Oliver Schnürer,
Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen per Induktion:

$$(i) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(ii) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2$$

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Sei M eine n-elementige Menge, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Weisen Sie die folgende Formel

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ nach, wobei wir für $k > n$ und $k < 0$ definieren, dass $\binom{n}{k} := 0$ ist.

(ii) Zeigen Sie per Induktion, dass M genau

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Teilmengen mit genau k Elementen besitzt, wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \le k \le n$ ist.

(iii) Verwenden Sie die Formel aus (i) um nachzuweisen, dass die Potenzmenge von M, bezeichnet mit $\mathcal{P}(M)$, genau 2^n Elemente enthält.

Aufgabe 1.3. (2 Punkte)
Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das folgende Gleichungssystem an und bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x^1 & - & x^2 & + & 2x^3 & - & 3x^4 & = & 7 \\
4x^1 & & & + & 3x^3 & + & x^4 & = & 9 \\
2x^1 & - & 5x^2 & + & x^3 & & & = & -2 \\
3x^1 & - & x^2 & - & x^3 & + & 2x^4 & = & -2
\end{array}$$

Aufgabe 1.4. (2 Punkte)
Sei M eine Menge und seien $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ Elemente der Potenzmenge von M. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $C \subset A$
(ii) $C \subset C \cap A$
(iii) $C = C \cap A$
(iv) Für jede beliebige Menge B gilt die Identität $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Aufgabe 1.5. (4 Punkte)

(i) Die natürlichen Zahlen sind durch eine Menge $\mathbb{N}$ gegeben, in der es ein ausgezeichnetes Element 0 und eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt mit den Eigenschaften:

(P_1) ν ist injektiv.
(P_2) Ist N eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $0 \in N$ und der Eigenschaft, dass für alle $n \in N$ bereits $\nu(n) \in N$ gilt, dann ist bereits $N = \mathbb{N}$.

Diese Eigenschaften werden als *Peano-Axiome* bezeichnet und ein Tripel $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ wie oben bezeichnen wir als ein Modell der natürlichen Zahlen.
Beweisen Sie, dass die Abbildung ν surjektiv ist.

(ii) Wir zeigen nun, dass das *Unendlichkeitsaxiom* der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre die Existenz eines Modells der natürlichen Zahlen impliziert:
Das Unendlichkeitsaxiom sichert die Existenz einer *induktiven Menge*, d.h. einer Menge M, welche die leere Menge und mit jedem $x \in M$ auch $x \cup \{x\}$ enthält. Sei I die Menge aller induktiven Mengen, so setzen wir

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in I} M$$

und definieren $0 := \emptyset$ und $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $\nu(n) := n \cup \{n\}$. Zeigen Sie nun, das $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist und dass $(\mathbb{N}, 0, \nu)$ den Peano-Axiomen genügt.
Hinweis: Um die Injektivität von ν zu zeigen, beweise man zunächst, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ für jede beliebige Menge x die Eigenschaft „$x \in n \Longrightarrow x \subset n$“ erfüllt.

Abgabe: Bis Dienstag, 26.10.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Prüfen Sie, für welche $y \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x^1 & + & 4x^2 & + & 2x^3 & = & -12y^2 \\ x^1 & + & 10x^2 & + & 6x^3 & = & -7y^2+2y+8 \\ 2x^1 & + & 12x^2 & + & 7x^3 & = & -12y^2+5y+9 \end{array}$$

Falls eine Lösung existiert, ist diese eindeutig?
Bemerkung: Es darf verwendet werden, dass die Gleichung $(y-\lambda_1)\cdot(y-\lambda_2)=0$ für $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ genau $y=\lambda_1$ und $y=\lambda_2$ als Lösungen besitzt.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei Funktionen, wobei $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien.
Seien $a, b \in \mathbb{R}^m$ und sei $A_a = \{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n : f(x^1,\ldots,x^n) = a\}$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x^1,\ldots,x^n) = a \tag{1}$$

und $B_b = \{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n : g(x^1,\ldots,x^n) = b\}$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$g(x^1,\ldots,x^n) = b. \tag{2}$$

a) Sei zunächst $m = 1$. Geben Sie zwei Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ an, so dass
   (i) $\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0\} = A_a \cup B_b$ und
   (ii) $\{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x) = 0 \equiv (0,0)\} = A_a \cap B_b$.
b) Nennen Sie allgemeine Bedingungen an die Funktion f, so dass die Gleichung (1) für jedes $a \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist beziehungsweise jede Lösung der Gleichung eindeutig ist.
c) Nun sei f eine lineare Funktion, d.h. für beliebige $(x^1,\ldots,x^n), (y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte

$$f(\lambda x^1,\ldots,\lambda x^n) = \lambda f(x^1,\ldots,x^n),$$
$$f(x^1,\ldots,x^n) + f(y^1,\ldots,y^n) = f(x^1+y^1,\ldots,x^n+y^n).$$

Was für eine Gleichung ist nun durch (1) gegeben?
Sei $n = m$. Formulieren Sie nun eine zur allgemeinen Bedingung an f in Teilaufgabe b) äquivalente Bedingung für die Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung (1).

Aufgabe 2.3. (4 Punkte)
Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Seien $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv. Zeigen Sie, dass dann auch f, g und h bijektiv sind.

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)

a) Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Wir definieren die Projektion auf die zweite Komponente durch $\pi_2 : A \times B \to B$, $(a, b) \mapsto b$. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn für alle $y \in B$ die Menge $\pi_2^{-1}(\{y\}) \cap$ graph f maximal ein Element enthält.
b) Seien f und π_2 wie in Teilaufgabe a) gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $\pi_2(\text{graph } f) = B$ gilt.
c) Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen.
Wir definieren die folgenden Projektionen:

$$\begin{aligned} \pi_{12} &: A \times B \times C \to A \times B, & (x, y, z) &\mapsto (x, y), \\ \pi_{23} &: A \times B \times C \to B \times C, & (x, y, z) &\mapsto (y, z), \\ \pi_{13} &: A \times B \times C \to A \times C, & (x, y, z) &\mapsto (x, z). \end{aligned}$$

Sei nun $G = \pi_{12}^{-1}$ (graph f) $\cap$ π_{23}^{-1} (graph g). Zeigen Sie, dass dann

$$\text{graph } (g \circ f) = \pi_{13}(G)$$

gilt.

Aufgabe 2.5. (Zusatzaufgabe: 6 Punkte)
Seien zwei Mengen A, B und eine Abbildung $f : A \to B$ gegeben. Wir definieren

$$\text{im}(f) := f(A) = \{y \in B : \exists\, x \in A \text{ mit } f(x) = y\}.$$

Zeigen Sie, dass 6 der folgenden Aussagen äquivalent sind (eine ist es nicht, welche?):

(i) f ist injektiv.
(ii) Für alle $C \subset A$ gilt $f^{-1}\big(f(C)\big) = C$.
(iii) Für alle $C, D \subset A$ gilt $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.
(iv) Für alle $C, D \subset A$ mit $C \cap D = \emptyset$ gilt $f(C) \cap f(D) = \emptyset$.
(v) Für alle Mengen C, D mit $C \subset D \subset A$ gilt $f(D \setminus C) = f(D) \setminus f(C)$.
(vi) Es gibt eine Abbildung $g : \text{im}(f) \to A$ mit $f \circ g = \text{Id}_{\text{im} f}$.
(vii) Es gibt eine Abbildung $g : \text{im}(f) \to A$ mit $g \circ f = \text{Id}_A$.

Abgabe: Bis Dienstag, 02.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)

Eine Menge G mit einer Verknüpfung „$\cdot$“ bezeichnet man als Gruppe, wenn sie die Bedingungen (F6), (F7) und (F8) aus der Definition 2.1.1 (ohne die Eindeutigkeitsforderung an die Inverse) erfüllt. Eine Gruppe heißt abelsch, wenn auch (F5) erfüllt ist.

Mit dieser Definition sieht man leicht ein, dass eine Menge F mit einer Addition „$+$“ und einer Multiplikation „$\cdot$“ genau dann ein Körper ist, wenn $(F,+)$ und $(F\setminus\{0\},\cdot\,)$ abelsche Gruppen sind und das Distributivgesetz (F9) erfüllt ist.

Sei nun G eine Gruppe.

(i) Weisen Sie nach, dass das neutrale Element $1\in G$ eindeutig bestimmt ist und die Eigenschaft $1\cdot a=a$ für alle $a\in G$ erfüllt.

(ii) Zeigen Sie, dass auch das inverse Element a^{-1} für jedes $a\in G$ eindeutig bestimmt ist und die Eigenschaft $a^{-1}\cdot a=1$ erfüllt.

(iii) Ein Nullteiler A in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ein von Null verschiedenes Element $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, für welches es ein von Null verschiedenes Element $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A\cdot B=0$ oder $B\cdot A=0$ gibt. Geben Sie ein Beispiel für einen Nullteiler in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an.
Finden Sie unter den Bedingungen (F1)-(F9) zwei, welche für die reellen (2×2)-Matrizen mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation verletzt sind.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)

(i) Seien $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ und $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$. Gelte $ad-bc\neq 0$. Zeigen Sie, dass A eine Rechtsinverse bezüglich der Matrixmultiplikation besitzt, d.h. dass es ein Element $A_R^{-1}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A\cdot A_R^{-1}=I$ gibt. Die Rechtsinverse ist dann durch die folgende Formel gegeben:

$$A_R^{-1}=\tfrac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Menge eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation ist:

$$M=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbb{R},ad-bc\neq 0\right\}.$$

(iii) Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{C}:=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ein Körper bezüglich der Matrixaddition und der Matrixmultiplikation ist.

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$ einen Körper bildet, wobei wir die Addition und die Multiplikation von $\mathbb{R}$ verwenden:

$$\mathbb{Q}\big[\sqrt{3}\big]:=\big\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\big\}.$$

Bemerkung: Es darf verwendet werden, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper sind, dass $\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist und dass $\sqrt{3}^2=3$ gilt.

Aufgabe 3.4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = \left(a^i_j\right) \in K^{m\times m}$, $m \in \mathbb{N}^+$. Wir definieren die Spur (englisch: *trace*) von A mittels

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a^i_i.$$

Seien nun $A, B, C \in K^{m\times m}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gültig sind:

(i) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
(ii) $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$.
(iii) Es gibt m, K und Matrizen A, B, C, so dass $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(CBA)$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 09.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Sei F ein Körper und $m \in \mathbb{N}^+$. Sei $A \in F^{m\times m}$ und sei $I \in F^{m\times m}$ die Einheitsmatrix. Wir setzen $A^0 := I$, $A^1 := A$ und $A^{k+1} := A \cdot A^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $N = \left(a^i_j\right) \in F^{m\times m}$ eine Matrix mit $a^i_j = 0$ für $i \geq j$. Zeigen Sie, dass $N^m = 0$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass für $A \in F^{m\times m}$ und beliebige $n \in \mathbb{N}$

$$(I - A)\cdot\left(I + A + A^2 + \ldots + A^n\right) \equiv (I - A)\cdot\sum_{i=0}^{n} A^i = I - A^{n+1}$$

und

$$\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right)\cdot(I - A) = I - A^{n+1}$$

gelten.
(iii) Eine Matrix $N \in F^{m\times m}$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N^n = 0$ gibt. Zeigen Sie, dass die Matrix $D = I - N$ für eine beliebige nilpotente Matrix N invertierbar ist, d.h. dass es ein $C \in F^{m\times m}$ mit $DC = CD = I$ gibt.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Sei für $p \in \mathbb{N}^+$ die Menge $\mathbb{Z}/(p) := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ wie in Beispiel 2.1.2 aus der Vorlesung definiert. Die Addition und die Multiplikation auf dieser Menge seien ebenfalls wie in diesem Beispiel definiert. Beweisen Sie nun folgende Aussagen:

a) $(\mathbb{Z}/(p), +)$ ist eine abelsche Gruppe. Man nennt diese Gruppe eine *zyklische Gruppe der Ordnung* p.
b) $\mathbb{Z}/(p)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn p eine Primzahl ist. Hierbei bezeichnen wir $\mathbb{Z}/(p)$ als nullteilerfrei, wenn für alle $a, b \in \mathbb{Z}/(p)$ mit $a \cdot b = 0$ bereits $a = 0$ oder $b = 0$ folgt.
c) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}/(p)$ ein Körper. Man bezeichnet diesen Körper mit $\mathbb{F}_p$.

Bemerkung: Sie dürfen folgende Aussagen über Primzahlen verwenden:

(i) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann teilt a die Zahl b, $a|b$, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot n = b$ gibt.
(ii) Eine Zahl p heißt *Primzahl*, wenn $p \in \mathbb{N}$ und $p \geq 2$ gelten und wenn für beliebige $a \in \mathbb{N}$ aus $a|p$ bereits $a = 1$ oder $a = p$ folgt.
(iii) Sei $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}^+$ und eindeutig bestimmte Primzahlen $p_1 \leq \ldots \leq p_n$ mit $a = p_1 \cdots p_n$.
(iv) Seien $a, b, p \in \mathbb{N}$ und sei p eine Primzahl. Dann folgt aus $p|(a \cdot b)$ bereits $p|a$ oder $p|b$.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie, dass dann A/$\sim$ eine Partition von A ist.

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)

a) Sei V ein F-Vektorraum, F ein Körper und $U \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass durch $a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \in U$ eine Äquivalenzrelation definiert wird, welche wir im Folgenden als Kongruenz modulo U bezeichnen.
b) Seien $a, b \in V$ und $\lambda \in F$ beliebig. Wir definieren die Addition zweier Äquivalenzklassen $[a], [b]$ durch $[a] + [b] := [a + b]$ und die Skalarmultiplikation durch $\lambda \cdot [a] := [\lambda \cdot a]$. Zeigen Sie, dass dann $V/U := V/\sim$ ein Vektorraum über F ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 16.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

a) Sei $F = \mathbb{F}_5$. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}.$$
Berechnen Sie die additive Inverse von A.

b) Sei $F = \mathbb{F}_5$. Berechnen Sie mittels Aufgabe 4.1 die multiplikative Inverse der Matrix A.

c) Sei F ein Körper. Ein Polynom $p \in F[X]$ mit $\deg(p) > 0$ heißt irreduzibel über F, falls aus $p = f \cdot g$ mit $f, g \in F[X]$ bereits $\deg(f) = 0$ oder $\deg(g) = 0$ folgt. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2 + 1$

(i) nicht irreduzibel über $\mathbb{F}_2$, aber
(ii) irreduzibel über $\mathbb{F}_3$ ist.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)

Sei V ein F-Vektorraum, F ein Körper. Seien $W_1, \ldots, W_p$ Unterräume von V und $W := W_1 + \ldots + W_p$. Dann heißt W die direkte Summe der W_i, wenn für $i \in \{1, \ldots, p\}$ gilt, dass $W_i \cap \sum_{j\neq i} W_j = \{0\}$ ist. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) W ist die direkte Summe der W_i.
(ii) Für beliebige $a_i \in W_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, welche $\sum_{i=1}^p a_i = 0$ erfüllen, folgt bereits $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)

Sei V ein F-Vektorraum, F ein Körper und seien $S, T \subset V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\langle S\rangle = \langle T\rangle$ genau dann, wenn jedes $s \in S$ sich als Linearkombination von Vektoren aus T und jedes $t \in T$ sich als Linearkombination von Vektoren aus S darstellen lässt.

b) Es gilt $\langle S\rangle + \langle T\rangle = \langle S \cup T\rangle$.

Aufgabe 5.4. (4 Punkte)

a) Eine Teilmenge $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^+$, bezeichnen wir als Gerade, falls es $c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $H = \{c + td : t \in \mathbb{R}\}$ und $d \neq 0$ gibt. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^+$ und sei $G := \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie: Die Menge G beschreibt genau dann eine Gerade, welche nicht den Ursprung 0 enthält, wenn die Familie $\{a, b\}$ linear unabhängig ist.

b) Sei F ein Körper und seien $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in F^2$.
Zeigen Sie, dass die Familie $\{v, w\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $ad - bc = 0$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 23.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer,
Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)

a) Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}^4$. Sei $S := \{(1,1,1,1), (2,-4,11,2), (0,2,-3,0)\}$. Prüfen Sie, ob S in V linear unabhängig ist und geben Sie eine Teilmenge von S an, die eine Basis von $\langle S \rangle$ ist.
b) Ergänzen Sie die Menge $\{(1,1,1,1), (0,2,-3,0)\}$ zu einer Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$.
c) Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}^2$. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $S_x := \{(1+i, 1-i), (x, xi)\}$. Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, so dass S_x in V linear unabhängig ist? Wenn ja, geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für welche dies erfüllt ist.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)

a) Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Sei V ein K-Vektorraum. Seien $u, v, w \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch $u + v$, $u + w$, $v + w$ linear unabhängig sind.
b) Sei nun $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$ und seien $x, y, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\{(x, y, 0), (x, 0, z), (0, y, z)\}$ linear unabhängig ist.

Bemerkung: Als die Charakteristik eines Körpers K bezeichnet man die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}^+$, so dass $n := n \cdot 1 \equiv 1 + \ldots + 1 = 0$ gilt. Gibt es kein solches n, so sagt man, K habe die Charakteristik 0.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)

In dieser Übungsaufgabe soll die Bemerkung nach Theorem 3.2.12 bewiesen werden, d.h. dass der Beweis von Theorem 3.2.12 für unendliche Erzeugendensysteme nicht funktioniert. Hierfür definieren wir die Mengen S_i für $i \in \mathbb{N}$ durch

$$S_i := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{e_k + e_i, e_k + e_{i+1}, e_k + e_{i+2}, ...\},$$

wobei $e_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $e_i(m) := \left\{ \begin{smallmatrix} 0, & m \neq i, \\ 1, & m = i, \end{smallmatrix} \right.$ definiert ist. Weiterhin sei

$$W_i := \left\{ (v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : v_j = 0 \ \forall \, j < i \right\}.$$

Sei $T_i := S_i \cup W_i$. Zeigen Sie nun, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ zwar $T_{i+1} \subset T_i$ und $\langle T_i \rangle = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gelten, aber dass $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} T_i = \{0\}$ ist.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine Hyperebene des Vektorraums K^n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ist eine Menge

$$H := \left\{ (x^1, \ldots, x^n) \in K^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = 0 \right\},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in K$ seien und es ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_{i_0} \neq 0$ gibt.

a) Sei H eine Hyperebene. Zeigen Sie, dass H ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von K^n ist.
b) Seien $H_1, \ldots, H_r$, $n \geq r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, Hyperebenen von K^n. Zeigen Sie, dass dann

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i \right) \geq n - r$$

gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 30.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ durch
$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \mapsto (3x^1 + x^2 - x^3 + x^4, -x^1 + x^2 + 3x^3 + x^4, 4x^3 + 4x^4, -2x^2 + 6x^3 + 8x^4)$$
gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.
b) Sei $A = (a^i_j) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ durch die Koeffizienten in $f(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{4} a^i_j e_i$ gegeben, wobei e_j den Einheitsvektor in die j-te Richtung des $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, $j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 4$. Geben Sie A explizit an.
c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.
d) Geben Sie eine Basis von $\ker(f) := \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = 0\}$ und von $\operatorname{im}(f) := f(\mathbb{R}^4)$ an.

Aufgabe 7.2. (2 Punkte)
Sei $k \in \mathbb{N}^+$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix des $\mathbb{R}^{k\times k}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 2 & 3 & \dots & k+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k+1 & \dots & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.3. (6 Punkte)
Sei F ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und bezeichne mit $F_n[X]$ die Menge der Polynome $p(X) \in F[X]$ mit $\deg p \le n$.

a) Begründen Sie kurz, warum $F[X]$ ein F-Vektorraum ist.
b) Zeigen Sie, dass $F_n[X]$ ein Unterraum von $F[X]$ ist.
c) Sei $W := \{p(X) \in F_n[X] : p(0) = 0 = p(1)\}$. Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von $F_n[X]$ ist.
d) Geben Sie eine Basis B_1 von W an.
e) Sei $a \in F$. Zeigen Sie, dass die Polynome $h_0[X] := 1$ und $h_i[X] := (X - a)^i$ für $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, eine Basis B_2^a von $F_n[X]$ bilden.
f) Sei $n = 4$ und $a \in F$ beliebig. Verfahren Sie wie beim Beweis des Austauschsatzes von Steinitz, um eine Basis B von $F_4[X]$ mit $B_1 \subset B$ und $B \setminus B_1 \subset B_2^a$ zu erhalten.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei weiterhin $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und seien für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Vektoren $w_i \in W$ durch $w_i := \varphi(v_i)$ definiert.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) φ ist injektiv.
   (ii) $\{w_1, \dots, w_n\}$ ist linear unabhängig.
b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) φ ist surjektiv.
   (ii) $\{w_1, \dots, w_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von W.
c) Vergleichen Sie nun $\dim V$ und $\dim W$, falls φ injektiv beziehungsweise surjektiv ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 07.12.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 8

Aufgabe 8.1. (6 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$.

a) Sei $A \in K^{n\times n}$ und sei A' eine Matrix, welche durch Anwenden einer elementaren Zeilenoperation auf A entstanden ist. Geben Sie für jede elementare Zeilenoperation eine Matrix $E \in K^{n\times n}$ an, so dass $A' = E \cdot A$ gilt.
b) Zeigen Sie nun, dass zu jeder Matrix $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix D existiert, so dass $D \cdot A$ Zeilenstufenform besitzt.
c) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann regulär ist, wenn sie sich durch elementare Zeilenoperationen auf die Form der Einheitsmatrix bringen läßt.
d) Begründen Sie nun die Richtigkeit des folgenden Verfahrens zur Berechnung der Inversen A^{-1} einer regulären Matrix $A \in K^{n\times n}$:
Man schreibe neben A die Einheitsmatrix $I \in K^{n\times n}$. Die so entstandene $(n \times 2n)$-Matrix $A\,|\,I$ bringe man durch elementare Zeilenoperationen auf die Form $I\,|\,B$. Dann gilt $B = A^{-1}$.

Aufgabe 8.2. (2 Punkte)
Prüfen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und geben Sie, falls möglich, die Inverse an:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Aufgabe 8.3. (4 Punkte)
Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $A \in \mathbb{F}_p^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass es $r, s \in \mathbb{N}^+$ gibt, so dass

$$A^r = A^{r+s},\ A^{r+1} = A^{(r+1)+s},\ \ldots,\ A^{r+s-1} = A^{(r+s-1)+s}$$

gilt. Wir sagen dann, dass die Folge $I, A, A^2, \ldots$ periodisch wird.
Hinweis: Wie viele Elemente besitzt $\mathbb{F}_p^{n\times n}$?

Aufgabe 8.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei $N \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix.

a) Zeigen Sie, dass N nicht invertierbar ist.
b) Zeigen Sie, dass bereits $N^n = 0$ gilt.

Hinweis: Sei m der Nilpotenz-Index von N, d.h. m ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass $N^m = 0$ gilt. Zeigen Sie in Aufgabenteil b) zunächst, dass $\ker N^0 \subset \ker N^1 \subset \ker N^2 \subset \ldots \subset \ker N^m$ eine echt aufsteigende Kette von Unterräumen ist, d.h. es gilt $\ker N^i \neq \ker N^{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m-1$.

Abgabe: Bis Dienstag, 14.12.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski | Universität Konstanz | Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)
Bestimmen Sie Komplemente der folgenden Unterräume U_i der Vektorräume V_i, $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le 4$:

(i) $V_1 = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \langle (1,2,3), (-2,4,1), (7,-2,7) \rangle$.
(ii) $V_2 = \mathbb{R}^4$, $U_2 = \{(x^1,x^2,x^3,x^4) \in \mathbb{R}^4 : 3x^1 - 2x^2 + x^3 + 2x^4 = 0\}$.
(iii) $V_3 = \mathbb{C}^4$, $U_3 = \langle (1, i, 1+i, 2), (2+4i, -5+i, 0, 2+6i), (0, 1, 2+4i, 2) \rangle$.
(iv) $V_4 = \mathbb{R}_4[X]$, $U_4 = \{p(X) \in V_4 : p(0) = p(1) = 0\}$.

Aufgabe 9.2. (4 Punkte)
Bestimmen Sie $I, A, A^2, \ldots$, d.h. A^k für alle $k \in \mathbb{N}$, für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{4\times 4}.$$

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)
Seien die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B := \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, C := \begin{pmatrix} 3+i & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1+i \\ 2-i & 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

gegeben, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien. Bestimmen Sie den Rang dieser Matrizen in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$. Falls die Matrix invertierbar ist, berechnen Sie die Inverse.

Aufgabe 9.4. (4 Punkte)
Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen $A, B \in \mathbb{F}_{11}^{11\times 11}$:

$$A := \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 3 & 0 & 0 \\
10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 3 & 0 & 0 \\
10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 \\
10 & 1 & 2 & 8 & 7 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Stellen Sie das Ergebnis dar, indem Sie die Nullen durch Leerzeichen ersetzen und benennen Sie das sich ergebende geometrische Objekt!

Abgabe: Bis Dienstag, 21.12.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $V = K^{n\times n}$. Zu einer Matrix $A = (a^i_j) \in V$ sei $A^T = (\tilde{a}^i_j) \in V$ die Transponierte der Matrix A, deren Einträge durch $\tilde{a}^i_j := a^j_i$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le n$ gegeben sind.

a) Zeigen Sie, dass
$$U := \{A \in V : A = A^T\}$$
ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von U. Wir bezeichnen die Elemente von U auch als *symmetrische* Matrizen und schreiben $\operatorname{Sym}(n, K) := U$.

b) Mit $\operatorname{char} K$ bezeichnen wir die Charakteristik von K. Sei ab jetzt $\operatorname{char} K \neq 2$. Zeigen Sie, dass
$$W := \{A \in V : A = -A^T\}$$
ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von W. Wir bezeichnen die Elemente von W auch als *antisymmetrische* Matrizen und schreiben $\operatorname{Alt}(n, K) := W$.

c) Zeigen Sie nun, dass $V = U \oplus W$ gilt.

d) Markieren Sie oben alle Stellen, an denen Sie $\operatorname{char} K \neq 2$ verwendet haben.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $V = K^{n\times n}$. Sei $A \in V$.

a) Geben Sie eine explizite Zerlegung von A in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil an, d. h. geben Sie eine symmetrische Matrix $A_s \in V$ und eine antisymmetrische Matrix $A_a \in V$ mit $A = A_s + A_a$ an. Ist diese Zerlegung eindeutig?

b) Geben Sie eine explizite Zerlegung von A in einen spurfreien Anteil und einen Anteil mit derselben Spur wie A an, d. h. geben Sie zwei Matrizen $B, C \in V$ mit $\operatorname{tr}(B) = 0$, $\operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(A)$ und $A = B + C$ an. Ist diese Zerlegung eindeutig?

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $V = K^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass $GL(n, K) := \{A \in V : A \text{ ist regulär}\}$ eine Gruppe bezüglich der Matrix-Multiplikation ist.

b) Zeigen Sie, dass $O(n, K) := \{A \in GL(n, K) : A^{-1} = A^T\}$ eine Untergruppe von $GL(n, K)$ ist. Für $K = \mathbb{R}$ bezeichnet man diese Gruppe als Gruppe der *orthogonalen* Matrizen.

c) Sei nun $K = \mathbb{C}$. Für eine Matrix $A = (a^i_j) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei die Matrix $\bar{A}$ durch $\bar{A} = \left(\overline{a^i_j}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert, wobei $\bar{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugierte Zahl bezeichnet. Zeigen Sie, dass $U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \bar{A}^T\}$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist. Diese Gruppe bezeichnet man als Gruppe der *unitären* Matrizen.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$, $V = K^{n\times n}$ und $A \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\operatorname{rang} A < n$.
(ii) A ist ein Links-Nullteiler in V, d. h. es gibt ein $B \in V$ mit $B \neq 0$ und $A \cdot B = 0$.
(iii) A ist ein Rechts-Nullteiler in V, d. h. es gibt ein $B \in V$ mit $B \neq 0$ und $B \cdot A = 0$.

Abgabe: Bis Dienstag, 11.01.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 11

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei $\mathbb{R}_n[X]$ der Vektorraum der Polynome $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit $\deg p \le n$. Sei

$$f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad p \mapsto p'(X),$$

wobei $p'(X)$ die Ableitung von $p(X)$ bezeichnet, d. h. es gilt $p'(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i X^{i-1}$. Weiterhin bezeichnen wir mit $B_n := (1, X, \ldots, X^n)$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung f_n gehörige Matrix $A(n, n-1)$ bezüglich der Basen B_n und B_{n-1}.
b) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $g_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ mit $f_n \circ g_n = \mathrm{Id}$ gibt.
c) Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung g_n gehörige Matrix $C(n-1, n)$ bezüglich der Basen B_{n-1} und B_n.

Bemerkung: Sie dürfen die bekannten Resultate aus der Schule für die Ableitung und das Integral von Polynomen verwenden.

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie, dass $V = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi$ gilt.
b) Seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $U \subset W$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass
$$\dim \varphi^{-1}(U) = \dim(U \cap \operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi)$$
gilt.

Aufgabe 11.3. (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum und seien U, W Unterräume von V. Sei $i : U \hookrightarrow U + W$ die Inklusionsabbildung und sei $\pi : U + W \to (U + W)/W$ die Projektionsabbildung.
Zeigen Sie, dass $U \cap W$ der Kern der Abbildung $\varphi := \pi \circ i : U \to (U + W)/W$ ist und dass die induzierte Abbildung $\bar{\varphi} : U/(U \cap W) \to (U + W)/W$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 11.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $n, m, r, s \in \mathbb{N}^+$. Seien die Matrizen $A \in K^{n\times r}$, $B \in K^{r\times m}$ und $C \in K^{s\times n}$, $D \in K^{n\times r}$ gegeben. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) Es gilt $\operatorname{rang} A \le \min(n, r)$.
(ii) Nehme an, B sei surjektiv. Dann ist $\operatorname{rang}(A \cdot B) = \operatorname{rang} A$.
(iii) Nehme an, dass $\ker C = \{0\}$ ist. Dann folgt $\operatorname{rang}(C \cdot A) = \operatorname{rang} A$.
(iv) Es gilt $\operatorname{rang}(A \cdot B) \le \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.
(v) Sei $k := \operatorname{rang} A$ und $l := \operatorname{rang} D$. Dann gilt $|k - l| \le \operatorname{rang}(A + D) \le k + l$.

Abgabe: Bis Dienstag, 18.01.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 12

Aufgabe 12.1. (4 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{R}$.

a) Sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ durch $x = (x^i) \mapsto (0, x^0, x^1, x^2, \ldots)$ gegeben. Zeigen Sie, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.
b) Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Abbildung $f : V \to V$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 12.2. (4 Punkte)

a) Sei f die Abbildung aus Aufgabe 7.1. Seien $B_1 := \{(1,1,1,1), (2,-4,11,2), (3,1,4,0), (0,-2,1,5)\}$ und $B_2 := \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie die Darstellung der Abbildung f bezüglich der Basen B_1 und B_2 an.
b) Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei $\mathbb{R}_n[X]$ der Vektorraum der Polynome mit $\deg p \le n$. Weiterhin verwenden wir die Bezeichnungen von Aufgabe 11.1 für die Abbildung f_n und die Standardbasis B_n von $\mathbb{R}_n[X]$. Zu gegebenem $a \in \mathbb{R}$ sei $C_n^a := \{h_0, \ldots h_n\}$ mit $h_0[X] := 1$, $h_i[X] := (X-a)^i$ für $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, eine weitere Basis des $\mathbb{R}_n[X]$.
   (i) Bestimmen Sie die Matrix des Basiswechsels von B_n nach C_n.
   (ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung f_3 gehörige Matrix A bezüglich der Basen C_3^a und C_2^b.

Hinweis: Sie dürfen die verallgemeinerte binomische Formel für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ verwenden:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Aufgabe 12.3. (4 Punkte)
Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und V_1, V_2 Unterräume von V sowie W_1, W_2 Unterräume von W mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $W = W_1 \oplus W_2$. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(V_1) \subset W_1$ und $\varphi(V_2) \subset W_2$. Zeigen Sie, dass es eine Basis B_1 von V und eine Basis B_2 von W gibt, so dass die darstellende Matrix A der Abbildung φ bezüglich B_1 und B_2 die Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

hat mit $A_1 \in K^{\dim W_1 \times \dim V_1}$, $A_2 \in K^{\dim W_2 \times \dim V_2}$.

Aufgabe 12.4. (4 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie, dass es eine Basis B von V gibt, so dass die darstellende Matrix A von φ bezüglich B die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei $r \in \mathbb{N}$ und I_r die r-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

Abgabe: Bis Dienstag, 25.01.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 13

Aufgabe 13.1. (4 Punkte)
Seien V, W Vektorräume über K.

a) Zeigen Sie, dass die Menge der linearen Abbildungen mit der punktweise erklärten Addition und Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bilden. Man bezeichnet diesen Vektorraum mit $\operatorname{Hom}(V, W)$.
b) Sei ab jetzt V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Aut}(V)$ die Menge der invertierbaren Endomorphismen auf V. Zeigen Sie nun, dass $\operatorname{Aut}(V)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen ist.
c) Sei $\Phi : \operatorname{Hom}(V, V) \to K^{n\times n}$ der Vektorraum-Isomorphismus aus Theorem 4.5.2. Zeigen Sie, dass die Abbildung Φ auf $\operatorname{Aut}(V)$ ein Gruppen-Isomorphismus, $\Phi : \operatorname{Aut}(V) \to \mathrm{GL}(n, K)$, ist. Hierbei wird $\operatorname{Aut}(V)$ als Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen aufgefasst, $\mathrm{GL}(n, K)$ als multiplikative Gruppe.

Bemerkung: Ein Gruppen-Isomorphismus ist ein Gruppen-Homomorphismus, der eine Inverse besitzt, welche ebenfalls ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Aufgabe 13.2. (4 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die durch folgendes rekursives Gesetz gegeben ist: Sei $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche $A^n \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}$ für $n > 0$ erfüllt.
(ii) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ Eigenwerte der Matrix A sind.
(iii) Bestimmen Sie Basen $\{v_1\}$ und $\{v_2\}$ der Eigenräume E_{λ_1} und E_{λ_2}.
(iv) Sei $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix des Basiswechsels von $\{e_1, e_2\}$ nach $\{v_1, v_2\}$. Zeigen Sie, dass $D = TAT^{-1}$ eine Matrix in Diagonalgestalt ist. Berechnen Sie A^n für beliebige $n > 0$ und geben Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}$ eine explizite Darstellung von a_n an.

Aufgabe 13.3. (4 Punkte)
Studieren Sie den Beweis von Theorem 5.1.2 und führen Sie dann die dort beschriebene Polynomdivision im Polynomring R in den folgenden Fällen explizit durch:

(i) $p(X) := 3X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 7$, $q(X) := X^2 - 2X + 1$, $R = \mathbb{R}[X]$.
(ii) $p(X) := X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 2X - 1$, $q(X) := X^2 - 2$, $R = \mathbb{F}_5[X]$.

Aufgabe 13.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $g \in K[X]$ ein Polynom mit $d := \deg g > 0$. Zeigen Sie, dass es zu $f \in K[X]$ ein $n \in \mathbb{N}$ und eindeutig bestimmte Polynome $a_i \in K[X]$, $0 \le i \le n$, mit $\deg a_i < d$ und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i$ gibt. Hierbei ist $g^0(X) := 1$ und $g^i(X) := g(X) \cdot g^{i-1}(X)$ für $i \in \mathbb{N}$, $i > 0$.

Bemerkung: In Aufgabe 13.3 (i) wurde in der neuen Version dieses Übungsblattes $R = \mathbb{Z}[X]$ durch $R = \mathbb{R}[X]$ ersetzt, um das Verfahren mit den Mitteln der Vorlesung rechtfertigen zu können (es bleibt allerdings mit dem selben Verfahren auch für $R = \mathbb{Z}[X]$ richtig).
Aufgabe 13.2 ist korrekt gestellt worden.

Abgabe: Bis Dienstag, 01.02.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 14

Aufgabe 14.1. (6 Punkte)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sei $V = \{(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x^{n+3} = ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

a) Zeigen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.
b) Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass V isomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist.
c) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $A \begin{pmatrix} x^n \\ x^{n+1} \\ x^{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ x^{n+2} \\ x^{n+3} \end{pmatrix}$ gilt.
d) Seien ab jetzt $a = -3$, $b = 0$, $c = 4$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, die zugehörigen Eigenvektoren und ergänzen Sie diese mit dem Vektor $3 \cdot e_3$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie A bezüglich dieser Basis dar.

Aufgabe 14.2. (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = (a^i_j) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a^i_j := \begin{cases} 1, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -1, & i > j. \end{cases}$

Abgabe: Bis Dienstag, 08.02.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.

Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 15

Probeklausur: Auf diese Aufgaben werden keine Punkte mehr vergeben. Die Bearbeitungszeit sollte etwa bei eineinhalb Stunden liegen.

Aufgabe 15.1. Sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y - 4z \\ y + 2z \\ x - 2z + y \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.
b) Geben Sie Basen von $\ker \varphi$ und $\operatorname{im} \varphi$ an.
c) Sei $U := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - 2z + y = 0\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von U, ergänzen Sie diese zu einer Basis B des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung φ bezüglich der Basis B an.

Aufgabe 15.2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $M := \{A \in K^{n \times n}\}$ der K-Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen über K.

a) Auf M definieren wir eine Relation $\sim$ durch $A \sim B :\Leftrightarrow \exists$ eine reguläre Matrix $D \in M$ mit $A = DBD^{-1}$. Zeigen Sie, das $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Sei nun $Q := M/\sim$ der Quotientenraum bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir definieren die Abbildung
$$\operatorname{Det} : Q \to K, \quad [A] \mapsto \det A.$$
Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist.
c) Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen für $K = \mathbb{F}_3$ und $n = 2$ gültig sind:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15.3. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei K ein Körper. Geben Sie die Definition der Begriffe Zeilenrang, Spaltenrang und Rang einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ an. Beweisen Sie dann, dass für $A \in K^{n \times n}$ der Zeilenrang und der Spaltenrang übereinstimmen.

Aufgabe 15.4. Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n \times n}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, \ldots, v_k$ zugehörige Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig ist.

Bemerkung: In der ersten Version dieser Probeklausur ist in Aufgabe 15.2 versehentlich das Wort „Quotientenvektorraum“ gefallen. Dies wurde durch „Quotientenraum “ ersetzt, da die Menge der Äquivalenzklassen mit der induzierten Addition und Skalarmultiplikation keinen Vektorraum bildet. In Aufgabe 15.4 wurde der Ausdruck „paarweise verschiedene“ noch hinzugefügt.