1)$ ist dazu orthogonal und daher bis auf Normierung ein Einheitsnormalenvektor.

(iv) Kombiniere (2.1) und (2.2). Wir bilden das Skalarprodukt mit ν und erhalten

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= -\langle X_{;ij}, \nu\rangle = -\left\langle X_{,ij} - \Gamma^k_{ij} X_{,k}, \nu\right\rangle = -\langle X_{,ij}, \nu\rangle \\
&= -\left\langle (0, u_{ij}), \frac{((u_i), -1)}{v}\right\rangle = \frac{u_{ij}}{v}.
\end{aligned}$$

(v) Es gilt

$$\begin{aligned}
H = \sum_{i=1}^n \lambda_i = g^{ij} h_{ij} &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) \frac{u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \\
&= \frac{\delta^{ij} u_{ij}}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u^j u_{ij}}{(1+|Du|^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\Delta u}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^i u^j u_{ij}}{(1+|Du|^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

und andererseits ist

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{u_i}{\sqrt{1+|Du|^2}}$$
$$= \sum_{i=1}^n \frac{u_{ii}}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \sum_{i,j=1}^n \frac{u_i u_j u_{ji}}{\left(1+|Du|^2\right)^{3/2}}$$
$$= H.$$

(vi) Wir benutzen die definierende Gleichung der Hauptkrümmungen und erhalten

$$K = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det\left(g^{ij}h_{jk}\right) = \det g^{ij}\cdot\det h_{ij} = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}$$
$$= \frac{v^{-n}\det u_{ij}}{v^2} = \frac{\det D^2 u}{\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

□

2.3. **Zeitabhängige Hyperflächen.** Wir betrachten hier nur nach $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, also die Evolution von Hyperflächen im Euklidischen (und später $n+1$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+2}$). Höhere Kodimensionen oder Flussgleichungen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten oder in Lorentzmannigfaltigkeiten betrachten wir hier nicht.

Definition 2.3. Sei M^n eine orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $X(\cdot,t): M^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, $0\le t\le T\le\infty$, eine glatte Familie von Einbettungen. Sei weiterhin ν eine stetige Wahl des Einheitsnormalenvektors entlang $X(\cdot,t)$, die auch in t stetig ist. Dann sagen wir, dass sich $M_t := X(M^n,t)$ mit Normalengeschwindigkeit F bewegt, falls

$$\frac{d}{dt}X = -F\nu \quad \text{in } M^n\times[0,T)$$

gilt.

2.4. **Evolution von Graphen.** Es gelten auch lokale Varianten der folgenden beiden Resultate.

Lemma 2.4. *Sei $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass sich* graph $u(\cdot,t)$ *gemäß $\frac{d}{dt}X=-F\nu$ bewegt. Dann gilt*

$$\dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot F.$$

Es ist im Allgemeinen nicht richtig, dass die $(n+1)$-ste Komponente in der Evolutionsgleichung $\frac{d}{dt}X=-F\nu$ gerade $\dot u$ liefert, da die Normalengeschwindigkeit im Allgemeinen neben der vertikalen noch eine horizontale Komponente besitzt.

Beweis. Sei p ein Punkt auf der abstrakten vermöge X nach $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebetteten Mannigfaltigkeit. Da wir graphische Einbettungen betrachten, folgt

$$X(p,t) = (x(p,t), u(x(p,t),t)).$$

Wir betrachten nun das Skalarprodukt beider Seiten der Evolutionsgleichung mit ν und erhalten

$$F = \langle F\nu,\nu\rangle = \left\langle -\frac{d}{dt}X,\nu\right\rangle = -\left\langle \left(\left(\dot x^k\right), u_i\dot x^i+\dot u\right), \frac{((u_i),-1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right\rangle = \frac{\dot u}{\sqrt{1+|Du|^2}}.$$

□

Korollar 2.5. *Sei $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass* $\operatorname{graph} u(\cdot, t)$ *den mittleren Krümmungsfluss* $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ *löst. Dann gilt*

$$\dot{u} = \sqrt{1 + |Du|^2} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

3. Evolutionsgleichungen

3.1. **Allgemeine Evolutionsgleichungen.** In diesem Kapitel leiten wir Evolutionsgleichungen geometrischer Größen her. Vergleiche beispielsweise [13, 14, 20]. Wir leiten ein paar einfache Evolutionsgleichungen mehr als für den Rest der Vorlesung nötig her.

Sei die Familie $(M_t)_t$ von Hyperflächen eine (lokale) Lösung der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt}X = -F\nu, \tag{3.1}$$

wobei $F = F(\lambda_i)$ eine glatte symmetrische Funktion ist. Dann gelten die folgenden Evolutionsgleichungen.

Lemma 3.1. *Für die Metrik g_{ij} gilt*

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2Fh_{ij}. \tag{3.2}$$

Beweis. Nach Definition ist $g_{ij} = \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = X^\alpha_{,i}\delta_{\alpha\beta}X^\beta_{,j}$. Wir differenzieren diese Identität nach der Zeit. Ableitungen von $\delta_{\alpha\beta}$ verschwinden. Im Term $X^\alpha_{,i}$ sind alle Ableitungen partielle Ableitungen. Somit erhalten wir

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = \left(\dot{X}^\alpha\right)_{,i}\delta_{\alpha\beta}X^\beta_{,j} + X^\alpha_{,i}\delta_{\alpha\beta}\left(\dot{X}^\beta\right)_{,j}$$

(nach Vertauschen von räumlichen und zeitlichen partiellen Ableitungen)

$$= \left(-F\nu^\alpha\right)_{,i}\delta_{\alpha\beta}X^\beta_{,j} + X^\alpha_{,i}\delta_{\alpha\beta}\left(-F\nu^\beta\right)_{,j}$$

(aufgrund der Evolutionsgleichung $\frac{d}{dt}X = -F\nu$)

$$= -F\nu^\alpha_{;i}\delta_{\alpha\beta}X^\beta_{,j} - X^\alpha_{,i}\delta_{\alpha\beta}F\nu_{;j}$$

(Terme mit Ableitungen F verschwinden, da ν und $X^\alpha_{,i}$ orthogonal aufeinander stehen; da die Hintergrundmetrik $\overline{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ flach ist, stimmen kovariante und partielle Ableitungen von ν überein)

$$= -Fh^k_iX^\alpha_{,k}\delta_{\alpha\beta}X^\beta_{,j} - FX^\alpha_{,i}\delta_{\alpha\beta}h^k_jX^\beta_{,k}$$

(aufgrund der Weingartengleichung (2.3))

$$= -Fh^k_ig_{kj} - Fg_{ik}h^k_j$$

(nach Definition der Metrik)

$$= -2Fh_{ij}$$

(nach Definition von $h^i_j := h_{jk}g^{ki}$).

Somit folgt das Lemma. □

Korollar 3.2. *Die Evolutionsgleichung des Volumenelementes* $d\mu := \sqrt{\det g_{ij}}\,dx$ *lautet*

$$\frac{d}{dt}d\mu = -FH\,d\mu. \tag{3.3}$$

Beweis. Übung. Dies benutzt die Formeln für die Ableitung der Determinante einer Matrix. $\square$

Lemma 3.3. *Die (Einheits-)normale* ν *erfüllt*

$$\frac{d}{dt}\nu^\alpha = g^{ij}F_{;i}X^\alpha_{;j}. \tag{3.4}$$

Beweis. Nach Definition hat die Einheitsnormale ν die Länge Eins, $\langle\nu,\nu\rangle = 1 = \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta$. Wir differenzieren dies und erhalten

$$0 = \dot{\nu}^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta.$$

Daher genügt der Nachweis, dass die behauptete Gleichung gilt, wenn wir auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit einem beliebigen aber demselben Tangentialvektor bilden. Die Vektoren $X_{,i}$ (die wir ab jetzt mit X_i bezeichnen wollen, da keine Verwechslungsgefahr besteht; dies machen wir auch für andere Größen, falls partielle und kovariante Ableitungen übereinstimmen) bilden eine Basis des Tangentialraumes $T.M$ in einem festen Punkt. Wir differenzieren die Gleichung

$$0 = \langle\nu, X_i\rangle = \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X^\beta_i$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X^\beta_i + \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}X^\beta_i \\
&= \frac{d}{dt}\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X^\beta_i + \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{d}{dt}X^\beta\right)_i \\
&= \frac{d}{dt}\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X^\beta_i - \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\left(F\nu^\beta\right)_i.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X^\beta_i &= \nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta F_i + F\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta_i \\
&= F_i + F\tfrac{1}{2}\langle\nu,\nu\rangle_i = F_i
\end{aligned}$$

und das Lemma folgt, denn wenn wir nun auf beiden Seiten das Skalarprodukt der behaupteten Evolutionsgleichung mit X_k bilden, d. h. diese mit $\delta_{\alpha\beta}X^\beta_k$ multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\nu^\alpha\delta_{\alpha\beta}X^\beta_k = g^{ij}F_iX^\alpha_j\delta_{\alpha\beta}X^\beta_k = g^{ij}F_ig_{jk} = \delta^i_kF_i = F_k.$$ $\square$

Lemma 3.4. *Für die zweite Fundamentalform* h_{ij} *gilt*

$$\frac{d}{dt}h_{ij} = F_{;ij} - Fh^k_ih_{kj}. \tag{3.5}$$

Beweis. Aufgrund der Gaußschen Formel (2.2) gilt $h_{ij} = -X^\alpha_{;ij}\nu_\alpha$. Wir differenzieren dies und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}h_{ij} &= -\frac{d}{dt}\langle X_{;ij},\nu\rangle \\
&= -\left\langle\frac{d}{dt}X_{;ij},\nu\right\rangle - \left\langle -h_{ij}\nu, \frac{d}{dt}\nu\right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left\langle \frac{d}{dt} X_{;ij}, \nu \right\rangle + h_{ij} \left\langle \nu, \frac{d}{dt}\nu \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{d}{dt} X_{;ij}, \nu \right\rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\left(X^\alpha_{,ij} - \Gamma^k_{ij} X^\alpha_k\right)\nu_\alpha \\
&= -\left(\frac{d}{dt} X^\alpha\right)_{,ij} \nu_\alpha + \Gamma^k_{ij}\left(\frac{d}{dt}X^\alpha\right)_{,k}\nu_\alpha
\end{aligned}
$$

(wobei wegen $X^\alpha_i \nu_\alpha = 0$ keine Zeitableitungen von Γ^k_{ij} auftauchen)

$$
= (F\nu^\alpha)_{,ij}\nu_\alpha - \Gamma^k_{ij}(F\nu^\alpha)_{,k}\nu_\alpha
$$

(aufgrund der Evolutionsgleichung)

$$
\begin{aligned}
&= F_{,ij}\nu^\alpha\nu_\alpha + F_{,i}\nu^\alpha_{,j}\nu_\alpha + F_{,j}\nu^\alpha_{,i}\nu_\alpha + F\nu^\alpha_{,ij}\nu_\alpha - \Gamma^k_{ij}F_{,k}\nu^\alpha\nu_\alpha - \Gamma^k_{ij}F\nu^\alpha_{,k}\nu_\alpha \\
&= F_{;ij} + F\nu^\alpha_{,ij}\nu_\alpha,
\end{aligned}
$$

da $F_{;ij} = F_{,ij} - \Gamma^k_{ij}F_{,k}$ und $\nu^\alpha_{,j}\nu_\alpha = \frac{1}{2}(\nu^\alpha\nu_\alpha)_j = 0$ gelten. Wir müssen also noch zeigen, dass $\nu^\alpha_{,ij}\nu_\alpha = -h^k_i h_{kj}$ gilt. Es gilt

$$
\nu^\alpha_{,ij}\nu_\alpha = \nu^\alpha_{;i,j}\nu_\alpha
$$

(da $\nu^\alpha_i = \nu^\alpha_{;i}$)

$$
= \nu^a_{;ij}\nu_\alpha
$$

($\nu^\alpha_{;ij} = (\nu^\alpha_{;i})_{,j} - \Gamma^k_{ij}\nu^\alpha_k$ und $0 = \nu^\alpha_k\nu_\alpha$)

$$
= \left(h^k_i X^\alpha_k\right)_{;j}\nu_\alpha
$$

(aufgrund der Weingartengleichung (2.3))

$$
= h^k_i(-h_{kj}\nu^\alpha)\nu_\alpha
$$

(aufgrund der Gaußgleichung (2.2) und der Orthogonalität $X^\alpha_k\nu_\alpha = 0$)

$$
= -\, h^k_i h_{kj}
$$

wie behauptet. Das Lemma folgt. □

Lemma 3.5. *Die Normalengeschwindigkeit F erfüllt*

$$
\frac{d}{dt}F - F^{ij}F_{;ij} = FF^{ij}h^k_i h_{kj}. \tag{3.6}
$$

Beweis. Es gilt, vergleiche beispielsweise [21, Lemma 5.4], den Beweis von [11, Theorem 2.1.20], oder leite dies explizit für die betrachtete Normalengeschwindigkeit her,

$$
\frac{\partial F}{\partial g_{kl}} = -F^{il}h^k_i.
$$

Somit erhalten wir unter Verwendung von (3.2) und (3.5)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F - F^{ij}F_{;ij} &= -\, F^{il}h^k_i \frac{d}{dt}g_{kl} + F^{ij}\frac{d}{dt}h_{ij} - F^{ij}F_{;\,ij} \\
&= -\, F^{il}h^k_i(-2Fh_{ij}) + F^{ij}\left(F_{;ij} - Fh^k_i h_{kj}\right) - F^{ij}F_{;ij}
\end{aligned}
$$

$$=FF^{ij}h_i^k h_{kj}. \qquad \square$$

Wir benötigen noch explizitere Evolutionsgleichungen für geometrische Größen $\boxplus$, in denen $\frac{d}{dt}\boxplus - F^{ij}\boxplus_{;ij}$ vorkommt.

Lemma 3.6. *Für die zweite Fundamentalform h_{ij} gilt*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_{ij} - F^{kl}h_{ij;\,kl} =& F^{kl}h_k^a h_{al}\cdot h_{ij} - F^{kl}h_{kl}\cdot h_i^a h_{aj}\\ &- Fh_i^k h_{kj} + F^{kl,\,rs}h_{kl;\,i}h_{rs;\,j}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Beweis. Direkte Rechnungen liefern

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_{ij} - F^{kl}h_{ij;\,kl} =& F_{;ij} - Fh_i^k h_{kj} - F^{kl}h_{ij;kl} && \text{wegen (3.5)}\\ =& F^{kl}h_{kl;\,ij} + F^{kl,\,rs}h_{kl;\,i}h_{rs;\,j}\\ &- Fh_i^k h_{kj} - F^{kl}h_{ij;\,kl}\\ =& F^{kl}h_{ik;\,lj} + F^{kl,\,rs}h_{kl;\,i}h_{rs;\,j}\\ &- Fh_i^k h_{kj} - F^{kl}h_{ik;\,jl} && \text{nach Codazzi}\\ =& F^{kl}\left(h_k^a R_{ailj} + h_i^a R_{aklj}\right) - Fh_i^k h_{kj}\\ &+ F^{kl,\,rs}h_{kl;\,i}h_{rs;\,j} && \text{wegen (2.5)}\\ =& F^{kl}h_k^a h_{al}h_{ij} - \underline{F^{kl}h_k^a h_{aj}h_{il}}\\ &+ \underline{F^{kl}h_i^a h_{al}h_{kj}} - F^{kl}h_i^a h_{aj}h_{kl}\\ &- Fh_i^k h_{kj} + F^{kl,\,rs}h_{kl;\,i}h_{rs;\,j} && \text{wegen (2.4)}\\ =& F^{kl}h_k^a h_{al}h_{ij} - F^{kl}h_i^a h_{aj}h_{kl}\\ &- Fh_i^k h_{kj} + F^{kl,\,rs}h_{kl;\,i}h_{rs;\,j}.\end{aligned}$$

Um zu sehen, dass sich die beiden unterstrichenen Terme gegenseitig aufheben, können wir nutzen, dass F^{ij} in einem Koordinatensystem, in dem h_{ij} diagonal ist und $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt, auch F^{ij} diagonal ist, siehe Abschnitt 2.1. Alternativ nutzt man die Symmetrie $h_{ij} = \frac{1}{2}h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ji}$ und addiert die entsprechenden Evolutionsgleichungen. Somit fallen die potentiell nicht symmetrischen Anteile ebenfalls weg. $\square$

Bemerkung 3.7. Im Beweis der Evolutionsgleichung der zweiten Fundamentalform (h_{ij}) haben wir Indices vertauscht. Spezialisiert man hier auf den Fall $F^{ij} = g^{ij}$, was für den mittleren Krümmungsfluss gilt, so erhalten wir

$$H_{;ij} - \Delta h_{ij} = |A|^2 h_{ij} - Hh_i^k h_{kj}.$$

Dieses Identität heißt auf Englisch "Simons' identity" nach James Simon.

Bemerkung 3.8. Als direkte Folgerung aus (3.1) und (2.2) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}X^\alpha - F^{ij}X^\alpha_{;ij} = \left(F^{ij}h_{ij} - F\right)\nu^\alpha. \tag{3.8}$$

Somit gilt

$$\frac{d}{dt}|X|^2 - F^{ij}\left(|X|^2\right)_{;ij} =2\left(F^{ij}h_{ij} - F\right)\langle X,\, \nu\rangle - 2F^{ij}g_{ij},$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|X|^2 - F^{ij}\left(|X|^2\right)_{;ij} &= 2\left\langle X, \frac{d}{dt}X\right\rangle - 2F^{ij}\langle X_i, X_j\rangle - 2F^{ij}\langle X, X_{;ij}\rangle \\ &= 2\langle X, -F\nu\rangle - 2F^{ij}g_{ij} - 2F^{ij}\langle X, -h_{ij}\nu\rangle. \end{aligned}$$ □

Lemma 3.9. *Die Evolutionsgleichung für die Normale ν lautet*

$$\frac{d}{dt}\nu^\alpha - F^{ij}\nu^\alpha_{;ij} = F^{ij}h^k_i h_{kj}\cdot\nu^\alpha. \tag{3.9}$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\nu^\alpha - F^{ij}\nu^\alpha_{;ij} = g^{ij}F_{;i}X^\alpha_{;j} - F^{ij}\left(h^k_i X^\alpha_{;k}\right)_{;j}$$

wegen (3.4) und (2.3)

$$\begin{aligned}&= g^{ij}F^{kl}h_{kl;i}X^\alpha_{;j} - F^{ij}h^k_{i;j}X^\alpha_{;k} - F^{ij}h^k_i X^\alpha_{;kj} \\ &= F^{ij}h^k_i h_{kj}\nu^\alpha \qquad \text{wegen (2.2).}\end{aligned}$$ □

Lemma 3.10. *Die Evolutionsgleichung des Skalarproduktes $\langle X,\nu\rangle$ lautet*

$$\frac{d}{dt}\langle X,\nu\rangle - F^{ij}\langle X,\nu\rangle_{;ij} = -F^{ij}h_{ij} - F + F^{ij}h^k_i h_{kj}\langle X,\, \nu\rangle. \tag{3.10}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle X,\,\nu\rangle - F^{ij}\langle X,\,\nu\rangle_{;ij} &= X^\alpha\delta_{\alpha\beta}\left(\frac{d}{dt}\nu^\beta - F^{ij}\nu^\beta_{;ij}\right) \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt}X^\alpha - F^{ij}X^\alpha_{;ij}\right)\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta \\ &\quad - 2F^{ij}X^\alpha_{;i}\delta_{\alpha\beta}\nu^\beta_{;j} \\ &= F^{ij}h^k_i h_{kj}\langle X,\,\nu\rangle + \left(F^{ij}h_{ij} - F\right)\langle \nu,\,\nu\rangle \\ &\quad - 2F^{ij}X^\alpha_{;i}\delta_{\alpha\beta}h^k_j X^\beta_{;k}\end{aligned}$$

unter Benutzung von (2.3), (3.8), und (3.9)

$$= F^{ij}h^k_i h_{kj}\langle X,\,\nu\rangle - F^{ij}h_{ij} - F.$$ □

Lemma 3.11. *Sei $(\eta_\alpha) = -e_{n+1} = (0,\ldots,0,-1)$. Dann erfüllt $\tilde v := \langle \eta,\nu\rangle \equiv \eta_\alpha\nu^\alpha$*

$$\frac{d}{dt}\tilde v - F^{ij}\tilde v_{;ij} = F^{ij}h^k_i h_{kj}\tilde v \tag{3.11}$$

und $v := \tilde v^{-1}$ erfüllt

$$\frac{d}{dt}v - F^{ij}v_{;ij} = -vF^{ij}h^k_i h_{kj} - 2\frac{1}{v}F^{ij}v_i v_j. \tag{3.12}$$

Beweis. Die Evolutionsgleichung von $\tilde v$ folgt direkt aus (3.9). Für die Herleitung der Evolutionsgleichung von v benutzen wir

$$\dot v = -\tilde v^{-2}\dot{\tilde v} = -v^2\dot{\tilde v},$$

$$v_i = -\tilde{v}^{-2}\tilde{v}_i = -v^2\tilde{v}_i$$

und

$$v_{;ij} = -\tilde{v}^{-2}\tilde{v}_{;ij} + 2\tilde{v}^{-3}\tilde{v}_i\tilde{v}_j = -v^2\tilde{v}_{;ij} + 2v^{-1}v_iv_j.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v - F^{ij}v_{;ij} &= -v^2\left(\frac{d}{dt}\tilde{v} - F^{ij}\tilde{v}_{ij}\right) - 2\frac{1}{v}F^{ij}v_iv_j \\ &= -v^2\left(F^{ij}h_i^k h_{kj}\tilde{v}\right) - 2\frac{1}{v}F^{ij}v_iv_j. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich auch die Evolutionsgleichung für v. □

3.2. **Evolutionsgleichungen für den mittleren Krümmungsfluss.** Im Zusammenhang mit einer Familie von Hyperflächen $(M_t)_t$ bezeichnet Δ den Laplace-Beltrami Operator bezüglich der induzierten Metrik. Es gilt $\Delta w = g^{ij}w_{;ij}$.

Theorem 3.12. *Für Lösungen des mittleren Krümmungsflusses gelten die Evolutionsgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X &= -H\nu, \\ \frac{d}{dt}X - \Delta X &= 0, \\ \frac{d}{dt}|X|^2 - \Delta|X|^2 &= -2n, \\ \frac{d}{dt}g_{ij} &= -2Hh_{ij}, \\ \frac{d}{dt}d\mu &= -H^2\,d\mu, \\ \frac{d}{dt}H - \Delta H &= H|A|^2, \\ \frac{d}{dt}h_{ij} - \Delta h_{ij} &= |A|^2h_{ij} - 2Hh_i^kh_{kj}, \\ \frac{d}{dt}\nu - \Delta\nu &= |A|^2\nu, \\ \frac{d}{dt}\langle X,\nu\rangle - \Delta\langle X,\nu\rangle &= -2H + |A|^2\langle X,\nu\rangle, \\ \frac{d}{dt}\tilde{v} - \Delta\tilde{v} &= |A|^2\tilde{v}, \\ \frac{d}{dt}v - \Delta v &= -v|A|^2 - \frac{2}{v}|\nabla v|^2, \\ \frac{d}{dt}|A|^2 - \Delta|A|^2 &= -2|\nabla A|^2 + 2|A|^4, \\ \frac{d}{dt}\left|\nabla^m A\right|^2 - \Delta\left|\nabla^m A\right|^2 &\le -2\left|\nabla^{m+1}A\right|^2 \\ &\quad + C(m,n)\sum_{i+j+k=m}\left|\nabla^m A\right|\cdot\left|\nabla^i A\right|\cdot\left|\nabla^j A\right|\cdot\left|\nabla^k A\right|, \end{aligned}$$

wobei $\nabla^m A$ die m-fache Ableitung von A bezeichnet.

Beweis. Bis auf die Evolutionsgleichungen für $|A|^2$ und $|\nabla^m A|^2$ folgt dies direkt aus den allgemeinen Evolutionsgleichungen des letzten Kapitels.

(i) Mit Hilfe der Evolutionsgleichungen von g_{ij} und h_{ij} erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|A|^2 - \Delta|A|^2 =& \frac{d}{dt}\left(h_{ij}g^{jk}h_{kl}g^{li}\right) - \Delta\left(h_{ij}g^{jk}h_{kl}g^{li}\right)\\ =& 2\left(\frac{d}{dt}h_{ij} - \Delta h_{ij}\right)g^{jk}h_{kl}g^{li}\\ &- 2h_{ij}g^{ja}g^{bk}h_{kl}g^{li}\frac{d}{dt}g_{ab} - 2g^{rs}h_{ij;r}g^{jk}h_{kl;s}g^{li}\\ =& 2|A|^4 - 4Hh_i^k h_k^j h_j^i + 4Hh_i^k h_k^j h_j^i - 2|\nabla A|^2,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Codazzigleichung benutzt haben.

(ii) Wir gehen wie bei [12, 13] vor. Da dies nicht direkt aus den obigen Überlegungen folgt, verlagern wir den Beweis in Lemmata im Rest des Abschnittes. □

Wir schreiben $S * T$ für Linearkombinationen von Kontraktionen von S und T, der Metrik g und ihrer Inversen.

Lemma 3.13. *Unter dem mittleren Krümmungsfluss gilt für die Christoffelsymbole*

$$\frac{d}{dt}\Gamma_{ij}^k = A * \nabla A.$$

Beweis. Die Differenz zweier Christoffelsymbole ist ein Tensor [17, Kapitel 3.5 (4.15) S. 75]. Somit gilt dies auch für die Zeitableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten. Nach Definition ist

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\right).$$

Wir differenzieren dies nach der Zeit und dürfen dabei die Zeitableitung mit den partiellen räumlichen Ableitungen vertauschen.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Gamma_{ij}^k =& -\frac{1}{2}g^{ka}\left(\frac{d}{dt}g_{ab}\right)g^{bl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\right)\\ &+ \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{d}{dt}g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{d}{dt}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{d}{dt}g_{ij}\right)\\ =& -g^{ka}\dot{g}_{ab}\Gamma_{ij}^b + \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(-2Hh_{lj}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(-2Hh_{il}) - \frac{\partial}{\partial x^l}(-2Hh_{ij})\right)\\ \overset{\Gamma=0}{=}& -g^{kl}\left(\nabla_i(Hh_{lj}) + \nabla_j(Hh_{il}) - \nabla_l(Hh_{ij})\right).\end{aligned}$$

Die linke Seite ist ein Tensor. In der letzten Gleichheit haben wir daher ein spezielles Koordinatensystem mit $\Gamma_{ij}^k = 0$ für alle i, j, k wählen dürfen. Das Ergebnis rechts ist nun auch ein Tensor und die angegebene Gleichheit gilt wieder in allgemeinen Koordinatensystemen. Die Behauptung können wir nun direkt aus der Formel ablesen. □

Lemma 3.14. *Sei B ein Tensor auf M_t, d. h. mit „lateinischen Indices", der unter dem mittleren Krümmungsfluss*

$$\frac{d}{dt}B - \Delta B = C$$

erfüllt. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\nabla B - \Delta\nabla B = \nabla C + A * \nabla A * B + A * A * \nabla B.$$

Beweis. Es gilt, wobei beim ersten $*$ keine zusätzlichen g oder g^{-1}-Terme auftreten, die man noch ableiten müsste,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\nabla_i B =& \frac{d}{dt}\left(B_{,i} + \Gamma_{i\cdot}^{\cdot} * B\right)\\ =& \left(\frac{d}{dt}B\right)_{,i} + \Gamma_{i\cdot}^{\cdot} * \frac{d}{dt}B + \frac{d}{dt}\Gamma_{i\cdot}^{\cdot} * B\\ =& \nabla_i \frac{d}{dt}B + A * \nabla A * B,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die beiden ersten Terme wieder zu einer kovarianten Ableitung kombinieren durften, da sie aus einer solchen entstanden sind.

Aufgrund der Vertauschungsregeln für kovariante Ableitungen aus der Differentialgeometrie gilt allgemein

$$\begin{aligned}\Delta\nabla_k B =& g^{ij}\nabla_i\nabla_j\nabla_k B\\ =& g^{ij}\nabla_i(\nabla_k\nabla_j B + B * \mathrm{Rm})\\ =& g^{ij}\nabla_k\nabla_i\nabla_j B + \nabla B * \mathrm{Rm} + B * \nabla\,\mathrm{Rm}\\ =& \nabla_k\Delta B + \nabla B * \mathrm{Rm} + B * \nabla\,\mathrm{Rm}\,.\end{aligned}$$

Für Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt $\mathrm{Rm} = A * A$. Somit erhalten wir

$$\Delta\nabla B = \nabla\Delta B + \nabla B * A * A + B * \nabla A * A.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\nabla B - \Delta\nabla B =& \nabla\left(\frac{d}{dt}B - \Delta B\right) + A * \nabla A * B + A * A * \nabla B\\ =& \nabla C + A * \nabla A * B + A * A * \nabla B\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Korollar 3.15. *Für den mittleren Krümmungsfluss gilt*

$$\frac{d}{dt}\nabla^m A - \Delta\nabla^m A = \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A * \nabla^j A * \nabla^k A.$$

Beweis. Benutze die Evolutionsgleichung $\frac{d}{dt}A - \Delta A = A * A * A$, Induktion und Lemma 3.14. □

Lemma 3.16. *Für den mittleren Krümmungsfluss gilt*

$$\frac{d}{dt}\left|\nabla^m A\right|^2 - \Delta\left|\nabla^m A\right|^2 = -2\left|\nabla^{m+1}A\right|^2 + \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A * \nabla^j A * \nabla^k A * \nabla^m A.$$

Beweis. Benutze die Produktregel und Korollar 3.15. □

4. Ganze Graphen

4.1. **Überblick und Gradientenschranken.** Für ganze Graphen haben K. Ecker und G. Huisken den folgenden Existenzsatz bewiesen [8, Theorem 5.1]

Theorem 4.1. *Sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz stetig. Dann gibt es eine Funktion $u \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, die*

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,t) \to u_0 & \text{für } t \searrow 0 \text{ in } C^0_{loc}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

löst.

Beweisstrategie.

(i) Approximiere u_0 durch glatte Funktionen. Daher werden wir nachfolgend annehmen, dass u_0 glatt ist.

(ii) Sei $R > 0$. Wir betrachten eine Folge von Dirichletproblemen

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } B_{3R}(0) \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_R & \text{in } B_{3R}(0), \\ u(\cdot,t) = 0 & \text{auf } \partial B_{3R}(0) \text{ für alle } t \geq 0, \end{cases}$$

wobei u_R glatt ist, $u_R = u_0$ in $B_R(0)$ und $u_R = 0$ in $B_{3R}(0) \setminus B_{2R}(0)$ erfüllt. Nach Theorem 1.17 besitzt dieses Dirichletproblem eine glatte Lösung u^R für alle $t \geq 0$. Am Ende wollen wir den Grenzwert $R \to \infty$ betrachten um eine Lösung zu erhalten.

(iii) Um im Grenzwert $R \to \infty$ eine Teilfolge zu erhalten, die gegen eine Lösung konvergiert, benötigen wir lokale a priori Abschätzungen.

(iv) Sphären liefern lokale C^0-Schranken.

(v) Die Gradientenabschätzung dafür zeigen wir in Theorem 4.2.

(vi) Weiterhin gelten für Ableitungen der zweiten Fundamentalform A innere Abschätzungen der Form

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}r}(x_0)} |\nabla^m A|^2(\cdot,t) \leq c\left(m, n, \sup_{B_r(x_0)\times[0,t]} |Du|\right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{t}\right)^{m+1},$$

falls sich eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses über $B_r(x_0)$ als Graph schreiben lässt, siehe [8, Corollary 3.5]. Auch die später behandelte Form, die sich einfacher zeigen lässt, ist ausreichend.

(vii) Nach Arzelà-Ascoli gibt es nun eine Teilfolge von $\left(u^R\right)_R$, die für $R \to \infty$ wie gewünscht gegen eine Lösung $u \in C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ konvergiert. Wir erhalten die gewünschte Differentialgleichung. Die a priori-Schranken bleiben auch für den Grenzwert gültig. Nachfolgend kümmern wir uns um die Anfangswerte.

(viii) Wegen $|H| \leq \sqrt{n}|A| \leq \frac{c}{\sqrt{t}}$ nahe $t = 0$ werden die Anfangswerte für $t = 0$ angenommen. Im Detail: Es gilt

$$|u(x,t_1) - u(x,t_2)| \leq c \cdot \left|\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}\right|.$$

Somit erhalten wir für festes $x \in \mathbb{R}^n$ eine Cauchyfolge für $t \searrow 0$. Daher können wir $u^0(x) := \lim\limits_{t\searrow 0} u(x,t)$ definieren und erhalten $|u^0(x) - u(x,t_2)| \leq c \cdot \sqrt{t_2}$. Wir wollen nun noch $u^0 = u_0$ zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} &\left|u^0(x) - u_0(x)\right| \\ \leq{}& \left|u^0(x) - u(x,t)\right| + \left|u(x,t) - u^R(x,t)\right| + \left|u^R(x,t) - u_0(x)\right| \end{aligned}$$

$$\leq c \cdot \sqrt{t} + \left|u(x,t) - u^R(x,t)\right| + c \cdot \sqrt{t}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir fixieren $t > 0$ hinreichend klein und erhalten, dass der erste und analog der dritte Term auf der rechten Seite kleiner als ε sind. Aufgrund der aus Arzelà-Ascoli gefolgerten Konvergenz erhalten wir nun, dass der mittlere Term für ein großes R durch ε beschränkt ist. Somit folgt $u^0 = u_0$. Wir erhalten die Abschätzung

$$|u_0(x) - u(x,t)| \leq c \cdot \sqrt{t}$$

für glatte Anfangsdaten u_0. Diese gilt bei lokal gleichmäßigen Lipschitzschranken mit einer von u unabhängigen Konstanten c.

(ix) Wir haben zunächst angenommen, dass u_0 glatt ist. Ist dies nicht der Fall, so starten wir mit Anfangswerten $u_0^\varepsilon(x) \to u_0(x)$ für $\varepsilon \searrow 0$. Konstruieren wir u_0^ε durch Faltung, so sind die Funktionen gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leq 1$ lokal Lipschitz. Diese glatten Anfangsdaten werden aufgrund der obigen Überlegung angenommen und es gilt $|u^\varepsilon(x,t) - u_0^\varepsilon(x)| \leq c \cdot \sqrt{t}$, mit für (x,t) aus einer kompakten Menge unabhängig von $\varepsilon > 0$ gleichmäßig beschränktem c. Weiterhin wird der Grenzwert u mit Arzelà-Ascoli definiert, es gilt also ohne Einschränkung $u^\varepsilon(x,t) \to u(x,t)$ für $\varepsilon \searrow 0$. Wir sehen, dass u ebenfalls die Differentialgleichung erfüllt. Die a priori-Schranken bleiben auch hier beim Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ erhalten. Wir erhalten weiterhin

$$\begin{aligned}
&|u_0(x) - u(x,t)| \\
&\leq |u_0(x) - u_0^\varepsilon(x)| + |u_0^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x,t)| + |u^\varepsilon(x,t) - u(x,t)|\,.
\end{aligned}$$

Der mittlere Term ist aufgrund der obigen Überlegungen für glatte Anfangsdaten durch $c \cdot \sqrt{t}$ abgeschätzt, die beiden äußeren Terme werden für $\varepsilon \searrow 0$ wie oben beschrieben klein. Daher folgt

$$|u_0(x,t) - u(x,t)| \leq c \cdot \sqrt{t}$$

und die Anfangswerte werden auch für Lipschitzstartwerte angenommen. □

Für die folgenden a priori Schranken nehmen wir stets an, dass $(M_t)_t$ eine glatte Familie von Hyperflächen ist, die den graphischen mittleren Krümmungsfluss (zumindest in) $B_{R+1}(\hat{x}_0) \times [0,\infty)$ mit $x_0 = \left(\hat{x}_0, x_0^{n+1}\right)$ löst.

Wir erhalten die folgenden Gradientenschranken.

Theorem 4.2 ([8, Theorem 2.1])**.** *Seien $R > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Definiere*

$$\varphi(x,t) := R^2 - |x - x_0|^2 - 2nt.$$

Bezeichne $\varphi_+ := \max\{\varphi, 0\}$ den positiven Teil von φ. Dann gilt für Lösungen $u \in C^\infty(B_R(\hat{x}_0) \times (0,T)) \cap C^1(B_R(\hat{x}_0) \times [0,T])$ des graphischen mittleren Krümmungsflusses

$$v\varphi_+ \leq \sup_{M_0} v\varphi_+.$$

Wir geben einen technisch etwas einfacheren Beweis als in der Originalarbeit.

Beweis. Definiere $w := v\varphi_+$, genauer:

$$w(p,t) = v(p,t) \cdot \varphi_+(X(p,t),t).$$

Wir betrachten stets nur die Menge

$$\{(p,t)\colon \varphi(X(p,t),t) > 0\}.$$

Am räumlichen Rand dieser Menge gilt $w = 0$. (Genaugenommen müssen wir zunächst mit etwas verkleinerten Radien $R > 0$ arbeiten um sicherzustellen, dass dies auch für

$t = 0$ richtig ist und dann wieder den ursprünglichen Radius approximieren.) Sei ohne Einschränkung $x_0 = 0$.

Zunächst leiten wir die Evolutionsgleichung von φ her. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi - \Delta\varphi =& \underline{-2\langle X, \dot{X}\rangle} - 2n - g^{ij}\left(\underline{-2\langle X, X_{ij}\rangle} - 2\langle X_i, X_j\rangle\right)\\ =& -2n + 2n = 0.\end{aligned}$$

In einem positiven räumlichen Maximum von w gilt

$$0 = \nabla w = \nabla v \cdot \varphi + v\nabla\varphi, \quad \text{also} \quad \nabla\varphi = -\varphi\frac{1}{v}\nabla v.$$

Somit erhalten wir dort

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}w - \Delta w =& \left(\frac{d}{dt}v - \Delta v\right)\varphi + v\left(\frac{d}{dt}\varphi - \Delta\varphi\right) - 2\langle\nabla v, \nabla\varphi\rangle\\ =& \varphi\left(-v|A|^2 - \underline{\frac{2}{v}|\nabla v|^2}\right) + v\cdot 0 + \underline{2\frac{\varphi}{v}|\nabla v|^2} \le 0.\end{aligned}$$

Daher folgt die Behauptung aus dem Maximumprinzip. □

Im folgenden Theorem erhalten wir eine Gradientenabschätzung, die auch für große Zeiten gilt.

Theorem 4.3 ([8, Theorem 2.3]). *Sei $u \in C^\infty(B_R(z_0) \times (0, T)) \cap C^1(B_R(z_0) \times [0, T])$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses auf $B_R(z_0) \times (0, T)$. Dann gibt es Konstanten $C_1 = C_1(n)$ und $C_2 = C_2(n)$, so dass für alle $0 \le t \le T$*

$$v(z_0, t) \le C_1 \cdot \sup_{B_R(z_0)} v(\cdot, 0) \cdot \exp\left(C_2\frac{1}{R^2}\sup_{t\in[0,T]}\left(\left(\sup_{B_R(z_0)\times[0,T]} u\right) - u(z_0, t)\right)^2\right)$$

gilt.

Wir bemerken, dass die rechte Seite der Abschätzung unendlich und damit die Aussage trivial wird, wenn der Anfangswert nicht lipschitzstetig ist oder u am Rand unbeschränkt wird.

Beweis von Theorem 4.3. Wir folgen der Originalarbeit und bauen die untersuchte Funktion allmählich auf. Nach horizontaler Verschiebung dürfen wir ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen. Weiterhin betrachten wir lediglich den Fall $R = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann durch Skalieren: Ist $u\colon B_R(0) \times [0, T] \to \mathbb{R}$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses, so auch $\tilde{u}\colon B_1(0) \times [0, T/R^2] \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{R}u(Rx, R^2t)$. Wegen $\nabla\tilde{u}(x, t) = \nabla u(Rx, R^2t)$ ändert sich v dabei nicht und die $1/R^2$-Skalierung in der Exponentialfunktion ergibt sich gerade, wenn wir die Abschätzung mit $R = 1$ auf $\tilde{u}$ anwenden und dann mit u umschreiben. Da T nicht explizit in der Abschätzung auftritt, schreiben wir nun wieder T statt T/R^2. Nach vertikaler Verschiebung dürfen wir schließlich ohne Einschränkung $u \le -1$ in $B_R(0) \times [0, T]$ und sogar

$$\sup_{B_R(0)\times[0,T]} u = -1$$

annehmen.

Wir rechnen ab jetzt auf der Mannigfaltigkeit. Dies bedeutet insbesondere, dass wir

$$u = \langle X, \zeta\rangle = X^{n+1}$$

mit $\zeta = e_{n+1}$ verwenden und somit

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) u = 0$$

gilt. Sei $\eta = \eta(x,t) \geq 0$ eine glatte Funktion mit $\eta(\cdot,t) \in C_c^\infty(B_1(0))$ für alle $t \in [0,T]$. Nehme an, dass

$$\sup_{B_1(0)\times[0,T]} (v\eta) = (v\eta)(x_0,t_0)$$

für eine $t_0 \in (0,T]$ und ein $x_0 \in B_1(0)$ gilt. (Im Fall $t_0 = 0$ ist die Behauptung quasi trivial und wir können dem Beweis ab (4.2) weiter folgen.) Dann folgen in (x_0,t_0)

$$\nabla(v\eta) = 0$$

und

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(v\eta) \geq 0.$$

Als Vorbereitung berechnen wir unter Benutzung der Maximalbedingung und der Evolutionsgleichung von v

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla(v\eta) = \eta\nabla v + v\nabla\eta,\\
\nabla\eta &= -\frac{\eta}{v}\nabla v,\\
-2\langle\nabla v,\nabla\eta\rangle &= 2\frac{\eta}{v}|\nabla v|^2,\\
0 &\leq \left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(v\eta)\\
&= \eta\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)v + v\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta - 2\langle\nabla v,\nabla\eta\rangle\\
&= \eta\left(-v|A|^2 - \frac{2}{v}|\nabla v|^2\right) + v\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta + 2\frac{\eta}{v}|\nabla v|^2\\
&= v\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta - v\eta|A|^2.
\end{aligned}$$

Wegen $v \geq 1$ und $\eta \geq 0$ folgt daraus

$$0 \leq \left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta. \tag{4.1}$$

Sei nun speziell η von der Form

$$\eta = -1 + \exp(\lambda\varphi)$$

mit $\lambda > 0$ und mit $\beta > 0$

$$\varphi = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\beta}u + 1 - (|X|^2 - u^2)\right)_+ & \text{für } X \in B_1(0)\times\mathbb{R},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Am Rand $\partial B_1(0)\times\mathbb{R}$ ist $|X|^2 - u^2 = 1$. Da auch $u < 0$ für $X \in B_1(0)\times\mathbb{R}$ gilt, ist φ eine Lipschitzfunktion, die nur für $X \in B_1(0)\times\mathbb{R}$ von Null verschieden sein kann. In der Menge, in der φ positiv ist, ist φ glatt und wir können dort wie gewohnt rechnen. Es gilt dort

$$\nabla\varphi = \frac{1}{2\beta}\nabla u - \nabla\left(|X|^2 - u^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
|\nabla\varphi|^2 &= \frac{1}{4\beta^2}|\nabla u|^2 + \left|\nabla\left(|X|^2-u^2\right)\right|^2 - \frac{1}{\beta}\left\langle \nabla u, \nabla\left(|X|^2-u^2\right)\right\rangle,\\
\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\varphi &= \frac{1}{2\beta}\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)u - \left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\left(|X|^2-u^2\right)\\
&= 0-(-2n)+2u\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)u-2|\nabla u|^2\\
&= 2n+0-2|\nabla u|^2\\
&\le 2n,
\end{aligned}
$$

wobei wir am Ende die Evolutionsgleichungen für den mittleren Krümmungsfluss genutzt haben. Aus der Evolutionsgleichung für η, siehe (4.1), und der direkt darauf folgenden Definition von η mittels φ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\dot\eta &= \lambda e^{\lambda\varphi}\dot\varphi,\\
\nabla\eta &= \lambda e^{\lambda\varphi}\nabla\varphi,\\
\Delta\eta &= \lambda e^{\lambda\varphi}\Delta\varphi + \lambda^2 e^{\lambda\varphi}|\nabla\varphi|^2,\\
0 &\le \left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\eta\\
&= \lambda e^{\lambda\varphi}\left[\dot\varphi-\Delta\varphi-\lambda|\nabla\varphi|^2\right],\\
\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)\varphi &\ge \lambda|\nabla\varphi|^2,\\
2n &\ge \lambda\left(\frac{1}{4\beta^2}|\nabla u|^2-\frac{1}{\beta}\left\langle\nabla u,\nabla\left(|X|^2-u^2\right)\right\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite rechnen wir nun genauer aus.

$$
\begin{aligned}
u &= \langle X,\zeta\rangle,\\
\nabla u &= \langle \nabla X,\zeta\rangle,\\
\nabla\left(|X|^2-u^2\right) &= 2\langle X,\nabla X\rangle - 2u\langle\nabla X,\zeta\rangle,\\
\left\langle\nabla u,\nabla\left(|X|^2-u^2\right)\right\rangle &= \zeta_\alpha X_i^\alpha g^{ij}\left(2X_j^\beta\delta_{\beta\gamma}X^\gamma-2u\zeta_\beta X_j^\beta\right)\\
&= 2\zeta_\alpha X_i^\alpha g^{ij}X_j^\beta\delta_{\beta\gamma}X^\gamma - 2u\zeta_\alpha X_i^\alpha g^{ij}X_j^\beta\zeta_\beta\\
&= 2\zeta_\alpha\left(\delta^{\alpha\beta}-\nu^\alpha\nu^\beta\right)\delta_{\beta\gamma}X^\gamma - 2u\zeta_\alpha\left(\delta^{\alpha\beta}-\nu^\alpha\nu^\beta\right)\zeta_\beta\\
&= 2\langle\zeta,X\rangle - 2\langle\zeta,\nu\rangle\langle\nu,X\rangle - 2u\langle\zeta,\zeta\rangle + 2u\langle\zeta,\nu\rangle^2\\
&= 2u + 2\frac{1}{v}\langle\nu,X\rangle - 2u\cdot 1 + 2u\frac{1}{v^2}\\
&= 2\frac{1}{v}\langle\nu,X\rangle + 2u\frac{1}{v^2}.
\end{aligned}
$$

Die hier verwendete Beziehung

$$X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta = \delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha\nu^\beta$$

besagt, dass die linke Seite auf den Tangentialraum projiziert. Man überprüft sie direkt, indem man sie mit ν und den Tangentialvektoren X_i, $1\le i\le n$, testet. Das Skalarprodukt

$\langle \nu, X\rangle$ behandeln wir in graphischer Notation und erhalten

$$\begin{aligned}\langle \nu, X\rangle &= \left\langle \frac{(\nabla u, -1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, (x,u)\right\rangle\\ &= \frac{\langle \nabla u, x\rangle}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{u}{v}\\ &\le \frac{|\nabla u|\cdot|x|}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \frac{u}{v}\\ &\le 1-\frac{u}{v},\end{aligned}$$

da $x\in B_1(0)$. Somit erhalten wir, nun wieder als Rechnung auf den Hyperflächen M_t,

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla u, \nabla\left(|X|^2-u^2\right)\right\rangle &\le 2\frac{1}{v} - 2\frac{u}{v^2} - 2u\frac{1}{v^2}\\ &= \frac{2}{v},\\ |\nabla u|^2 &= |\nabla\langle \zeta, X\rangle|^2\\ &= \zeta_\alpha X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \zeta_\beta\\ &= \zeta_\alpha\left(\delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha\nu^\beta\right)\zeta_\beta\\ &= \zeta_\alpha\delta^{\alpha\beta}\zeta_\beta - (\zeta_\alpha\nu^\alpha)^2\\ &= |\zeta|^2 - \langle\zeta,\nu\rangle^2\\ &= 1-\frac{1}{v^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$2n \ge \lambda\left(\frac{1}{4\beta^2}\left(1-\frac{1}{v^2}\right) - \frac{1}{\beta}\frac{2}{v}\right).$$

Nun fixieren wir $\lambda = 64n\beta^2$. Dann ergibt sich im Maximum von $v\eta$

$$\begin{aligned}2n &\ge 64n\beta^2\left(\frac{1}{4\beta^2}\left(1-\frac{1}{v^2}\right) - \frac{1}{\beta}\frac{2}{v}\right),\\ 1 &\ge 32\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{v^2} - \frac{2\beta}{v}\right)\\ &= 8 - 8\frac{1}{v^2} - 64\beta\frac{1}{v},\\ 0 &\ge 7v^2 - 64\beta v - 8\\ &= 7\left(\left(v-\frac{32}{7}\beta\right)^2 - \left(\frac{32}{7}\right)^2\beta^2 - \frac{8}{7}\right),\\ v-\frac{32}{7}\beta &\le \sqrt{\left(\frac{32}{7}\right)^2\beta^2 + \frac{8}{7}} \le \frac{32}{7}\beta + 2,\\ v &\le 2+10\beta.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir wegen $\varphi \le 1$

$$v\eta \le \max_{M_{t_0}}(v\eta) \le (2+10\beta)\sup_{M_{t_0}}\eta$$

$$\leq (2+10\beta)e^{\lambda} = (2+10\beta)e^{64n\beta^2}.$$

Auf $\{0\}\times\mathbb{R}$ gilt $|X|^2 = u^2$. Dort schreiben wir laxerweise wieder $u(0,t_0)$ sowie $v(0,\cdot)$ und erhalten nochmals wegen $\varphi \leq 1$ für $t \in [0,T]$, auch im Falle, dass $t_0 = 0$ war,

$$\begin{aligned}
&\left[e^{64n\beta^2\left(\frac{1}{2\beta}u(0,t)+1\right)_+} - 1\right] v(0,t) \\
&\leq \sup_{M_0\cap(B_1(0)\times\mathbb{R})} (\eta v) + (2+10\beta)e^{64n\beta^2} \\
&\leq e^{\lambda} \sup_{M_0\cap(B_1(0)\times\mathbb{R})} v + (2+10\beta)e^{64n\beta^2} \\
&= e^{64n\beta^2}\left(\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0) + (2+10\beta)\right),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei wir v zuletzt wieder graphisch betrachtet haben. Wir setzen nun

$$\beta := \sup_{t\in[0,T]} -u(0,t) = \sup_{t\in[0,T]} |u(0,t)| \geq 1,$$

wobei $\beta \geq 1$ nach Annahme $u \leq -1$ gilt. Die Klammer auf der linken Seite unserer Abschätzung mit $v(0,t)$ wollen wir weiter nach unten abschätzen. Dafür reicht $u < 0$ nicht, wir benutzen auch $u \leq -1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\beta}u(0,t)+1\right)_+ \\
&\geq \left(\frac{1}{2\beta}\left(-\sup_{t\in[0,T]}|u(0,t)|\right)+1\right)_+ \\
&= \left(\frac{1}{2\beta}(-\beta)+1\right)_+ = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}, \\
&\left[e^{64n\beta^2\left(\frac{1}{2\beta}u(0,t)+1\right)_+} - 1\right] \\
&\geq e^{64n\beta^2\frac{1}{2}} - 1 \\
&\geq e^{32} - 1 \geq 1,
\end{aligned}$$

wobei wir hier eine strikt positive untere Schranke für β benutzt haben. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
v(0,t) &\leq e^{64n\beta^2}\left(\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0) + (2+10\beta)\right) \\
&= e^{64n\beta^2}\left(\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0) + (2+10\beta)\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0)\right) \\
&= e^{64n\beta^2}(3+10\beta)\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0) \\
&\leq e^{64n\beta^2}\left(e^{10\beta^2}+e^{10\beta^2}\right)\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0) \\
&\leq e^{64n\beta^2+10\beta^2}\cdot 2\cdot \sup_{B_1(0)} v(\cdot,0) \\
&\leq e^{64n\beta^2+10\beta^2+\beta^2}\cdot \sup_{B_1(0)} v(\cdot,0)
\end{aligned}$$

$$\equiv \exp\left(C(n)\left(\sup_{t\in[0,T]} -u(0,t)\right)^2\right)\cdot \sup_{B_1(0)} v(\cdot,0).$$

Wir erinnern uns, dass

$$\sup_{B_1(0)\times[0,T]} -u = -1$$

gilt. Damit können wir den Faktor in der Exponentialfunktion in die gewünschte Gestalt bringen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\left(\sup_{t\in[0,T]} -u(0,t)\right)^2\\
&= \sup_{t\in[0,T]} (-u(0,t))^2\\
&= \sup_{t\in[0,T]} (1-1-u(0,t))^2\\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left(1+\left(\sup_{B_1(0)\times[0,T]} u\right)-u(0,t)\right)^2\\
&\equiv \sup_{t\in[0,T]} (1+M-u(0,t))^2\\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left(1+2\cdot 1(M-u(0,t))+(M-u(0,t))^2\right)\\
&\le \sup_{t\in[0,T]} \left(2+2(M-u(0,t))^2\right)\\
&= 2+2\sup_{t\in[0,T]} (M-u(0,t))^2.
\end{aligned}$$

Nach Anwenden der Exponentialfunktion erhalten wir gerade

$$v(0,t)\le C_1(n)\sup_{B_1(0)} v(\cdot,0)\cdot\exp\left(C_2(n)\sup_{t\in[0,T]}\left(\left(\sup_{B_1(0)\times[0,T]} u\right)-u(0,t)\right)^2\right)$$

wie behauptet. □

Den exponentiellen Anteil kann man mit Hilfe der Oszillation oder der Supremumsnorm prägnanter aufschreiben. Indem wir das Theorem auf alle Mengen der Form $B_{R/2}(y)\times[0,T]$ für $y\in B_{R/2}(x_0)$ gleichzeitig anwenden, erhalten wir zudem noch eine lokale Abschätzung.

Korollar 4.4. *Sei $u\in C^\infty(B_R(z_0)\times(0,T))\cap C^1(B_R(x_0)\times[0,T])$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses. Dann gibt es Konstanten $C_1=C_1(n)$ und $C_2=C_2(n)$, so dass*

$$\sup_{B_{R/2}(z_0)\times[0,T]} v\le C_1\cdot\sup_{B_R(z_0)} v(\cdot,0)\cdot\exp\left(C_2\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\|u\|_{L^\infty(B_R(z_0)\times[0,T])}\right)$$

gilt.

4.2. **Krümmungsschranken.** Zunächst leiten wir eine auch später nützliche Evolutionsgleichung her. Hilfreich ist hier insbesondere der Term $-2kg^2$.

Lemma 4.5. *Unter dem graphischen mittleren Krümmungsfluss erfüllt*

$$g = |A|^2\frac{v^2}{1-kv^2} \equiv |A|^2\cdot\varphi(v^2)$$

die Evolutionsgleichung

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)g \le -2kg^2 - \frac{2k}{(1-kv^2)^2}|\nabla v|^2 g - 2\varphi v^{-3}\langle\nabla v, \nabla g\rangle,$$

falls $k>0$ so klein gewählt ist, dass $1-kv^2>0$ gilt.

Beweis. Wir rechnen zunächst mit einer allgemeinen Funktion $\varphi>0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot g &= \left(\frac{d}{dt}|A|^2\right)\varphi + |A|^2\varphi' 2v\dot v,\\
g_i &= |A|^2_{;i}\varphi + |A|^2\varphi' 2vv_i,\\
g_{ij} &= |A|^2_{;ij}\varphi + |A|^2\varphi' 2vv_{ij}\\
&\quad + |A|^2_{;i}\varphi' 2vv_j + |A|^2_{;j}\varphi' 2vv_i\\
&\quad + |A|^2\varphi'' 4v^2 v_i v_j + |A|^2\varphi' 2v_i v_j,\\
\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)g &= \left(\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)|A|^2\right)\varphi + 2|A|^2\varphi' v\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)v\\
&\quad - 2\varphi' v\left\langle\nabla|A|^2,\nabla v\right\rangle - 2\varphi' v\left\langle\nabla|A|^2,\nabla v\right\rangle\\
&\quad - |A|^2\left(2\varphi'' v^2+\varphi'\right)|\nabla v|^2\\
&\le \left(2|A|^4 - 2|\nabla A|^2\right)\varphi + 2|A|^2\varphi' v\left(-v|A|^2 - \frac{2}{v}|\nabla v|^2\right)\\
&\quad - 2\varphi' v\left\langle\nabla\left(|A|^2\varphi\frac{1}{\varphi}\right),\nabla v\right\rangle + 4\varphi' v|A|\cdot|\nabla A|\cdot|\nabla v|\\
&\quad - |A|^2\left(2\varphi'' v^2+\varphi'\right)|\nabla v|^2\\
&\le 2|A|^4\left(\varphi-\varphi' v^2\right) - 2|\nabla A|^2\varphi\\
&\quad - 2\frac{\varphi'}{\varphi}v\langle\nabla g,\nabla v\rangle + 2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}v|A|^2\varphi 2v|\nabla v|^2\\
&\quad + 2|\nabla A|^2\varphi + 2\frac{\varphi'^2}{\varphi}v^2|A|^2|\nabla v|^2\\
&\quad - 2|A|^2\left(2\varphi'' v^2 + \varphi' + 2\varphi'\right)|\nabla v|^2\\
&= 2|A|^4\left(\varphi-\varphi' v\right) - 2\frac{\varphi'}{\varphi}v\langle\nabla g,\nabla v\rangle\\
&\quad - 2|A|^2\left(2\varphi'' v^2 + 3\varphi' - 3\frac{\varphi'^2}{\varphi}v^2\right)|\nabla v|^2.
\end{aligned}$$

Kombinationen von Ausdrücken mit φ betrachten wir separat und erhalten für unsere spezielle Funktion φ mit $x=v^2$

$$\varphi(x) = \frac{x}{1-kx},$$

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{1-kx} + \frac{kx}{(1-kx)^2} = \frac{1}{(1-kx)^2},\\
\varphi''(x) &= 2\frac{k}{(1-kx)^3},\\
\varphi - \varphi' x &= \frac{x}{1-kx} - \frac{x}{(1-kx)^2} = -\frac{kx^2}{(1-kx)^2} = -k\varphi^2,\\
\frac{\varphi'}{\varphi} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1-kx} = \frac{1}{x^2}\varphi = \frac{1}{v^4}\varphi,\\
2\varphi'' x + 3\varphi' - 3\frac{\varphi'^2}{\varphi}x &= 4\frac{kx}{(1-kx)^3} + 3\frac{1}{(1-kx)^2} - 3\frac{1}{(1-kx)^3}\\
&= \frac{4kx + 3 - 3kx - 3}{(1-kx)^3} = \frac{kx}{(1-kx)^3} = \frac{k}{(1-kv^2)^2}\varphi.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) g &\le -2k|A|^4\varphi^2 - 2\varphi\frac{1}{v^3}\langle \nabla g, \nabla v\rangle - 2\frac{k}{(1-kv^2)^2}\varphi|A|^2|\nabla v|^2\\
&= -2kg^2 - \frac{2k}{(1-kv^2)^2}|\nabla v|^2 g - 2\varphi\frac{1}{v^3}\langle \nabla g, \nabla v\rangle
\end{aligned}
$$

wie behauptet. □

Für unsere Abschneidefunktion erhalten wir

Lemma 4.6. *Unter dem (graphischen) mittleren Krümmungsfluss erfüllt*

$$
\eta = \left(R^2 - r\right)^2
$$

mit

(i) $r = |X|^2 + 2nt$ *und*
(ii) $r = |X|^2 - u^2$

in der Menge mit $r \le R^2$ *und* $t \ge 0$ *die Abschätzung*

$$
\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta \le 2c(n)R^2 - 2|\nabla r|^2.
$$

Beweis. Im Beweis wollen wir nicht die genaue Gestalt von $r = r(X,t) \ge 0$ benutzen, sondern nur, dass die folgenden beiden Abschätzungen gelten:

$$
\left|\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) r\right| \le C(n) \quad \text{und} \quad |\nabla r|^2 \le C(n) r.
$$

Dazu rechnen wir diese Abschätzung für die beiden betrachteten Funktionen zunächst separat nach.

(i) Sei zunächst $r = |X|^2 + 2nt$. Wie bei den Gradientenabschätzungen nutzen wir $X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta = \delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha \nu^\beta$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) r\right| &= \left|2\left\langle X, \dot{X}\right\rangle + 2n - 2\langle X, \Delta X\rangle - 2|\nabla X|^2\right|\\
&\le 2n + 2|\nabla X|^2\\
&= 2n + 2X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \delta_{\alpha\beta}\\
&= 2n + 2\left(\delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha\nu^\beta\right)\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

$$= 2n + 2(n+1) - 2|\nu|^2 = 4n.$$

Wir nutzen diese Identität nochmals und erhalten

$$\begin{aligned}
|\nabla r|^2 &= 4\langle X, X_i\rangle g^{ij}\langle X_j, X\rangle \\
&= 4X^\alpha \delta_{\alpha\beta} X_i^\beta g^{ij} X_j^\gamma \delta_{\gamma\varepsilon} X^\varepsilon \\
&= 4X^\alpha \delta_{\alpha\beta}\left(\delta^{\beta\gamma} - \nu^\beta \nu^\gamma\right)\delta_{\gamma\varepsilon} X^\varepsilon \\
&= 4|X|^2 - 4\langle X, \nu\rangle^2 \\
&\le 4r
\end{aligned}$$

wie behauptet.

(ii) Sei nun $r = |X|^2 - u^2 \equiv |X|^2 - \langle X, \zeta\rangle^2$ mit $\zeta = e_{n+1}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) r &= 2\left\langle X, \dot{X} - \Delta X\right\rangle - 2|\nabla X|^2 - 2u\left\langle \zeta, \dot{X} - \Delta X\right\rangle + 2|\nabla u|^2 \\
&= 0 - 2X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \delta_{\alpha\beta} - 0 + 2\zeta_\alpha X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \zeta_\beta \\
&= -2(n+1-1) + 2\left(1 - \langle \zeta, \nu\rangle^2\right)
\end{aligned}$$

und somit die erste Ungleichung, auch mit Beträgen. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
|\nabla r|^2 &= \left(2X_\alpha X_i^\alpha - 2u\zeta_\alpha X_i^\alpha\right) g^{ij}\left(2X_\beta X_j^\beta - 2u\zeta_\beta X_j^\beta\right) \\
&= 4(X_\alpha - u\zeta_\alpha)\left(\delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha \nu^\beta\right)(X_\beta - u\zeta_\beta) \\
&= 4|X|^2 - 8u\langle X, \zeta\rangle + 4u^2 - 4\langle X, \nu\rangle^2 + 8u\langle X, \nu\rangle\langle \nu, \zeta\rangle - 4u^2\langle \zeta, \nu\rangle^2 \\
&= 4\left(|X|^2 - u^2\right) - 4\left(\langle X, \nu\rangle - u\langle \nu, \zeta\rangle\right)^2 \\
&\le 4r
\end{aligned}$$

wie behauptet.

(iii) Nun erhalten wir in einer direkten Rechnung

$$\begin{aligned}
\eta &= \left(R^2 - r\right)^2, \\
\dot{\eta} &= -2\left(R^2 - r\right)\dot{r}, \\
\eta_i &= -2\left(R^2 - r\right) r_i, \\
\eta_{ij} &= -2\left(R^2 - r\right) r_{ij} + 2r_i r_j, \\
\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta &= -2\left(R^2 - r\right)(\dot{r} - \Delta r) - 2|\nabla r|^2 \\
&\le 2C(n)R^2 - 2|\nabla r|^2
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Lemma 4.7. *Unter dem graphischen mittleren Krümmungsfluss erfüllt $g\eta$ in Punkten mit $\eta > 0$ die Ungleichung*

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(g\eta) \le -2kg^2\eta - 2\left\langle \varphi v^{-3}\nabla v + \eta^{-1}\nabla\eta, \nabla(g\eta)\right\rangle + C(n)\left(\left(1 + \frac{1}{kv^2}\right) r + R^2\right) g.$$

Beweis. Unter Berücksichtigung der bereits hergeleiteten Abschätzungen für g und η erhalten wir

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(g\eta) = \eta\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) g + g\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta - 2\langle \nabla g, \nabla\eta\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&\le -2kg^2\eta - \frac{2k}{(1-kv^2)^2}|\nabla v|^2 g\eta - 2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla g\rangle \eta \\
&\quad + g\left(2c(n)R^2 - 2|\nabla r|^2\right) - 2\langle \nabla g, \nabla \eta\rangle.
\end{aligned}
$$

Die Terme mit ∇g betrachten wir genauer. Es gelten

$$
\begin{aligned}
-2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla g\rangle \eta &= -2\varphi v^{-3}\left\langle \nabla v, \nabla\left(g\eta\frac{1}{\eta}\right)\right\rangle \eta \\
&= -2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla(g\eta)\rangle + 2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla \eta\rangle g\eta\frac{1}{\eta^2}\eta \\
&= -2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla(g\eta)\rangle - 4\varphi v^{-3}(R^2 - r)\langle \nabla v, \nabla r\rangle g \\
&\le -2\varphi v^{-3}\langle \nabla g, \nabla(g\eta)\rangle + \frac{2k}{(1-kv^2)^2}|\nabla v|^2 g\eta \\
&\quad + 2\varphi^2 v^{-6}\frac{(1-kv^2)^2}{k}g|\nabla r|^2 \\
&= -2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla(g\eta)\rangle + \frac{2k}{(1-kv^2)^2}|\nabla v|^2 g\eta + \frac{2}{kv^2}g|\nabla r|^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
-2\langle \nabla g, \nabla \eta\rangle &= -2\left\langle \nabla\left(g\eta\frac{1}{\eta}\right), \nabla\eta\right\rangle \\
&= -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(g\eta), \nabla \eta\rangle + 2g\eta\frac{1}{\eta^2}|\nabla\eta|^2 \\
&= -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(g\eta), \nabla \eta\rangle + 2g\frac{1}{\eta}4\left(R^2 - r\right)^2|\nabla r|^2 \\
&= -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(g\eta), \nabla \eta\rangle + 8g|\nabla r|^2.
\end{aligned}
$$

Nun berücksichtigen wir, dass $|\nabla r|^2 \le C(n)\cdot r$ gilt. Setzen wir nun unsere beiden Abschätzungen für die Terme mit ∇g in die Evolutionsgleichung von $g\eta$ ein, so sehen wir, dass sich die Terme mit $|\nabla v|^2$ gerade gegenseitig aufheben und die behauptete Ungleichung folgt. □

Wir bekommen hieraus a priori $|A|^2$-Schranken für den Fall, dass $|A|^2$ anfangs beschränkt oder nicht notwendigerweise beschränkt ist.

Theorem 4.8. *Sei $u \in C^\infty(B_R(z_0) \times (0,T)) \cap C^2(B_R(z_0) \times [0,T])$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses. Sei $0 \le \vartheta < 1$. Dann gilt für beliebige (p,t) mit $t \in [0,T]$ und $r(X(p,t),t) \le \vartheta R^2$ die Abschätzung*

$$
|A|^2(p,t) \le C(n)\frac{1}{(1-\vartheta)^2}\left[\sup_{r(X,0)\le R^2}\left(|A|^2v^2\right) + \frac{1}{R^2}\sup_{\substack{r(X,s)\le R^2\\ s\in[0,t]}} v^4\right].
$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Wir fixieren

$$
k := \frac{1}{2}\inf_{\substack{r(X,s)\le R^2\\ s\in[0,t]}} v^{-2}
$$

und erhalten damit

$$
k = \frac{1}{2}\inf_{\substack{r(X,s)\le R^2\\ s\in[0,t]}} v^{-2} \le \frac{1}{2}v^{-2} \le \frac{1}{2},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k} &= 2 \sup_{\substack{r(X,s)\le R^2\\ s\in[0,t]}} v^2,\\
kv^2 &\le \frac{1}{2},\\
\frac{1}{2} &\le 1-kv^2 \le 1,\\
v^2 &\le \frac{v^2}{1-kv^2} \le 2v^2,
\end{aligned}
$$

was wir später nutzen werden.

Nehme die Funktion $g\eta$ mit $\eta(X,t) = (R^2-r)^2$ mit r wie oben ihr Maximum erstmalig in einem Punkt (x_0,t_0) mit $t_0>0$ an. (Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $g\eta = 0$ am Rand der Menge $\{\eta>0\}$ stetig angenommen wird; sonst approximieren wir mit Radien $R_i<R$.) Dann gilt dort aufgrund der Evolutionsgleichung von $g\eta$

$$
0 \le -2kg^2\eta + C(n)\left(\left(1+\frac{1}{kv^2}\right)r + R^2\right)g.
$$

Wir bringen den Term $2kg^2\eta$ nach links und dividieren durch $g = |A|^2\frac{v^2}{1-kv^2}$ (denn wir dürfen ohne Einschränkung $g>0$ annehmen) sowie $2k$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
g\eta &\le \frac{1}{2k}C(n)\left(\left(1+\frac{1}{kv^2}\right)r + R^2\right)\\
&\le \frac{1}{2k}C(n)\left(1+\frac{1}{kv^2}\right)R^2\\
&\le C(n)\frac{1}{k^2}R^2\\
&= C(n)R^2\cdot \sup_{\substack{r(X,s)\le R^2\\ s\in[0,t]}} v^4.
\end{aligned}
$$

Somit gilt in einem beliebigen Punkt, wobei wir bei $\sup\limits_{t=0}$ stillschweigend auch annehmen wollen, dass wir uns auf $B_R(z_0)$ bzw. die Menge, auf der $\eta(\cdot,0)>0$ gilt, beschränken, und den Term $(g\eta)(x_0,t_0)$ wohlwollend lesen, weil er nur wohldefiniert ist, wenn das Maximum für $t_0>0$ angenommen wird,

$$
\begin{aligned}
g\eta &\le \sup_{t=0}(g\eta) + (g\eta)(x_0,t_0)\\
&\le 2R^4\sup_{t=0}\left(|A|^2v^2\right) + C(n)R^2\cdot \sup_{\substack{r(X,s)\le R^2\\ s\in[0,t]}} v^4.
\end{aligned}
$$

Andererseits schätzen wir nun die linke Seite auf der Menge $\{X\colon r(X,t)\le \vartheta R^2\}$ nach unten ab. Es gilt dort

$$
\begin{aligned}
g\eta &\ge |A|^2\cdot 1\cdot\left(R^2-\vartheta R^2\right)^2\\
&= |A|^2(1-\vartheta)^2R^4.
\end{aligned}
$$

Durch Umordnen erhalten wir die behauptete Ungleichung. $\square$

Theorem 4.9. *Sei $u\in C^\infty(B_R(z_0)\times(0,T))\cap C^1(B_R(z_0)\times[0,T])$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses. Sei $0\le\vartheta<1$. Dann gilt für beliebige $t\in[0,T]$*

und (p,t) *mit* $r(X(p,t),t) \le \vartheta R^2$ *die Abschätzung*

$$|A|^2(p,t) \le C(n) \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{R^2} \right) \sup_{\substack{r(X,s) \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^4.$$

Beweis. Sei wieder ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Weiterhin nehmen wir ohne Einschränkung an, dass die Zeit t, für die wir eine Abschätzung zeigen wollen, $t = T$ erfüllt.

Wir betrachten die Größe $tg\eta$. Indem wir erst bei $t = \varepsilon$ starten und etwas kleinere R betrachten und approximieren, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses so regulär ist, dass $tg\eta$ mit t und η stetig gegen Null geht.

Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \Delta \right) (tg\eta) \le & -2kg^2\eta t - 2 \left\langle \varphi v^{-3} \nabla v + \eta^{-1} \nabla \eta, \nabla (tg\eta) \right\rangle \\ & + C(n) R^2 \cdot \sup_{\substack{r(X,s) \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^2 \cdot tg + g\eta. \end{aligned}$$

In einem (positiven) Maximum (x_0, t_0) von $tg\eta$ folgt

$$\begin{aligned} 2kg^2\eta t &\le C(n) R^2 tg \cdot \sup_{\substack{r(X,s) \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^2 + g\eta, \\ (g\eta t)(x_0, t_0) &\le \left(C(n) R^2 t_0 \sup_{\substack{r(X,s) \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^2 + R^4 \right) \frac{1}{k} \\ &\le C(n) \left(R^2 T + R^4 \right) \sup_{\substack{r(X,s) \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^4, \\ (g\eta t)(x_0, t_0) &\ge (g\eta t)(\cdot, T) \ge |A|^2 v^2 (1-\vartheta)^2 R^4 T \\ &\ge |A|^2 \cdot 1 \cdot (1-\vartheta)^2 R^4 T \end{aligned}$$

mit einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis von Theorem 4.8. Umordnen liefert nun auch hier die Behauptung. □

Durch die Wahl spezieller Funktionen r erhalten wir

Korollar 4.10. *Für (hinreichend reguläre) Lösungen des graphischen mittleren Krümmungsflusses auf* $B_R(\hat{z}_0) \times (0,T)$ *gelten*

(i) für (p,t) *mit* $|X(p,t)|^2 + 2nt \le \vartheta R^2$

$$|A|^2(p,t) \le C(n) \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \left[\sup_{\substack{|X(p,0)|^2 \le R^2 \\ t=0}} \left(|A|^2 v^2 \right) + \frac{1}{R^2} \sup_{\substack{|X(p,s)|^2 + 2ns \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^4(p,s) \right],$$

(ii) für (p,t) *mit* $|X(p,t)|^2 - u^2 \le \vartheta R^2$

$$|A|^2(p,t) \le C(n) \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \left[\sup_{\substack{B_R(z_0) \\ t=0}} \left(|A|^2 v^2 \right) + \frac{1}{R^2} \sup_{B_R \times [0,t]} v^4 \right],$$

(iii) für (p,t) *mit* $|X(p,t)|^2 + 2nt \le \vartheta R^2$

$$|A|^2(p,t) \le C(n)(1-\vartheta)^{-2} \cdot \frac{1}{t} \sup_{\substack{|X(p,s)|^2 + 2ns \le R^2 \\ s \in [0,t]}} v^4(p,s)$$

(iv) und für (p,t) mit $|X(p,t)|^2 \le \vartheta R^2$

$$|A|^2(p,t) \le C(n)(1-\vartheta)^{-2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{R^2}\right)\sup_{B_R\times[0,t]} v^4.$$

Beweis.

(i) Wir nutzen Theorem 4.8 sowie $r = |X|^2 + 2nt$.
(ii) Hier nutzen wir neben Theorem 4.8 die Funktion $r = |X|^2 - u^2$.
(iii) Wir nutzen erneut Theorem 4.9 sowie $r = |X|^2 + 2nt$ und dürfen wegen $t \le \frac{R^2}{2n}$ den Term $\frac{1}{R^2}$ auf der rechten Seite der Abschätzung weglassen.
(iv) Hier nutzen wir neben Theorem 4.9 wieder die Funktion $r = |X|^2 - u^2$. □

Bemerkung 4.11.

(i) Ist v global beschränkt, so erhalten wir aus Korollar 4.10 (iv) mit $R \to \infty$ für ganze Graphen, die die graphischen mittleren Krümmungsfluss lösen

$$|A|^2 \le \frac{C(n)}{t}\cdot \sup_{\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} v^4.$$

(ii) Aus Höhenschranken und Gradientenschranken zur Zeit $t = 0$ kann man zunächst Gradientenschranken für positive Zeiten und danach $|A|^2$-Schranken folgern.
(iii) Die Abschätzungen gelten auch für Minimalflächen, also $H \equiv 0$.

Für C^3-Anfangsdaten erhalten wir C^3-Schranken auch für positive Zeiten. Wiederum leiten wir zunächst eine Evolutionsgleichung für eine Größe mit $|\nabla A|$ her, lokalisieren dies dann mit η im Raum und gegebenenfalls in der Zeit und wählen dann spezielle Funktionen η.

Bemerkung 4.12.

(i) Die nachfolgenden Überlegungen benutzen nun nicht mehr, dass der mittlere Krümmungsfluss graphisch ist und gelten daher auch allgemeiner.
(ii) Wir erinnern an die Evolutionsgleichungen

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)|A|^2 = 2|A|^4 - 2|\nabla A|^2$$

und

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right)|\nabla^m A|^2 \le -2\left|\nabla^{m+1}A\right|^2 + C_m\cdot\left(1+|\nabla^m A|^2\right),$$

mit $C_m = C_m\left(|A|^2,\dots,|\nabla^{m-1}A|^2\right)$, wobei die Konstanten genaugenommen nur von oberen Schranken von $|A|^2$, ... abhängen.

Lemma 4.13. *Unter dem mittleren Krümmungsfluss erfüllt*

$$f = |\nabla A|^2\left(\Lambda_0 + |A|^2\right)$$

die Ungleichung

$$\left(\frac{d}{dt}-\Delta\right) f \le -\delta f^2 + K,$$

wobei Λ_0 und K hinreichend groß gewählte und δ eine hinreichend klein gewählte positive Konstante ist. Dabei hängen diese drei Konstanten lediglich von n und einer oberen Schranke an $|A|^2$ ab.

Beweis. Direkte Rechnungen liefern

$$\begin{aligned}
f &= |\nabla A|^2 \left(\Lambda_0 + |A|^2\right),\\
\dot{f} &= \frac{d}{dt}|\nabla A|^2 \cdot \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) + |\nabla A|^2 \frac{d}{dt}|A|^2,\\
f_i &= \left(|\nabla A|^2\right)_i \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) + |A|^2 \left(|A|^2\right)_i,\\
f_{ij} &= \left(|\nabla A|^2\right)_{ij} \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) + |\nabla A|^2 \left(|A|^2\right)_{ij}\\
&\quad + \left(|\nabla A|^2\right)_i \left(|A|^2\right)_j + \left(|\nabla A|^2\right)_j \left(|A|^2\right)_i,\\
\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) f &= \left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) |\nabla A|^2 \cdot \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) + |\nabla A|^2 \left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) |A|^2\\
&\quad - 2\left\langle \nabla |\nabla A|^2, \nabla |A|^2 \right\rangle\\
&\le -2\left|\nabla^2 A\right|^2 \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) + C_1\left(1 + |\nabla A|^2\right)\left(\Lambda_0 + |A|^2\right)\\
&\quad + 2|A|^4 \cdot |\nabla A|^2 - 2|\nabla A|^4 + 8|A| \cdot |\nabla A|^2 \cdot \left|\nabla^2 A\right|.
\end{aligned}$$

Für den letzten Term nutzen wir die Abschätzung

$$8|A| \cdot |\nabla A|^2 \cdot \left|\nabla^2 A\right| \le 2\left|\nabla^2 A\right|^2 \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) + \frac{8|A|^2}{\Lambda_0 + |A|^2}|\nabla A|^4.$$

Wegen $|A|^2 \le c_0$ und der Monotonie der Funktion $x \mapsto \frac{x}{\Lambda_0 + x}$ erhalten wir damit

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) f \le \frac{8c_0}{\Lambda_0 + c_0}|\nabla A|^4 + C_1\left(1 + |\nabla A|^2\right)\left(\Lambda_0 + c_0\right) + 2c_0^2|\nabla A|^2 - 2|\nabla A|^4.$$

Nun fixieren wir $\Lambda_0 = \Lambda_0(c_0) \ge 1$ groß, so dass wir den ersten Term mittels $|\nabla A|^4$ absorbieren können. Auch die $|\nabla A|^2$-Terme können wir mit einer Konstanten und diesem Term absorbieren. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) f &\le -|\nabla A|^4 + K(c_0, C_1, \Lambda_0)\\
&= -\frac{f^2}{\left(\Lambda_0 + |A|^2\right)^2} + K\\
&\le -\frac{f^2}{(\Lambda_0 + c_0)^2} + K\\
&\equiv -\delta \cdot f^2 + K
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Lemma 4.14. *Unter dem mittleren Krümmungsfluss erfüllt $f\eta$ in Punkten mit $\eta > 0$ die Ungleichung*

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(f\eta) \le -\delta\eta f^2 + \eta K - 2\frac{1}{\eta}\langle\nabla(f\eta), \nabla\eta\rangle + C(n) f R^2,$$

wobei δ und K Konstanten sind, die nur von n und einer oberen Schranke an $|A|^2$ abhängen.

Beweis. Die übliche Rechnung liefert

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(f\eta) = \eta\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) f + f\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)\eta - 2\langle\nabla f, \nabla\eta\rangle$$

$$\leq -\delta\eta f^2 + \eta K - 2\langle \nabla f, \nabla\eta\rangle + f\left(2c(n)R^2 - 2|\nabla r|^2\right).$$

Für den Gradiententerm erhalten wir

$$\begin{aligned}
-2\langle \nabla f, \nabla\eta\rangle &= -2\left\langle \nabla\left(f\eta\frac{1}{\eta}\right), \nabla\eta\right\rangle \\
&= -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(f\eta), \nabla\eta\rangle + 2\frac{1}{\eta} f|\nabla\eta|^2 \\
&= -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(f\eta), \nabla\eta\rangle + 8f|\nabla r|^2 \\
&\leq -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(f\eta), \nabla\eta\rangle + C(n)fr \\
&\leq -2\frac{1}{\eta}\langle \nabla(f\eta), \nabla\eta\rangle + C(n)fR^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Theorem 4.15. *Sei $u \in C^\infty(B_R(z_0) \times (0,T)) \cap C^3(B_R(z_0) \times [0,T])$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses. Sei $0 \leq \vartheta < 1$. Dann gilt für beliebige $t \in [0,T]$ und (p,t) mit $r(X(p,t),t) \leq \vartheta R^2$ die Abschätzung*

$$|\nabla A|^2 \leq \frac{C(n)}{(1-\vartheta)^2}\left(\sup_{\substack{r(X,0)\leq R^2\\ t=0}} |\nabla A|^2 + 1 + \frac{1}{R^2}\right),$$

wobei C nur von n und einer oberen Schranke an $|A|$ abhängt.

Beweis. Wir betrachten die bereits oben definierte Testfunktion $f\eta$. Ist ihr Maximum Null, so sind wir fertig. Sonst unterscheiden wir zwei Fälle: Das Maximum wird in einem Punkt (x_0, t_0) mit $t_0 > 0$ angenommen. Dann gilt dort aufgrund der Evolutionsgleichung von $f\eta$

$$\begin{aligned}
\delta\eta^2 f^2 &\leq \eta^2 K + C(n)\eta f R^2 \\
&\leq \eta^2 K + \frac{\delta}{2}\eta^2 f^2 + \frac{1}{\delta}C(n)R^4, \\
\delta\eta^2 f^2 &\leq C(n,K,\delta)\left(R^4 + R^8\right).
\end{aligned}$$

Wohlwollend gelesen, da (x_0, t_0) im Falle, dass das Maximum für $t = 0$ angenommen wird, gar nicht definiert ist, erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
f\eta &\leq \sup_{t=0}(f\eta) + (f\eta)(x_0, t_0) \\
&\leq C \cdot R^4 \cdot \sup_{t=0} |\nabla A|^2 + C\left(R^2 + R^4\right).
\end{aligned}$$

Diese obere Schranke an $f\eta$ gilt überall. Insbesondere erhalten wir also in Punkten mit $r \leq \vartheta R^2$ wegen $\Lambda_0 \geq 1$

$$\begin{aligned}
f\eta &= |\nabla A|^2\left(\Lambda_0 + |A|^2\right)\left(R^2 - r\right)^2 \\
&\geq |\nabla A|^2 \cdot 1 \cdot (1-\vartheta)^2 R^4.
\end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich die Behauptung. □

Theorem 4.16. *Sei $u \in C^\infty(B_R(z_0) \times (0,T)) \cap C^2(B_R(z_0) \times [0,T])$ eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses. Sei $0 \leq \vartheta < 1$. Dann gilt für beliebige $t \in [0,T]$*

und (p,t) mit $r(X(p,t),t) \le \vartheta R^2$ die Abschätzung

$$|\nabla A|^2 \le C \cdot \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{R^2}\right),$$

wobei C nur von n und einer oberen Schranke an $|A|$ abhängt.

Beweis. Aus der Evolutionsgleichung für $f\eta$ erhalten wir auch die Evolutionsgleichung für $tf\eta$ mit einem Zusatzterm am Ende. Es gilt

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)(tf\eta) \le -\delta\eta f^2 t + \eta K t - 2\frac{1}{\eta}\langle\nabla(tf\eta), \nabla\eta\rangle + C(n) f t R^2 + f\eta.$$

Mit den üblichen Tricks dürfen wir wieder ohne Einschränkung annehmen, dass $tf\eta$ ein Maximum in einem Punkt (x_0, t_0) mit $t_0 > 0$ und $\eta > 0$ annimmt. Dann gilt dort

$$\delta\eta f^2 t \le \eta K t + C f t R^2 + f\eta$$

und nach Multiplikation mit $t\eta$

$$\begin{aligned}
\delta(\eta f t)^2 &\le K\eta^2 t^2 + C(\eta f t) t R^2 + (f t\eta)\eta \\
&\le C R^8 t^2 + \frac{2\delta}{3}(\eta f t)^2 + C t^2 R^4 + C R^8, \\
\delta(\eta f t)^2 &\le C\left(R^8 + t^2 R^4 + t^2 R^8\right), \\
\eta f t &\le C\left(R^4 + t R^2 + t R^4\right).
\end{aligned}$$

Diese letzte Abschätzung gilt zunächst einmal in einem Maximum der Funktion $\eta f t$ wie oben beschrieben und damit dann überall. Als untere Abschätzung ergibt sich analog zu bisher

$$\begin{aligned}
\eta f t &\ge (1-\vartheta)^2 R^4 |\nabla A|^2 \left(\Lambda_0 + |A|^2\right) t \\
&\ge (1-\vartheta)^2 R^4 t |\nabla A|^2.
\end{aligned}$$

Umordnen liefert auch hier die Behauptung. □

Bemerkung 4.17. Analog zu Korollar 4.10 erhalten wir auch im Falle von Abschätzungen für $|\nabla A|^2$ durch die Wahl spezieller Funktionen r konkretere $|\nabla A|^2$-Abschätzungen. Wir lassen dies als Übung.

Bemerkung 4.18.

(i) Will man höhere Ableitungen beschränken, so untersucht man dafür Testfunktionen mit

$$f_m = |\nabla^m A|^2 \cdot \left(\Lambda_m + \left|\nabla^{m-1} A\right|^2\right).$$

Diese lassen sich für $m \ge 1$ exakt nach demselben Muster behandeln wie für $m = 0$. Hieraus ergeben sich analoge Folgerungen wie im Fall $m = 0$. Details: Übung.

(ii) Will man für lokal Lipschitz stetige Anfangswerte $\left|\nabla^2 A\right|^2(x_0, t_0)$ beschränken, so beschränkt man zunächst
- $|A|^2$ für (x,t) mit $t \ge \frac{1}{3}t_0$ und $|x|^2 \le R^2$,
- dann $\left|\nabla A\right|^2$ für (x,t) mit $t \ge \frac{2}{3}t_0$ und $|x|^2 \le \frac{1}{2}R^2$, wobei man hier nur Zeiten $t \ge \frac{1}{3}t_0$ betrachtet,
- und schließlich $\left|\nabla^2 A\right|^2$ für (x,t) mit $t \ge \frac{3}{3}t_0$ und $|x|^2 \le \frac{1}{4}R^2$, wobei man hier nur Zeiten $t \ge \frac{2}{3}t_0$ betrachtet.

Die Verallgemeinerung auf $\left|\nabla^m A\right|^2$ für beliebige $t > 0$ ist offensichtlich.

(iii) Die Techniken von [8] liefern bessere Abschätzungen für höhere Ableitungen, nutzen dafür jedoch auch deutlich kompliziertere t-Abhängigkeiten in den betrachteten Testfunktionen.
(iv) Man überzeuge sich, dass Abschätzungen für $u, v, |A|, |\nabla A|, \ldots, |\nabla^m A|$ Abschätzungen für die räumlichen partiellen Ableitungen von u bis zur Ordnung $m+2$ liefern. Mit Hilfe der Differentialgleichung beschränkt man dann gemischte räumliche und zeitliche Ableitungen. Wie üblich für parabolische Gleichungen zweiter Ordnung zählen Zeitableitungen dabei doppelt. Details: Übung.
(v) Abschätzungen bis $|\nabla A|$ liefern also C^3-Abschätzungen und somit insbesondere $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen. Wir könnten alternativ also ab diesen Abschätzungen auch parabolische Schaudertheorie nutzen.

4.3. **Etwas Literaturüberblick.** Theorem 4.1 wurde von J. Clutterbuck [4] und T. Colding und W. Minicozzi [7] auf stetige Anfangsdaten verallgemeinert.

Ist u in einem geeigneten Sinne anfangs nahe an einem Kegel, so konvergiert der graphische mittlere Krümmungsfluss für $t \to \infty$ nach geeignetem Reskalieren gegen eine selbstähnlich aus einem Kegel kommende Lösung. Wir verweisen auf die Arbeiten von K. Ecker und G. Huisken [8] sowie von N. Stavrou [23].

Ohne Reskalieren gibt es z. B. in [5] Stabilitätsresultate für den graphischen mittleren Krümmungsfluss.

5. Mittlerer Krümmungsfluss ohne Singularitäten

Wir folgen im Wesentlichen unserer Arbeit [19]. Für die C^1-Abschätzungen behandeln wir ein alternatives Vorgehen. Da ich die Notation für die a priori-Abschätzungen für $|A|^2$ und $|\nabla A|^2$ mit unterstrichenen Termen nicht mehr optimal finde, wiederhole ich auch hier diesen Beweis in anderer Notation.

5.1. C^1-Abschätzungen.

Theorem 5.1 (C^1-Abschätzungen)**.** *Erfülle u die Generalvoraussetzung. Dann gilt*
$$vu^2 \le \max_{\substack{t=0\\ \{u<0\}}} vu^2$$
in Punkten mit $u < 0$.

Beweis. Unter Benutzung der Evolutionsgleichungen für v und u erhalten wir für $w := v(-u)$ in der Menge mit $u < 0$
$$\begin{aligned}
\dot w &= \dot v(-u) - v\dot u,\\
w_i &= v_i(-u) - vu_i,\\
w_{ij} &= v_{ij}u - vu_{ij} - v_iu_j - v_ju_i,\\
\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) w &= (-u)\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) v + 0 + 2\langle \nabla v, \nabla u\rangle\\
&= (-u)\left(-v|A|^2 - \tfrac{2}{v}|\nabla v|^2\right) + 2\left\langle \nabla v, -\frac{1}{v}\nabla w - \frac{u}{v}\nabla v\right\rangle\\
&= -(-u)v|A|^2 - \frac{2}{v}\langle \nabla v, \nabla w\rangle\\
&\le -\frac{2}{v}\langle \nabla v, \nabla w\rangle.
\end{aligned}$$
Die Behauptung erhalten wir nun, indem wir das Maximumprinzip auf w in der Menge mit $u < 0$ anwenden. $\square$

Bemerkung 5.2. Für u und v benötigen wir später die Abschätzungen

$$|\nabla u|^2 = \eta_\alpha X_i^\alpha g^{ij} X_j^\beta \eta_\beta = \eta_\alpha \left(\delta^{\alpha\beta} - \nu^\alpha \nu^\beta\right) \eta_\beta = 1 - v^{-2} \le 1$$

und

$$\begin{aligned}|\nabla v|^2 = {} & \left((-\eta_\alpha \nu^\alpha)^{-1}\right)_i g^{ij} \left(\left(-\eta_\beta \nu^\beta\right)^{-1}\right)_j = v^4 \eta_\alpha X_k^\alpha h_i^k g^{ij} h_j^l X_l^\beta \eta_\beta \le v^4 |A|^2 \\ & \le v^2 \varphi |A|^2 = v^2 \mathcal{G},\end{aligned}$$

wobei wir (2.3) benutzt haben, und

$$|\langle \nabla u, \nabla v\rangle| \le |\nabla u| \cdot |\nabla v| \le v^2 |A| \le v\sqrt{\mathcal{G}}.$$

5.2. C^2**-Abschätzungen.**

Theorem 5.3 (C^2-Abschätzungen)**.** *Erfülle u die Generalvoraussetzungen.*

(i) Dann gibt es Konstanten $\lambda > 0$, $c > 0$ und $k > 0$ (die Konstante in φ und implizit in $\mathcal{G}$), die nur von den C^1-Schranken abhängen, so dass

$$tu^4\mathcal{G} + \lambda u^2 v^2 \le \sup_{\substack{t=0 \\ \{u<0\}}} \lambda u^2 v^2 + ct$$

in Punkten mit $u < 0$ und $0 < t \le 1$ gilt.

(ii) Ist darüber hinaus $u(\cdot, 0) \in C^2$, so gelten auch C^2-Schranken bis $t = 0$: Es gibt eine Konstante $c > 0$, die nur von den C^1-Abschätzungen abhängt, so dass

$$u^4\mathcal{G} \le \sup_{\substack{t=0 \\ \{u<0\}}} u^4\mathcal{G} + ct$$

in Punkten mit $u < 0$ gilt.

Beweis. Wir wollen beide Teile gleichzeitig behandeln und verwenden dazu eine weitere Konstante δ. Im Falle $\delta = 1$ erhalten wir (i) und für $\delta = 0$ und $\lambda = 0$ den Fall (ii). Wir definieren w durch

$$w := (\delta t + (1-\delta))u^4\mathcal{G} + \lambda u^2 v^2$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\dot{w} = {} & \delta u^4 \mathcal{G} + 4(\delta t + (1-\delta))u^3 \mathcal{G}\dot{u} + (\delta t + (1-\delta))u^4 \dot{\mathcal{G}} \\
& + 2\lambda v^2 u\dot{u} + 2\lambda u^2 v\dot{v}, \\
w_i = {} & 4(\delta t + (1-\delta))u^3 \mathcal{G} u_i + (\delta t + (1-\delta))u^4 \mathcal{G}_i \\
& + 2\lambda v^2 u u_i + 2\lambda u^2 v v_i, \\
w_{ij} = {} & 4(\delta t + (1-\delta))u^3 \mathcal{G} u_{ij} + (\delta t + (1-\delta))u^4 \mathcal{G}_{ij} \\
& + 2\lambda v^2 u u_{ij} + 2\lambda u^2 v v_{ij} \\
& + 12(\delta t + (1-\delta))u^2 \mathcal{G} u_i u_j + 4(\delta t + (1-\delta))u^3(\mathcal{G}_i u_j + \mathcal{G}_j u_i) \\
& + 2\lambda v^2 u_i u_j + 2\lambda u^2 v_i v_j + 4\lambda v u(u_i v_j + u_j v_i), \\
(\delta t + (1-\delta))u^3 \nabla\mathcal{G} = {} & \frac{1}{u}\nabla w - 4(\delta t + (1-\delta))u^2 \mathcal{G}\nabla u - 2\lambda v^2 \nabla u - 2\lambda u v \nabla v, \\
\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) w \le {} & \delta u^4 \mathcal{G} + (\delta t + (1-\delta))u^4 \left(-2k\mathcal{G}^2 - 2\varphi v^{-3}\langle \nabla v, \nabla \mathcal{G}\rangle\right) \\
& + 2\lambda u^2 v\left(-v|A|^2 - \tfrac{2}{v}|\nabla v|^2\right) \\
& - 12(\delta t + (1-\delta))u^2 \mathcal{G}|\nabla u|^2 - 8(\delta t + (1-\delta))u^3 \langle \nabla\mathcal{G}, \nabla u\rangle \\
& - 2\lambda v^2 |\nabla u|^2 - 2\lambda u^2 |\nabla v|^2 - 8\lambda u v\langle \nabla u, \nabla v\rangle.
\end{aligned}$$

Nachfolgend werden wir $\langle \nabla w, b\rangle$ für generische Gradiententerme mit ∇w schreiben. Diese Terme dürfen von Zeile zu Zeile ihre Werte ändern. Die ebenfalls generischen Konstanten c dürfon von $\sup\{|u|\colon u<0\}$ (was seinen anfänglichen Wert nicht übersteigt) und C^1-Abschätzungen abhängen. Auch bei den C^1-Abschätzungen dürfen wir eine Gleichmäßigkeit annehmen, indem wir in Theorem 5.1 die Abschneidefunktion $v\cdot(u-1)$ benutzen. Im Fall (i), darf c auch von einen oberen Schranke von t abhängen, wir nehmen jedoch $0<t\le 1$ an. Wir unterdrücken in der Notation also die Abhängigkeit von bereits abgeschätzten Größen.

Die Terme mit $\nabla\mathcal{G}$ betrachten wir separat. Sei $\varepsilon>0$ eine Konstante mit noch zu fixierendem Wert. Unter Benutzung von Bemerkung 5.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&-2\varphi(\delta t+(1-\delta))u^4v^{-3}\langle \nabla v,\nabla\mathcal{G}\rangle\\
={}&-2\frac{\varphi u}{v^3}\left\langle \nabla v,\frac{1}{u}\nabla w-4(\delta t+(1-\delta))u^2\mathcal{G}\nabla u-2\lambda v^2\nabla u-2\lambda uv\nabla v\right\rangle\\
\le{}&\langle\nabla w,b\rangle+8(\delta t+(1-\delta))\frac{\varphi|u|^3}{v}\mathcal{G}|A|+4\lambda\varphi v|u||A|+4\frac{\lambda\varphi u^2}{v^2}|\nabla v|^2\\
\le{}&\langle\nabla w,b\rangle+\varepsilon(\delta t+(1-\delta))u^4\mathcal{G}^2+c(\varepsilon)\cdot(\delta t+(1-\delta))\varphi\frac{u^2}{v^2}\mathcal{G}\\
&+\varepsilon\lambda u^2v^2|A|^2+\lambda u^2|\nabla v|^2\cdot 4\frac{\varphi}{v^2}+c(\varepsilon,\lambda)\\
\le{}&\langle\nabla w,b\rangle+2\varepsilon(\delta t+(1-\delta))u^4\mathcal{G}^2\\
&+\varepsilon\lambda u^2v^2|A|^2+\lambda u^2|\nabla v|^2\cdot 4\frac{\varphi}{v^2}+c(\varepsilon,\lambda)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&-8(\delta t+(1-\delta))u^3\langle\nabla\mathcal{G},\nabla u\rangle\\
={}&-8\left\langle \nabla u,\frac{1}{u}\nabla w-4(\delta t+(1-\delta))u^2\mathcal{G}\nabla u-2\lambda v^2\nabla u-2\lambda uv\nabla v\right\rangle\\
\le{}&\langle\nabla w,b\rangle+32(\delta t+(1-\delta))u^2\mathcal{G}+16\lambda v^2+16\lambda|u|v^3|A|\\
\le{}&\langle\nabla w,b\rangle+\varepsilon(\delta t+(1-\delta))u^4\mathcal{G}^2+\varepsilon\lambda u^2v^2|A|^2+c(\varepsilon,\lambda).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{d}{dt}-\Delta\right)w\le{}&\delta u^4\mathcal{G}+(\delta t+(1-\delta))u^4\mathcal{G}^2(-2k+3\varepsilon)+\langle\nabla w,b\rangle\\
&+\lambda u^2v^2|A|^2(-2+3\varepsilon)+\lambda u^2|\nabla v|^2\left(4\frac{\varphi}{v^2}-6\right)+c(\varepsilon,\lambda).
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass $k>0$ so klein fixiert ist, dass $kv^2\le\frac{1}{3}$ in der Menge $\{u<0\}$ gilt. Daraus folgt $\varphi\le 2v^2$. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $\lambda\ge 2u^2$ in der Menge $\{u<0\}$ gilt und erhalten $u^4\mathcal{G}\le\frac{1}{2}\lambda u^2\varphi|A|^2\le\lambda u^2v^2|A|^2$. Es folgt weiterhin

$$4\frac{\varphi}{v^2}-6=\frac{4}{1-kv^2}-6\le 0.$$

Wenn wir schließlich $\varepsilon>0$ klein genug fixieren erhalten wir

$$\left(\tfrac{d}{dt}-\Delta\right)w\le\langle\nabla w,b\rangle+c.$$

Nun folgen beide Behauptungen aus dem Maximumprinzip. $\square$

5.3. **Abschätzungen höherer Ordnung.**

Theorem 5.4 (C^{m+2}-estimates)**.** *Erfülle u die Generalvoraussetzungen*

(i) Dann gibt es eine Konstante $\lambda > 0$, die nur von den C^{m+1}-Abschätzungen abhängt, so dass

$$tu^2 \left|\nabla^m A\right|^2 + \lambda \left|\nabla^{m-1} A\right|^2 \le c \cdot \lambda \cdot t + \sup_{\substack{t=0\\ \{u<0\}}} \lambda \left|\nabla^{m-1} A\right|^2$$

in Punkten mit $u < 0$ und $0 < t \le 1$ gilt.

(ii) Analog zu Theorem 5.3 ist auch hier anfängliche Regularität erhalten.

Beweis. Wie im Beweis von Theorem 5.3 verwenden wir $\delta \in \{0, 1\}$ und definieren

$$w := (\delta t + (1-\delta))u^2 \left|\nabla^m A\right|^2 + \lambda \left|\nabla^{m-1} A\right|^2$$

für eine noch zu fixierende Konstante $\lambda > 0$, die wir jedoch hier in beiden Fällen verwenden. Wir nehmen an, dass $\left|\nabla^k A\right|^2$ für beliebige k mit $0 \le k \le m-1$ bereits kontrolliert ist. Sei weiterhin $0 \le t \le 1$. Die Konstante c darf wiederum von bereits kontrollierten Größen abhängen. Somit erhalten wir aus der Evolutionsgleichung von $\left|\nabla^m A\right|^2$ für $m \ge 1$

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) \left|\nabla^m A\right|^2 &\le -2\left|\nabla^{m+1} A\right|^2 + c\left|\nabla^m A\right|^2 + c,\\
\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) \left|\nabla^{m-1} A\right|^2 &\le -2\left|\nabla^m A\right|^2 + c.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \delta u^2 \left|\nabla^m A\right|^2 + 2(\delta t + (1-\delta))u\dot{u}\left|\nabla^m A\right|^2 + (\delta t + (1-\delta))u^2 \frac{d}{dt}\left|\nabla^m A\right|^2\\
&\quad + \lambda \frac{d}{dt}\left|\nabla^{m-1} A\right|^2,\\
w_i &= 2(\delta t + (1-\delta))uu_i\left|\nabla^m A\right|^2 + (\delta t + (1-\delta))u^2\left(\left|\nabla^m A\right|^2\right)_i\\
&\quad + \lambda\left(\left|\nabla^{m-1} A\right|^2\right)_i,\\
w_{ij} &= 2(\delta t + (1-\delta))uu_{ij}\left|\nabla^m A\right|^2 + (\delta t + (1-\delta))u^2\left(\left|\nabla^m A\right|^2\right)_{ij}\\
&\quad + \lambda\left(\left|\nabla^{m-1} A\right|^2\right)_{ij} + 2(\delta t + (1-\delta))u_iu_j\left|\nabla^m A\right|^2\\
&\quad + 2(\delta t + (1-\delta))u\left(u_i\left(\left|\nabla^m A\right|^2\right)_j + u_j\left(\left|\nabla^m A\right|^2\right)_i\right),\\
\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) w &\le \delta u^2\left|\nabla^m A\right|^2 + (\delta t + (1-\delta))u^2\left(-2\left|\nabla^{m+1} A\right|^2 + c\left|\nabla^m A\right|^2 + c\right)\\
&\quad + \lambda\left(-2\left|\nabla^m A\right|^2 + c\right) - 2(\delta t + (1-\delta))|\nabla u|^2\left|\nabla^m A\right|^2\\
&\quad - 4(\delta t + (1-\delta))u\left\langle \nabla u, \nabla\left|\nabla^m A\right|^2\right\rangle.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
-4(\delta t + (1-\delta))u\left\langle \nabla u, \nabla\left|\nabla^m A\right|^2\right\rangle &\le (\delta t + (1-\delta)) \cdot |u| \cdot c \cdot \left|\nabla^{m+1} A\right| \cdot \left|\nabla^m A\right|\\
&\le (\delta t + (1-\delta))u^2\left|\nabla^{m+1} A\right|^2 + c\left|\nabla^m A\right|^2.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\left(\tfrac{d}{dt} - \Delta\right) w \le (c - 2\lambda)\left|\nabla^m A\right|^2 + c(\lambda).$$

Wiederum folgt das Resultat aus dem Maximumprinzip. □

6. Eindeutigkeit und Expandierer

6.1. **Eindeutigkeit.** Wir zeigen Eindeutigkeit für ganze Graphen, die gleichmäßig Lipschitz stetig sind. Der allgemeine Fall, z. B. für glatte ganze Graphen, ist eine offene Fragestellung und Gegenstand aktueller Forschung.

Theorem 6.1. *Sei $u_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig Lipschitz stetig, d. h. es gibt ein $L \geq 0$ mit*
$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L \cdot |x - y|$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung von
$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
Dann ist u eindeutig bestimmt.

Bemerkung 6.2. Die Existenz einer solchen Lösung folgt aus [8]. Zusätzlich gilt
$$\left\|D^k u(\cdot,t)\right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_k$$
für $t \in [t_0, T]$ mit $0 < t_0 < T < \infty$. Aus der Differentialgleichung folgen entsprechende Abschätzungen für Zeitableitungen und gemischte Ableitungen.

Als Vorbereitung zeigen wir zunächst, dass Sphären disjunkt zur Lösung bleiben.

Lemma 6.3. *Sei u wie in Theorem 6.1. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ und gelte für ein $R > 0$*
$$\overline{B_R(x_0)} \cap \operatorname{graph} u(\cdot,0) = \emptyset.$$
Dann gilt für $r(t) = \sqrt{R^2 - 2nt}$ mit $0 \leq t < \frac{R^2}{2n}$
$$\overline{B_{r(t)}(x_0)} \cap \operatorname{graph} u(\cdot,t) = \emptyset.$$

Man kann schrumpfende Sphären als Graphen darstellen und benutzen, dass die Graphen $\operatorname{graph} u(\cdot,t)$ für $t > 0$ die Sphären aufgrund der Gradientenschranke nicht am Äquator berühren können. Das Resultat folgt dann aus dem Maximumprinzip in Graphendarstellung.

Wir führen einen alternativen Beweis.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $x_0 = 0$. Sei $\delta > 0$ beliebig und sei $\zeta > 0$ sehr klein. Wir definieren
$$w(p,t) = |X(p,t)|^2 + 2nt(1+\delta) - (R+\zeta)^2.$$
Dabei nutzen wir die parametrische Beschreibung X des mittleren Krümmungsflusses. Wenn wir solch ein X finden wollen, so taucht dabei eine Differentialgleichung der Form
$$\dot{\psi}^i(x,t) = -\frac{Hu^i}{\sqrt{1+|Du(\psi(x,t),t)|^2}}$$
auf. Wegen $|H| \leq \frac{c}{\sqrt{t}}$ können wir diese bis $t = 0$ lösen und so die Diffeomorphismen ψ bekommen, die es erlauben, den mittleren Krümmungsfluss auch parametrisch zu beschreiben.

Kleine Zeiten: Dann gilt zum Zeitpunkt $t = 0$ und hinreichend kleine $\zeta > 0$ die Ungleichung $w(p,t) > 0$ für beliebige $p \in \mathbb{R}^n$ und $t = 0$. Aufgrund der Stetigkeit gibt es somit ein $\varepsilon > 0$, so dass $w(p,t) > 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und alle $0 \leq t \leq \varepsilon$ gilt. Beachte dazu, dass wir diese Ungleichung nur in der kompakten Menge $\{p \in \mathbb{R}^n\colon |p| \leq R + \zeta\}$ überprüfen müssen.

Ziel: Wir wollen nun zeigen, dass $w > 0$ für beliebige $\delta > 0$ gilt. Dann folgt

$$|X(p,t)| \geq \sqrt{(R+\zeta)^2 - 2nt} > \sqrt{R^2 - 2nt}$$

für alle $p \in \mathbb{R}^n$ wie gewünscht.

Große Zeiten: Für t mit $\varepsilon \leq t \leq \frac{R^2}{2n}$ sind alle Ableitungen von u gleichmäßig beschränkt und wir erhalten mit Hilfe von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Korrektur der tangentialen Geschwindigkeitsanteile eine glatte Lösung $X \colon \mathbb{R}^n \times \left[\varepsilon, \frac{R^2}{2n}\right] \to \mathbb{R}^{n+1}$ des mittleren Krümmungsflusses $\frac{d}{dt}X = -H\nu$ mit $X(\mathbb{R}^n, t) = \operatorname{graph} u(\cdot, t)$ für alle $t \in \left[\varepsilon, \frac{R^2}{2n}\right]$ mit $\lim\limits_{|p|\to\infty} |X(p,t)| = \infty$, gleichmäßig in t (Miniübung).

Es folgt (mit kovarianten Ableitungen)

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= 2\left\langle X, \dot{X} \right\rangle + 2n(1+\delta),\\
w_i &= 2\langle X, X_i \rangle,\\
w_{ij} &= 2\langle X, X_{ij}\rangle + 2\langle X_i, X_j\rangle.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\dot{w} - \Delta w &= \dot{w} - g^{ij} w_{ij}\\
&= 2\left\langle X, \dot{X} - g^{ij}X_{ij} \right\rangle + 2n(1+\delta) - 2g^{ij}\langle X_i, X_j\rangle\\
&= 2\left\langle X, \dot{X} + H\nu \right\rangle + 2n(1+\delta) - 2n\\
&= 2n\delta > 0.
\end{aligned}$$

Wegen $|X(p,t)| \to \infty$ für $|p| \to \infty$ folgt daher $w > 0$ aus dem Maximumprinzip und somit die Behauptung. $\square$

Das folgende Lemma überträgt sich auch auf Situationen, wenn die Funktion räumlich nicht auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

Es zeigt, dass es nicht nur Punkte nahe am räumlichen Infimum und Punkte mit Zeitableitung nahe $-\frac{c}{T}$ gibt, sondern dass es sogar einen Punkt gibt, in dem beides erfüllt ist. Wäre $I(t) = \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t)$ differenzierbar und würde das Infimum stets angenommen, so folgte die Behauptung direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Lemma 6.4. *Sei $T > 0$. Seien $A, B \in \mathbb{R}$. Sei $u \colon \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ glatt mit gleichmäßig beschränktem $\dot{u}$ und seien*

$$u(\cdot, 0) \geq A \quad \textit{sowie} \quad \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, T) = B.$$

Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ einen Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ mit

$$u(x_0, t_0) \leq \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t_0) + \varepsilon \quad \textit{und} \quad \dot{u}(x_0, t_0) \leq -\frac{(A-B)-\varepsilon}{T}.$$

In der Vorlesung wurde der folgende Widerspruchsbeweis gefunden. Nachfolgend geben wir auch noch unseren ursprünglichen Beweis an.

Beweis. Gelte $|\dot{u}| \leq C_1$. Hieraus folgt

$$\left| \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t_1) - \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t_2) \right| \leq 2C_1 \cdot |t_1 - t_2|$$

für alle $t_1, t_2 \in [0,T]$. Angenommen, die Aussage wäre falsch. Sei $\varepsilon > 0$, so dass die Aussage nicht gilt. Dann gibt es $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_0,t) \le \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,T) + \frac{\varepsilon}{2}$. Wir wählen $t_1 \in [0,T]$ minimal, so dass

$$u(x_0,t) \le \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t) + \varepsilon$$

für alle $t \in [t_1,T]$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
&u(x_0,t) - \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t) \\
\le\ & u(x_0,t) - u(x_0,T) + u(x_0,T) - \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,T) + \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,T) - \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t) \\
\le\ & C_1 \cdot |T-t| + \frac{\varepsilon}{2} + 2C_1 \cdot |T-t| \\
\le\ & \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$ mit $T - t \le \frac{\varepsilon}{6C_1}$ sehen wir, dass $T - T_1 \ge \frac{\varepsilon}{6C_1} > 0$ nach unten durch eine positive Konstante beschränkt ist. (Man könnte auch $t_1 = T - \frac{\varepsilon}{6C_1}$ wählen.) Nun wählen wir $x_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_1,t_1) \le \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t_1) + \frac{\varepsilon}{2}$. Dies setzen wir fort und wählen iterativ so lange Punkte (x_i,t_i), bis nach endlich vielen Schritten $t_k = 0$ gilt. Damit erhalten wir mit der Annahme, dass die Behauptung über die Zeitableitung für keinen solchen Punkt richtig ist,

$$\begin{aligned}
B + \frac{\varepsilon}{2} &\ge u(x_0,T) \\
&= u(x_0,t_1) + \int_{t_1}^{T} \dot u(x_0,\tau)\,d\tau \\
&\ge u(x_0,t_1) + \frac{T-t_1}{T}(B - A + \varepsilon) \\
&\ge u(x_1,t_1) + \frac{T-t_1}{T}(B - A + \varepsilon) \\
&\ge \ldots \\
&\ge u(x_{k-1},t_k) + \left(\frac{T-t_1}{T} + \frac{t_1-t_2}{T} + \ldots + \frac{t_{k-1}-t_k}{T}\right) \cdot (B - A + \varepsilon) \\
&= u(x_{k-1},0) + \frac{T-0}{T} \cdot (B - A + \varepsilon) \\
&\ge A + B - A + \varepsilon = B + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine Widerspruch. Somit gilt die Behauptung. $\square$

Beweis.

(i) Sei $C_1 > 0$, so dass

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} |\dot u| \le C_1$$

gilt. Zunächst wollen wir $R > 0$ so fixieren, dass

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t) \le \inf_{B_R} u(\cdot,t) \le \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t) + \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $t \in [0,T]$ gilt. Sei dazu $\delta > 0$ mit $\delta \cdot C_1 < \frac{\varepsilon}{8}$. Seien endlich viele $t_i \in [0,T]$ so fixiert, dass $[0,T] \subset \bigcup\limits_i B_\delta(t_i)$ gilt. Dann gibt es $R > 0$, so dass für alle i

$$\inf_{B_R} u(\cdot, t_i) \le \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t_i) + \frac{\varepsilon}{8}$$

gilt. Sei nun $t \in [0,T]$ beliebig und gelte $|t - t_{i_0}| < \delta$ für ein fixiertes i_0. Fixiere weiterhin $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u(x_0, t) \le \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t) + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t) &\ge u(x_0, t) - \frac{\varepsilon}{8} \\
&\ge u(x_0, t_{i_0}) - \frac{\varepsilon}{8} - C_1 \cdot \delta \\
&\ge \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t_{i_0}) - 2\frac{\varepsilon}{8} \\
&\ge \inf_{B_R} u(\cdot, t_{i_0}) - 3\frac{\varepsilon}{8} \\
&\ge \inf_{B_R} u(\cdot, t) - 4\frac{\varepsilon}{8}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Existenz eines solchen $R > 0$.

(ii) Definiere w durch

$$\begin{aligned}
w\colon \overline{B_R} \times [0,T] &\to \mathbb{R}, \\
w(x,t) &:= u(x,t) - A + \frac{(A-B) - \varepsilon}{T} t.
\end{aligned}$$

Dann gelten $w(\cdot, 0) \ge 0$ und

$$-\varepsilon = \inf_{\mathbb{R}^n} w(\cdot, T) \le \inf_{B_R} w(\cdot, T) \le -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $(x_0, t_0) \in \overline{B_R} \times [0,T]$ mit

$$w(x_0, t_0) = \inf_{B_R \times [0,T]} w.$$

Dann gilt $t_0 > 0$.

(iii) Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- Es gilt $0 < t_0 < T$. Dann gilt
$$0 = \dot{w}(x_0, t_0) = \dot{u}(x_0, t_0) + \frac{A - B - \varepsilon}{T}.$$
- Ist $t_0 = T$, so folgt
$$0 \ge \dot{w}(x_0, T) = \dot{u}(x_0, t_0) + \frac{A - B - \varepsilon}{T}.$$

In beiden Fällen folgt aus $w(x_0, t_0) = \inf\limits_{B_R} w(\cdot, t_0)$ und nach Wahl von R

$$u(x_0, t_0) = \inf_{B_R} u(\cdot, t_0) \le \inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t_0) + \varepsilon$$

wie behauptet. $\square$

Ein entsprechendes Lemma benötigen wir auch für die räumlichen Ableitungen. Da die Zeitabhängigkeit hier keine Rolle spielt, lassen wir sie im Lemma weg.

Lemma 6.5. *Sei $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^3-Funktion mit*

$$\left\|D^i u\right\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le C_i$$

für $0 \le i \le 3$. Sei $\zeta > 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u(x_0) \le \inf_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon,$$

$$|Du(x_0)| \le \zeta \quad \text{und} \quad u_{ij} \ge -\zeta\delta_{ij}$$

gelten.

Unter direkter Benutzung der Taylorschen Formeln könnte man den nachfolgenden Beweis abkürzen.

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_0) \le \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon$ gegeben. Nach einer Rotation des Koordinatensystems dürfen wir $\nabla u(x_0) = -|\nabla u|(x_0)e_1 \equiv -Me_1$ annehmen. Für $t > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\inf_{\mathbb{R}^n} u \le u(x_0 + te_1) &= u(x_0) + u(x_0 + te_1) - u(x_0) \\
&= u(x_0) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} u(x_0 + \tau e_1)\, d\tau = u(x_0) + \int_0^t u_1(x_0 + \tau e_1)\, d\tau \\
&= u(x_0) + tu_1(x_0) + \int_0^t u_1(x_0 + \tau e_1) - u_1(x_0)\, d\tau \\
&= u(x_0) - tM + \int_0^t \int_0^\tau \frac{d}{d\sigma} u_1(x_0 + \sigma e_1)\, d\sigma\, d\tau \\
&= u(x_0) - tM + \int_0^t \int_0^\tau u_{11}(x_0 + \sigma e_1)\, d\sigma\, d\tau \\
&\le \inf_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon - tM + t^2 C_2.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$0 \le \varepsilon - tM + t^2 C_2.$$

Wir nehmen ohne Einschränkung $C_2 > 0$ an, d. h. u ist nicht affin linear, und erhalten im Minimum bei $t = \frac{M}{2C_2}$ (einfache Kurvendiskussion)

$$0 \le \varepsilon - \frac{M^2}{2C_2} + \frac{M^2}{4C_2} = \varepsilon - \frac{M^2}{4C_2}.$$

Aus $M^2 \le 4C_2\varepsilon$ folgt somit die erste Behauptung.

(ii) Wir gehen analog zur Gradientenabschätzung vor. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_0) \le \inf\limits_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon$ beliebig. Angenommen, es gibt $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, so dass $u_{ij}(x_0)\xi^i\xi^j$ negativ ist. Dann dürfen wir nach einer Rotation des Koordinatensystems annehmen, dass

$$u_{11}(x_0) = -M$$

mit $M > 0$ gilt. Weiterhin dürfen wir, möglicherweise nach einer Spiegelung mit $e_1 \mapsto -e_1$, annehmen, dass $u_1(x_0) \le 0$ gilt. Oben haben wir bereits

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u \le u(x_0) + tu_1(x_0) + \int_0^t \int_0^\tau u_{11}(x_0 + \sigma e_1)\, d\sigma\, d\tau$$

hergeleitet. Wegen $\int_0^t \int_0^\tau 1\, d\sigma\, d\tau = \int_0^t \tau\, d\tau = \frac{1}{2}t^2$ erhalten wir daraus für $t > 0$

$$\begin{aligned}
\inf_{\mathbb{R}^n} u &\le u(x_0) + tu_1(x_0) + \frac{1}{2}t^2 u_{11}(x_0) + \int_0^t \int_0^\tau u_{11}(x_0 + \sigma e_1) - u_{11}(x_0)\, d\sigma\, d\tau \\
&= u(x_0) + tu_1(x_0) + \frac{1}{2}t^2 u_{11}(x_0) + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma \frac{d}{d\rho} u_{11}(x_0 + \rho e_1)\, d\rho\, d\sigma\, d\tau \\
&\le \inf_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon + t \cdot 0 - \frac{1}{2}t^2 M + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma u_{111}(x_0 + \rho e_1)\, d\rho\, d\sigma\, d\tau \\
&\le \inf_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon - \frac{1}{2}t^2 M + \int_0^t \int_0^\tau \sigma C_3\, d\sigma\, d\tau \\
&\le \inf_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon - \frac{1}{2}t^2 M + \int_0^t \frac{1}{2}\tau^2 C_3\, d\tau \\
&\le \inf_{\mathbb{R}^n} u + \varepsilon - \frac{1}{2}t^2 M + \frac{1}{6}t^3 C_3.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$0 \le \varepsilon - \frac{1}{2}t^2 M + \frac{1}{6}t^3 C_3.$$

Sei wieder ohne Einschränkung $C_3 > 0$. Dann erhalten wir in einem Minimum mit $t = 2\frac{M}{C_3}$

$$0 \le \varepsilon - \frac{1}{2}4\frac{M^3}{C_3^2} + \frac{1}{6}8\frac{M^3}{C_3^2} = \varepsilon - \frac{2}{3}\frac{M^3}{C_3^2}$$

und somit $M^3 \le \frac{3}{2}C_3^2\varepsilon$. Die Behauptung folgt. □

Beweis von Theorem 6.1.

(i) Ist u eine Lösung, so auch $u + c$, $c \in \mathbb{R}$. Die Eindeutigkeit folgt, wenn wir zeigen können, dass Lösungen, die bei u bzw. $u + c$, $c \ne 0$, starten, für alle Zeiten disjunkt bleiben. (Genaugenommen gilt die Disjunktheit für die zugehörigen Graphen.) Dies verallgemeinern wir noch leicht auf zwei verschiedene Funktionen.

(ii) Seien u und w zwei Lösungen des mittleren Krümmungsflusses mit Regularität wie in der Behauptung und gleichmäßiger Lipschitzstetigkeit für $t = 0$. Wir wollen nachweisen, dass aus $u - w \ge c > 0$ für ein $c > 0$ zur Zeit $t = 0$ bereits $u - w \ge 0$ für alle Zeiten $t \ge 0$ folgt. Hieraus folgt dann die Behauptung.

(iii) Wir betrachten zunächst kleine Zeiten und zeigen in diesem Fall die Behauptung $u - w \ge 0$ mit Hilfe der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit und mit Sphären als

Barrieren. (Alternativ kann man auch Gradienten- und Geschwindigkeitsschranken benutzen. Details: Übung.) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann folgt für y mit $|x-y| \le \frac{c}{2L}$

$$\begin{aligned} u(y,0) &\ge u(x,0) - L \cdot |x-y| \\ &\ge w(x,0) + L \cdot |x-y| \\ &\ge w(y,0), \end{aligned}$$

wobei wir die Lipschitzkonstanten beider Funktionen mit L bezeichnet haben und ohne Einschränkung $L > 0$ annehmen. Zwischen den Funktionen $y \mapsto u(x,0) - L \cdot |x-y|$ und $y \mapsto w(x,0) + L \cdot |x-y|$ befindet sich somit ein rotationssymmetrischer Doppelkegel. Die Grundfläche ist ein Ball mit Radius $\ge \frac{c}{2L}$ und jeder Einzelkegel hat eine Höhe $\ge \frac{c}{2}$. Wir nehmen nun ohne Einschränkung $L \ge 1$ an, erhalten somit für die Höhe die Abschätzung „$\ge \frac{c}{2L}$“, und sehen, dass dieser Doppelkegel einen zentrierten Ball vom Radius $R = \frac{c}{2\sqrt{2}L}$ enthält. $\operatorname{graph} u(\cdot,0)$ liegt oberhalb dieses Balles und $\operatorname{graph} w(\cdot,0)$ liegt unterhalb dieses Balles. Aufgrund unseres Vergleichsresultates zwischen Bällen bzw. Sphären und ganzen Graphen, die sich beide unter dem mittleren Krümmungsfluss bewegen, Lemma 6.3, liegt $\operatorname{graph} u(\cdot,t)$ für $0 \le t < \frac{R^2}{2n} = \frac{c^2}{16nL^2}$ oberhalb des Balles

$$B_{\sqrt{R^2-2nt}}\left(\left(x, \frac{u(x,0)+w(x,0)}{2}\right)\right)$$

und $\operatorname{graph} w(\cdot,t)$ darunter. Dies zeigt die Behauptung $u - w \ge 0$ für kleine Zeiten.

(iv) Sei nun $t_0 > 0$ und die Behauptung bis $t = t_0$ gezeigt. Da $c > 0$ bliebig ist und translatierte Lösungen ebenfalls Lösungen sind, dürfen wir ohne Einschränkung auch zum Zeitpunkt $t = t_0$ noch $u - w \ge c > 0$ annehmen. Mit Hilfe des “point-picking” Maximumprinzips und der gleichmäßigen Abschätzungen für $t \ge t_0$ zeigen wir nun die Behauptung auch für $t \ge t_0$. Sei dazu $T > t_0 > 0$ beliebig. Es genügt, $u - w \ge 0$ für $t \in [t_0, T]$ zu zeigen.

(v) Zur Zeit $t = 0$ können wir beliebig große Sphären ober- bzw. unterhalb der Doppelkegel zu den Funktionen $y \mapsto u(x,0) \pm L \cdot |x-y|$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ platzieren. Diese wirken als Barrieren und liefern, dass

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t) - u(x,0)| \le C(T,L,n)$$

gilt. Eine entsprechende Abschätzung gilt auch für w. Daher ist

$$t \mapsto \inf_{\mathbb{R}^n} \big(u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\big) \equiv m(t)$$

auf beschränkten Zeitintervallen nach unten beschränkt. Aufgrund der gleichmäßigen Abschätzungen für $t_0 \le t \le T$ ist $m|_{[t_0,T]}$ auch stetig. (Beweis: Übung.) (Mit Bällen in Kegeln als Barrieren wie oben oder mit $|H| \le \frac{c}{\sqrt{t}}$ erhält man die Stetigkeit für alle $t \ge 0$. Details: Übung.)

Wir behaupten sogar, dass $m(t) > 0$ für alle $t \in [t_0, \infty)$ gilt. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $T > t_0$ mit $m(T) = 0$ minimal ist.

(vi) Wir leiten nun eine Differentialungleichung für $\Phi := u - w$ her: Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u_{ij} - \left(\delta^{ij} - \frac{w^i w^j}{1+|Dw|^2}\right) w_{ij} \\ &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right)(u_{ij} - w_{ij}) + \left(\frac{w^i w^j}{1+|Dw|^2} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) w_{ij} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right)\Phi_{ij} \\
&\quad + \int\limits_0^1 \frac{(\tau w^i + (1-\tau)u^i)\,(\tau w^j + (1-\tau)u^j)}{1+|D(\tau w + (1-\tau)u)|^2}\,d\tau \cdot w_{ij} \\
&= \ldots = a^{ij}\Phi_{ij} + b^i\Phi_i.
\end{aligned}
$$

Auf allgemeinere Gleichungen leichter zu übertragen wäre folgendes Vorgehen für die Herleitung der partiellen Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= \left(\delta^{ij} - \frac{u^i u^j}{1+|Du|^2}\right) u_{ij} - \left(\delta^{ij} - \frac{w^i w^j}{1+|Dw|^2}\right) w_{ij} \\
&\equiv F\left(D^2u, Du\right) - F\left(D^2w, Dw\right) \\
&= \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau} F\left(\tau D^2u + (1-\tau)D^2w, \tau Du + (1-\tau)Dw\right)\, d\tau \\
&= \int\limits_0^1 F_{r_{ij}}(\ldots)\, d\tau \cdot \Phi_{ij} + \int\limits_0^1 F_{p_i}(\ldots)\, d\tau \cdot \Phi_i \\
&= a^{ij}\Phi_{ij} + b^i\Phi_i.
\end{aligned}
$$

Dabei überzeugt man sich, dass a^{ij} und b^i gleichmäßig beschränkt und dass a^{ij} gleichmäßig elliptisch ist, wobei die Schranken jeweils nur von Schranken an Du, Dw, D^2u und D^2w abhängen. (Es reicht hier auch $a^{ij} \succcurlyeq 0$.)

(vii) Nach Lemma 6.4 und Lemma 6.5 finden wir einen Punkt $(x_1, t_1) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$ mit $\dot{\Phi}(x_1, t_1) \le -\frac{c}{2(T-t_0)}$, $|D\Phi| \le \zeta$ und $\Phi_{ij} \ge -\zeta\delta_{ij}$ sowie $\Phi(x_1, t_1) \le \inf\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot, t_1) + \varepsilon$ für beliebig kleine $\zeta, \varepsilon > 0$. Die Bedingung mit $\varepsilon > 0$ benötigen wir nicht und erhalten aus den anderen Bedingungen

$$
-\frac{c}{2(T-t_0)} \ge \dot{\Phi}(x_1, t_1) = \left(a^{ij}\Phi_{ij} + b^i\Phi_i\right)(x_1, t_1) \ge -c \cdot \zeta.
$$

Ist $\zeta > 0$ hinreichend klein, so erhalten wir einen Widerspruch. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Der Beweis von Theorem 6.1 liefert auch

Korollar 6.6. *Seien $u_{1,0}, u_{2,0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig Lipschitz stetig, d. h. es gibt ein $L \ge 0$ mit*

$$
|u_{i,0}(x) - u_{i,0}(y)| \le L \cdot |x - y|
$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $i \in \{1, 2\}$. Seien $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ Lösungen von

$$
\begin{cases}
\dot{u}_i = \sqrt{1+|Du_i|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u_i}{\sqrt{1+|Du_i|^2}}\right) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\
u_i(\cdot, 0) = u_{i,0} & \text{in } \mathbb{R}^n.
\end{cases}
$$

Dann gelten

$$
\inf_{\mathbb{R}^n} (u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)) \ge \inf_{\mathbb{R}^n} (u_{1,0} - u_{2,0})
$$

und

$$\sup_{\mathbb{R}^n}(u_1(\cdot,t)-u_2(\cdot,t)) \le \sup_{\mathbb{R}^n}(u_{1,0}-u_{2,0}).$$

6.2. **Expandierer.**

Theorem 6.7. *Sei $u_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gleichmäßig Lipschitz stetig und positiv homogen vom Grad eins, d. h. es gelte $u_0(\lambda x) = \lambda u_0(x)$ für alle $\lambda > 0$, $\operatorname{graph} u_0$ sei also ein Kegel. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ von*

$$\begin{cases} \dot u = \sqrt{1+|Du|^2}\cdot \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty),\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

und $\operatorname{graph} u$ *oder, laxerweise, u ist homothetisch expandierend, d. h. es gilt*

$$\operatorname{graph} u(\cdot,t_2) = \mu(t_1,t_2)\cdot \operatorname{graph} u(\cdot,t_1)$$

für alle $0 < t_1 < t_2$ mit $\mu(t_1,t_2) > 1$. Genauer ist $\mu(t_1,t_2) = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$ und es gilt

$$u(x,t) = \sqrt{2t}\cdot u\left(\frac{x}{\sqrt{2t}},\frac{1}{2}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$.

Beweis.

(i) Die Existenz folgt aus den Resultaten von K. Ecker und G. Huisken, siehe Theorem 4.1. Nach Theorem 6.1 ist u eindeutig bestimmt.

(ii) Ist u eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses mit Anfangswert u_0, so ist für beliebige $\lambda > 0$

$$\tilde u(x,t) := \lambda u\left(\frac{x}{\lambda},\frac{t}{\lambda^2}\right)$$

ebenfalls eine Lösung des graphischen mittleren Krümmungsflusses (Details: Übung.) und zwar mit Anfangswert $\tilde u_0(x) = \lambda u_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Ist u_0 positiv homogen vom Grade eins, so ist $\tilde u_0(x) = u_0(x)$. Somit stimmen die Lösungen u und $\tilde u$ überein und es gilt

$$\lambda u\left(\frac{x}{\lambda},\frac{t}{\lambda^2}\right) = u(x,t)$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ und alle $\lambda > 0$. Setzen wir nun insbesondere $\lambda = \lambda(t) = \sqrt{2t}$, so folgt die behauptete Relation für u.

(iii) Der Ausdruck für $\mu(t_1,t_2)$ folgt aus den Überlegungen zu homothetisch expandierenden Lösungen aus der Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen mit geometrischen Anwendungen oder aus der obigen Relation für u.

(iv) Wir geben hier das Argument zur Bestimmung des Skalierungsfaktors nochmals an: Da die Bestimmung des Skalierungsfaktors aus der graphischen Darstellung etwas knifflig ist, gehen wir parametrisch vor: Sei $X(p,t) = \lambda(t)X\left(p,\frac{1}{2}\right) \equiv \lambda(t)X_0(p)$ eine homothetisch expandierende Lösung des mittleren Krümmungsflusses, gelte also

$$\left\langle \dot X, \nu\right\rangle = -H.$$

Dann folgt

$$\dot\lambda(t)\langle X_0,\nu_0\rangle = -\frac{1}{\lambda(t)}H_0.$$

Da wir bei $\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ starten, gilt zunächst $\lambda(t) \neq 0$ und verursacht im Nenner keine Probleme. Dies folgt dann aufgrund der Differentialgleichung auch für andere Zeiten. Ist $H_0 \not\equiv 0$, so betrachten wir einen Punkt mit $H_0 \neq 0$. Dort gilt dann aufgrund der Gleichung auch $\langle X_0, \nu_0\rangle \neq 0$ und wir können die Gleichung zu

$$\dot{\lambda}(t)\lambda(t) = -\frac{H_0}{\langle X_0, \nu_0\rangle} =: c_0 \neq 0$$

umstellen. Da die rechte Seite zeitunabhängig ist, erhalten wir

$$\lambda(t) = \sqrt{2c_0\left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2c_0}\right)}.$$

Es muss $c_0 = 1$ gelten, damit die Lösung für alle $t > 0$ definiert ist ($\Longrightarrow c_0 \leq 1$) und für $t \searrow 0$ gegen einen nicht linearen Kegel konvergieren kann. Somit gilt $\lambda(t) = \sqrt{2t}$ und μ ist wie angegeben. Ist $H_0 \equiv 0$, so ist X stationär, aber wegen $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ auch bei $x = 0$ (unabhängig von t) glatt. Dies gilt bis $t = 0$. Für einen Kegel ist dies aber nur im affin linearen Fall möglich. Hier ist μ zwar nicht eindeutig festgelegt, die angegebene Funktion ist aber eine mögliche Wahl. $\square$

Bemerkung 6.8. Ist (der Graph von) u_0 in einem Punkt asymptotisch zu einem Kegel, so sieht man nach geeignetem parabolischen Reskalieren in Raum und Zeit um diesen Punkt die homothetisch aus dem zugehörigen Kegel expandierende Lösung.

Beweisidee. Mit Sphären als Barrieren zeigt man zunächst, dass die Lösung an einer geeigneten Stelle nahe am Kegel bleibt. Im Bereich zwischen den sphärischen Barrieren verwendet man nun die leicht nach oben und unten verschobene homothetisch expandierende Lösung als Barriere. $\square$

7. Weitere Themen

7.1. **Mittlerer Krümmungsfluss ohne Singularitäten.** Wir folgen unserer Arbeit [19] und zeigen zusätzlich, dass die Distanz zweier Lösungen wächst, falls eine davon kompakt ist.

7.2. **Stabilität.** Wir behandeln die Stabilität der Ebene nach G. Huisken aus dem Anhang von [6] und die rotationssymmetrischer translatierender Lösungen [5].

7.3. **Stetige Anfangsdaten.** Wir benutzen [2] und den Übersichtsartikel [3].

7.4. **Neumannrandbedingungen.** Wir folgen [15] und [1].

Anhang A. Normabschätzung für Tensoren

Lemma A.1. *Sei S ein (r,s)- und T ein (s,r)-Tensor. Dann gilt die Abschätzung*

$$S^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

mit

$$\|S\|^2 = S^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \cdot S^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s} \cdot g_{i_1k_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_rk_r} \cdot g^{j_1l_1} \cdot \ldots \cdot g^{j_sl_s}.$$

Beweis. Da das Vorgehen bereits im Falle von $(1,2)$- bzw. $(2,1)$-Tensoren klar werden sollte, beschränken wir uns beim Beweis auf diesen Fall. Wir möchten also zeigen, dass

$$S^a_{ij} T^{ij}_a \leq \left(S^a_{ij} S^b_{kl} g^{ik} g^{jl} g_{ab}\right)^{1/2} \cdot \left(T^{ij}_a T^{kl}_b g_{ik} g_{jl} g^{ab}\right)^{1/2}$$

gilt, wobei wir auf der rechten Seite jeweils nur über die Indices innerhalb einer der beiden Klammern summieren.

Dazu definieren wir die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vom Raum der Paare von $(1,2)$-Tensoren in die reellen Zahlen durch

$$\langle S,R\rangle := S^a_{ij}R^b_{kl}g_{ab}g^{ik}g^{jl}.$$

Wir behaupten, dass dies ein Skalarprodukt auf den $(1,2)$-Tensoren definiert. Symmetrie und Bilinearität sind klar. Die positive Definitheit erhalten wir, indem wir in einem Punkt mit $g_{ij}=\delta_{ij}$ diese aus

$$\langle S,S\rangle = \sum_{a,i,j}\left(S^a_{ij}\right)^2$$

direkt ablesen, oder, indem wir $g_{ab}=\sqrt{g}_{ak}\delta^{kl}\sqrt{g}_{lb}$ und eine entsprechende Zerlegung für g^{ik} und g^{jl} verwenden und dann aus

$$0<\langle S,S\rangle = S^a_{ij}\sqrt{g}_{ab}\sqrt{g}^{ik}\sqrt{g}^{jl}\cdot\delta^{bc}\delta_{kr}\delta_{lt}\cdot S^d_{su}\sqrt{g}_{dc}\sqrt{g}^{sr}\sqrt{g}^{ut}$$

$$\left(S^a_{ij}\sqrt{g}_{ab}\sqrt{g}^{ik}\sqrt{g}^{jl}\right)_{b,k,l}\neq 0$$

und weiter aufgrund der Invertierbarkeit der Wurzel der Metrik und ihrer Inversen

$$\left(S^a_{ij}\right)_{a,i,j}\neq 0$$

erhalten.

Nun definieren wir R durch

$$R^b_{kl} := T^{ij}_a g^{ab}g_{ik}g_{jl}.$$

Wir nutzen jetzt die Inversenbeziehung für die Metrik, wenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}
S^a_{ij}T^{ij}_a &= S^a_{ij}T^{kl}_b g^{bc}g_{kr}g_{ls}\cdot g_{ac}g^{ir}g^{js}\\
&= S^a_{ij}R^c_{rs}\cdot g_{ac}g^{ir}g^{js}\\
&= \langle S,R\rangle\\
&\le \sqrt{\langle S,S\rangle}\cdot\sqrt{\langle R,R\rangle}\\
&= \sqrt{\|S\|^2}\cdot\sqrt{\|R\|^2}\\
&= \|S\|\cdot\|R\|.
\end{aligned}$$

Man sieht direkt, dass der Ausdruck für S die gewünschte Gestalt besitzt. Für R erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle R,R\rangle &= R^a_{ij}R^b_{kl}\cdot g_{ab}g^{ik}g^{jl}\\
&= T^{cd}_e g^{ea}g_{ci}g_{dj}\cdot T^{rs}_t g^{tb}g_{rk}g_{sl}\cdot g_{ab}g^{ik}g^{jl}\\
&= T^{cd}_e T^{rs}_t g^{et}g_{cr}g_{ds},
\end{aligned}$$

also ebenfalls den gewünschten Ausdruck. Die Behauptung folgt. $\square$

Beispiele A.2. Wie oben benutzen wir wieder die Normen für die auftretenden Tensoren bezüglich der induzierten Metrik und erhalten

$$\begin{aligned}
\xi^i h_{ij}\zeta^j &\le \left\|\left(\xi^i\zeta^j\right)_{i,j}\right\|\cdot\|A\|\\
&= \|\xi\|\cdot\|\zeta\|\cdot\|A\|,\\
\xi^i h_{ij}m^{jk}X^\alpha_k\lambda_\alpha &= \xi^i m^{jk}\lambda_\alpha\cdot h_{ij}X^\alpha_k\\
&\le \left\|\left(\xi^i m^{jk}\lambda_\alpha\right)_{i,j,k,\alpha}\right\|\cdot\left\|\left(h_{ij}X^\alpha_k\right)_{i,j,k,\alpha}\right\|
\end{aligned}$$

$$= \|\xi\| \cdot \|m\| \cdot \|\lambda\| \cdot \|A\| \cdot \|DX\|.$$

Als konkrete Anwendung erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} H = g^{ij} h_{ij} &\le \left\| \left(g^{ij}\right)_{i,j} \right\| \cdot \left\| \left(h_{ij}\right)_{i,j} \right\| \\ &= \sqrt{g^{ij} g^{kl} g_{ik} g_{jl}} \cdot |A| = \sqrt{n} \cdot |A|, \end{aligned}$$

also $H^2 \le n \cdot |A|^2$. Alternativ könnten wir hier auch

$$H = h^i_i = h^j_i \delta^i_j \le |A| \cdot \left\| \left(\delta^i_j\right)_{i,j} \right\| = \sqrt{n} \cdot |A|$$

rechnen.

Als weiteres Beispiel für einen Ausdruck mit mehreren gleichen Indices am selben Tensor betrachten wir noch

$$\begin{aligned} T^i_{im} \xi^m &= T^i_{jm} \cdot \delta^j_i \xi^m \\ &\le \|T\| \cdot \left\| \left(\delta^j_i \xi^m\right)_{i,j,m} \right\| \\ &= \|T\| \cdot \sqrt{n} \cdot \|\xi\|. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma kann man auch Ausdrücke abschätzen, die tensoriell und nicht skalar sind, bei denen auf der linken Seite also noch ein „freier“ Index steht. Als Beispiel betrachten wir dazu

$$\begin{aligned} \left\| \left(A^k_i v_k\right)_i \right\|^2 &= v_k A^k_i g^{ij} A^l_j v_l \\ &= v_k g^{ij} A^l_j \cdot A^k_i v_l \\ &\le \|v\|^2 \cdot \|A\|^2. \end{aligned}$$

Wie weisen dabei darauf hin, dass die Normen der Tensoren mit den Komponenten A^l_j und $g^{ij} A^l_j$ übereinstimmen.

Schließlich möchten wir noch andeuten, wie man mit dieser Technik auch größere Tensorausdrücke in ihre Faktoren zerlegen und mit der Norm abschätzen kann. Dazu fügt man zunächst so viele Kronecker-Deltas ein, dass man die Faktoren danach in zwei Gruppen aufteilen kann, in denen kein Index (bei dem dies am Ende nicht gewünscht ist) mehr doppelt vorkommt. Dies ergibt wie oben von der Dimension abhängige Zusatzfaktoren, insbesondere in Fällen wie h^i_i oder ${R_{ij}}^i{}_k$. Dann kann man unsere Technik auf die Aufteilung in diese beiden Gruppen anwenden. Je nach Struktur der Ausdrücke muss man das Vorgehen anpassen und gegebenenfalls mehrfach durchführen. Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} \left(K^a_b L^b_c M^c_a\right)^2 &\le \left\| \left(K^a_b L^b_c\right)_{a,c} \right\|^2 \cdot \|M\|^2 \\ &= K^a_b g_{ai} L^j_l \cdot L^b_c g^{cl} K^i_j \cdot \|M\|^2 \\ &\le \|K\|^2 \cdot \|L\|^2 \cdot \|M\|^2. \end{aligned}$$

Ein Beispiel für ein „maximal verbundenes“ Produkt aus vier Tensoren mit zugehöriger Abschätzung ist

$$\begin{aligned} \left(K^a_{bc} L^b_{de} M^{cd}_f N^{fe}_a\right)^2 &\le \left\| \left(K^a_{bc} L^b_{de}\right)_{a,c,d,e} \right\|^2 \cdot \left\| \left(M^{cd}_f N^{fe}_a\right)_{a,c,d,e} \right\|^2 \\ &= \left(\underline{K^a_{bc}} L^b_{de} \underline{K^r_{st}} L^s_{uv} \underline{g_{ar} g^{ct}} g^{du} g^{ev} \right) \cdot (\ldots) \end{aligned}$$

$$\le \|K\|^2 \cdot \|L\|^2 \cdot \|M\|^2 \cdot \|N\|^2,$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die markierten Terme zusammen behandelt haben. Alternativ hätte man hier auch zunächst nur N, dann M und schließlich L abspalten können. Bei beiden Vorgehensweisen entsteht an den Stellen, an denen die Summation auseinandergerissen wird jeweils die gewünschte der Norm entsprechende Summation.

Wie angekündigt nun noch ein Beispiel mit dem Riemannschen Krümmungstensor. Wieder nutzen wir Unterstreichungen um anzudeuten, welche Terme wir zusammenfassen. Analog zu oben stimmen die Normen der unterstrichenen und der nicht unterstrichenen Tensoren überein.

$$\begin{aligned}\|\operatorname{Ric}\|^2 = \|(R_{jl})_{j,l}\|^2 &= \left\|\left(R_{ij}{}^{i}{}_{l}\right)_{j,l}\right\|^2 = \left\|\left(R_{ijkl}g^{ki}\right)_{j,l}\right\|^2 \\ &= \underline{R_{ijkl}}g^{ki} \cdot R_{abcd}\underline{g^{ca} \cdot g^{jb}g^{ld}} \\ &\le \left\|\left(R_{ijkl}g^{ca}\right)_{i,j,k,l,c,a}\right\|^2 = n \cdot \|\operatorname{Rm}\|^2.\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung auf mehr Faktoren überlassen wir nun dem Leser.

Korollar A.3. *Es gilt die Katosche Ungleichung*

$$|\nabla |A||^2 \le |\nabla A|^2$$

in Punkten mit $A \neq 0$.

Literatur

1. Steven J. Altschuler and Lang F. Wu, *Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 1, 101–111.
2. Ben Andrews and Julie Clutterbuck, *Lipschitz bounds for solutions of quasilinear parabolic equations in one space variable*, J. Differential Equations **246** (2009), no. 11, 4268–4283.
3. Ben Andrews, *Moduli of continuity, isoperimetric profiles, and multi-point estimates in geometric heat equations*, 2014, `http://maths-people.anu.edu.au/~andrews/`.
4. Julie Clutterbuck, *Parabolic equations with continuous initial data*, `arXiv:math.AP/0504455`.
5. Julie Clutterbuck, Oliver C. Schnürer, and Felix Schulze, *Stability of translating solutions to mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 281–293.
6. Julie Clutterbuck and Oliver C. Schnürer, *Stability of mean convex cones under mean curvature flow*, Math. Z. **267** (2011), no. 3-4, 535–547.
7. Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II, *Sharp estimates for mean curvature flow of graphs*, J. Reine Angew. Math. **574** (2004), 187–195.
8. Klaus Ecker and Gerhard Huisken, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 547–569.
9. Avner Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
10. Claus Gerhardt, *Existenz für kleine Zeiten bei Dirichlet Randwerten*, 2008, Lecture Notes.
11. Claus Gerhardt, *Curvature problems*, Series in Geometry and Topology, vol. 39, International Press, Somerville, MA, 2006.
12. Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306.
13. Gerhard Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 237–266.
14. Gerhard Huisken and Alexander Polden, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996), Lecture Notes in Math., vol. 1713, Springer, Berlin, 1999, pp. 45–84.
15. Gerhard Huisken, *Nonparametric mean curvature evolution with boundary conditions*, J. Differential Equations **77** (1989), no. 2, 369–378.

16. Olga A. Ladyženskaja, Vsevolod A. Solonnikov, and Nina N. Ural′ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
17. David Lovelock and Hanno Rund, *Tensor, differential forms, and variational principles*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1975, Pure and Applied Mathematics.
18. Thomas Marquardt, *The inverse mean curvature flow for hypersurfaces with boundary*, Ph.D. thesis, Freie Universität Berlin, 2012, `http://www.diss.fu-berlin.de/diss/receive/FUDISS_thesis_000000038370`.
19. Mariel Sáez Trumper and Oliver C. Schnürer, *Mean curvature flow without singularities*, J. Differential Geom. **97** (2014), no. 3, 545–570.
20. Oliver C. Schnürer, *Surfaces contracting with speed* $|A|^2$, J. Differential Geom. **71** (2005), no. 3, 347–363.
21. Oliver C. Schnürer, *The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces in Lorentz manifolds*, Math. Z. **242** (2002), no. 1, 159–181.
22. Oliver C. Schnürer, *Variationsrechnung*, 2013, Skript zur Vorlesung.
23. Nikolaos Stavrou, *Selfsimilar solutions to the mean curvature flow*, J. Reine Angew. Math. **499** (1998), 189–198.

Oliver C. Schnürer, Universität Konstanz, Germany
Email address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`