MANNIGFALTIGKEITEN

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Mannigfaltigkeiten an der Universität Konstanz im Sommersemester 2012.

INHALTSVERZEICHNIS

In dieser Vorlesung geht es um (abstrakte) Mannigfaltigkeiten und deren Krümmung.

Wir orientieren uns hier an [1–5, 7].

1. TOPOLOGISCHE GRUNDBEGRIFFE

Definition 1.1 (Topologie)**.** Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Topologie auf X ist eine Kollektion $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(ii) $A_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, impliziert $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$,
(iii) A_1, $A_2 \in \mathcal{O}$ impliziert $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

Die Mengen $A \in \mathcal{O}$ heißen offene Mengen. $B \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus B$ offen ist.

Eine Topologie $\mathcal{O}_1$ heißt feiner als eine Topologie $\mathcal{O}_2$ (und $\mathcal{O}_2$ heißt gröber als $\mathcal{O}_1$) falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ gilt.

Sei $Y \subset X$ und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Dann heißt $\mathcal{O}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{O}\}$ von $\mathcal{O}$ auf Y induzierte Topologie.

Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, falls jedes $A \subset \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt Subbasis einer Topologie $\mathcal{O}$, wenn die Kollektion aller endlichen Schnitte von Mengen in $\mathcal{S}$ eine Basis der Topologie bildet.

Date: 5. September 2012.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 53-01.

Beispiel 1.2. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind die Kugeln $B_\varepsilon(x)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, Basis der metrischen Topologie. Die metrische Topologie des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine abzählbare Basis.

Definition 1.3 (Umgebung, Stetigkeit)**.** Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $x \in X$, $U \subset X$ mit $x \in U$. Dann heißt U Umgebung von x, wenn es $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt. Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

Seien $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt in $x \in X$ stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}_Y(f(x))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ gibt. f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} stetig sind.

Definition 1.4 (Initiale Topologie, Produkttopologie)**.** Sei X eine Menge und seien $(X_i,\mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Dann existiert eine gröbste Topologie auf X, die Initialtopologie, so dass alle Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stetig werden. $\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{O}_i, i \in I\}$ ist eine Subbasis dieser Topologie.

Spezialfall Produkttopologie: Ist $X := X_1 \times X_2 \times \ldots$ und f_i die Projektion auf den Faktor i, so ist $\mathcal{S} := \{X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times \ldots : A_i \subset X_i \text{ offen}\}$. Ist $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, so ist $\{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathcal{O}_i\}$ eine Basis.

Definition 1.5 (Finale Topologie, Quotiententopologie)**.** Sei Y eine Menge und seien $(X_i,\mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen. Dann existiert eine feinste Topologie auf Y, die finale Topologie, so dass alle f_i stetig werden, nämlich $\mathcal{O} := \{A \subset Y : f_i^{-1}(A) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}$.

Spezialfall Quotientenraum: Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von x und $\bar{X} := \{\bar{x} : x \in X\}$. Definiere die Projektion $p : X \to \bar{X}$ durch $x \mapsto \bar{x}$. Die zugehörige finale Topologie heißt Quotiententopologie. $U \subset \bar{X}$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Beispiele 1.6.
(i) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, $\bar{X} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Unter $h(\bar{x}) = e^{2\pi i x}$ ist $\bar{X}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$.
(ii) $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, $x \sim y \iff x = \pm y$. $\mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n/\sim$ ist der n-dimensionale reelle projektive Raum.

Definition 1.7 (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt überdeckungskompakt, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein überdeckungskompakter Raum heißt kompakt, falls er ein T_2-Raum (= Hausdorffraum) ist, d. h. falls je zwei Punkte $x \neq y \in X$ disjunkte Umgebungen besitzen.

Ist (X,d) ein metrischer Raum, so sind Kompaktheit, Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

Theorem 1.8 (Tychonov)**.** *Das Produkt kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

Beweis. Topologievorlesung. $\square$

Definition 1.9 (Überlagerung)**.** Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt $p : X \to Y$ Überlagerung, wenn
(i) p stetig und surjektiv ist,
(ii) jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass $p^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ mit paarweise disjunkten offenen $U_i \subset X$ ist und $p|_{U_i} : U_i \to V$ für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind.

Beispiel 1.10.
(i) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{it}$,
(ii) $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $p(x) = \bar{x}$. „2-blättrige Überlagerung".

Theorem 1.11. *Sei $p : X \to B$ eine Überlagerung. Sei Z ein topologischer Raum und $f : Z \to B$ eine stetige Abbildung. Ist Z einfach zusammenhängend (also z. B. $Z = [0,1]$ oder $Z = [0,1]^2$), so existiert eine stetige Liftung $\tilde{f} : Z \to X$ mit $f = p \circ \tilde{f}$.*

Beweis. Topologievorlesung. □

2. Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1 (Mannigfaltigkeit)**.**
(i) Ein topologischer Raum M heißt lokal euklidisch von der Dimension m, falls M mit offenen Mengen überdeckt werden kann, von denen jede zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist.
(ii) Ein Paar (U, φ), wobei $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus (wie oben) ist, heißt Karte von M. Eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Karten heißt Atlas von M, falls $M \subset \bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ gilt.
(iii) Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) heißen C^k-verträglich, $k \geq 1$, wenn $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Ein Atlas heißt von der Klasse C^k, falls je zwei seiner Karten C^k-verträglich sind.
(iv) Ist $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas, so gibt es genau einen maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_0$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$; er besteht aus allen Karten, welche mit den Karten von $\mathcal{A}$ C^k-verträglich sind.
(v) Eine differenzierbare (C^k-)Struktur auf M ist ein maximaler C^k-Atlas auf M.
(vi) Ein lokal-euklidischer Hausdorff-Raum mit einer differenzierbaren Struktur heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 2.2.
(i) Beispiele sind $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$.
(ii) Offene Teilmengen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.
(iii) Teilweise fordert man zusätzlich, dass die Topologie von M eine abzählbare Basis besitzt.
(iv) In der algebraischen Topologie lernt man, dass offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nur dann homöomorph zueinander sein können, wenn $m = n$ gilt. Somit ist die Dimension eines lokal euklidischen Raumes wohldefiniert.
(v) Wir schreiben häufig M^m für eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit M.

Beispiel 2.3 (Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{m+n}$)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

gibt. Ein solches M besitzt einen C^k-Atlas, nämlich

$$\mathcal{A} := \{(U \cap M, \varphi|_{U\cap M}) \colon \text{wobei } (U, \varphi) \text{ wie oben}\}.$$

M ist lokal euklidisch von der Dimension m. Es gilt

$$(\psi|_{V\cap M}) \circ (\varphi|_{U\cap M})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{(\mathbb{R}^m\times\{0\})\cap\varphi(U\cap V)} \in C^k.$$

Bemerkung 2.4. Der Einbettungssatz von Whitney (vgl. z. B. eine Vorlesung Differentialtopologie) besagt, dass jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit (bis auf einen Diffeomorphismus) eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, falls $n \gg 1$ genügend groß ist.

Definition 2.5 (Differenzierbare Abbildungen)**.**
Seien M, N C^k-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt von der Klasse C^k, falls es zu jedem $x \in M$ Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N mit $x \in U$, $f(U) \subset V$ gibt und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls von der Klasse C^k, $k \geq 1$, so heißt f Diffeomorphismus von der Klasse C^k.

Gibt es für jedes $x \in M$ eine Umgebung U, so dass $f(U)$ offen und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, so heißt f ein lokaler Diffeomorphismus.

Bemerkung 2.6.

(i) Ist f von der Klasse C^k, so ist f stetig: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist stetig, also auch $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.

(ii) Ist f von der Klasse C^k, so ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ für alle Karten (U, φ), (V, ψ) der betreffenden differenzierbaren Strukturen. (Falls U klein genug ist, so dass die Komposition wohldefiniert ist.)

Beweis. Sei $x \in U$, $f(x) \in V$ und $z := \varphi(x)$. Nach Definition existieren Karten (U_0, φ_0) und (V_0, ψ_0) mit $x \in U_0$, $f(U_0) \subset V_0$, so dass $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \in C^k$ ist. Wir wählen eine offene Umgebung W von z mit $\varphi^{-1}(W) \subset U_0 \cap U$ und $f(\varphi^{-1}(W)) \subset V \cap V_0$. In W gilt dann

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\left(\psi \circ \psi_0^{-1}\right)}_{\in C^k} \circ \underbrace{\left(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}\right)}_{\in C^k} \circ \underbrace{\left(\varphi_0 \circ \varphi^{-1}\right)}_{\in C^k} \in C^k.$$

□

(iii) Eine Karte ist eine differenzierbare Abbildung, da $\mathrm{id} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ dies ist.

Beispiel 2.7 (Kartesisches Produkt)**.** Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ zwei C^k-Mannigfaltigkeiten. Dann ist ein C^k-Atlas auf $M \times N$ durch

$$\{(U \times V, \varphi \times \psi) \colon (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

mit $(\varphi \times \psi)((x, y)) = (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definition 2.8 (Zurückziehen einer differenzierbaren Struktur)**.** Sei M ein topologischer Raum, N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$ und $h : M \to N$ ein Homöomorphismus. Definiere

$$h^*\mathcal{A} := \left\{\left(h^{-1}(U), \varphi \circ h\right) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\right\}$$

Bemerkung 2.9. Eine zurückgezogene Struktur $h^*\mathcal{A}$ ist ein C^k-Atlas auf M und $h : (M, h^*\mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A})$ ist ein Diffeomorphismus.

Sei $M = N = \mathbb{R}$ und $h(x) = x^3$. Sei $\mathcal{A}$ die Standardstruktur auf $\mathbb{R}$ mit der Identität als Karte. Dann ist $(\mathbb{R}, h^*\mathcal{A}) \neq (\mathbb{R}, \mathcal{A})$, da h kein Diffeomorphismus von $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ist.

Beweis. Für die Kartenwechselabbildungen gilt

$$(\psi \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \in C^k.$$

Somit ist $h^*\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas.

Wähle die Karten φ und $\varphi \circ h$. Dann gilt

$$\varphi \circ h \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$$

und h ist ein Diffeomorphismus. □

Ein Atlas legt im folgenden Sinne bereits die Topologie fest:

Lemma 2.10. *Sei $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ ein Atlas auf einer Menge X (bis auf die Stetigkeitsforderung an φ), d. h. gelte* *(i)* $U \subset X$, $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ *ist bijektiv und* $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ *ist offen.*

(ii) $X = \bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ *und für* (U,φ), $(V,\psi) \in \mathcal{A}$ *ist* $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U\cap V) \to \psi(U \cap V)$ *stets ein Homöomorphismus.*

Dann gibt es genau eine Topologie auf X*, so dass* X *lokal euklidisch mit* $\mathcal{A}$ *als Atlas wird.*

Beweis. **Eindeutigkeit:** Ist X lokal euklidisch mit Atlas $\mathcal{A}$, so sind die Abbildungen $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ für $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ Homöomorphismen. Sei $V \subset X$ offen. Dann gilt

$$V = \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U \cap V = \bigcup \varphi^{-1}(\underbrace{\varphi(U\cap V)}_{\text{offen im } \mathbb{R}^n}).$$

Zunächst ist $U \cap V$ relativ offen in U. Dann ist $\varphi(U \cap V)$ relativ offen in $\varphi(U)$ und daher auch in $\mathbb{R}^n$.

Definiere

$$\mathcal{B} := \{\varphi^{-1}(W)\colon (U,\varphi) \in \mathcal{A},\ W \subset \varphi(U) \text{ offen}\}.$$

Dann ist $\mathcal{B}$ in einer Basis enthalten. Weil sich aber aufgrund der obigen Gleichung jede offene Menge als eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ darstellen lässt, ist B eine Basis. Daher ist die Topologie eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir behaupten, dass $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie ist.

(i) $X = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$, da für eine Karte (U,φ) nach Definition $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U \in \mathcal{B}$ ist und da nach Voraussetzung $X = \bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ gilt.

(ii) Seien $W_i \subset \varphi_i(U_i)$ offen, $i = 1,2$, und sei $x \in \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$. $\mathcal{B}$ ist eine Basis der Topologie, wenn wir eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $x \in A \subset \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$ finden ([6, Satz 2.7]). Setze $z_i := \varphi_i(x)$. Dann gelten $z_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z_1)$ und $z_i \in W_i$. Da $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ stetig ist, gibt es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, so dass $z_1 \in W \subset W_1$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(W) \subset W_2$. Es folgt $\varphi_1^{-1}(W) \subset \varphi_2^{-1}(W_2)$. Daher ist

$$x \in \underbrace{\varphi_1^{-1}(W)}_{\in\mathcal{B}} \subset \varphi_1^{-1}(W_1) \cap \varphi_2^{-1}(W_2)$$

und somit ist $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie.

$\square$

Definition 2.11 (Untermannigfaltigkeit)**.** Sei N eine n-dimensionale differenzierbare C^k-Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ heißt C^k-Untermannigfaltigkeit von N, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Karte (U,φ) von N mit $x \in U$ und

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

$m \le n$, gibt. Die Kollektion aller $(U \cap M, \varphi|_{U\cap M})$ ist dann ein C^k-Atlas von M.

3. Tangentialbündel

Wir haben die folgende anschauliche Definition.

Definition 3.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann wird der Tangentialraum von M in x von allen Vektoren $\alpha'(0)$ aufgespannt, wobei $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$ ist.

Bemerkung 3.2. Diesen Vektorraum können wir auch als

$$T_xM := (d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

schreiben, wobei φ eine Karte des $\mathbb{R}^n$ ist, die zeigt, dass M^m eine Untermannigfaltigkeit ist.

Wir wollen diese Definition auf abstrakte (= nicht immersierte) Mannigfaltigkeiten M verallgemeinern: Sei $x \in M$. Betrachte alle differenzierbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$. Zwei solche Kurven α und β heißen äquivalent, wenn es eine Karte (U, φ) um x mit

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

gibt. Gilt diese Relation für eine Karte (U, φ), so auch für jede andere Karte (V, ψ) um x:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \beta)'(0)\rangle = (\psi \circ \beta)'(0).\end{aligned}$$

Hieraus folgt auch die Transitiviät dieser Relation.

Definition 3.3. Ein Tangentialvektor im Punkt x ist eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = x$.

Die Menge dieser Äquivalenzklassen heißt Tangentialraum im Punkt x: T_xM.

Lemma 3.4. *Ist (U, φ) eine Karte, so ist für alle $x \in U$ durch $\varphi_{*,x}([\alpha]) := (\varphi \circ \alpha)'(0)$ eine bijektive Abbildung $\varphi_{*,x} : T_xM \to \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$, definiert.*

Für zwei Karten (U, φ), (V, ψ) und $x \in U \cap V$ gilt

$$\psi_{*,x} \circ \varphi_{*,x}^{-1} = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x)) \in GL\left(\mathbb{R}^m\right).$$

Beweis. $\varphi_{*,x}([\alpha])$ ist wohldefiniert, denn $\alpha \sim \beta$ ist äquivalent zu $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. $\varphi_{*,x}$ ist injektiv, denn $\varphi_{*,x}([\alpha]) = \varphi_{*,x}([\beta])$ bedeutet $\alpha \sim \beta$.

$\varphi_{*,x}$ ist surjektiv: Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Definiere $\alpha(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)$. Dann ist

$$\varphi_{*,x}([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = \left.\frac{d}{dt}(\varphi(x) + tv)\right|_{t=0} = v.$$

Wir haben bereits gesehen, dass

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle$$

gilt. Nach Definition folgt also

$$\psi_{*,x}([\alpha]) = d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(0)))\left\langle\varphi_{*,x}([\alpha])\right\rangle$$

wie behauptet. ☐

Korollar 3.5. *T_xM besitzt genau eine Vektorraumstruktur, so dass alle $\varphi_{*,x}$ Vektorraumisomorphismen werden: Setze für v, $w \in T_xM$ und $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$v + \lambda w := \varphi_{*,x}^{-1}(\varphi_{*,x}(v) + \lambda\varphi_{*,x}(w)).$$

Nach Lemma 3.4 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte. Bringe $\varphi_{*,x}$ auf die andere Seite und benutze die Linearität der Komposition $\varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\varphi_{*,x}(v +_\varphi \lambda w) &= \varphi_{*,x}(v) + \lambda\varphi_{*,x}(w) \\ &= \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1} \circ \psi_{*,x}(w) + \lambda\varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1} \circ \psi_{*,x}(v) \\ &= \varphi_{*,x} \circ \psi_{*,x}^{-1}(\psi_{*,x}(w) + \lambda\psi_{*,x}(v)) \\ &= \varphi_{*,x}(w +_\psi \lambda v).\end{aligned}$$

Definition 3.6. Die (disjunkte) Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

heißt Tangentialbündel von M. Für $U \subset M$ setze $TU := \bigcup\limits_{p \in U} \{p\} \times T_pM$.

Ist (U,φ) eine Karte von M, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi_*\colon TU &\to \varphi(U)\times\mathbb{R}^m,\\ (x,v)&\mapsto(\varphi(x)),\varphi_{*,x}(v))\end{aligned}$$

die von (U,φ) induzierte Karte von TM.

Lemma 3.7. *Ist M von der Klasse C^k, so bilden die von einem Atlas induzierten Karten einen C^{k-1}-Atlas der Menge TM im Sinne von Definition 2.1.*

Beweis.

(i) φ_* ist bijektiv: Aus $\varphi_*((x,v))=\varphi_*((y,w))$ folgt $\varphi(x)=\varphi(y)$ und $\varphi_{*,x}(v)=\varphi_{*,y}(w)$ und somit $x=y$ und, nach Lemma 3.4, $v=w$. Die Surjektivität folgt ebenfalls nach Lemma 3.4.

(ii) Aus $M=\bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}}U$ folgt $TM=\bigcup\limits_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}}TU$.

(iii) Zur Verträglichkeit: Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten von M mit $z\in\varphi(U\cap V)$ und $z=\varphi(x)$, $v\in\mathbb{R}^m$. Dann gilt nach Lemma 3.4

$$\begin{aligned}\psi_*\circ\varphi_*^{-1}((z,v)) &= \psi_*\left(\left(x,\varphi_{*,x}^{-1}(v)\right)\right)=\left(\psi(x),\psi_{*,x}\left(\varphi_{*,x}^{-1}(v)\right)\right)\\ &=\left(\psi\left(\varphi^{-1}(z)\right),d\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)(z)\langle v\rangle\right).\end{aligned}$$

$\psi_*\circ\varphi_*^{-1}$ ist, als Funktion von (z,v), $(k-1)$-mal stetig differenzierbar.

(iv) TM ist mit diesem Atlas Hausdorffsch: Punkte (x,v) und (y,w) lassen sich für $x\neq y$ trennen, da M Hausdorffsch ist und für $w\neq v$, da dies für $\mathbb{R}^m$ der Fall ist. □

Korollar 3.8. *Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, $k\geq 1$. Nach Lemma 2.10 besitzt TM genau eine Topologie, die TM zu einer (differenzierbaren) C^{k-1}-Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, der aus den von M induzierten Karten besteht, macht.*

Die natürliche Projektion $p:TM\to M$, $(x,v)\mapsto x$ ist von der Klasse C^{k-1}.

Beweis. Es gilt

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{\quad p\quad} & U\\ {\scriptstyle\varphi_*}\downarrow & /\!/\!/ & \downarrow{\scriptstyle\varphi}\\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\supset\varphi(U)\times\mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad p_1\quad} & \varphi(U).\end{array}$$

Wegen $p_1(\varphi_*(x,v))=p_1((\varphi(x),\varphi_{*,x}(v)))=\varphi(x)$ und $\varphi(p(x,v))=\varphi(x)$ kommutiert das Diagramm. Aus $p_1=\varphi\circ p\circ\varphi_*^{-1}\in C^\infty$ erhalten wir $p\in C^{k-1}$. □

Bemerkung 3.9.

(i) Sei $U\subset\mathbb{R}^m$ offen. Wir identifizieren TU mit $U\times\mathbb{R}^m$ vermöge $[\alpha]\leftrightarrow\alpha'(0)$.

(ii) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von N. Für jedes $x\in M$ ist $T_xM\subset T_xN$. Also gilt $TM\subset TN$. TM ist sogar eine Untermannigfaltigkeit von TN. (Übung.)

Spezialfall $N=\mathbb{R}^n$: T_xM ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $TM\subset T\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Definition 3.10 (Induzierte Abbildung der Tangentialbündel)**.** Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten (C^k) und $f\colon M\to N$ eine Abbildung der Klasse C^k. Dann definieren wir für $x\in M$ die Abbildung

$$\begin{aligned}f_{*,x}:T_xM&\to T_{f(x)}N,\\ f_{*,x}([\alpha])&=[f\circ\alpha],\end{aligned}$$

wobei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ differenzierbar ist und $\alpha(0) = x$ gilt. Definiere

$$\begin{aligned} f_* &: TM \to TN, \\ f_*((x,v)) &:= (f(x), f_{*,x}(v)). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.11. Wohldefiniertheit von f_*:
Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten um x bzw. $f(x)$. Seien $\alpha, \beta\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = x$ gegeben. Ist $\alpha \sim \beta$, so folgt $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ \alpha)'(0) &= \left(\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \circ \alpha\right)'(0) = d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle(\varphi \circ \alpha)'(0)\rangle \\ &= d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle(\varphi \circ \beta)'(0)\rangle = (\psi \circ f \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

Somit ist $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$.

Koordinatendarstellung von f_*: Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten um x bzw. $f(x)$. In Karten hat $f_{*,x}$ die Form $d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))$, wenn wir die Kommutativität des folgenden Diagrammes nachrechnen können:

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "f_{*,x}"] \arrow[d, "\varphi_{*,x}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & T_{f(x)}N \arrow[d, "\psi_{*,f(x)}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "d\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(x))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Für $v = [\alpha] \in T_xM$ gilt

$$\begin{aligned} \psi_{*,f(x)} \circ f_{*,x}(v) &= \psi_{*,f(x)}([f \circ \alpha]) = (\psi \circ f \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))\langle\underbrace{(\varphi \circ \alpha)'(0)}_{=\varphi_{*,x}(v)}\rangle. \end{aligned}$$

Beachte: In Koordinaten ist f_* somit gerade die Ableitung der Abbildung in Koordinaten.

Bemerkung 3.12.
(i) $f_{*,x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ ist linear. (Benutze (3.1).)
(ii) Gelte ohne Einschränkung $f(U) \subset V$ (in der üblichen Notation).

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & TV \arrow[d, "\psi_*"] \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_*"'] & \psi(V) \times \mathbb{R}^n. \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist f_* von der Klasse C^{k-1}, falls f von der Klasse C^k ist.
(iii) Es gilt die folgende funktorielle Eigenschaft von „$*$“: Sind $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ differenzierbare Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Beweis. Sei $[\alpha] \in T_xL$.

$$(g \circ f)_{*,x}([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_{*,f(x)}([f \circ \alpha]) = g_{*,f(x)}(f_{*,x}([\alpha])).$$ □

Definition 3.13 (Immersion, Submersion, Einbettung)**.** Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung.
(i) f heißt immersiv bzw. submersiv im Punkt $x \in M$, falls $f_{*,x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ injektiv bzw. surjektiv ist. f hat in $x \in M$ den Rang k, falls dies für $f_{*,x}$ gilt.
(ii) f heißt Immersion bzw. Submersion bzw. eine Abbildung von konstantem Rang k, wenn f in allen Punkten immersiv bzw. submersiv ist bzw. den Rang k hat.

(iii) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Einbettung, wenn $f : X \to f(X)$ Homöomorphismus ist, wobei $f(X)$ die Unterraumtopologie trägt.
(iv) Eine differenzierbare Abbildung f zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt differenzierbare Einbettung, wenn f Immersion und Einbettung ist.
(v) Sei $f : M \to N$ eine Immersion. $f(M)$ heißt immersierte Mannigfaltigkeit.
Ist f zusätzlich injektiv, dann heißt $\tilde{M} := f(M)$ mit der Topologie und differenzierbaren Struktur, die $f : M \to \tilde{M}$ zu einem Diffeomorphismus macht, eine immersierte Untermannigfaltigkeit von N. (Die induzierten Strukturen erhält man wie folgt: $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ ist offen, falls $f^{-1}\big(\tilde{U}\big)$ in M offen ist. Ist (U, φ) eine Karte für M, so ist $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ eine Karte für $\tilde{M}$.)

Bemerkung 3.14. Achtung, eine injektive Immersion ist i. a. keine differenzierbare Einbettung: Sei $M = (-1, 2\pi)$, $N = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{für } -1 < x \le 0, \\ (\cos x, \sin x) & \text{für } 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Bemerkung 3.15. Ist $f : X \to Y$ stetig und injektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch, so ist f eine Einbettung.

Beweis. Siehe Topologievorlesung [6, Satz 9.12]. □

Das Rangtheorem aus der Analysis liefert

Theorem 3.16. *Sei $f : M^m \to N^n$ eine Abbildung die in jedem Punkt den Rang l hat. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $p \in U$, $f(p) \in V$ und $f(U) \subset V$, so dass*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(x^1, \ldots, x^m\right) = \left(x^1, \ldots, x^l, 0, \ldots, 0\right).$$

Ohne Einschränkung können wir auch $\varphi(U) = B_1^m(0)$ und $\psi(V) = B_1^n(0)$ annehmen.

Theorem 3.17. *Sei $f\colon M^m \to N^n$ von der Klasse C^k, $k \ge 1$.*
(i) Ist f eine differenzierbare Einbettung, so ist $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N der Klasse C^k und der Dimension $m = \dim M$.
(ii) Ist $y_0 \in N$ und hat f konstanten Rang l, so ist $f^{-1}(y_0) \equiv f^{-1}(\{y_0\})$ entweder leer oder eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - l$.
(iii) Ist $y_0 \in N$ und f für alle $x \in f^{-1}(y_0)$ submersiv, so ist $f^{-1}(y_0)$ entweder leer oder eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - n = \dim M - \dim N$.

Beweis.
(i) Sei $x_0 \in M$, $y_0 := f(x_0)$. Seien (U, φ) bzw. (V, ψ) Karten um x_0 bzw. y_0. Setze $z_0 := \varphi(x_0)$. f_{*,x_0} ist injektiv. Also folgt, dass $L := d\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(z_0)$ injektiv ist, insbesondere $m \le n$.
Ergänze $L\left(\mathbb{R}^m\right)$ durch $v_{m+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$. Definiere

$$F(z) := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\left(z^1, \ldots, z^m\right) + \sum_{l=m+1}^{n} z^l v_l, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $dF(z_0, 0)$ bijektiv und es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $F : B_\varepsilon(z_0, 0) \to F(B_\varepsilon(z_0, 0))$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$F|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}. \tag{3.2}$$

Setze $V_\varepsilon := \psi^{-1}(F(B_\varepsilon((z_0,0))))$. Dann ist $(V_\varepsilon, F^{-1}\circ\psi)$ eine Karte um y_0. Da f^{-1} stetig ist, existiert eine offene Umgebung V_0 von y_0 mit $V_0 \subset V_\varepsilon$ und $f^{-1}(V_0) \subset \varphi^{-1}(B_\varepsilon(z_0,0)\cap\mathbb{R}^m)$, wobei wir $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^m\times\{0\}$ identifizieren.

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(B_\varepsilon(z_0,0)\cap\mathbb{R}^m) \subset U & \xrightarrow{\ f\ } & V \supset V_\varepsilon \supset V_0 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ B_\varepsilon(z_0,0)\cap\mathbb{R}^m \subset \varphi(U) & & \psi(V) \supset F(B_\varepsilon(z_0,0)) \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(M)\cap V_0 &= V_0 \cap \left(f\circ\varphi^{-1}(B_\varepsilon(z_0,0)\cap\mathbb{R}^m)\right) \\ &= V_0 \cap \left(\psi^{-1}\circ F(B_\varepsilon(z_0,0)\cap\mathbb{R}^m)\right) \qquad \text{nach (3.2).} \end{aligned}$$

(ii) Sei $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, (U,φ) und (V,ψ) seien Karten um x_0 bzw. y_0. Gelte ohne Einschränkung $f(U)\subset V$. Für $z \in \left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)^{-1}(\psi(y_0)) = \varphi\circ f^{-1}(y_0)$ hat $d\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)$ konstanten Rang l. Somit ist (ggf. nach Verkleinern von U und V) die Menge $\varphi\left(f^{-1}(y_0)\right)\cap\varphi(U)$ nach dem Rangtheorem eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$. Da φ^{-1} Diffeomorphismus ist, ist $f^{-1}(y_0)\cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

(iii) Lokal hat f nahe $f^{-1}(y_0)$ konstanten Rang n. Die Behauptung folgt. □

Lokal sind Immersionen stets Einbettungen:

Theorem 3.18. *Sei $f: M^m \to N^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p\in M$ eine offene Umgebung $U\subset M$ mit $p\in U$, so dass $f|_U$ eine Einbettung ist.*

Beweis. Wähle Karten (U,φ) und (V,ψ) von M bzw. N mit $p\in U$ und $\varphi(p)=0\in\mathbb{R}^m$ so dass $\hat f := \psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon B_1^m(0)\to B_1^n(0)$ die Form

$$\hat f\left(x^1,\ldots,x^m\right) = \left(x^1,\ldots,x^m,0,\ldots,0\right)$$

hat. Dann ist $\hat f: B_1^m(0)\to B_1^n(0)$ eine Einbettung. $\varphi\colon U\to B_1^m(0)$ und $\psi\colon V\to B_1^n(0)$ sind Diffeomorphismen. Daher ist $f: U\to V$ eine Einbettung, wenn $f(U)$ die Unterraumtopologie bezüglich der Menge V trägt. Da aber $V\subset N$ offen ist, ist das dieselbe Topologie wie die Unterraumtopologie bezüglich der Menge N. Also ist $f|_U$ eine Einbettung. □

Theorem 3.19. *Sei M eine kompakte (differenzierbare) Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $0\le k\le\infty$. Dann existiert $n\in\mathbb{N}$ und eine (differenzierbare) Einbettung $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ der Klasse C^k.*

Beweis. Sei $m=\dim M$. Zu jedem Punkt $x\in M$ gibt es eine Karte (V,φ) mit $\varphi(x)=0$ und $B_3(0)\subset\varphi(V)$. Da M kompakt ist, gibt es (V_1,φ_1), …, (V_l,φ_l) mit $M=\bigcup\limits_{j=1}^{l}\varphi_j^{-1}(B_1(0))$. Sei $\lambda\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $0\le\lambda\le1$, $\lambda(x)=1$ für $x\in B_1(0)$ und $\lambda(x)=0$ für $x\in\mathbb{R}^m\setminus B_2(0)$. Definiere $\lambda_j\colon M\to\mathbb{R}$ und $f_j\colon M\to\mathbb{R}^m$ durch

$$\lambda_j(x) := \begin{cases} \lambda\circ\varphi_j(x), & x\in V_j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_j(x) := \begin{cases} \lambda_j(x)\varphi_j(x), & x\in V_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt λ_j, $f_j\in C^k$. Definiere $f\colon M\to\mathbb{R}^{(m+1)l}$, $f\in C^k$, durch

$$f(x) := (f_1(x),\lambda_1(x),\ldots,f_l(x),\lambda_l(x)).$$

f ist injektiv: Seien $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$. Da die Mengen $\varphi_j^{-1}(B_1(0))$ die Mannigfaltigkeit M überdecken, gibt es ein j_0 mit $\lambda_{j_0}(x) = 1$. Wegen $\lambda_{j_0}(y) = 1$ folgt $x, y \in V_{j_0}$. Wegen $\varphi_{j_0}(x) = \varphi_{j_0}(x)\lambda_{j_0}(x) = f_{j_0}(x) = f_{j_0}(y) = \varphi_{j_0}(y)$ folgt $x = y$. Nach Bemerkung 3.15 ist f eine topologische Einbettung, denn M ist kompakt und $\mathbb{R}^k$ ist Hausdorffsch.

Sei $k \geq 1$. Dann ist f auch eine Immersion, denn für $x \in \varphi_{j_0}^{-1}(B_1(0))$ ist $(f_{j_0})_{*,x} = (\varphi_{j_0})_{*,x}$ injektiv, also auch $f_{*,x}$. Im Fall $k = 0$ liefert Bemerkung 3.15, dass f eine Einbettung ist. □

4. Vektorbündel

Vektorbündel verallgemeinern das Tangentialbündel.

Definition 4.1 (Vektorbündel)**.** Seien X, B topologische Räume, $p : X \to B$ stetig und E ein normierter Vektorraum. Eine E-Bündelkarte ist ein Paar (U, Φ), wobei

(i) $U \subset B$ offen ist und $\Phi\colon p^{-1}(U) \to U \times E$ ein Homöomorphismus ist.

(ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times E \arrow[dl, "p_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Für $y \in p^{-1}(x)$ (genauer: $p^{-1}(\{x\})$) erhalten wir

$$\Phi(y) = (p_1\Phi(y), p_2\Phi(y)) \equiv (x, \Phi_x(y)).$$

$p^{-1}(x)$ heißt Faser von x; es ist $\Phi(p^{-1}(x)) = \{x\} \times E$. (Äquivalent zur obigen Definition erhalten wir $\Phi_x := p_2 \circ \Phi|_{p^{-1}(x)}$.) $\Phi_x : p^{-1}(x) \to E$ ist ein Homöomorphismus.

Definition 4.2. Ein E-Bündelatlas $\mathcal{A}$ für $p : X \to B$ ist eine Kollektion von E-Bündelkarten, so dass

(i) $B \subset \bigcup\limits_{(U,\Phi)} U$,

(ii) Für (U, Φ), $(V, \Psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ gilt

(a) $\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\colon E \to E$ ist ein Isomorphismus,

(b) $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ ist stetig von $U \cap V$ nach $L(E)$ mit der Operatornorm $\|T\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

Bemerkung 4.3.

(i) Sei $(x, v) \in U \times E$. Wegen $\Psi \circ \Phi^{-1}(x, v) = \big(x, \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)\big)$ und da Ψ, Φ Homöomorphismen sind, ist $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ automatisch stetig, falls E endlichdimensional ist.

(ii) Wie beim Tangentialbündel erhalten die Fasern $p^{-1}(x)$ eine eindeutige Vektorraumstruktur, so dass alle $\Phi_x\colon p^{-1}(x) \to E$ Vektorraumisomorphismen werden: Für $v, w \in p^{-1}(x)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzt man

$$v + \lambda w := \Phi_x^{-1}(\Phi_x(v) + \lambda\Phi_x(w)).$$

(iii) Das triviale Bündel über B ist durch $X = B \times E$, $\Phi(x, v) = (x, v)$ gegeben.

(iv) Das Tangentialbündel ist ein Vektorbündel: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel TM. Definiere $p : TM \to B \equiv M$ durch $T_xM \ni v \mapsto p(v) = x \in M$. Ist (U, φ) eine Karte von M, so definieren wir

$$\Phi\colon T_UM \equiv p^{-1}(U) \to U \times E \equiv U \times \mathbb{R}^m,$$
$$T_xM \ni v \mapsto \Phi(v) = (x, \varphi_{*,x}(v)).$$

$\Psi_x \circ \Phi_x^{-1} = \psi_{*,x} \circ \varphi_{*,x}^{-1}$ ist ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^m$, $m = \dim M$.

Definition 4.4 (Vektorbündel der Klasse C^k)**.** Ist $p: X \to B$ ein Vektorbündel und B eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, so heißt ein Vektorbündelaltlas $\mathcal{A} = \{(U, \Phi)\}$ von der Klasse C^k, falls für je zwei Karten (U, Φ), $(V, \Psi) \in \mathcal{A}$ die Kartenwechselabbildung

$$\Psi \circ \Phi^{-1} \colon (U \cap V) \times E \to (U \cap V) \times E$$

von der Klasse C^k ist.

Bemerkung 4.5.

(i) Wegen $\Psi \circ \Phi^{-1}(x, v) = \big(x, \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}(v)\big)$, $\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ ein Vektorraumisomorphismus von E, sind $\Psi \circ \Phi^{-1} \in C^k$ und $\big(x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\big) \in C^k$ äquivalent.

(ii) Jedes Vektorbündel der Klasse C^k ist auf natürliche Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k der Dimension $\dim B + \dim E$: Sei $\mathcal{A} = \{(U, \Phi)\}$ ein Vektorbündelatlas und sei $\mathcal{B} = \{(V, \varphi)\}$ ein Atlas von B. Nehme ohne Einschränkung an, dass für jedes $(U, \Phi) \in \mathcal{A}$ ein $(U, \varphi) \in \mathcal{B}$ existiert; sonst ersetze U durch $U \cap V$. Als Diagramm erhalten wir

$$\begin{tikzcd} X \supset p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times E \arrow[r, "(\varphi, \mathrm{id})"] \arrow[dl, "p_1"] & \varphi(U) \times E \arrow[d, "p_1"] \\ U \arrow[rr, "\varphi"] & & \varphi(U). \end{tikzcd}$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}} := \{(p^{-1}(U), (\varphi, \mathrm{id}) \circ \Phi)\}$ ein C^k-Atlas von X.

Definition 4.6 (Schnitte, Vektorfelder)**.** Sei $p\colon X \to B$ ein Vektorbündel. Ein Schnitt ist eine stetige Abbildung $s: B \to X$ mit $p \circ s = \mathrm{id}$, d. h. $s(x) \in p^{-1}(x)$ für alle $x \in B$. Die Schnitte des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißen Vektorfelder.

$s_0(x) := 0_x \in p^{-1}(x)$ heißt Nullschnitt.

Bemerkung 4.7. s_0 ist eine (differenzierbare) Einbettung, d. h. man kann B mit $s_0(B)$ identifizieren.

$$\begin{tikzcd} s_0(U) \arrow[r, "\Phi"] & U \times \{0\} \subset U \times E \arrow[dl, "p_1"] \\ U. \arrow[u, "s_0"] & \end{tikzcd}$$

$\Phi \circ s_0$ ist die Abbildung $U \ni x \mapsto (x, 0) \in U \times E$, eine Einbettung. Somit ist $s_0 : B \to s_0(B)$ ein lokaler Homöomorphismus bzw. Diffeomorphismus. s_0 ist eineindeutig, da $p \circ s_0 = \mathrm{id}$ ist und $p|_{s_0(B)}$ ist eine stetige Inverse. Die Behauptung folgt.

Definition 4.8 (Abbildungen von Vektorbündeln)**.** Seien $p_i \colon X_i \to B_i$, $i = 0, 1$, E_i-Vektorbündel mit $\dim E_i < \infty$. Eine stetige Abbildung $F : X_0 \to X_1$ heißt eine Vektorbündelmorphismus, wenn F jede Faser von X_0 linear in eine Faser von X_1 abbildet, d. h. wenn für jedes $x_0 \in B_0$ ein $x_1 \in B_1$ existiert, so dass $F_{x_0} := F|_{p^{-1}(x_0)} \to p^{-1}(x_1)$ linear ist.

Bemerkung 4.9.

(i) Ist s_0 der Nullschnitt von X_0, so ist $f := p_1 \circ F \circ s_0$ stetig. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & X_1 \arrow[d, "p_1"] \\ B_0 \arrow[r, "f"'] & B_1. \end{tikzcd}$$

(ii) Ist $B_0 = B_1$, $f = \mathrm{id}$ und F_x ein Isomorphismus für jedes x, so heißt F Vektorbündelisomorphismus.
(iii) Das Vektorbündel $p\colon X \to B$ heißt trivial, wenn es zum Vektorbündel $B \times E$ isomorph ist.
(iv) Ein Vektorbündel mit $\dim E = n$ ist genau dann trivial, wenn es n linear unabhängige Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ besitzt, d. h. $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ sind für jedes x linear unabhängig.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Seien $s_1, \ldots, s_n$ die linear unabhängigen Schnitte. Definiere $F\colon B \times \mathbb{R}^n \to X$ durch $F(x, (x^1, \ldots, x^n)) := \sum\limits_{j=1}^{n} x^j s_j(x)$.
„$\Longleftarrow$“: Sei umgekehrt $F : B \times \mathbb{R}^n \to X$ ein Vektorbündelisomorphismus und sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Setze $s_j(x) := F(x, e_j)$. $\square$

(v) Die Existenz einer Vektorbündelkarte $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times E$ impliziert, dass $p^{-1}(U)$ trivial ist.
(vi) $T\mathbb{S}^n$ ist für gerades n nichttrivial, da nach dem Satz vom Igel jedes stetige Tangentialfeld auf $\mathbb{S}^n$ eine Nullstelle besitzen muss.
$T\mathbb{S}^n$ ist für $n = 0, 1, 3, 7$ trivial. Für alle anderen n ist $T\mathbb{S}^n$ nichttrivial (nichttriviale algebraische Topologie, J. F. Adams).

Definition 4.10 (Tensoren)**.** Sei E ein normierter Vektorraum, $\dim E < \infty$, und E' der Dualraum von E, häufig auch mit E^* bezeichnet. Ein Tensor T der Stufe (r, s), r, $s \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \setminus \{(0, 0)\}$, auf E ist eine Multilinearform auf $(E')^r \times E^s$. Die Menge aller Tensoren einer Stufe (r, s) bilden einen endlich-dimensionalen Vektorraum $E^{(r,s)}$.

Ein $E^{(r,s)}$-Tensor heißt r-fach kontravariant und s-fach kovariant. Ein $E^{(r,0)}$-Tensor heißt kontravariant, ein $E^{(0,s)}$-Tensor heißt kovariant.

Wichtig wird später bei Tensoren insbesondere der Nachweis, dass die Auswertung nur von den Einträgen in einem Punkt und insbesondere nicht von den Ableitungen der Einträge abhängt.

Bemerkung 4.11.
(i) Es gilt $E' = E^{(0,1)}$.
(ii) Ist E normiert, so definiert $\|x'\| := \sup\limits_{\|x\| \le 1} |x'\langle x\rangle|$ eine Norm auf E'.
(iii) Auf $E^{(r,s)}$ definiert

$$\|T\| := \sup_{\substack{\|x'_j\| \le 1 \\ \|x_k\| \le 1}} |T\langle x'_1, \ldots, x'_r; x_1, \ldots, x_s\rangle|$$

eine Norm und damit auch eine Topologie auf $E^{(r,s)}$.
(iv) E ist kanonisch isomorph zu $E'' = E^{(1,0)}$ vermöge $x\langle x'\rangle := x'\langle x\rangle$ für $x \in E$, $x' \in E'$. Daher ist $E^{(1,r)}$ kanonisch isomorph zu $L^r(E, E)$, dem Raum der r-linearen Abbildungen $E^r \to E$: Seien $x_i \in E$. Dann ist nämlich $e \in E$ durch

$$T\langle \varphi; x_1, \ldots, x_r\rangle = e\langle \varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in E'$$

definiert.

Definition 4.12 (Transformation von Tensoren)**.** Sei $\varphi\colon E \to F$ ein linearer Vektorraumisomorphismus zwischen normierten endlichdimensionalen Vektorräumen. Definiere $\varphi' : F' \to E'$ durch $\varphi'(y') := y' \circ \varphi$. Definiere $\varphi_\#\colon E^{(r,s)} \to F^{(r,s)}$ für $T \in E^{(r,s)}$ durch

$$\varphi_\#(T)\langle f'_1, \ldots, f'_r; f_1, \ldots, f_s\rangle := T\left\langle \varphi'(f'_1), \ldots, \varphi'(f'_r); \varphi^{-1}(f_1), \ldots, \varphi^{-1}(f_s)\right\rangle.$$

$\varphi_\#(T)$ heißt “push-forward” von T.

Bemerkung 4.13.

(i) Dies ist (im sich aus der folgenden Rechnung erklärenden Sinne) konsistent mit der Identifikation $E = E^{(1,0)} = E''$: Für $x \in E$ ist $\varphi_\#(x)\langle f'\rangle = x\langle \varphi'(f')\rangle = x\langle f' \circ \varphi\rangle = (f' \circ \varphi)\langle x\rangle = f'\langle \varphi\langle x\rangle\rangle = \varphi(x)\langle f'\rangle$.

(ii) $\varphi_\#\colon E^{(r,s)} \to F^{(r,s)}$ ist linear.

(iii) Sind $\varphi\colon E \to F$ und $\psi\colon F \to G$ Vektorraumisomorphismen, so gilt $(\psi\circ\varphi)_\# = \psi_\# \circ \varphi_\#$, da $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$, $(\psi \circ \varphi)' = \varphi' \circ \psi'$ und aufgrund einer kleinen einfachen Rechnung.

(iv) **Differenzierbarkeit von $\varphi \mapsto \varphi_\#$:** Sei $T \in E^{(r,s)}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in L(F', E')$, $\psi_1, \ldots, \psi_s \in L(F, E)$. Dann ist die Abbildung

$$(T; \varphi_1, \ldots, \varphi_r; \psi_1, \ldots, \psi_s) \mapsto T(\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_r(\cdot); \psi_1(\cdot), \ldots, \psi_s(\cdot)) \in F^{(r,s)}$$

multilinear von $E^{(r,s)} \times L(F', E')^r \times L(F, E)^s$ nach $F^{(r,s)}$ und daher von der Klasse C^∞.

$\varphi \mapsto \varphi^{-1} \in C^\infty(\underbrace{\mathrm{Iso}(E, F)}_{\subset L(E,F)}, \underbrace{\mathrm{Iso}(F, E)}_{\subset L(F,E)})$. $\varphi \mapsto \varphi'$ ist linear und daher in $C^\infty(L(E, F), L(F', E'))$. Aufgrund der Kettenregel ist $(T, \varphi) \mapsto \varphi_\# T$ von der Klasse $C^\infty\left(E^{(r,s)} \times \mathrm{Iso}(E, F), F^{(r,s)}\right)$.

Somit ist $\varphi \mapsto \varphi_\#$ von der Klasse $C^\infty\left(\mathrm{Iso}(E, F), \mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}, F^{(r,s)}\right)\right)$.

Wegen $(\varphi \circ \psi)_\# = \varphi_\# \circ \psi_\#$ und $\mathrm{id}_\# = \mathrm{id}$ ist $\varphi_\#$ stets ein Isomorphismus und es gilt $(\varphi_\#)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_\#$.

Definition 4.14 (Tensorbündel über einem Vektorbündel)**.** Sei $p : X \to B$ ein Vektorbündel mit allgemeiner Faser E, $\dim E < \infty$, und Vektorbündelkarten (U, Φ), $\Phi\colon p^{-1}(U) \to U \times E$. Sei $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \setminus \{(0, 0)\}$. (Erinnerung: Für $x \in B$ ist $p^{-1}(x)$ ein Vektorraum.) Auf

$$X^{(r,s)} := \bigcup_{x\in B} (p^{-1}(x))^{(r,s)}$$

definieren wir eine Vektorbündelstruktur durch die Projektion

$$\begin{aligned} p^{(r,s)} &: X^{(r,s)} \to B,\\ p^{(r,s)}\left(\left(p^{-1}(x)\right)^{(r,s)}\right) &:= x \end{aligned}$$

und den Vektorbündelatlas

$$\begin{aligned} \Phi_\#\colon \left(p^{(r,s)}\right)^{-1}(U) &\to U \times E^{(r,s)},\\ \Phi_\#(T) &:= (x, \Phi_{x\#}(T)). \end{aligned}$$

(Erinnerung: Für $v \in p^{-1}(x)$ ist $\Phi(v) = (x, \Phi_x(v))$, wobei $\Phi_x : p^{-1}(x) \to E$ ein Isomorphismus ist.)

Bemerkung 4.15.

(i) **Verträglichkeit der Karten:** Sei $(x, T) \in U \times E^{(r,s)}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi_\# \circ (\Phi_\#)^{-1}(x, T) &= \left(x, \Psi_{x\#} \circ (\Phi_{x\#})^{-1}(T)\right) = \left(x, \Psi_{x\#} \circ \left(\Phi_x^{-1}\right)_\# (T)\right)\\ &= \left(x, \left(\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right)_\# (T)\right). \end{aligned}$$

Nach Definition eines Vektorbündels ist $x \mapsto \Psi_x \circ \Phi_x^{-1}$ stetig (bzw. $\in C^k$) von $U \cap V$ nach $\mathrm{Iso}(E)$. Nach Bemerkung 4.13 (iv) ist

$$(\varphi \mapsto \varphi_\#) \in C^\infty\left(\mathrm{Iso}(E), \mathrm{Iso}\left(E^{(r,s)}\right)\right).$$

Somit ist $x \mapsto \left(\Psi_x \circ \Phi_x^{-1}\right)_\#$ stetig (bzw. C^k) von $U \cap V$ nach $\operatorname{Iso}\left(E^{(r,s)}\right)$. Nach Lemma 2.10 existiert daher genau eine Topologie auf $X^{(r,s)}$ zu dem festgelegten Atlas, so dass alle $\Phi_\#$ Homöomorphismen werden. Somit ist

$$p^{(r,s)} \colon X^{(r,s)} \to B$$

ein Vektorbündel von der Klasse C^k, falls $p \colon X \to B$ von der Klasse C^k ist.

(ii) **Spezialfall Tangentialbündel:** Das Tangentialbündel ist $p : TM \to M$. Die Schnitte von $p^{(r,s)} \colon (TM)^{(r,s)} \to M$ heißen Tensorfelder (oder kurz: Tensoren) auf M.

Insbesondere heißt das Bündel $p^{(0,1)} \colon (TM)^{(0,1)} \to M$ Kotangentialbündel auf M. Es wird mit T^*M bezeichnet. Die zugehörigen Schnitte heißen 1-Formen und werden häufig mit ω bezeichnet.

Weiterhin ist $p^{(1,0)} \colon (TM)^{(1,0)} \to M$ (bis auf Isomorphie) das Tangentialbündel.

5. VEKTORFELDER

Definition 5.1 (Derivation)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist $C^1(M) = C^1(M, \mathbb{R})$ ein Vektorraum und ein kommutativer Ring mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $f \in C^1(M)$. Definiere $vf := f_{*,p}(v)$. Entsprechend setzen wir für ein Vektorfeld X auf M

$$(Xf)(p) := vf,$$

falls $X(p) = (p, v)$ (was wir auch als „$X(p) = v$“ schreiben werden).

Die Operation $v \colon C^1(M) \to \mathbb{R}$ erfüllt

(i) $v(f + g) = v(f) + v(g)$,
(ii) $v(fg) = (vf)g(p) + f(p)vg$.

Eine Abbildung $\delta : C^1(M) \to \mathbb{R}$ mit diesen beiden Eigenschaften heißt Derivation in p.

Bemerkung 5.2.

(i) Ist δ eine Derivation in p, so ist $\delta f = 0$ für alle f mit $f \equiv 0$ in einer Umgebung von p.

Beweis. Gelte $f \equiv 0$ in U. Wähle $g \in C^1(M)$ mit $g(p) = 2$ und $g = 1$ in $M \setminus U$. Dann gilt $f = fg$ und in p folgt $\delta f = \delta(fg) = \delta f 2 + 0$, also $\delta f = 0$. □

(ii) Jede Derivation in p läßt sich auf von $C^1(M)$ auf $C^1(U)$, U eine beliebige Umgebung von p, einschränken: Wähle (z. B. mit Hilfe einer Karte) Umgebungen V, W von p mit $\bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset U$ und $h \in C^1(M)$ mit $h = 1$ auf V und $h = 0$ auf $M \setminus \bar{W}$. Definiere für $f \in C^1(U)$

$$\delta(f) := \delta\big(\tilde{f}\big) \quad \text{mit } \tilde{f} = \begin{cases} hf & \text{in } U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund des ersten Teiles der Bemerkung ist dies wohldefiniert.

Lemma 5.3. *Ist $f \in C^k(B_1(0))$, so gibt es Funktionen $f_i \in C^{k-1}(B_1(0))$ mit*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(x).$$

Beweis. Es gilt $f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) x^i \, dt$. Setze also $f_i(x) := \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\, dt$. □

Korollar 5.4. *Ist (U,φ) eine Karte von M mit $p \in U$, $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(U) = B_1(0)$, so gibt es zu $f \in C^k(U)$ Funktionen $f_i \in C^{k-1}(U)$ mit $f - f(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi^i f_i$.*

Beweis. Wir wenden Lemma 5.3 auf $f \circ \varphi^{-1}$ an und erhalten

$$f \circ \varphi^{-1} - f \circ \underbrace{\varphi^{-1}(0)}_{=p} = \sum_{i=1}^{n} x^i \tilde{f}_i.$$

Wende nun „$\circ\varphi$“ an und setze $f_i := \tilde{f}_i \circ \varphi$. □

Derivationen und Vektorfelder entsprechen einander:

Theorem 5.5. *Zu jeder Derivation δ in $p \in M$ gibt es genau ein $v \in T_pM$ mit $\delta f = vf$ für alle $f \in C^1(M)$.*

Beweis. Zunächst einmal verschwindet $\delta(c)$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, da $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1)$ auch $\delta(1) = 0$ impliziert. Daher folgt nach Korollar 5.4

$$\delta(f) = \underbrace{\delta(f(p))}_{=0} + \sum_{i=1}^{m} \Big(\delta\left(\varphi^i\right) f_i(p) + \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0} \delta(f_i) \Big).$$

Da $\varphi_{*,p}\colon T_pM \to \mathbb{R}^m$ ein Isomorphismus ist, gibt es genau ein $v \in T_pM$ mit $\varphi_{*,p}(v) = \big(\delta\left(\varphi^1\right), \ldots, \delta\left(\varphi^m\right)\big)$. Dies ist nach Definition äquivalent zu $v\varphi^i = \delta\varphi^i$ für $i = 1, \ldots, m$. Wir erhalten

$$vf = v\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi^i f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(v\varphi^i\right)}_{=\delta\varphi^i} f_i(p) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\varphi^i(p)}_{=0}(vf_i) = \delta f. \qquad \square$$

Definition 5.6. Ein C^k-Vektorfeld V, $0 \le k \le \infty$, auf einer Mannigfaltigkeit der Klasse C^{k+1} ist eine Abbildung $M \to TM$ der Klasse C^k mit $V(p) \in T_pM \subset TM$.

Definition 5.7 (Lie-Produkt von Vektorfeldern)**.** Seien X, Y Vektorfelder der Klasse C^1 auf M. Sei $f \in C^2(M)$. Definiere

$$\sigma(f) := X(Yf) - Y(Xf).$$

Wir werden gleich nachrechnen, dass σ in jedem Punkt $p \in M$ eine Derivation (für C^2-Funktionen) definiert. Nach Theorem 5.5 existiert genau ein Vektorfeld Z mit $\sigma f = Zf$ für alle $f \in C^2(M)$. Wir definieren das Lieprodukt von X und Y durch $[X,Y] := Z$.

Bemerkung 5.8.

(i) σ ist eine Derivation: Die Linearität ist klar.
Produktregel:

$$\begin{aligned}\sigma(fg) &= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf)\\ &= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf - YfXg - fYXg - YgXf - gYXf\\ &= f\sigma(g) + g\sigma(f).\end{aligned}$$

(ii) **Koordinatendarstellung von $[X,Y]$:** Sei (U,φ) eine Karte von M und sei (U,Φ) die zugehörige Bündelkarte von TM, d. h. gelte $\Phi(x,v) = (x, \varphi_{*,x}(v))$ für $v \in T_xM$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, $E_i(x) = (x, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, seien die entsprechenden Schnitte in $U \times \mathbb{R}^n$. Setze $X_i := \Phi^{-1}E_i$. Dann ist $X_i(x) = \big(x, (\varphi_{*,x})^{-1}e_i\big)$, $i = 1, \ldots, n$. $(X_1, \ldots, X_n)$ heißen die zur

Karte (U, φ) gehörenden Standardbasisvektorfelder. Jedes Vektorfeld X besitzt dann in U eine Darstellung $X = \sum\limits_i \lambda^i X_i$ mit Funktionen λ^i. Für $f \in C^1(U)$ gilt

$$\begin{aligned} X_i f|_p &= f_* X_i|_p = f_*(\varphi_{*,p})^{-1} e_i = f_* \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(p)} e_i = \left(f \circ \varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(p)} e_i \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right) \circ \varphi(p). \end{aligned}$$

Wegen $X_i f = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right) \circ \varphi$ werden die X_i oft auch als $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bezeichnet. Es folgt

$$\begin{aligned} X_j X_i f &= X_j \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right) \circ \varphi\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)\right) \circ \varphi \quad \text{wegen } \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)\right) \circ \varphi \quad \begin{array}{l}\text{da partielle Ableitungen} \\ \text{im } \mathbb{R}^n \text{ kommutieren}\end{array} \\ &= X_i X_j f. \end{aligned}$$

Somit ist $[X_i, X_j] = 0$ für die Standardbasisvektorfelder. Seien X, Y Vektorfelder, $f, \lambda \in C^2(M)$. Es folgt

$$\begin{aligned} [X, \lambda Y] f &= X(\lambda Y f) - \lambda Y X f = X\lambda Y f + \lambda X Y f - \lambda Y X f \\ &= (X\lambda) Y f + \lambda [X, Y] f, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} [X, \lambda Y] &= (X\lambda) Y + \lambda [X, Y], \\ [\lambda X, Y] &= -[Y, \lambda X] = -(Y\lambda) X + \lambda [X, Y]. \end{aligned}$$

Seien jetzt X, Y beliebige Vektorfelder der Klasse C^l auf U, $1 \le l \le k - 1$, $M \in C^k$. Dann besitzen X und Y Darstellungen

$$X = \sum_{i=1}^n a^i X_i \quad \text{und} \quad Y = \sum_{j=1}^n b^j X_j.$$

Es folgt aufgrund der obigen Rechenregeln

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[X, \sum b^j X_j\right] = \sum_j \left[X, b^j X_j\right] \\ &= \sum_j \left(\left(X b^j\right) X_j + b^j [X, X_j]\right) = \sum_j X b^j X_j + \sum_{j,\,k} b^j \left[a^k X_k, X_j\right] \\ &= \sum_j X b^j X_j + \sum_{j,\,k} \left(b^j \left(-X_j a^k\right) X_k + b^j a^k \underbrace{[X_k, X_j]}_{=0}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(X b^j - Y a^j\right) X_j. \end{aligned}$$

(iii) Hieraus folgt: Sind X, $Y \in C^l$, so ist $[X, Y] \in C^{l-1}$.

(iv) **Jacobi-Identität:** Sind X, Y, Z drei C^2-Vektorfelder auf M, dann gilt

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

(v) Ist M von der Klasse C^∞, so wird der $\mathbb{R}$-Vektorraum der C^∞-Vektorfelder auf M zu einer reellen Lie-Algebra mit dem Produkt $(X,Y) \mapsto [X,Y]$.

Allgemeiner ist eine Lie-Algebra ein Vektorraum V über einem Körper K mit einer Verknüpfung $[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$, die Lie-Klammer heißt, und die folgenden Axiome erfüllt:

(a) Die Lie-klammer ist in beiden Argumenten linear, z. B. $[\lambda u + v, w] = \lambda[u,w] + [v,w]$ für alle $\lambda \in K$, $u,v,w \in V$,

(b) es gilt die Jacobi-Identität $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$ für alle $u,v,w \in V$,

(c) $[u,u] = 0$ für alle $u \in V$.

Bemerkung 5.9 (Koordinatenschreibweise)**.**

(i) Für kovariante Tensoren, z. B. für 1-Formen ω, verwenden wir untere Indices: ω_i. Für kontravariante Tensoren, z. B. für Vektorfelder X, verwenden wir obere Indices: X^i. Für allgemeinere Tensoren in $TM^{(r,s)}$ benutzen wir r obere („kontravariante") Indices und s untere („kovariante") Indices.

(ii) Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien (U,φ) und (V,ψ) verschiedene Karten für M mit Koordinaten x^i bzw. y^i und $U \cap V \neq \emptyset$; genauer: ... mit Koordinaten (x^i) .... Sei $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Vektorfeld. Betrachte $y = y(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Dann gilt nach Lemma 3.4

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i \frac{\partial}{\partial y^j},$$

wobei wir $\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\varphi^{-1}\right)_* e_i$ und $\frac{\partial}{\partial y^j} = \left(\psi^{-1}\right)_* e_j$ für Basen e_k des $\mathbb{R}^m$ im Bild der Karte φ bzw. ψ benutzt haben. Wir schreiben dies auch als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(iii) Sei $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ in Koordinaten ein Vektorfeld auf M und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Wie in Bemerkung 3.11 seien φ und ψ Karten für M bzw. N. Definiere $\tilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, also f „in Karten", und $y = \tilde{f}(x)$. Dann gilt

$$f_*(X) = f_*\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Im Spezialfall $f = \mathrm{id}$ werden also aus den Koordinaten X^i in der „φ-Karte" die Koordinaten $X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ in der „ψ-Karte". Wir erhalten dasselbe Ergebnis wie oben oder wie nach Definition 4.12, siehe auch weiter unten.

(iv) Sei X ein Vektor und ω eine 1-Form. Seien φ, ψ Kartenabbildungen. Bezeichne mit $dx^1, \ldots, dx^m$ eine zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis, d. h. gelte

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j.$$

(Alternativ: Definiere die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ duale Basis $d\varphi^1 \equiv dx^1, \ldots, d\varphi^m \equiv dx^m$ durch $d\varphi^i(X) := X\varphi^i$. Hieraus folgt

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \varphi^i = \frac{\partial(\varphi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \circ \varphi = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \circ \varphi = \delta^i_j.\Big)$$

Entsprechend zu den Basen $dx^1, \ldots$ bezüglich der φ-Karte definieren wir Basen $dy^1, \ldots$ bezüglich der ψ-Karte. Nach Definition 4.12 transformiert sich eine (in „φ-Koordinaten" gegebene) Form $\omega = \omega_i dx^i$ wie folgt: Sei $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Dann ist $\varphi_{\text{Def. 4.12}} = d(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$. Die Inverse bezeichnen wir mit

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$. Somit gilt

$$\omega = \omega_i dx^i = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j.$$

Wir können dies auch wiederum als Transformationsregel für dx^i lesen und erhalten $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$. Dies passt zur Relation für die Basen und dualen Basen, denn es gilt

$$\delta^i_j = dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l} = \delta^i_j.$$

Ebenso ist $\omega(X)$ invariant definiert; in Karten gilt aufgrund der obigen Rechnung

$$\omega(X) = \omega_i dx^i X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_i X^j \delta^i_j = \omega_i X^i = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k X^j \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

(v) Sei nun T ein $(1,1)$-Tensorfeld. (Für ein (r,s)-Tensorfeld verfährt man mit sämtlichen Einträgen entsprechend.) Wir schreiben in Koordinaten

$$T^j_i := T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right)$$

und erhalten aufgrund der obigen Überlegungen, die wir nach Definition 4.12 auf jedes Argument separat anwenden,

$$T = T^j_i\, dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = T^j_i \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

(vi) Für die Lie-Klammer gilt in Koordinaten

$$[X,Y]^j = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^j - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} X^j.$$

Bemerkung 5.10 (Fluss eines Vektorfeldes)**.** Sei $X \in C^l$, $l \geq 1$, ein Vektorfeld. Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot\alpha = X \circ \alpha$ mit

$$\dot\alpha = \alpha_{*,t}\langle 1\rangle, \tag{5.1}$$

wobei $\alpha\colon I \to M$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

Ist (U, φ) eine Karte von M mit $\alpha(I) \subset U$, so ist (5.1) äquivalent zu

$$\varphi_* \alpha_{*,t}(1) = \varphi_* X(\alpha(t)).$$

Wir formen beide Seiten um

$$\varphi_*\left(\left(X \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(\alpha(t)))\right) = (\varphi \circ \alpha)_{*,t}\langle 1\rangle = (\varphi(\alpha(t)), (\varphi\circ\alpha)'(t)).$$

$\varphi_*(X \circ \varphi^{-1})$ ist ein Vektorfeld auf $\varphi(U)$ und daher von der Form $\varphi_* X \circ \varphi^{-1}(y) = (y, X_U(y))$. Daher ist (5.1) äquivalent zu $(\varphi\circ\alpha)'(t) = X_U(\varphi\circ\alpha(t))$. Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es daher lokal eine Lösung: Zu jedem $p_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung U_0 von p_0 und eine offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, sowie eine Abbildung $F \in C^l(U_0 \times I, M)$, so dass

$$\begin{aligned} F(p,0) &= p \quad \forall p \in U_0,\\ \dot F &= X \circ F, \quad \text{wobei } \dot F(p,t) = F_{*,(p,t)}\langle (0,1)\rangle \end{aligned}$$

ist, d. h. $t \mapsto F(p,t)$ ist eine Integralkurve von X mit Anfangspunkt p für $t = 0$. F heißt lokaler Fluss von X.

Lemma 5.11 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Seien $\alpha_1, \alpha_2\colon (a,b) \to M$ Integralkurven von X mit $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ für ein $t_0 \in (a,b)$. Dann gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.*

Beweis. Setze $c_0 := \sup\{c\colon \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\,\forall\, t_0 \le t \le c\}$. Falls $c_0 < b$ ist, folgt $\alpha_1(c_0) = \alpha_2(c_0)$, weil die Kurven α_i stetig sind und M Hausdorffsch ist. Sei (U, φ) eine Karte von M mit $\alpha_i(t) \in U$ für $c_0 - \varepsilon < t < c_0 + \varepsilon$ und $\varepsilon > 0$ für $i = 1, 2$. Dann gilt $(\varphi \circ \alpha_i)'(t) = X_U(\varphi \circ \alpha_i(t))$ für diese Werte von t und $\varphi \circ \alpha_1(c_0) = \varphi \circ \alpha_2(c_0)$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt $\varphi \circ \alpha_1(t) = \varphi \circ \alpha_2(t)$ für t nahe c_0. Widerspruch zur Definition von c_0. Die Behauptung folgt. $\square$

Korollar 5.12. *Für jedes $p \in M$ gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales offenes Intervall I_p mit $0 \in I_p$, auf welchem die Integralkurve α mit $\alpha(0) = p$ definiert ist, nämlich die Vereinigung aller offenen Intervalle I mit $0 \in I$, so dass $\alpha\colon I \to M$ eine Integralkurve mit $\alpha(0) = p$ ist.*

Bemerkung 5.13 (Erinnerung: Lebesguesche Zahl)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, U_i offen. Dann existiert $\lambda > 0$, so dass für alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} A < \lambda$ ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$ existiert.

Theorem 5.14 (Existenzsatz für den maximalen Fluss)**.** *Sei $W := \bigcup\limits_{p\in M} \{p\} \times I_p \subset M \times \mathbb{R}$ und für $p \in M$ sei $F(p, \cdot)\colon I_p \to M$ die maximale Integralkurve von X mit $F(p, 0) = p$. Dann ist W in $M \times \mathbb{R}$ offen und $F \in C^l(W, M)$. (F heißt maximaler Fluss von X.)*

Beweis. Sei $(\bar p, \bar t) \in W$, ohne Einschränkung $\bar t > 0$. Nach Definition und Eindeutigkeitssatz folgt

$$F(F(p, s), t) = F(p, s + t), \tag{5.2}$$

da für festes (p, s) auf beiden Seiten die eindeutig bestimmte Integralkurve von X mit Anfangspunkt $F(p, s)$ für $t = 0$ steht. Aufgrund des lokalen Existenzsatzes und aufgrund des Lemmas über die Lebesguesche Zahl, angewandt auf $\left[0, \bar t\right]$, gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ und offene Umgebungen U_j von $F(\bar p, \frac{j}{N}\bar t)$, $j = 0, \ldots, N$, so dass F auf $U_j \times \left(\frac{-2}{N}\bar t, \frac{2}{N}\bar t\right)$ definiert und von der Klasse C^l ist. Wir schreiben $F_t(p) = F(p, t)$ und erhalten aus (5.2)

$$F_{\frac{\bar t}{N}}\left(F_{\frac{j-1}{N}\bar t}(\bar p)\right) = F_{\frac{j}{N}\bar t}(\bar p).$$

Wähle nun induktiv (absteigend) Umgebungen $U_j' \subset U_j$ von $F_{\frac{j}{N}\bar t}(\bar p)$ mit $U_N' := U_N$, $F_{\frac{\bar t}{N}}(U_{j-1}') \subset U_j'$, z. B. $U_{j-1}' = F_{-\frac{\bar t}{N}}(U_j') \cap U_{j-1}$. Für $p \in U_0'$ wollen wir $\alpha(p, t) := F_t(p)$ für $0 \le t \le \frac{N+1}{N}\bar t$ definieren. Es gilt für $0 \le t \le \frac{N+1}{N}\bar t$ und $0 \le j \le N$ mit $\frac{j\bar t}{N} \le t < \frac{(j+1)\bar t}{N}$

$$\alpha(p, t) = F_{t - \frac{j\bar t}{N}}\Bigg(\underbrace{F_{\frac{\bar t}{N}}\left(\ldots\left(F_{\frac{\bar t}{N}}(p)\right)\ldots\right)}_{j\text{-mal iteriert}}\Bigg).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes ist $\alpha(p, t)$ eine Integralkurve von X mit $\alpha(p, 0) = p$. Somit ist $F(t, p)$ für alle $p \in U_0'$ und $t \in \left[0, \frac{N+1}{N}\bar t\right]$ wohldefiniert und es gilt

$$F_t(p) = F_{t-\bar t}\Bigg(\underbrace{F_{\frac{\bar t}{N}}\left(\ldots\left(F_{\frac{\bar t}{N}}(p)\ldots\right)\right)}_{N\text{-mal}}\Bigg)$$

für $|\bar t - t| \le \frac{\bar t}{N}$ und $p \in U_0'$. Daher ist $U_0' \times \left(\bar t - \frac{\bar t}{N}, \bar t + \frac{\bar t}{N}\right) \subset W$ und F ist dort von der Klasse C^l. $\square$

6. Zusammenhänge

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $k \geq 2$.

Seien $V^l(M)$ die Vektorfelder der Klasse C^l, $0 \leq l \leq k-1$ auf M. Dann ist $V^l(M)$ ein $C^l(M)$-Modul. Es gilt nämlich für $V, W \in V^l(M)$ und $f, g \in C^l(M)$.

(1) $f(V+W) = fV + fW$,
(2) $(f+g)V = fV + gV$,
(3) $(fg)V = f(gV)$,
(4) $1V = V$

und $C^l(M)$ ist ein Ring.

Definition 6.1 (Zusammenhang)**.** Ein Zusammenhang auf M (der Klasse C^l) ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla : V^l(M) \times V^{l+1}(M) &\to V^l(M), \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

mit

(i) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,
(ii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
(iii) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$ und
(iv) $\nabla_{gX} Y = g\nabla_X Y$,

wobei $X, X_1, X_2 \in V^l(M)$, $Y, Y_1, Y_2 \in V^{l+1}(M)$, $f \in C^{l+1}(M)$ und $g \in C^l(M)$.

Beispiel 6.2.

(i) Ist TM trivial, dann existieren globale Basisfelder $X_1, \ldots, X_m \in C^{k-1}$. Schreibe $Y \in V^l(M)$ als $Y = \lambda^j X_j$ mit $\lambda^j \in C^l$. Definiere $\nabla_X Y := (X\lambda^j)X_j$. Es gilt insbesondere $\nabla_X X_j = 0$.

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k. Für $x \in M$ sei $P(x) : \mathbb{R}^n \to T_x M$ die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum $T_x M := \{\alpha'(0) | \alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \alpha(0) = x\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $P : M \to L(\mathbb{R}^n)$ von der Klasse C^{k-1}: Sei (U, φ) eine Karte von $\mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$. Dann gibt es Basisfelder $X_1, \ldots, X_n \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^n)$, so dass $X_1, \ldots, X_m$ tangential zu M sind. Nach Orthonormalisierung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $X_1, \ldots, X_n$ eine Orthogonalbasis ist. Dann gilt

$$P(x)Y = \sum_{j=1}^m \langle Y, X_j(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} X_j(x).$$

Setze $\nabla_X Y(z) := P(z) dY(z)\langle X \rangle$, wobei wir das Vektorfeld $Y \colon M \to \mathbb{R}^n$ in eine Umgebung von M fortsetzen. Beachte, dass diese Definition nicht von der Fortsetzung abhängt (kleine Übung).

Bemerkung 6.3. Wir wollen die Zusammenhangsabbildung lokal in Karten darstellen. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ein Standardbasisvektorfeld zu einer Karte (U, φ), d. h. aufgrund bisheriger Überlegungen gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i} \circ \varphi$.

(i) $\nabla_X Y|_p$ hängt nur vom Wert $X(p)$ ab, d. h. $\nabla_X Y$ ist tensoriell in Bezug auf X: Dies ist äquivalent zu $\nabla_X Y|_p = 0$ falls $X(p) = 0$ gilt. Wähle eine Karte (U, φ) um p sowie eine Umgebung V von p mit $\bar{V} \subset U$, und $g \in C^k(M)$ mit $g(p) = 1$ und $g = 0$ auf $M \setminus V$. Schreibe $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf U. Es gilt $g^2 X = \sum (g\lambda^i) \left(g \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Setze

$$\tilde{\lambda}^i = \begin{cases} g\lambda^i & \text{auf } U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \tilde{X}_i = \begin{cases} g\frac{\partial}{\partial x^i} & \text{auf } U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $g^2 X = \sum \tilde\lambda^i \tilde X_i$ auf M und $\tilde\lambda^i(p) = g\lambda^i(p) = 0$. Es folgt

$$\nabla_X Y|_p = g^2(p)\nabla_X Y|_p = \nabla_{g^2 X} Y|_p = \nabla_{\sum \tilde\lambda^i \tilde X_i} Y|_p = \sum \underbrace{\tilde\lambda^i(p)}_{=0} \nabla_{\tilde X_i} Y|_p = 0.$$

(ii) Analog zu Bemerkung 5.2 verschwindet $\nabla_X Y|_p$, falls Y in einer Umgebung von p verschwindet; somit hängt $\nabla_X Y|_p$ nur von den Werten von Y in einer beliebig kleinen Umgebung von p ab.

(iii) Sei $U \subset M$ offen und $p \in U$, so ist $\nabla_v Y$ für $v \in T_pM$ und $Y \in V^{l+1}(U)$ wohldefiniert: Wähle nämlich Vektorfelder $\tilde X$ und $\tilde Y$ auf M mit $\tilde X(p) = v$ und $\tilde Y = Y$ in einer Umgebung von p und setze $\nabla_v Y|_p := \nabla_{\tilde X} \tilde Y|_p$.

(iv) Seien jetzt $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ Standardbasisvektorfelder auf U. Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen Γ^k_{ij}, die Christoffelsymbole des Zusammenhanges, so dass

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

in U gilt. Seien $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\mu^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_i \lambda^i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\mu^j \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_i \lambda^i \sum_j \left\{ \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\mu^j\right) \tfrac{\partial}{\partial x^j} + \mu^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j} \right\} \\
&= \sum_{i,j} \lambda^i \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}\mu^j\right) \tfrac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k} \lambda^i \mu^j \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \sum_k \Big(\underbrace{X\mu^k}_{=d\mu^k\langle X\rangle} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \lambda^i \mu^j \Big) \tfrac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.4 (Vektorfelder längs Abbildungen)**.** Seien M, N Mannigfaltigkeiten. Jede Abbildung $F : N \to TM$ ist von der Form $F(x) = (f(x), Y(x))$ mit $f = p \circ F$, $p : TM \to M$ und $Y(x) \in T_{f(x)}M$. Y heißt Vektorfeld längs f.

Ist Y ein Vektorfeld auf M und $f\colon N \to M$ eine Abbildung, so ist $Y \circ f$ ein Vektorfeld längs f.

Sei $X \in T_pN$, berechne $\nabla_{f_{*,p}\langle X\rangle} Y|_{f(p)}$. Da $f\colon N \to M$ ist, folgt $f_{*,p}\colon T_pN \to T_{f(p)}M$. Sei (U, φ) eine Karte von M mit $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$. Setze $f^i = \varphi^i \circ f$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f_{*,p}\langle X\rangle &= \left(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ f\right)_{*,p} \langle X\rangle = \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} \langle (\varphi \circ f)_{*,p}\langle X\rangle\rangle \\
&= \left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} \left\langle \sum_i \left(\varphi^i \circ f\right)_{*,p} \langle X\rangle e_i \right\rangle \\
&= \sum_i \underbrace{\left(f^i\right)_{*,p} \langle X\rangle}_{=Xf^i|_p} \underbrace{\left(\varphi^{-1}\right)_{*,\varphi(f(p))} e_i}_{= \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{f(p)}}
\end{aligned}$$

und somit folgt für ein Vektorfeld $Y = \mu^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ auf M (nach „Kettenregel“)

$$\nabla_{f_{*,p}\langle X\rangle} Y|_{f(p)} = \Big(\underbrace{f_{*,p}\langle X\rangle \mu^k|_{f(p)}}_{=X(\mu^k \circ f)|_p} + \Gamma^k_{ij} \left(Xf^i\right) \mu^j \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dabei hängt insbesondere der Ableitungsterm nur von $Y \circ f$ ab.

Definiere daher für $f\colon N \to M$ und beliebige Vektorfelder $Y(x) \in T_{f(x)}M$ mit $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \circ f$ mit Funktionen μ^j auf N und für Vektorfelder X auf N

$$\nabla^f_X Y := \left(X\mu^k + \Gamma^k_{ij} \circ f \left(Xf^i\right) \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ f.$$

Im Spezialfall $f = \alpha\colon (a,b) \to M$, wenn f also eine Kurve ist und $X = \frac{d}{dt}$ ist, gilt

$$\nabla^\alpha_{\frac{d}{dt}} Y \equiv \nabla^\alpha Y = \left((\mu')^k + \Gamma^k_{ij} \circ \alpha\, (\alpha')^i \mu^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \alpha.$$

Definition 6.5. Ein Vektorfeld Y heißt parallel längs einer Kurve α, wenn $\nabla^\alpha Y = 0$ gilt.

Bemerkung 6.6. Schreiben wir $Y = \mu^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, so ist Parallelität äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\mu' + \Gamma \circ \alpha \langle \alpha', \mu \rangle = 0.$$

Theorem 6.7. *Sei $\alpha\colon (a,b) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann bilden die parallelen Vektorfelder längs α einen m-dimensionalen Vektorraum: Zu $t_0 \in (a,b)$ und $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld Y längs α mit $Y(t_0) = v$.*

Beweis. Die Behauptung ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme innerhalb einer Kartenumgebung klar. Beachte, dass bei linearen Systemen Existenz und Eindeutigkeit folgt, sobald die Koeffizienten stetig sind. Ein Fortsetzungsargument liefert dann die Behauptung. □

Korollar 6.8. *Sei $\alpha\colon (a,b) \to M$ differenzierbar und seien $t_0, t \in (a,b)$. Definiere eine Abbildung $P_{t_0,t}\colon T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t)}M$ durch*

$$T_{\alpha(t_0)}M \ni v \mapsto Y(t) \in T_{\alpha(t)}M,$$

wobei Y das längs α parallele Vektorfeld mit $Y(t_0) = v$ ist. $P_{t_0,t}$ ist ein Vektorraumisomorphismus und es gilt $P^{-1}_{t_0,t} = P_{t,t_0}$.

Lemma 6.9. *Sei Y ein Vektorfeld längs α. Dann gilt*

$$\nabla^\alpha Y = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (P_{t,t_0} Y(t) - Y(t_0)).$$

Beweis. Nach Theorem 6.7 existieren m linear unabhängige parallele Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_m$ längs α. Für diese gilt $P_{t,t_0} Y_j(t) = Y_j(t_0)$. Schreibe $Y(t) = \mu^j(t) Y_j(t)$. Es folgt $P_{t,t_0} Y(t) = \mu^j(t) Y_j(t_0)$ und

$$\begin{aligned}\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (P_{t,t_0} Y(t) - Y(t_0)) &= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(\mu^j(t) - \mu^j(t_0)\right) Y_j(t_0) \\ &= (\mu')^j(t_0) Y_j(t_0)\end{aligned}$$

und andererseits

$$\nabla^\alpha Y = \nabla^\alpha(\mu^j Y_j) = (\mu')^j Y_j + \mu^j \underbrace{\nabla^\alpha Y_j}_{=0},$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Parallelität der Vektorfelder Y_j gilt. □

Definition 6.10 (Torsion und Krümmung)**.** Seien X, Y, Z lokal definierte Vektorfelder. Definiere die Torsion T und die Krümmung R durch

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

und

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Bemerkung 6.11. *T und R sind Tensorfelder, d. h. $T(X,Y)|_p$ und $R(X,Y)Z|_p$ hängen für beliebiges $p \in M$ nur von den Werten $X(p)$, $Y(p)$ und $Z(p)$ ab.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$T(fX,Y) = fT(X,Y), \quad R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z, \quad \ldots$$

für eine beliebige Funktion f gilt.

Seien nämlich X und $\tilde{X}$ zwei verschiedene Vektorfelder mit $X(p) = \tilde{X}(p)$. $T(X,Y) = T\big(\tilde{X},Y\big)$ in p ist äquivalent zu $T\big(X-\tilde{X},Y\big) = 0$ oder $\sum\limits_{i=1}^{n} T\left(\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y\right) = 0$ für Funktionen λ^i mit $\lambda^i(p) = 0$.

Wegen $T(X,Y) = -T(Y,X)$ und $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ genügt es sogar, folgendes nachzuweisen:

(i) $T(fX,Y) = fT(X,Y)$,
(ii) $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z$,
(iii) $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$.

Dies gilt, denn es ist

(i)
$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - (Yf)X - f\nabla_Y X + (Yf)X - f[X,Y] \\ &\qquad \text{(nach Bemerkung 5.8)} \\ &= fT(X,Y). \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{-(Yf)X+f[X,Y]}Z \\ &= fR(X,Y)Z - (Yf)\nabla_X Z + (Yf)\nabla_X Z \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} R(X,Y)fZ &= \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\ &= \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Y + f\nabla_X Z) \\ &\quad - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z \\ &\quad - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z \\ &\quad - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.12. Es ist

$$\begin{aligned} T|_p &: T_pM \times T_pM \to T_pM, \\ R|_p &: (T_pM)^3 \to T_pM \cong (T_pM)''. \end{aligned}$$

Aufgrund der Identifikation $T_pM \cong (T_pM)''$ können wir die Torsion T als $(1,2)$-Tensorfeld und den Krümmungstensor R als $(1,3)$-Tensorfeld auffassen: Sei $Z' \in (T_pM)'$. Dann ist $T(X,Y)\langle Z'\rangle = Z'\langle T(X,Y)\rangle$.

Bemerkung 6.13 (Koordinatendarstellung)**.**
Seien $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ Standardbasisvektorfelder zu einer Karte (U,φ). Dann definieren wir die Komponenten T_{ij}^k und $R_{ij}{}^l{}_k$ durch

$$T\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = T_{ij}^k \tfrac{\partial}{\partial x^k}$$

und

$$R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k} = R_{ij}{}^l{}_k \tfrac{\partial}{\partial x^l}.$$

Da T und R Tensoren sind, gilt für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= T_{ij}^k X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^k}, \\ R(X,Y)Z &= R_{ij}{}^l{}_k X^i Y^j Z^k \frac{\partial}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Wegen $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ folgt

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \\ R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma_{ik}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l \frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^m \frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \frac{\partial}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$R_{ij}{}^l{}_k = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m.$$

7. Metriken und Levi-Civita Zusammenhänge

Der Einfachheit halber wollen wir ab jetzt unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit stets eine C^∞-Mannigfaltigkeit verstehen.

Definition 7.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine pseudo-Riemannsche Metrik auf M ist ein $(0,2)$-Tensorfeld g mit folgenden Eigenschaften

(i) $g|_x \equiv g_x$ ist für alle $x \in M$ symmetrisch,
(ii) g_x ist für alle $x \in M$ nicht entartet, d. h. aus $g_x(v,w) = 0$ für alle $w \in T_xM$ folgt $v = 0$.

g heißt Riemannsche Metrik, wenn zusätzlich $g_x(v,v) \ge 0$ für alle $v \in T_xM$ gilt. Damit werden alle Tangentialräume T_xM zu Euklidischen Vektorräumen.

Ist klar, welche Metrik wir betrachten, so schreiben wir

$$\langle v, w\rangle_x \equiv \langle v, w\rangle \equiv g_x(v,w)$$

für $v, w \in T_xM$.

Bemerkung 7.2. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasis zu (U, φ). Setze

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle.$$

Für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ folgt

$$\langle X, Y\rangle = g_{ij} X^i X^j.$$

(i) Die Symmetrie ist äquivalent zu $g_{ij} = g_{ji}$.
(ii) g ist genau dann nicht entartet, wenn $\operatorname{rang}(g_{ij}) = m$ gilt.
(iii) g ist genau dann Riemannsch, wenn $(g_{ij}) > 0$.

Beispiele 7.3.

(i) Für $\mathbb{R}^m$ mit dem Standardskalarprodukt gilt $\langle X, Y\rangle = X^i Y^j \delta_{ij}$. Daher ist M mit Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.
(ii) Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei N eine Untermannigfaltigkeit. Dann wird N mit der auf TN eingeschränkten Metrik eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Dies gilt i. a. nicht für pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

(iii) Minkowski-Raum: $\mathbb{R}^{m+1}$ mit $\langle X, Y\rangle = -X^0Y^0 + \sum\limits_{k=1}^m X^kY^K$, wobei $X = (X^0, X^1, \ldots, X^m)$ und $Y = (Y^0, Y^1, \ldots, Y^m)$. Es ist

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Man schreibt häufiger $\mathbb{L}^{m,1}$.

Der Lichtkegel (ohne Ursprung) ist durch

$$K := \left\{ X : \left(X^0\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} (X^k)^2, X^0 \neq 0 \right\}$$

definiert; Den Ursprung haben wir herausgenommen um eine Untermannigfaltigkeit zu erhalten. Dann ist die Einschränkung der Metrik auf K ausgeartet: Sei speziell $p = (1, 1, 0, \ldots, 0)$. Es ist (differenziere $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 0$)

$$T_pK = \left\{ X \in \mathbb{R}^{m+1} \colon \langle p, X \rangle = p^0X^0 - \sum_{k=1}^{m} p^kX^k = 0 \right\}.$$

Seien also $X, Y \in T_pK$, also mit $X^0 = X^1$ und $Y^0 = Y^1$. Dann ist

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=2}^{m} X^kY^k.$$

Dies ist für $m \geq 2$ ausgeartet.

(iv) Ist g pseudoriemannsch, so definieren wir

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} g_x := \max\{\dim V \colon\ & V \subset T_xM \text{ ist ein Unterraum und} \\ & g_x|_{V\times V} \text{ ist negativ definit}\}. \end{aligned}$$

$\operatorname{ind} g_x$ ist lokal konstant und daher auf jeder Zusammenhangskomponente konstant. Ist $\operatorname{ind} g = 1$, so heißt g Lorentz-Metrik.

Theorem 7.4. *Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit, deren Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Dann besitzt M eine Riemannsche Metrik der Klasse C^{k-1}.*

Bemerkung 7.5. Eine Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie ist parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung von M besitzt eine lokal endliche Verfeinerung, die M ebenfalls überdeckt. Zu dieser Verfeinerung gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Verfeinerung: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Überdeckungen. Dann heißt $\mathcal{A}$ Verfeinerung von $\mathcal{B}$, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ existiert.

Lokal endlich: Eine Überdeckung $\mathcal{A}$ von M heißt lokal endlich, wenn für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert, so dass $U \cap A \neq \emptyset$ höchstens für endlich viele $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Untergeordnete Zerlegung der Eins: Sei $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von M. Dann heißt $(\lambda_A)_{A\in\mathcal{A}}$ eine der Überdeckung $\mathcal{A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, falls folgendes gilt:

(i) $\lambda_A \in C^k$ auf einer C^k-Mannigfaltigkeit,
(ii) $0 \leq \lambda_A \leq 1$,
(iii) $\operatorname{supp} \lambda_A \subset A$,
(iv) $\sum\limits_{A\in\mathcal{A}} \lambda_A = 1$.

Beachte, dass die Summe lokal endlich ist, da die Überdeckung lokal endlich ist.

Lemma 7.6. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f \colon M \to N$ eine Immersion. Sei g eine Riemannsche Metrik auf N. Dann ist f^*g, die zurückgezogene ("pull-back") Metrik, definiert durch*

$$f^*g(X, Y) := g(f_*X, f_*Y) \quad \textit{oder} \quad f^*g(X, Y)(p) = g(f_{*,p}X|_p, f_{*,p}Y|_p)$$

für Vektorfelder X, Y auf M eine Riemannsche Metrik auf M.

Beweis. Übung. □

Beweis von Theorem 7.4. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine Familie von Karten, die M überdecken. Betrachte (ohne Wechsel der Bezeichnung) eine Verfeinerung der Überdeckung durch die Mengen U_α, die eine lokal endliche Überdeckung ist. Sei λ_α eine der Überdeckung U_α untergeordnete Zerlegung der Eins.

Bezeichne δ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist $g_\alpha := \varphi_\alpha^* \delta$ nach Lemma 7.6 eine Metrik auf U_α. Man rechnet nun leicht nach, dass

$$g := \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot g_\alpha \quad \text{oder} \quad g(p)\langle X(p), Y(p)\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha(p) \cdot \delta\left(\varphi_{*,p} X(p), \varphi_{*,p} Y(p)\right)$$

eine Riemannsche Metrik auf M definiert. □

Bemerkung 7.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $P_x \colon \mathbb{R}^n \to T_x M$ die orthogonale Projektion. (Erinnerung: Orthogonale Projektoren sind selbstadjungiert, d. h. es gilt $P_x^* = P_x$.) Definiere (siehe auch 6.2)

$$(\nabla_v X)(x) = P_x(dX(x)\langle v\rangle).$$

Dies ist ein Zusammenhang auf M (Übungsaufgabe). Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Seien X, Y (tangentiale) Vektorfelder auf M. Dann gilt

$$\begin{aligned} v\langle X, Y\rangle &= \langle dX\langle v\rangle, \underbrace{Y}_{=PY}\rangle + \langle \underbrace{X}_{=PX}, dY\langle v\rangle\rangle \\ &= \langle \nabla_v X, Y\rangle + \langle X, \nabla_v Y\rangle, \end{aligned}$$

d. h. für $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und ∇ gilt die Produktregel.

Definition 7.8. Ein Zusammenhang ∇ auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt pseudo-Riemannscher Zusammenhang oder metrischer Zusammenhang, wenn die Ricci-Identität

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt.

Bemerkung 7.9. Die Ricci-Identität überträgt sich auf Vektorfelder längs Abbildungen.

Beweis. Sei $f \colon N \to M$ eine Abbildung und X, Y Vektorfelder längs f, Z ein Vektorfeld auf N. Sei $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die Standardbasis bezüglich einer Karte (V, ψ) von M. Wir schreiben $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ f$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j} \circ f$ und erhalten nach Bemerkung 6.4

$$\nabla^f_Z X = \left(Z\lambda^i\right) \tfrac{\partial}{\partial x^i} \circ f + \lambda^i \left(\nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \circ f,$$

da $f_*\langle Z\rangle = Z^j \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist und nach Definition der Christoffelsymbole. Für Y erhalten wir eine analoge Formel. Es folgt

$$\begin{aligned} Z\langle X, Y\rangle &= Z\left(\lambda^i \mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f\right) \\ &= \left(Z\lambda^i\right) \mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f + \lambda^i \left(Z\mu^j\right) \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f \\ &\quad + \lambda^i \mu^j \left(f_*\langle Z\rangle \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle\right) \circ f \end{aligned}$$

(nach Kettenregel und Definition von $f_*\langle Z\rangle$)

$$\begin{aligned} &= \ldots + \ldots + \lambda^i \mu^j \left\langle \nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f + \lambda^i \mu^j \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{f_*\langle Z\rangle} \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \circ f \\ &= \left\langle \nabla^f_Z X, Y\right\rangle + \left\langle X, \nabla^f_Z Y\right\rangle. \end{aligned}$$

□

Hiermit werden wir später sehen, dass α' für Geodätische konstante Länge hat.

Definition 7.10. Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein torsionsfreier Zusammenhang der die Ricci-Identität erfüllt heißt Levi-Civita Zusammenhang. Es gilt folglich

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
(ii) $Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$

für alle Vektorfelder X, Y, Z auf M.

Der mit Hilfe eines Levi-Civita Zusammenhanges definierte Krümmungstensor heißt Riemannscher Krümmungstensor.

Theorem 7.11. *Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf M einen eindeutig bestimmten Levi-Civita Zusammenhang.*

Beweis. **Eindeutigkeit:** Sei ∇ ein Zusammenhang mit (i) und (ii) aus Definition 7.10. Dann folgt

$$Z\langle X, Y\rangle \overset{\text{(ii)}}{=} \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &\overset{\text{(ii)}}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle, \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} Y\langle Z, X\rangle &\overset{\text{(ii)}}{=} \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \langle \nabla_Z Y, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Als (7.1) + (7.2) − (7.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} & Z\langle X, Y\rangle + X\langle Y, Z\rangle - Y\langle Z, X\rangle \\ &= 2\langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Z X, Y\rangle &= \tfrac{1}{2}\{Z\langle X, Y\rangle + X\langle Y, Z\rangle - Y\langle Z, X\rangle\} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\{-\langle Y, [X, Z]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle\}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht ausgeartet ist, erhalten wir die Eindeutigkeit von ∇.

Existenz: Es genügt, ∇ mit (i) und (ii) auf einer Kartenumgebung U zu konstruieren. Seien nämlich ∇^U und ∇^V Zusammenhänge auf U bzw. V mit (i) und (ii), so gilt aufgrund des Eindeutigkeitsteiles $\nabla^U = \nabla^V$ auf $U \cap V$.

Sei (U, φ) eine Karte mit Standardbasis $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Auf U ist ∇ nach Bemerkung 6.3 durch die Christoffelsymbole Γ^k_{ij} festgelegt. Diese waren über

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

definiert. Aus

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$$

erhalten wir

$$\Gamma^k_{ij} g_{kl} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle.$$

Aus (7.4) folgt mit $Z = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^l}$

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) = g_{kl} \Gamma^k_{ij}.$$

Hieraus ist Γ^k_{ij} eindeutig berechenbar, da g_{kl} vollen Rang besitzt.

Definiere daher den Zusammenhang ∇ auf U wie folgt: Für Vektorfelder $X = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $Y = \mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ setzen wir

$$\nabla_X Y = \left(X\mu^k + \Gamma^k_{ij} \lambda^i \mu^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{7.5}$$

wobei $g_{kl}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)$ und $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. Nach Definition ist klar, dass $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ gilt. Somit ist nach Bemerkung 6.13 ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang und (i) folgt.

Nach (7.5) genügt es nun, noch die Ricci-Identität (ii) für Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\
=&\, \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \tfrac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \tfrac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} - \tfrac{\partial}{\partial x^j} g_{il} \right) \\
=&\, \tfrac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} = \tfrac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle .
\end{aligned}$$

□

8. Krümmung

Lemma 8.1 (Symmetrieeigenschaften des (Riemannschen) Krümmungstensors)**.** *Der (Riemannsche) Krümmungstensor erfüllt* (8.1) *für alle Zusammenhänge,* (8.2) *für torsionsfreie Zusammenhänge und* (8.3) *und* (8.4) *für Levi-Civita Zusammenhänge:*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \tag{8.1}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \quad \textit{(1. Bianchi-Identität)} \tag{8.2}$$

$$\langle R(X,Y)Z, U\rangle = -\langle R(X,Y)U, Z\rangle, \tag{8.3}$$

$$\langle R(X,Y)Z, U\rangle = \langle R(Z,U)X, Y\rangle. \tag{8.4}$$

Beweis. (8.1) folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors.

Da R ein Tensor ist, genügt es, (8.2) (wie alle Identitäten hier) für Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^i}$ nachzuweisen. Für diese verschwindet insbesondere die Lieklammer. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 \overset{!}{=}&\, R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^k} + R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^i} + R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial x^j} \\
=&\, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \tfrac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^k} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \tfrac{\partial}{\partial x^i} \\
&+ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \tfrac{\partial}{\partial x^j} = 0,
\end{aligned}$$

da wir aufgrund der Torsionsfreiheit, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$, vertauschen dürfen.

Statt der Antisymmetrie in (8.3) können wir auch nachweisen, dass

$$\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = 0$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt. Aus der Ricci-Identität erhalten wir

$$\begin{aligned}
Y\langle Z, Z\rangle &= 2\langle \nabla_Y Z, Z\rangle, \\
XY\langle Z, Z\rangle &= 2(\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle), \\
\langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle &= \tfrac{1}{2}(XY\langle Z, Z\rangle - YX\langle Z, Z\rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle = \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Dies war aber gerade die Behauptung.

Zu (8.4): Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z, U\rangle &\overset{(8.1)}{=} -\langle R(Y,X)Z, U\rangle \overset{(8.2)}{=} \langle R(X,Z)Y, U\rangle + \langle R(Z,Y)X, U\rangle, \\
\langle R(X,Y)Z, U\rangle &\overset{(8.3)}{=} -\langle R(X,Y)U, Z\rangle \overset{(8.2)}{=} \langle R(Y,U)X, Z\rangle + \langle R(U,X)Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Aufsummieren liefert

$$\begin{aligned}
2\langle R(X,Y)Z, U\rangle =&\, \langle R(X,Z)Y, U\rangle + \langle R(Z,Y)X, U\rangle \\
&+ \langle R(Y,U)X, Z\rangle + \langle R(U,X)Y, Z\rangle.
\end{aligned}$$

Durch Umbenennen erhalten wir

$$\begin{aligned}2\langle R(Z,U)X,Y\rangle =& \langle R(Z,X)U,Y\rangle + \langle R(X,U)Z,Y\rangle\\ &+ \langle R(U,Y)Z,X\rangle + \langle R(Y,Z)U,X\rangle.\end{aligned}$$

Wie man durch Anwenden von (8.1) und (8.3) sieht, stimmen in beiden Gleichungen die Terme rechts überein. Die Behauptung folgt. □

Ab jetzt sei (M,g) stets eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Levi-Civita Zusammenhang.

Definiere

$$k(X,Y) := \langle R(X,Y)Y,X\rangle = \langle R(Y,X)X,Y\rangle = k(Y,X).$$

Wir möchten R mit Hilfe von k alleine ausdrücken. Es ist

$$\begin{aligned}R(X,Y+Z)(Y+Z) =& R(X,Y)Y + R(X,Y)Z + \underline{R(X,Z)Y} + R(X,Z)Z,\\ R(X+Z,Y)(X+Z) =& R(X,Y)X + R(X,Y)Z + \underline{R(Z,Y)X} + R(Z,Y)Z,\\ 0 =& R(X,Y)Z + \underline{R(Y,X)Z}.\end{aligned}$$

Nach Addition erhalten wir, da sich die unterstrichenen Terme aufgrund der 1. Bianchi-Identität gegenseitig aufheben

$$\begin{aligned}& R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z)\\ &= R(X,Y)Y - R(Y,X)X + 3R(X,Y)Z + R(X,Z)Z - R(Y,Z)Z,\\ 3R(X,Y)Z =& R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z) - R(X,Y)Y\\ &+ R(Y,X)X - R(X,Z)Z + R(Y,Z)Z. \qquad (8.5)\end{aligned}$$

Beachte, dass das zweite und das dritte Argument auf der rechten Seite jeweils übereinstimmen.

Definiere

$$\begin{aligned}q_Z(X,Y) :=& \langle R(X,Z)Z,Y\rangle \overset{(8.4)}{=} \langle R(Z,Y)X,Z\rangle \overset{(8.1),(8.3)}{=} \langle R(Y,Z)Z,X\rangle\\ =& q_Z(Y,X),\end{aligned}$$

wobei sich die Referenzen auf die Symmetrieen in Lemma 8.1 beziehen. Somit ist $q_Z(\cdot,\cdot)$ symmetrisch. Es gilt $q_Z(X,X) = k(X,Z)$. Aufgrund der Polarisationsformel ist

$$\begin{aligned}q_Z(X,Y) &= \tfrac{1}{2}(q_Z((X+Y),(X+Y)) - q_Z(X,X) - q_Z(Y,Y))\\ &= \tfrac{1}{2}(k(X+Y,Z) - k(X,Z) - k(Y,Z)).\end{aligned}$$

Nach (8.5) folgt

$$\begin{aligned}3\langle R(X,Y)Z,U\rangle =& q_{Y+Z}(X,U) - q_{X+Z}(Y,U) - q_Y(X,U)\\ &+ q_X(Y,U) - q_Z(X,U) + q_Z(Y,U).\end{aligned}$$

Wir können also $\langle R(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot\rangle$ mit Hilfe von $k(\cdot,\cdot)$ schreiben und erhalten insbesondere

Lemma 8.2. *Ist R ein $(1,3)$-Tensor mit den Symmetrien aus Lemma 8.1 und ist $k(X,Y) := \langle R(X,Y)Y,X\rangle$, so ist R durch k eindeutig festgelegt. Insbesondere sind $R \equiv 0$ und $k \equiv 0$ äquivalent.*

Um das Verhalten von $k(X_1, X_2)$ unter linearen Transformationen zu bestimmen setzen wir $Y_i = \sum\limits_{j=1,2} c_{ij} X_j$ und erhalten

$$\begin{aligned}
k(Y_1, Y_2) &= \langle R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1\rangle \\
&= \langle R(c_{11}X_1 + c_{12}X_2, c_{21}X_1 + c_{22}X_2)c_{21}X_1 + c_{22}X_2, c_{11}X_1 + c_{12}X_2\rangle \\
&= c_{11}^2 c_{22}^2 \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle + c_{11}c_{22}c_{21}c_{12}\langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle \\
&\quad + c_{12}c_{21}c_{21}c_{12}\langle R(X_2, X_1)X_1, X_2\rangle + c_{12}c_{21}c_{22}c_{11}\langle R(X_2, X_1)X_2, X_1\rangle \\
&= (c_{11}^2 c_{22}^2 + c_{12}^2 c_{21}^2 - 2c_{11}c_{22}c_{12}c_{21})\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle \\
&= \det(c_{ij})^2 \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1\rangle.
\end{aligned}$$

Betrachte R_1 und k_1 mit

$$\begin{aligned}
\langle R_1(X,Y)Z, U\rangle &= \det \begin{pmatrix} \langle X, U\rangle & \langle X, Z\rangle \\ \langle Y, U\rangle & \langle Y, Z\rangle \end{pmatrix} \\
&= \langle X, U\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, U\rangle \\
&= \langle \underbrace{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y}_{=: R_1(X,Y)Z}, U\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1(X,Y) := \langle R_1(X,Y)Y, X\rangle &= \det \begin{pmatrix} \langle X, X\rangle & \langle X, Y\rangle \\ \langle Y, X\rangle & \langle Y, Y\rangle \end{pmatrix} \\
&= \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2.
\end{aligned}$$

Symmetrieeigenschaften von R_1: Nach Definition folgt direkt

$$R_1(X,Y)Z = -R_1(Y,X)Z, \quad \langle R_1(X,Y)Z, U\rangle = -\langle R_1(X,Y)U, Z\rangle$$

und aus der ausmultiplizierten Form $\langle R_1(X,Y)Z, U\rangle = \langle R_1(Z,U)X, Y\rangle$. Aus

$$R_1(X,Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$$

erhalten wir direkt die 1. Bianchi-Identität:

$$\begin{aligned}
R_1(X,Y)Z + R_1(Y,Z)X + R_1(Z,X)Y &= \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y \\
&\quad + \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z \\
&\quad + \langle X, Y\rangle Z - \langle Y, Z\rangle X = 0.
\end{aligned}$$

Somit erfüllt R_1 die Symmetrieeigenschaften aus Lemma 8.1. Weiterhin gilt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$k_1(X,Y) = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn X und Y linear abhängig sind.

Definition 8.3 (Schnittkrümmung)**.** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere die Schnittkrümmung der von den linear unabhängigen Vektoren X, Y aufgespannten Ebene durch

$$K(X,Y) := \frac{k(X,Y)}{k_1(X,Y)} = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

Da sich k_1 und k unter linearen Transformationen gleich transformieren ist die Schnittkrümmung wohldefiniert und hängt nur vom von X und Y erzeugten zweidimensionalen Teilraum ab.

Lemma 8.4. *Hängt die Schnittkrümmung K in $p \in M$ nur von p und nicht vom durch X und Y bestimmten zweidimensionalen Vektorraum in T_pM ab, so gilt*

$$R(X,Y)Z = K \cdot R_1(X,Y)Z = K \cdot (\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

Beweis. Setze
$$R_2(X,Y)Z := R(X,Y)Z - K \cdot R_1(X,Y)Z.$$
Dann erfüllt R_2 die Symmetriebedingungen aus Lemma 8.1. Für das zugehörige k_2 gilt
$$k_2(X,Y) = \langle R_2(X,Y)Y,X\rangle = \langle R(X,Y)Y,X\rangle - K \cdot \underbrace{\langle R_1(X,Y)Y,X\rangle}_{=k_1(X,Y)} \equiv 0.$$
Die Behauptung folgt nun aus Lemma 8.2. □

Lemma 8.5. *Für eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ stimmen die Schnittkrümmung K und die Gaußsche Krümmung $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ überein.*

Beweis. Übung. □

Wir wollen die Symmetrien aus Lemma 8.1 auch noch in Koordinaten aufschreiben.

Bemerkung 8.6. Wir hatten
$$R_{ij}{}^k{}_l \tfrac{\partial}{\partial x^k} := R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) \tfrac{\partial}{\partial x^l}$$
definiert. Setze
$$R_{ijkl} := g_{ka} R_{ij}{}^a{}_l.$$
Dann erhalten wir
$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -\,R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \\ 0 &= R_{ijkl} + R_{jlki} + R_{likj}, \end{aligned}$$
da wir in der ersten Zeile für die letzte Gleichheit noch in jedem Pärchen die Reihenfolge geändert haben. Die Bianchi-Identität gilt aufgrund der obigen Symmetrieeigenschaften auch für zyklische Permutationen von drei beliebigen Indices.

Definition 8.7 (Ricci- und Skalarkrümmung)**.**
Sei $p \in M$. Dann ist $X \mapsto R(X,U)V$ für feste $U,V \in T_pM$ ein Endomorphismus von T_pM. Wir definieren die Riccikrümmung Ric als Spur dieses Endomorphismusses
$$\operatorname{Ric}(U,V) := \operatorname{tr}(X \mapsto R(X,U)V).$$
Zur Darstellung in lokalen Koordinaten: Sei $X_1, \ldots, X_m$ eine Basis von T_pM. Sei $T : T_pM \to T_pM$ ein Endomorphismus. Dann gibt es eine Matrix T_i^j, so dass $TX_i = T_i^j X_j$ gilt. Nach Definition ist $\operatorname{tr} T = T_i^i$. Um dies auf den Riemannschen Krümmungstensor anwenden zu können, bilden wir das Skalarprodukt der T_i^j definierenden Gleichung mit X_k und erhalten
$$\langle TX_i, X_k\rangle = T_i^j \langle X_j, X_k\rangle = T_i^j g_{jk}.$$
Auch hier wollen wir wieder die Inverse der Metrik mit (g^{ij}) bezeichnen. Wir multiplizieren mit g^{ki} und erhalten
$$\langle TX_i, X_k\rangle g^{ik} = T_i^j g_{jk} g^{ki} = T_i^j \delta_j^i = T_i^i = \operatorname{tr} T.$$
Wir erhalten somit für den Riccitensor
$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(U,V) &= g^{ik}\langle R(X_i,U)V, X_k\rangle = g^{ik}\langle R(U,X_i)X_k, V\rangle \\ &= g^{ik}\langle R(X_k,V)U, X_i\rangle = \operatorname{Ric}(V,U). \end{aligned}$$
Somit ist Ric symmetrisch und es gilt
$$\begin{aligned} R_{ij} &:= \operatorname{Ric}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\langle R(\tfrac{\partial}{\partial x^k}, \tfrac{\partial}{\partial x^i})\tfrac{\partial}{\partial x^j}, \tfrac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle g^{kl} \\ &= \left\langle R_{ki}{}^m{}_j \tfrac{\partial}{\partial x^m}, \tfrac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle g^{kl} = R_{ki}{}^m{}_j g_{ml} g^{kl} \\ &= R_{ki}{}^k{}_j = R_{kilj} g^{kl} = R_{ikjl} g^{kl}. \end{aligned}$$

Wir definieren die Skalarkrümmung R als

$$R := R_{ij} g^{ij}.$$

Bemerkung 8.8. Multipliziert man einen Tensor mit einem anderen, z. B. mit der Metrik oder ihrer Inversen, und verringert sich so nach Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention die Anzahl der „freien“ Indices, d. h. der Indices, über die nicht summiert wird, so bezeichet man dies als Verjüngen oder Zusammenziehen.

Den Übergang von R_{ijkl} zu $R_{ij}{}^k{}_l$ bezeichnet man als Heben eines Indexes und die umgekehrte Operation als Senken eines Indexes.

Bemerkung 8.9. Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt das Universum als vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit pseudo-Riemannscher Metrik. Nach Diagonalisieren von g_{ij} sind drei Einträge der Form g_{ii} positiv und einer negativ.

Die Einsteinschen Feldgleichungen verknüpfen den (symmetrischen) physikalisch gegebenen Energie-Impuls Tensor T_{ij} mit der Geometrie der Mannigfaltigkeit

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}.$$

Eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ist eine Mannigfaltigkeit, die diese Gleichungen erfüllt.

Nach weiterer Vorbereitung wollen wir den folgenden Satz zeigen

Theorem 8.10 (Schur)**.** *Ist* $\dim M \geq 3$ *und hängt die Schnittkrümmung* K *nur vom Fußpunkt ab, so ist sie lokal konstant.*

Bemerkung 8.11.

(i) Wir wollen einen gegebenen Zusammenhang auf beliebige Tensorfelder ausdehnen. Sei zunächst ω eine 1-Form. Dann soll die folgende Form der Produktregel gelten

$$X(\omega(Y)) \overset{!}{=} (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

Daher definieren wir

$$(\nabla_X \omega)(Y) := X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

An der rechten Seite dieser Formel sieht man, dass $\nabla_X \omega$ (falls es ein Tensor ist) wieder eine 1-Form ist. Wir behaupten, dass $\nabla_X \omega$ dann selbst wieder ein Tensor ist: $(\nabla_X \omega)(Y + Z) = (\nabla_X \omega)(Y) + (\nabla_X \omega)(Z)$ ist klar. Direkt aus der Definition von $\nabla_X \omega$ erhalten wir, dass $\nabla_X \omega$ bezüglich X tensoriell ist, d. h. es gilt

$$\nabla_{fX} \omega = f \nabla_X \omega,$$

und dass $\nabla_X \omega$ bezüglich ω derivativ ist, d. h. es gilt

$$\nabla_X (f\omega) = (Xf)\omega + f \nabla_X \omega,$$

für jeweils alle Funktionen f.

Daher genügt es, für alle (glatten) Funktionen f

$$(\nabla_X \omega)(fY) = f \nabla_X \omega(Y)$$

zu zeigen. Dies gilt, da

$$\begin{aligned}(\nabla_X \omega)(fY) &= X(\omega(fY)) - \omega(\nabla_X (fY)) = X(f\omega(Y)) - \omega(\nabla_X (fY)) \\ &= (Xf)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - \omega((Xf)Y + f\nabla_X Y) \\ &= fX(\omega(Y) - f\omega(\nabla_X Y)) = f(\nabla_X \omega)(Y).\end{aligned}$$

Allgemeiner seien $Y_1, \dots, Y_p$ Vektorfelder, $\omega_1, \dots, \omega_q$ 1-Formen und S ein (q,p)-Tensor. Dann definieren wir $\nabla_X S$ durch die Relation

$$\begin{aligned} &X(S(Y_1, \dots, Y_p, \omega_1, \dots, \omega_q)) \\ = &\nabla_X S(Y_1, \dots, Y_p, \omega_1, \dots, \omega_q) \\ &+ \sum_{i=1}^{p} S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_p, \omega_1, \dots, \omega_q) \\ &+ \sum_{j=1}^{q} S(Y_1, \dots, Y_p, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \nabla_X \omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_q). \end{aligned}$$

Analog zu oben rechnet man nach, dass sich $\nabla_X S$ tensoriell bezüglich X und derivativ bezüglich S verhält.

(ii) Für den Levi-Civita Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) gilt $\nabla g = 0$, denn es ist

$$(\nabla_Z g)(X,Y) = Z(g(X,Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0$$

aufgrund der Ricci-Identität.

(iii) Zur Koordinatendarstellung: Sei $\omega = \omega_i dx^i$ eine 1-Form auf U. Da sich $\nabla_X \omega$ in ω derivativ verhält, gilt

$$\nabla_X \omega = (X\omega_i) dx^i + \omega_i \nabla_X dx^i.$$

Somit genügt es, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i$ auszurechnen. Nach Definition ist

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

Wir wenden dies mit $\omega = dx^i$, $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \tfrac{\partial}{\partial x^j}\left(dx^i\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - dx^i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \tfrac{\partial}{\partial x^k}\right) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^j}(\delta^i_k) - dx^i\left(\Gamma^l_{jk} \tfrac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= -\Gamma^l_{jk}\delta^i_l = -\Gamma^i_{jk}. \end{aligned}$$

Dies sind die Koeffizienten in einer Darstellung bezüglich der Basis dx^k. Somit erhalten wir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} dx^i\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right) dx^k = -\Gamma^i_{jk} dx^k.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega \equiv \nabla_{X^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\omega_i dx^i\right) &= X^j \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\omega_i\right) dx^i - X^j \omega_i \Gamma^i_{jk} dx^k \\ &= X^j \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j}\omega_k - \omega_i \Gamma^i_{jk}\right) dx^k. \end{aligned}$$

Da wir stets fordern, dass eine Produktregel gilt, erhalten wir Ableitungsregeln für allgemeine Tensoren, z. B. für $T = T^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} dx^j$

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(T^i_j \tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j\right) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j\right) \tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j + T^i_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j + T^i_j \tfrac{\partial}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} dx^j \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j\right) \tfrac{\partial}{\partial x^i} dx^j + T^i_j \Gamma^l_{ki} \tfrac{\partial}{\partial x^l} dx^j - T^i_j \tfrac{\partial}{\partial x^i} \cdot \Gamma^j_{kl} dx^l. \end{aligned}$$

Wir benutzen auch die Schreibweise $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = \nabla_i X$. Ist klar, dass es sich bei einer Größe wie T um einen Tensor handelt, so schreiben wir auch in Kurzform

$$\nabla_k T^i_j \equiv T^i_{j;k} = \tfrac{\partial}{\partial x^k} T^i_j + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{kj} \equiv T^i_{j,k} + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{kj}.$$

Komma und Strichpunkt haben hier dieselbe Bedeutung wie in $X_{,ij}$ und $X_{;ij}$ ganz am Anfang des Kurses. Mit Komma abgetrennte Indices bezeichnen partielle Ableitungen, mit Strichpunkt abgetrennte Indices bezeichnen kovariante

Ableitungen, also unter Verwendung eines Zusammenhanges definierte Ableitungen.

Sei ω eine 1-Form. $\nabla_k\omega = \omega_{i;k}dx^i$ hat die Koordinaten $\omega_{i;k}$. Der Ausdruck ist tensoriell in k wenn wir ein Vektorfeld $X = X^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ auf $\omega_{i;k}X^k dx^i$ abbilden. In diesem Sinne erhalten wir durch kovariantes Ableiten aus einem $(0,1)$-Tensor einen $(0,2)$-Tensor und entsprechend aus einem (r,s)-Tensor einen $(r,s+1)$-Tensor.

(iv) In einem Koordinatensystem, in dem in einem Punkt p die Christoffelsymbole verschwinden, d. h. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ gilt, stimmen kovariante und partielle Ableitungen überein, $T^i_{j;k} = T^i_{j,k}$. (Achtung: Dies gilt nur in einem Punkt. Ein nochmaliges Ableiten führt gerne zu Fehlern.)

(v) Für eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}^k$ schreiben wir $\nabla_i u = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} u = \frac{\partial}{\partial x^i}u$.

Das folgende Lemma charakterisiert, wann es genau Karten gibt, so dass die Christoffelsymbole in einem Punkt verschwinden. Wir werden es nicht beweisen, sondern später auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Hilfe von Geodätischen Koordinatensysteme konstruieren, in denen die Christoffelsymbole verschwinden. Das folgende Lemma funktioniert insbesondere auch für nicht metrische (= nicht Levi-Civita) Zusammenhänge.

Lemma 8.12. *Auf einer Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang verschwindet die Torsion in einem Punkt p genau dann, wenn es ein Koordinatensystem um p gibt, in dem die Christoffelsymbole in p verschwinden.*

Lemma 8.13 (2. Bianchi-Identität)**.** *Für einen torsionsfreien Zusammenhang gilt*

$$\nabla_X R(Y,Z)U + \nabla_Y R(Z,X)U + \nabla_Z R(X,Y)U = 0.$$

(Wir schreiben $\nabla_X R(Y,Z)U \equiv (\nabla_X R)(Y,Z)U$.)

Beweis. ∇R ist ein Tensor. Daher genügt es, die Behauptung für $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ und $U = \frac{\partial}{\partial x^l}$ zu zeigen. Wir benutzen bereits, dass wir ein Koodinatensystem wählen können, in dem die Christoffelsymbole in einem festen Punkt verschwinden. Weiterhin benutzen wir, dass in diesem Punkt kovariante und partielle Ableitungen übereinstimmen. Terme, die quadratisch in den Christoffelsymbolen sind, verschwinden dabei. Wir benutzen die Koordinatendarstellung des Riemannschen Krümmungstensors aus Bemerkung 6.13.

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}R_{jk}{}^n{}_l + \frac{\partial}{\partial x^j}R_{ki}{}^n{}_l + \frac{\partial}{\partial x^k}R_{ij}{}^n{}_l \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^n_{kl}}_{\boxed{1}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^n_{jl}}_{\boxed{2}}\Big) + \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^n_{il}}_{\boxed{3}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^n_{kl}}_{\boxed{1}}\Big) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^n_{jl}}_{\boxed{2}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^n_{il}}_{\boxed{3}}\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Theorem 8.10. Sei K die Schnittkrümmung. Nach Lemma 8.4 gilt

$$R(Y,Z)U = K \cdot (\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z)U &= \nabla_X(R(Y,Z)U) - R(\nabla_X Y,Z)U - R(Y,\nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U\\ &= (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z) + K(\underbrace{X\langle Z,U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{X\langle Y,U\rangle Z}_{\boxed{2}})\\ &\quad + K(\underbrace{\langle Z,U\rangle \nabla_X Y}_{\boxed{3}} - \underbrace{\langle Y,U\rangle \nabla_X Z}_{\boxed{4}})\\ &\quad - \underbrace{K(\langle Z,U\rangle \nabla_X Y}_{\boxed{3}} - \underbrace{\langle \nabla_X Y,U\rangle Z}_{\boxed{2}})\\ &\quad - K(\underbrace{\langle \nabla_X Z,U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{\langle Y,U\rangle \nabla_X Z}_{\boxed{4}})\\ &\quad - K(\underbrace{\langle Z,\nabla_X U\rangle Y}_{\boxed{1}} - \underbrace{\langle Y,\nabla_X U\rangle Z}_{\boxed{2}}).\end{aligned}$$

Dabei heben sich die Terme $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ aufgrund der Ricci-Identität gegenseitig auf. Also gilt

$$(\nabla_X R)(Y,Z)U = (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z).$$

Die 2. Bianchi-Identität liefert nun

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X R(Y,Z)U + \nabla_Y R(Z,X)U + \nabla_Z R(X,Y)U\\ &= (XK)(\langle Z,U\rangle Y - \langle Y,U\rangle Z)\\ &\quad + (YK)(\langle X,U\rangle Z - \langle Z,U\rangle X)\\ &\quad + (ZK)(\langle Y,U\rangle X - \langle X,U\rangle Y).\end{aligned}$$

Da wir $\dim M \geq 3$ angenommen haben, können wir X, Y, Z in einem beliebigen Punkt als Orthonormalsystem wählen. Setze $U := Z$. Es folgt

$$0 = (XK)Y - (YK)X.$$

Da X und Y linear unabhängig sind, folgt bereits $XK = 0 = YK$. Somit ist K wie behauptet lokal konstant. $\square$

Das folgende Lemma taucht häufig in geometrischen Rechnungen wie z. B. bei Flussgleichungen auf.

Bemerkung 8.14 (Vertauschen kovarianter Ableitungen)**.** Sei T ein $(1,1)$-Tensor. (Für allgemeinere Tensoren ist auf jeden einzelnen oberen bzw. unteren Index die hier hergeleitete Formel anzuwenden.) Sei $T = \left(T^i_j\right)$. Wir wollen wieder benutzen, dass wir ein Koordinatensystem wählen können, in dem Γ^i_{jk} in einem festen Punkt verschwindet. Dafür wollen wir in dieser Bemerkung die ad hoc Notation $\overset{p}{=}$

verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_k T^i_j \equiv{}& T^i_{j;k} = T^i_{j,k} + T^m_j \Gamma^i_{km} - T^i_m \Gamma^m_{kj},\\
\nabla_l \nabla_k T^i_j ={}& \left(T^i_{j;k}\right)_{,l} + T^m_{j;k}\Gamma^i_{lm} - T^i_{m;k}\Gamma^m_{jl} - T^i_{j;m}\Gamma^m_{kl}\\
\overset{p}{=}{}& T^i_{j,kl} + T^m_j \Gamma^i_{km,l} - T^i_m \Gamma^m_{kj,l},\\
\nabla_k \nabla_l T^i_j \overset{p}{=}{}& T^i_{j,lk} + T^m_j \Gamma^i_{lm,k} - T^i_m \Gamma^m_{lj,k},\\
\nabla_k \nabla_l T^i_j - \nabla_l \nabla_k T^i_j \overset{p}{=}{}& T^m_j \left(\Gamma^i_{lm,k} - \Gamma^i_{km,l}\right) - T^i_m \left(\Gamma^m_{lj,k} - \Gamma^m_{kj,l}\right)\\
\overset{p}{=}{}& T^m_j R_{kl}{}^i{}_m - T^i_m R_{kl}{}^m{}_j,\\
\nabla_k \nabla_l T^i_j - \nabla_l \nabla_k T^i_j \equiv{}& T^i_{j;lk} - T^i_{j;kl} = T^m_j R_{kl}{}^i{}_m - T^i_m R_{kl}{}^m{}_j.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt wieder allgemein, d. h. in jedem Koordinatensystem, da nun beide Seiten wieder tensoriell sind. (Das Produkt zweier Tensoren ist wieder ein Tensor, algebraisch das Tensorprodukt $S \otimes T$.)

LITERATUR

1. Manfredo P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course], vol. 55, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983, Translated from the English by Michael Grüter.
2. Claus Gerhardt, *Lecture notes*.
3. Sigmundur Gudmundsson, *An introduction to Gaussian geometry*, 2010, Lecture Notes, `http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/index.html`.
4. Sigmundur Gudmundsson, *An introduction to Riemannian geometry*, 2009, Lecture Notes, `http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/index.html`.
5. Wolfgang Kühnel, *Differentialgeometrie*, fourth ed., Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. [Vieweg Studies: Mathematics Course], Vieweg, Wiesbaden, 2008, Kurven—Flächen—Mannigfaltigkeiten. [Curves—surfaces—manifolds].
6. Oliver Schnürer, *Topologie*, 2007, Skript zur Vorlesung.
7. Friedrich Tomi, *Differentialgeometrie I*, 1997, Lecture Notes.

OLIVER C. SCHNÜRER, FACHBEREICH MATHEMATIK UND STATISTIK, UNIVERSITÄT KONSTANZ, 78457 KONSTANZ, GERMANY

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`