PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu Partielle Differentialgleichungen I. Benützt

- an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2004/5,
- an der ANU Canberra im 2nd term 2008,
- an der Freien Universität Berlin im Sommersemester 2009.

Vielen Dank insbesondere an Friederike Dittberner, Anja Grabow, Felix Jachan und Thilo Notz für zahlreiche Korrekturen.

Inhaltsverzeichnis

0. Beispiele

Notation 0.1.

a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. In Koordinaten schreiben wir $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

b) Ist u hinreichend oft differenzierbar, so bezeichnen wir mit Du, D^2u, ..., erste, zweite, ... Ableitungen.

Indices bezeichnen partielle Ableitungen

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, \ldots.$$

Date: Oktober 2012.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25.
Key words and phrases. Laplacegleichung, harmonische Funktionen, Perron, Maximumprinzip, Sobolevräume, L^2-Theorie.

Für $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist t die $(n+1)$-ste Variable, $u(x,t)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ oder $\dot{u} = u_t$.

Wir verwenden zu den Koordinatenbezeichnungen in $\mathbb{R}^n$ analoge Bezeichnungen für vektorwertige Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $u = (u^1, \ldots, u^k)$, oder $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, z. B. $u^l_i = \frac{\partial u^l}{\partial x^i}$. Vektorwertige Funktionen werden (zunächst) kaum auftreten.

Definition 0.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $u \in C^k(\Omega)$, $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$. Ein Ausdruck der Form

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt Differentialgleichung k-ter Ordnung.

Beispiele 0.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) Laplacegleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{ii} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

b) Eigenwertgleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Wärmeleitungsgleichung, $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$,

$$u_t = \Delta u.$$

d) Schrödingergleichung, $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{C}$, $T > 0$,

$$iu_t + \Delta u = 0.$$

e) Wellengleichung, $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$,

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

f) Poissongleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$-\Delta u = f(u).$$

g) p-Laplace Gleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $p > 0$,

$$\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2}Du\right) = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$\sum_{i=1}^n D_i\left(|Du|^{p-2}D_i u\right) = 0,$$

wobei D_i partielle Ableitungen bezeichnet, $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

h) Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \Delta u - \frac{u^i u^j u_{ij}}{1+|Du|^2} = 0,$$

wobei $u^i := \delta^{ij} u_j$.

Wir verwenden hier die Einsteinsche Summenkonvention, d. h. wir summieren über gleiche „oben" und „unten" stehende Indices von 1 bis zur Dimension n, also

$$u^i u^j u_{ij} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} u^i u^j u_{ij} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} u_k \delta^{ki} u_l \delta^{lj} u_{ij}.$$

i) Mittlerer Krümmungsfluss für Graphen (MCF)

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right).$$

j) Monge-Ampère Gleichung

$$\det D^2 u = f(x, u, Du),$$

speziell: Gleichung vorgeschriebener Gaußkrümmung für Graphen

$$\frac{\det D^2 u}{\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}} = f(x, u).$$

k) Reaktions-Diffusions Gleichung

$$u_t - \Delta u = f(u).$$

l) Poröse Medien Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0, \quad \gamma > 0.$$

m) Korteweg-de Vries Gleichung (KdV)

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0.$$

n) Riccifluss (Poincaré, R. Hamilton, G. Perelman)

$$\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$$

Häufig werden Differentialgleichungen mit Randwerten (oder Anfangswerten) untersucht, z. B.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkung 0.4 (Untersuchte Fragestellungen)**.**

- Existenz von Lösungen,
- Eindeutigkeit der Lösung,
- Stetige Abhängigkeit einer Lösung von den Daten (u. a. physikalisch wichtig),
- Regularität von Lösungen, z. B. Differenzierbarkeit,
- schwache Lösungen, d. h. Lösungen u einer Differentialgleichung k-ter Ordnung mit $u \notin C^k$.
- quantitatives oder qualitatives Verhalten

  - im Unendlichen, $|x| \to \infty$, $t \to \infty$,
  - in oder nahe Singularitäten,
  - Beschränktheit,
  - $\ldots$.
- Klassifikation aller Lösungen, explizite Lösungsformeln.
- $\ldots$.

Die verwendeten Methoden hängen in der Regel stark von der betrachteten Gleichung ab.

Wir werden zunächst insbesondere das Randwertproblem (RWP)

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

untersuchen.

1. Die Laplacegleichung und Darstellungsformeln

1.1. **Die Fundamentallösung.** Wir folgen [2] und später [4]. Wir wollen $n \geq 2$ annehmen. Sonst entspricht das betrachtete Problem einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Bemerkung 1.1 (Motivation)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ beschreibe die Temperatur in Ω. Wir nehmen an, dass die Temperatur zeitunabhängig ist, dass Temperatur und lokale Wärmemenge proportional zueinander sind, sowie dass die transportierte Wärmemenge proportional zu $|Du|$ ist und sich in Richtung $-\frac{Du}{|Du|}$ bewegt. Sei $U \subset \Omega$ glatt und beschränkt. Die insgesamt durch ∂U transportierte Wärmemenge ist (Rechne bis auf eine Konstante, bezeichne mit ν die äußere Normale an U und benutze, dass u zeitunabhängig ist.)

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\partial U} -\langle Du, \nu\rangle = \int\limits_{U} -\operatorname{div} Du \quad &\text{(Gaußscher Integralsatz)} \\ = \int\limits_{U} -\Delta u. \end{aligned}$$

Da U beliebig war, folgt $\Delta u = 0$ in Ω.

Bemerkung 1.2 (Rotationssymmetrische Lösungen)**.** Sei $u \in C^2(B_R \setminus \{0\})$ eine rotationssymmetrische Lösung von $\Delta u = 0$, d. h. es gibt $v \in C^2((0, R))$, so dass $u(x) = v(r)$, wobei $r = |x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2\right)^{1/2}$.

Wir leiten zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für v her:

$$u_i = v' r_i = v' \tfrac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2\right)^{-1/2} 2x_i = v' \frac{x_i}{r},$$

$$u_{ij} = v'' \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} + v' \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} \right).$$

Also gilt

$$0 = \Delta u = \delta^{ij} u_{ij} = v'' + v' \frac{n-1}{r}.$$

Entweder gilt $v' \equiv 0$ auf $(0, R)$ oder $v' \neq 0$ auf $(0, R)$. Im Fall $v' > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v''}{v'} + \frac{n-1}{r} = (\log v')' + \frac{n-1}{r}, \\ \log v' &= -(n-1) \log r + \log a, \quad a > 0, \\ v' &= \frac{a}{r^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für $v' < 0$, dass $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$ für ein $a < 0$. Durch Integration erhalten wir im Falle $n = 2$ aus $v' = \frac{a}{r}$, dass $v = a \log r + b$ und im Falle $n \geq 3$ aus $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$, dass $v = \frac{a}{-n+2} \frac{1}{r^{n-2}} + b$, jeweils für ein $b \in \mathbb{R}$, ist.

Definition 1.3 (Fundamentallösung)**.** Die Funktion

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Hier bezeichnet ω_n das Volumen von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\omega_n = |B_1(0)|$.

Bemerkung 1.4. Für $x \neq 0$ gelten die Abschätzungen

$$|D\Phi| \leq \frac{c}{|x|^{n-1}} \quad \text{und} \quad \left| D^2 \Phi(x) \right| \leq \frac{c}{|x|^n}$$

mit $c = c(n)$.

1.2. **Darstellungsformel für $\mathbb{R}^n$.**

Sei nun $n \geq 2$. Wir benutzen die Fundamentallösung zur Konstruktion von Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Theorem 1.5. *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Definiere $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, dy.$$

Dann gelten $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$-\Delta u = f \quad \textit{in } \mathbb{R}^n.$$

Beweis.

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$: Wir transformieren das Integral

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) \, dy.$$

Für $h \neq 0$ und $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 an der i-ten Stelle, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right] dy.$$

Wir wollen zum Grenzwert $h \to 0$ übergehen. Nehme an, dass $|h| < 1$ und $\operatorname{supp} f \subset B_R = B_R(0)$.

Es gilt nun $f(x+he_i-y) - f(x-y) = 0$, falls $|x+he_i-y| > R$ und $|x-y| > R$. Dies ist für $|y| > R+1+|x|$ erfüllt, denn dann gelten $|x+he_i-y| \geq |y| - |x+he_i| \geq |y| - 1 - |x| > R$ und $|x-y| \geq |y| - |x| > R$. Wir dürfen also annehmen, dass der Integrand außerhalb von B_ρ, $\rho > 0$ geeignet, verschwindet. Da $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ ist, konvergiert

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \to f_i(x-y)$$

für $h \to 0$ gleichmäßig in $x - y \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt, dass

$$\begin{aligned} \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = & \int\limits_{B_\rho} \Phi(y) f_i(x-y)\, dy \\ & + \int\limits_{B_\rho} \Phi(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} - f_i(x-y) \right] dy \end{aligned}$$

und das zweite Integral konvergiert gegen 0, falls $\int\limits_{B_\rho} |\Phi(y)|\, dy$ endlich ist. Es gilt für $n = 2$

$$\int\limits_{B_\rho} |\Phi(y)|\, dy \leq c \int\limits_{B_\rho} |\log |y||\, dy \leq c \int\limits_0^\rho |\log r| \cdot r\, dr < \infty,$$

sowie

$$\int\limits_{B_\rho} |\Phi(y)|\, dy \leq c \int\limits_{B_\rho} |y|^{2-n}\, dy \leq c \int\limits_0^\rho r\, dr < \infty$$

im Falle $n \geq 3$. Hierbei ist c eine universelle Konstante, d. h. c kann verschiedene Werte annehmen, ist aber stets beschränkt.

Also folgt für $n = 1, \ldots, n$

$$u_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_i(x-y)\, dy.$$

Analog erhält man

$$u_{ij}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{ij}(x-y)\, dy.$$

Dieses Integral ist in x stetig, also erhalten wir $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $-\Delta u = f$: Sei $\varepsilon > 0$. Φ ist singulär. Daher spalten wir die Integration auf

$$\begin{aligned}\Delta u(x) = & \int\limits_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \\ & + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \\ \equiv & \, I_\varepsilon + J_\varepsilon.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $I_\varepsilon \to 0$: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon| \le & \, c \cdot \left\|D^2 f\right\|_{C^0} \cdot \int\limits_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)|\,dy \\ \le & \begin{cases} c \cdot \left\|D^2 f\right\|_{C^0} \cdot \int\limits_0^\varepsilon |\log r| \cdot r\,dr \le \left\|D^2 f\right\|_{C^0} \cdot \varepsilon \cdot \sup\limits_{z \in (0,\varepsilon)} |\log z| \cdot z, & n = 2, \\ c \cdot \left\|D^2 f\right\|_{C^0} \cdot \int\limits_0^\varepsilon r^{2-n} r^{n-1}\,dr \le c \cdot \left\|D^2 f\right\|_{C^0} \cdot \varepsilon^2, & n \ge 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Aufgrund der Kettenregel (doppelt angewandt) gilt $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}J_\varepsilon = & \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)\,dy \\ = & \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} -\langle D\Phi(y), D_y f(x-y)\rangle\,dy + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \left\langle D_y f(x-y), -\tfrac{y}{|y|}\right\rangle\,dy \\ \equiv & \, K_\varepsilon + L_\varepsilon.\end{aligned}$$

Hierbei kommt das Vorzeichen der Normalen von der Tatsache, dass wir über den Außenraum integrieren. Die partielle Integration ist gerechtfertigt, denn für $|x| \le c$ hat der Integrand als Funktion von y einen kompakten Träger.

Wir schätzen L_ε wie folgt ab

$$|L_\varepsilon| \le c \cdot \|Df\|_{C^0} \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} |\Phi| \le \left.\begin{cases} c \cdot \|Df\|_{C^0} \cdot \varepsilon \cdot |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ c \cdot \|Df\|_{C^0} \cdot \varepsilon, & n \ge 3, \end{cases}\right\} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Nach nochmaliger partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}K_\varepsilon = & \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta_y \Phi(y) \cdot f(x-y)\,dy - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \left\langle D_y \Phi(y), -\tfrac{y}{|y|}\right\rangle f(x-y)\,dy \\ = & \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \left\langle D_y \Phi(y), \tfrac{y}{|y|}\right\rangle f(x-y)\,dy,\end{aligned}$$

da Φ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist,

$$= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{1}{n\omega_n}|y|^{1-n} \left\langle \tfrac{y}{|y|}, \tfrac{y}{|y|}\right\rangle f(x-y)\,dy$$

$$= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{1}{n\omega_n}\varepsilon^{1-n} f(x-y)\,dy$$

und wegen $|\partial B_\varepsilon| = n\omega_n\varepsilon^{n-1}$ können wir $0 = f(x) - f(x)$ wie folgt hinzuaddieren

$$= \underbrace{\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{1}{n\omega_n}\varepsilon^{1-n} \underbrace{(f(x-y) - f(x))}_{\to 0 \quad \text{für } \varepsilon\to 0}\,dy}_{|\int\ldots|\le \sup\limits_{y\in B_\varepsilon(0)} |f(x-y)-f(x)|} - f(x)$$

$$\to 0 - f(x) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Daher folgt

$$\Delta u(x) = -f(x).$$

□

Bemerkung 1.6. In der Tat gilt Theorem 1.5 auch noch für $f \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, nur ist der Beweis deutlich komplizierter.

1.3. **Mittelwerteigenschaft.**

Theorem 1.7 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch. Dann gilt*

$$u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u = \fint\limits_{B_r(x)} u,$$

falls $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Beweis.

(i) Definiere

$$\varphi(r) := \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy.$$

Zeige zunächst, dass φ konstant ist: Es gilt (mit $z = y/r$)

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy = \fint\limits_{\partial B_r(0)} u(x+y)\,dy = \frac{1}{|\partial B_r|}\int\limits_{\partial B_r(0)} u(x+y)\,dy \\
&= \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_1(0)} u(x+rz)r^{n-1}\,dz = \frac{1}{|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,dz. \\
\varphi'(r) &= \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_1(0)} \langle Du(x+rz), z\rangle\,dz \\
&= \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_r(x)} \left\langle Du(y), \frac{y-x}{r}\right\rangle dy = \frac{1}{|\partial B_r|}\int\limits_{\partial B_r(x)} \langle Du(y), \nu\rangle\,dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = 0,$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial B_r(x)$ ist und wir den Divergenzsatz verwendet haben. Somit ist $\varphi' = 0$. Also ist φ konstant. Da u stetig ist, erhalten wir

$$\varphi(r) = \lim_{t\searrow 0} \varphi(t) = \lim_{t\searrow 0} \fint\limits_{\partial B_t(x)} u(y)\, dy = u(x).$$

(ii) Es gilt aufgrund der eben erzielten Ergebnisse

$$\int\limits_{B_r(x)} u(y)\, dy = \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\, dy\, ds = u(x) \int\limits_0^r \underbrace{n\omega_n s^{n-1}}_{=|\partial B_s|}\, ds = \omega_n r^n u(x).$$

$\square$

Theorem 1.8 (Umkehrung der Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Falls für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\, dy$$

gilt, so ist u harmonisch.

Beweis. Benutze die Notation des Beweises von Theorem 1.7. Ist $\Delta u \not\equiv 0$, so existiert $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so dass (ohne Einschränkung) $\Delta u > 0$ in $B_r(x)$ gilt. Dann folgt mit Hilfe der Rechnungen des Beweises von Theorem 1.7

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u > 0.$$

Widerspruch. $\square$

Theorem 1.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint\limits_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Theorem 1.10 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sei harmonisch. Dann gilt*

(i)

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, so ist u auf der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der zweiten. Daher beweisen wir nur diese.

Definiere
$$A := \left\{ x \in \Omega : u(x) = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \right\}.$$
A ist relativ abgeschlossen in Ω. Sei $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $x \in A$. Es folgt
$$\begin{aligned}\max_{\overline{\Omega}} u = u(x) = & \fint_{B_r(x)} u \quad \text{(Mittelwerteigenschaft)}\\ \le & \fint_{B_r(x)} \sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\overline{\Omega}} u\end{aligned}$$
und Gleichheit gilt genau dann, wenn $u|_{B_r(x)} = \sup\limits_{\overline{\Omega}} u$ ist. Damit ist A relativ offen in Ω. □

Theorem 1.11 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Randwertproblem*
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega,\\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Seien u und $\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen. Dann erfüllt $w := u - \tilde{u}$
$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega,\\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Das Maximumprinzip impliziert nun, dass $w = 0$ in Ω gilt. □

1.4. **Regularität und innere Abschätzungen.**

Theorem 1.12 (Regularität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Erfüllt u die Mittelwerteigenschaft $u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u$ für alle Kugeln $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Wir bemerken, dass es genügt, kleine Kugeln zu betrachten.

Beweis. Sei η ein rotationssymmetrischer Friedrichscher Glättungskern ("mollifier"). Definiere in $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ die Funktionen $u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$, wobei $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ist. Es gilt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Wir zeigen nun, dass $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε gilt. Hieraus folgt $u \in C^\infty(\Omega)$. Sei also $x \in \Omega_\varepsilon$. Wir benutzen die leicht doppeldeutige Notation $\eta(x) = \eta(|x|)$. Es gilt
$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) = & \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy\\ = & \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u \right) dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\omega_n r^{n-1}\, dr \quad \text{(Mittelwerteigenschaft)} \\
&= u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(x).
\end{aligned}
$$

□

Daher werden wir in Zukunft annehmen, dass harmonische Funktionen von der Klasse C^∞ sind.

Theorem 1.13 (Innere Abschätzungen für harmonische Funktionen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u in Ω harmonisch. Sei $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und sei α ein Multiindex der Ordnung k, $|\alpha| = k$. Dann gilt

$$
|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{c_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))},
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\omega_n}, \\
c_k &= \frac{\left(2^{n+1} nk\right)^k}{\omega_n}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach k.

(i) $k = 0$: Aufgrund der Mittelwerteigenschaft gilt

$$
|u(x_0)| = \left| \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u \right| \le \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |u|.
$$

(ii) $k = 1$: Aus $\Delta u = 0$ und der Regularität von u folgt auch $\Delta u_i = 0$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
|u_i(x_0)| = \left| \fint_{B_{r/2}(x_0)} u_i \right| &= \frac{1}{\omega_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} \cdot \left| \int_{B_{r/2}(x_0)} \langle Du, e_i \rangle \right| = \frac{2^n}{\omega_n r^n} \left| \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} u \langle \nu, e_i \rangle \right| \\
&\le \frac{2^n}{\omega_n r^n} \cdot \frac{\omega_n n r^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))} = \frac{2n}{r} \cdot |u(y_0)|
\end{aligned}
$$

für einen geeignet gewählten Punkt $y_0 \in \partial B_{r/2}(x_0)$. Es gilt $\overline{B_{r/2}(y_0)} \subset \Omega$. Also können wir aufgrund der Induktionsannahme wie folgt abschätzen

$$
|u_i(x_0)| \le \frac{2n}{r} \frac{1}{\omega_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} \|u\|_{L^1(B_{r/2}(y_0))} \le \frac{2^{n+1} n}{\omega_n r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.
$$

(iii) $k \geq 2$: Sei α ein Multiindex der Ordnung k, $D^\alpha = \left(D^\beta\right)_i$ für einen Multiindex β der Ordnung $k-1$. Wie im Beweis für den Fall $k=1$ erhalten wir auf einer Kugel vom Radius $\frac{r}{k}$

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \left\|D^\beta u\right\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))} = \frac{nk}{r} \left|D^\beta u(y_0)\right|$$

für ein geeignetes $y_0 \in \partial B_{r/k}(x_0)$. Nun gilt $\overline{B_{\frac{k-1}{k}r}(y_0)} \subset \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und daher nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x_0)| \leq & \frac{nk}{r} \frac{\left(2^{n+1}n(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_n} \left(\frac{k}{r(k-1)}\right)^{n+k-1} \cdot \|u\|_{L^1(B_{\frac{k-1}{k}r}(y_0))} \\ \leq & \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^k}{\omega_n r^{n+k}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}. \end{aligned}$$

□

Theorem 1.14 (Satz von Liouville)**.** *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Es gilt

$$|Du(x_0)| \leq \frac{c}{r^{n+1}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \leq \frac{c}{r} \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

Es folgt $|Du(x_0)| = 0$. Somit ist u konstant. □

Theorem 1.15 (Darstellungsformel)**.** *Sei $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann ist jede beschränke Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ von*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

von der Form

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Definiere

$$\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy.$$

Dann ist $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Für $|x| \to \infty$ gilt $\Phi(x) \to 0$ (für $n \geq 3$). Daher ist $\tilde{u}$ beschränkt. (Es würde dazu genügen, dass $\Phi(x)$ für $|x| \geq R$ beschränkt ist.) Sei nun $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine weitere beschränkte Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $w := u - \tilde{u}$ beschränkt und harmonisch, $\Delta w = 0$. Nach dem Satz von Liouville, Theorem 1.14, folgt daher $w = C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 1.16. Für $n = 2$ ist $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ für $|x| \to \infty$ unbeschränkt. Daher ist $\tilde{u}$ i. a. unbeschränkt und dieser Beweis funktioniert nicht.

Theorem 1.17 (Analytizität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist u in Ω analytisch.*

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$. Wir werden nachweisen, dass die Taylorreihe von u in x_0 in einer Kugel um x_0 konvergiert. Definiere

$$r := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$$

bzw. $r := 1$ falls $\Omega = \mathbb{R}^n$ und

$$M := \frac{1}{\omega_n r^n}\|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))}.$$

Da $u \in C^\infty(\Omega)$ ist, erhalten wir $M < \infty$.

Abschätzungen für Ableitungen: Wir kombinieren

$$|D^\alpha u(x)| \le \frac{\left(2^{n+1}n|\alpha|\right)^{|\alpha|}}{\omega_n}\frac{1}{r^{n+|\alpha|}}\|u\|_{L^1(B_r(x))}$$

und $B_r(x) \subset B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ für $x \in B_r(x_0)$ und erhalten

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \le M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|} \cdot |\alpha|^{|\alpha|}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{k!}k^k \le e^k$ oder äquivalent dazu $k^k \le e^k k!$. Also ist $|\alpha|^{|\alpha|} \le e^{|\alpha|}|\alpha|!$. Das Multinomialtheorem liefert für $|\alpha| = k$

$$n^k = (1+\ldots+1)^k = \sum_{|\beta|=k}\frac{|\beta|!}{\beta!} \ge \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

Also ist $|\alpha|! \le n^{|\alpha|}\alpha!$. Wir erhalten

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \le M\left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!.$$

Potenzreihe: Wir behaupten, dass (zumindest) für $|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3 e}$ die Taylorreihe

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

gegen u konvergiert. Dazu betrachten wir die Restglieddarstellung

$$\begin{aligned} R_N(x) &:= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|=N}\frac{D^\alpha(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \end{aligned}$$

für ein $t \in [0,1]$. Dies erhält man durch Betrachtung der Funktion $g(t) := u(x+t(x-x_0))$, Entwicklung für $t = 0$ und Auswertung bei $t = 1$. Die obigen Abschätzungen für die Ableitungen von u liefern

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\le M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^N\left(\frac{r}{2^{n+2}n^3e}\right)^N \\ &= M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{1}{2n}\right)^N \le Mn^N\left(\frac{1}{2n}\right)^N = \frac{M}{2^N} \end{aligned}$$

$$\to 0 \quad \text{für } N \to \infty.$$

Bemerkung: Die Abschätzung $\sum\limits_{|\alpha|=N} 1 \le n^N$ erhält man wie folgt; Analogie: N Kugeln sind auf n Körbe zu verteilen; für jede Kugel hat man n Möglichkeiten, also insgesamt höchstens $n \cdots n = n^N$ Möglichkeiten. □

1.5. **Harnackungleichung.**

Theorem 1.18 (Harnackungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u > 0$ in Ω. Sei $\Omega_1 \Subset \Omega$ offen und zusammenhängend. Dann gibt es $c = c(n, \Omega_1, \Omega)$, so dass*

$$\sup_{\Omega_1} u \le c \cdot \inf_{\Omega_1} u$$

gilt.

Für x, $y \in \Omega_1$ folgt also

$$\frac{1}{c} u(y) \le u(x) \le c \cdot u(y),$$

d. h. die Funktionswerte von u in Ω_1 sind untereinander vergleichbar.

Beweis. Definiere $r := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$ oder setze $r = 1$, falls $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist. Seien x, $y \in \Omega_1$ mit $|x - y| \le r$. Wir benutzen die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) = \fint\limits_{B_{2r}(x)} u &= \frac{1}{\omega_n 2^n r^n} \cdot \int\limits_{B_{2r}(x)} u \\ &\ge \frac{1}{\omega_n 2^n r^n} \int\limits_{B_r(y)} u, \quad \text{da } B_r(y) \subset B_{2r(x)} \\ &= \frac{1}{2^n} \fint\limits_{B_r(y)} u = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle x, $y \in \Omega_1$ mit $|x - y| \le r$

$$2^n u(y) \ge u(x) \ge \frac{1}{2^n} u(y).$$

Da $\overline{\Omega_1}$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_i \in \Omega_1$, $1 \le i \le N$, so dass $\overline{\Omega_1} \subset \bigcup\limits_{i=1}^N B_{r/2}(x_i)$ ist. Seien nun x, $y \in \Omega_1$ beliebig. Modifiziere einen stetigen Weg von x nach y, so dass er nur aus Geradenstücken zwischen Punkten aus $\{x, y, x_1, \ldots, x_N\}$ besteht. Jedes x_i werde dabei höchstens einmal besucht, z. B.

$$„x \to x_1 \to \ldots \to x_N \to y“.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} u(x) &\ge \frac{1}{2^n} u(x_1), \\ u(x_1) &\ge \frac{1}{2^n} u(x_2), \ \ldots, \end{aligned}$$

und hieraus folgt dann
$$u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y).$$
□

1.6. **Greensche Funktion und Darstellungsformeln auf Gebieten.**

Bemerkung 1.19 (Greensche Funktion: Herleitung und Definition)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $u,\, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Dann folgt aus dem Divergenztheorem die **1. Greensche Formel**
$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u + \int\limits_{\Omega} \langle Du, Dv\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} v\langle Du, \nu\rangle,$$
wobei wir mit ν die äußere Normale an Ω bezeichnen. Wir vertauschen nun die Rollen von u und v, subtrahieren die entsprechenden Gleichungen voneinander und erhalten die **2. Greensche Formel**
$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u - u\Delta v = \int\limits_{\partial\Omega} v\langle Du, \nu\rangle - u\underbrace{\langle Dv, \nu\rangle}_{\equiv\frac{\partial v}{\partial \nu}}.$$
Sei nun $x \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$ ist. Definiere $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$. Dann folgt
$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy\\ =&\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,dy.\end{aligned}$$
Es gilt

(i) $\Delta\Phi(y-x) = 0$ für $x \neq y$,

(ii) $\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dy \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Dies folgt wie bei der Abschätzung für L_ε im Beweis von Theorem 1.5.

(iii) Aus der Rechnung für K_ε, ebenfalls aus dem Beweis von Theorem 1.5, erhalten wir
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}} \quad \text{auf } \partial B_\varepsilon(0).$$

Insgesamt erhalten wir also, wobei ν die äußere Normale an $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ oder die innere Normale an $B_\varepsilon(0)$ bezeichnet,
$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\,dy = \fint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\,dy \to u(x) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$
Weiterhin gilt
$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dz \to \int\limits_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dz \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0,$$

da Φ in der Nähe der Singularität integrierbar ist. Damit folgt aus dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x)\,dy - \int\limits_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y)\,dy \tag{1.1}$$

für alle $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ und alle $x \in \Omega$.

Dies liefert eine Darstellungsformel für u, falls wir Δu in Ω sowie u und $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ auf $\partial\Omega$ kennen. Randwertprobleme, bei denen alle diese Daten vorgeschrieben sind, sind aber überbestimmt und i. a. nicht lösbar. Beispiel: Sei

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen und dem Maximumprinzip folgt dass $u = 0$ gilt. Also muß auch $\varphi = 0$ gelten. Für $\varphi \neq 0$ existiert daher keine Lösung $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ oder $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Korrekturfunktion: Sei $x \in \Omega$ fest. Sei $\varphi^x = \varphi^x(y)$ die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{in } \Omega, \\ \varphi^x = \Phi(\cdot - x) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkung: Für sehr spezielle Gebiete werden wir φ^x explizit bestimmen. Das Perronverfahren wird Lösungen für allgemeine Gebiete liefern. Diese sind jedoch erst einmal nur von der Klasse $C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ für genügend glatte Gebiete Ω. Höhere Regularität ist zwar richtig, jedoch technisch deutlich aufwändiger.

Nehme nun $\varphi^x \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ an. Dann liefert die 2. Greensche Formel (unter Berücksichtigung des von φ^x gelösten Randwertproblems)

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Omega} \varphi^x(y)\Delta u(y)\,dy &= \int\limits_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\varphi^x}{\partial\nu}(y) - \varphi^x(y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dy \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\varphi^x}{\partial\nu}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,dy. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definiere nun die Greensche Funktion für das Gebiet Ω durch

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \varphi^x(y), \quad x \neq y \in \Omega.$$

Wir addieren (1.1) und (1.2) und erhalten

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y)\,dy - \int\limits_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\,dy.$$

Nun tauchen auf der rechten Seite nur noch $u|_{\partial\Omega}$ und $\Delta u|_{\Omega}$ auf.

Wir erhalten also

Theorem 1.20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und G die Greensche Funktion für Ω, so gilt

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, dy + \int\limits_{\Omega} f(y) G(x,y)\, dy$$

für $x \in \Omega$.

Bemerkung 1.21. Sei $x \in \Omega$. Betrachte $G(x,y)$ als Funktion von y. Dann gilt im Distributionssinne

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta_x & \text{in } \Omega, \\ G = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei δ_x das Diracmaß zum Punkt x ist.

Theorem 1.22 (Symmetrie der Greenschen Funktion)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und sei $\partial\Omega \in C^1$. Seien $x \neq y \in \Omega$. Sei G die zu Ω gehörige Greensche Funktion. Nehme an, dass $G \in C^2\left(\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right) \setminus \Delta\right)$, $\Delta := \{(x,x) : x \in \Omega\}$, ist. Dann gilt*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Beweis. Fixiere $x \neq y \in \Omega$. Definiere für $z \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} v(z) &:= G(x,z) \quad \text{für } z \neq x, \\ w(z) &:= G(y,z) \quad \text{für } z \neq y. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta v(z) &= 0 \quad \text{für } z \neq x, \\ \Delta w(z) &= 0 \quad \text{für } z \neq y, \\ w = v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \left(\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)}\right)$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ (was wir im folgenden annehmen wollen) ist $\partial\Omega_\varepsilon \in C^1$. Nach Annahme gilt $v, w \in C^2\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$.

Die 2. Greensche Formel liefert nun

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu} \\ &= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu} + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} v\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial v}{\partial \nu}, \end{aligned}$$

wobei wir mit ν die äußere Normale an Ω_ε bezeichnen.

Nahe x ist w glatt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v\,dz\right| &\le c\cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |v| = c\cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |G(x,z)|\\ &\le \underbrace{c\cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |\Phi(z-x)|\,dz}_{\equiv I} + \underbrace{c\cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \underbrace{|\varphi^x(z)|}_{=\text{beschränkt}}\,dz}_{\to 0 \quad \text{für } \varepsilon\to 0}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$I \le c\cdot \varepsilon^{n-1}\cdot \begin{Bmatrix} \log\varepsilon, & n=2,\\ \varepsilon^{2-n}, & n\ge 3\end{Bmatrix} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon\to 0.$$

Es gilt also

$$0 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \left\{ \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} -w\frac{\partial v}{\partial \nu} + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} v\frac{\partial w}{\partial \nu}\right\}.$$

Durch Vergleich mit den Rechnungen für K_ε aus dem Beweis von Theorem 1.5 sehen wir unter Berücksichtigung der Tatsache, dass w und φ^x nahe x beschränkt sind,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} w\frac{\partial v}{\partial \nu} &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\cdot \frac{\partial}{\partial \nu_z}\left(\Phi(z-x)-\varphi^x(z)\right)dz\\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\frac{\partial}{\partial \nu_z}\Phi(z-x)\,dz\\ &= w(x).\end{aligned}$$

Wir schließen also, dass $w(x)=v(y)$ ist und somit folgt $G(y,x)=G(x,y)$. □

Beispiel 1.23 (Greensche Funktion für einen Halbraum)**.** Dies ist zunächst eine formale Rechnung, da ein Halbraum nicht präkompakt ist. Definiere

$$\mathbb{R}^n_+ := \left\{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^n : x^n>0\right\}.$$

Definiere $\tilde{x}$ als die Reflektion von x an $\partial\mathbb{R}^n_+$,

$$\tilde{x} := (x^1,\ldots,x^{n-1},-x^n).$$

Beobachtung: Für $x\in\mathbb{R}^n_+$ und $y\in\partial\mathbb{R}^n_+$ gilt $\Phi(y-\tilde{x})=\Phi(y-x)$. Die Abbildung $y\mapsto\Phi(y-\tilde{x})$ ist in $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ harmonisch und glatt. Wir machen den folgenden Ansatz

$$G(x,y) := \Phi(y-x)-\Phi(y-\tilde{x})$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y^n} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y^n}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y^n}(y-\tilde{x})\\ &= -\frac{1}{n\omega_n}\left\{\frac{y^n-x^n}{|y-x|^n} - \frac{y^n+x^n}{|y-\tilde{x}|^n}\right\}.\end{aligned}$$

Für $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y^n}(x,y) = -\frac{2x^n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}.$$

Aufgrund der Greenschen Darstellungsformel vermuten wir nun, dass eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^n_+$ durch

$$u(x) = \frac{2x^n}{n\omega_n} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy$$

gegeben ist.

Eindeutigkeit ist nicht zu erwarten, da für $g = 0$ alle Funktionen $u(x) = \alpha x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Lösungen sind.

Theorem 1.24 (Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum)**.** *Sei $g \in C^0\left(\mathbb{R}^{n-1}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ und betrachte $\mathbb{R}^{n-1}$ vermöge $x \mapsto (x,0)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$*

$$u(x) := \frac{2x^n}{n\omega_n} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy.$$

Dann gilt

(i) $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$,

(ii) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$,

(iii) $u \in C^0\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ und $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$. Genauer gilt: Es gibt eine stetige Fortsetzung $\tilde{u}$ von u auf $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ mit $\tilde{u} = g$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Beweis.

a) Definiere den Poissonkern für $\mathbb{R}^n_+$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$, durch

$$K(x,y) := \frac{2x^n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}.$$

Für $x \neq y$ ist $y \mapsto G(x,y)$ harmonisch. Daher ist aufgrund der Symmetrie auch $x \mapsto G(x,y)$ für $x \neq y$ harmonisch. Somit ist für $x \in \mathbb{R}^n_+$ und $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ auch die Ableitung

$$x \mapsto K(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y^n}(x,y)$$

harmonisch.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ gilt $1 = \int\limits_{\partial R^n_+} K(x,y)\,dy$. Wir zeigen nur den einfachsten Fall $(n = 3)$ und lassen den Rest als Übungsaufgabe. Es gilt

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{2x^3}{3\omega_3}\frac{1}{|x-y|^3}\,dy = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{2x^3}{3\omega_3}\frac{1}{\left((x^3)^2 + |y|^2\right)^{3/2}}\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^\infty \frac{2x^3}{3\omega_3} \frac{1}{\left((x^3)^2+r^2\right)^{3/2}} 2\omega_2 r\, dr \\
&= -\frac{4x^3\omega_2}{3\omega_3} \left((x^3)^2+r^2\right)^{-1/2}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{4\omega_2}{3\omega_3} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 1.
\end{aligned}
$$

c) Da $K(x,y)>0$ ist und g beschränkt ist, ist auch u beschränkt, $u \in L^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$.

Die Abbildung $x \mapsto K(x,y)$ ist für $x \neq y$ glatt und alle Ableitungen fallen im Unendlichen schnell genug ab. Somit ist $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ (Übungsaufgabe). Insbesondere gilt für $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\Delta u(x) = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_x K(x,y) g(y)\, dy = 0.$$

(Hieraus folgt auch schon die über C^2 hinausgehende Regularität.)

Beweisidee für $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$: Vergleiche Ableitung und Differenzenquotienten. Auf Kompakta hat man gleichmäßige Konvergenz der Differenzenquotienten gegen die Ableitung. Die Integralbeiträge von „nach Unendlich“ sind klein.

d) **Stetigkeit bis zum Rand:** Sei $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ und $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von g auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ mit $|y-x_0| < \delta$ auch $|g(y)-g(x_0)| < \varepsilon$ gilt.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n_+$ und $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$. Dann gilt aufgrund der Normierung

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dy = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$
\begin{aligned}
|u(x)-g(x_0)| &= \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)[g(y)-g(x_0)]\, dy \right| \\
&\le \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)|g(y)-g(x_0)|\, dy \\
&\quad + \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)|g(y)-g(x_0)|\, dy \\
&\equiv I + J.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Stetigkeit von g und der Normierung gilt

$$I \le \varepsilon \cdot \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)\, dy \le \varepsilon \cdot \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dy = \varepsilon.$$

Benutze nun, dass $|x - x_0| \le \frac{\delta}{2}$ und $|y - x_0| \ge \delta$ gelten. Hieraus folgt $|x - x_0| \le \frac{1}{2}|y - x_0|$ und $|y - x| \ge |y - x_0| - |x_0 - x| \ge |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| = \frac{1}{2}|y - x_0|$. Damit schätzen wir J ab

$$\begin{aligned} J &\le 2 \cdot \|g\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)\,dy \\ &\le 2 \cdot \|g\|_{L^\infty} \cdot \frac{2x^n}{n\omega_n} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_\delta(x_0)} \frac{2^n}{|y - x_0|^n}\,dy \\ &= 2^{n+2} \cdot \|g\|_{L^\infty} \cdot \frac{x^n}{n\omega_n} \underbrace{\int\limits_\delta^\infty \frac{(n-1)\omega_{n-1} r^{n-2}}{r^n}\,dr}_{<\infty} \\ &\to 0 \quad \text{für } x^n \downarrow 0. \end{aligned}$$

Es folgt somit $u(x) \to g(x_0)$ für $x \to x_0$.

$\square$

Bemerkung 1.25 (Greensche Funktion für eine Kugel)**.** Definiere für $x \in B_1(0)$ die Inversion an der Einheitssphäre durch

$$x \mapsto \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}.$$

Durch „Erraten“ erhält man, dass die Korrekturfunktion in diesem Falle durch

$$\varphi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$$

(für $x \neq 0$ und stetig fortgesetzt bis zu $x = 0$) und die Greensche Funktion durch

$$G(x,y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$$

gegeben sind. Für $|y| = 1$ und $x \neq 0$ sieht man durch Quadrieren direkt, dass $|y - x| = |x||y - \tilde{x}|$ gilt.

Für $B_r(0)$ betrachtet man

$$G(x,y) = \Phi(y - x) - \Phi\left(\frac{1}{r}|x|(y - \tilde{x})\right).$$

Lemma 1.26 (Poissonsche Darstellungsformel für eine Kugel)**.** *Die Poissonsche Darstellungsformel für eine Kugel B_r für das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r, \\ u = g & \text{auf } \partial B_r \end{cases}$$

ist durch

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_r} K(x,y) g(y)\,dy \tag{1.3}$$

für $x \in B_r$ mit

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \frac{1}{|x - y|^n}$$

für $x \in B_r$ und $y \in \partial B_r$ gegeben.

Beweis. Übungsaufgabe: Rechne nach, dass $\varphi^x(y) := \Phi\left(\frac{1}{r}|x|(y-\tilde{x})\right)$, $\tilde{x} = r^2\frac{x}{|x|^2}$, analog zu oben definiert, das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{in } B_r(0) \\ \varphi^x(y) = \Phi(y-x) & \text{für } y \in \partial B_r(0) \end{cases}$$

löst. □

Theorem 1.27. *Sei $g \in C^0(\partial B_r)$ und u durch (1.3) definiert. Dann gilt*

(i) $u \in C^\infty(B_r)$,

(ii) $\Delta u = 0$ *in* B_r,

(iii) u *läßt sich stetig auf* ∂B_r *fortsetzen und erfüllt dort* $u = g$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

2. Perronverfahren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Wir wollen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ finden, die das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

löst.

2.1. **Konvergenzsätze.**

Theorem 2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_l : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert, $u_l \rightrightarrows u$.*

Dann ist u in Ω harmonisch.

Beweis. Die Funktionen u_l sind harmonisch und erfüllen daher die Mittelwerteigenschaft

$$u_l(x) = \fint\limits_{B_r(x)} u_l.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $u_l \rightrightarrows u$ dürfen wir zum Grenzwert übergehen und erhalten $u(x) = \fint\limits_{B_r(x)} u$. Somit ist auch u harmonisch. □

Theorem 2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei (u_l) eine Folge harmonischer Funktionen, die auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ die Abschätzung $|u_l(x)| \le c(K)$ erfüllen. Dann gibt es eine Teilfolge der (u_l), die in $C^2_{loc}(\Omega)$ konvergiert. Der Grenzwert u ist eine glatte harmonische Funktion.*

Beweis. Aufgrund der inneren Abschätzungen für harmonische Funktionen, Theorem 1.13, gibt es für jedes $K \subset \Omega$ eine Umgebung U mit

$$K \subset U = K_\varepsilon \equiv \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\} \Subset \Omega$$

für ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|u_l\|_{C^k(U)} \le c\left(k, n, U, \Omega, c\left(\overline{U}\right)\right)$ gilt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es daher eine in $K_{\varepsilon/2}$ gleichmässig konvergente Teilfolge. Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, dass u_l in U gleichmässig gegen eine stetige Funktion u konvergiert. Der Limes u ist aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz in $K_{\varepsilon/4}$ harmonisch.

Mit Hilfe eines Diagonalfolgenarguments in K folgt die Behauptung. □

Korollar 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_l : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen $u_l \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch sind. Gelte $u_l = \varphi_l$ auf $\partial\Omega$.*

Konvergieren die Funktionen φ_l auf $\partial\Omega$ gleichmäßig gegen eine Funktion φ, so konvergieren die Funktionen u_l in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch ist.

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ auf $\partial\Omega$ und des Maximumprinzips folgt, dass $u_l \rightrightarrows u$ in $\overline{\Omega}$ gilt. Die Funktion u ist in Ω harmonisch und damit auch glatt. □

Theorem 2.4 (Harnacksches Konvergenztheorem)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei u_l eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen. Sei $y \in \Omega$ und sei $u_l(y)$ gleichmäßig beschränkt. Sei $\Omega' \Subset \Omega$. Dann konvergiert u_l auf Ω' gegen eine harmonische Funktion.*

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass Ω' zusammenhängend ist und $y \in \Omega'$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein N, so dass für $m \ge l > N$

$$0 \le u_m(y) - u_l(y) < \varepsilon$$

gilt. Aufgrund der Harnackungleichung, Theorem 1.18 folgt

$$\sup_{\Omega'} |u_m - u_l| \le c(\Omega', \Omega) \cdot \varepsilon.$$

Somit konvergiert u_l auf Ω' gegen u. Also ist u in Ω' harmonisch. □

Theorem 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien u_l harmonische Funktionen, die in $C^0_{loc}(\Omega)$ gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann konvergiert $u_l \to u$ in $C^k_{loc}(\Omega)$.*

Beweis. Auf kompakten Teilmengen von Ω sind die Funktionen u_l gleichmäßig beschränkt. Aufgrund der inneren Abschätzungen und nach Arzelà-Ascoli gibt es daher eine Teilfolge, die für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ in C^k_{loc} gegen u konvergiert.

Falls nicht die gesamte Folge in C^k_{loc} gegen u konvergiert, gibt es $\Omega' \Subset \Omega$ und $\varepsilon > 0$, so dass für eine nicht umbenannte Teilfolge $\|u_l - u\|_{C^k(\Omega')} \ge \varepsilon$ gilt. Aufgrund der inneren Abschätzungen und Arzelà-Ascoli konvergiert aber auch eine Teilfolge dieser „Gegenbeispielfolge" in $C^k(\Omega')$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Wegen der C^0_{loc}-Konvergenz ist u auch der Grenzwert dieser Teilfolge. Dies widerspricht aber der Voraussetzung $\|u_l - u\|_{C^k(\Omega')} \ge \varepsilon$. Somit konvergiert bereits die gesamte Folge. □

2.2. C^0**-subharmonische Funktionen.**

Definition 2.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) $u \in C^2(\Omega)$ heißt
- harmonisch, falls $-\Delta u = 0$,
- subharmonisch, falls $-\Delta u \le 0$,
- superharmonisch, falls $-\Delta u \ge 0$.

(ii) $u \in C^0(\Omega)$ heißt
- subharmonisch, falls für jede Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ und jede harmonische Funktion $h : C^2(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ mit $u \le h$ auf $\partial B_r(x)$ auch $u \le h$ in $B_r(x)$ folgt.
- superharmonisch, falls $-u$ subharmonisch ist.
- harmonisch, falls u subharmonisch und superharmonisch ist.

Kurzfristig werden wir diese Eigenschaften mit C^2-subharmonisch und C^0-subharmonisch unterschiedlich bezeichnen.

Bemerkung 2.7.

(i) Eine C^2-subharmonische Funktion ist auch C^0-subharmonisch.

(ii) Eine C^0-subharmonische Funktion erfüllt die Mittelwerteigenschaften
$$u(x) \le \fint\limits_{B_r(x)} u,$$
$$u(x) \le \fint\limits_{\partial B_r(x)} u,$$
falls $B_r(x) \Subset \Omega$.

(iii) Die neue Definition harmonischer Funktionen ist äquivalent zu den bisherigen.

Beweis.

(i) Dies folgt direkt aus dem Maximumprinzip.

(ii) Sei $h \in C^\infty(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ C^2-harmonisch und $u = h$ auf $\partial B_r(x)$. Dann ist h durch die Poissonsche Darstellungsformel, siehe Theorem 1.27, gegeben und diese liefert $h(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} h$. Daher folgt
$$u(x) \le h(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} h = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u,$$
$$u(x) \int\limits_{\partial B_r(x)} 1 \le \int\limits_{\partial B_r(x)} u$$

und nach Integration von 0 bis r erhalten wir

$$u(x) \cdot |B_r(x)| \le \int\limits_{B_r(x)} u.$$

(iii) Es gilt: Ist eine Funktion C^0-harmonisch, so erfüllt sie die Mittelwerteigenschaft. Demnach ist sie von der Klasse C^2. Also ist sie auch C^2-harmonisch. Da schließlich eine C^2-harmonische Funktion aufgrund des Maximumprinzips auch C^0-harmonisch ist, sind alle diese Definitionen für harmonische Funktionen äquivalent.

□

Lemma 2.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei subharmonisch. (Wir spezifizieren hier nicht genauer, welche Definition von subharmonisch wir voraussetzen, da die Aussage insbesondere für C^0-subharmonische Funktionen gilt.)*

(i) Dann erfüllt u das starke Maximumprinzip in Ω, d. h. falls es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$ gibt, so ist u in der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

(ii) Seien $u, v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei Ω zusammenhängend, v superharmonisch und es gelte $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt entweder $u < v$ in Ω oder $u = v$ in Ω und beide Funktionen sind harmonisch.

Beweis.

(i) Benutze die Mittelwerteigenschaft.

(ii) u und $-v$ sind subharmonisch.

Da das Dirichletproblem auf $B_r(x)$ für stetige Randwerte eine Lösung $h \in C^\infty(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ besitzt, genügt es, in der Definition von C^0-harmonischen Funktionen, die harmonische Funktion mit $u = h$ auf $\partial B_r(x)$ zu betrachten.

Durch Addition der beiden harmonischen Fortsetzungen der Randwerte (die gleich der harmonischen Fortsetzung der Summe der Randwerte ist) sehen wir, dass $u - v$ subharmonisch ist. Es gilt $u - v = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir können nun den ersten Teil anwenden und erhalten die Behauptung.

□

Korollar 2.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$ erfülle eine der Mittelwerteigenschaften*

$$u(x) \le \fint\limits_{B_r(x)} u \quad \textit{oder} \quad u(x) \le \fint\limits_{\partial B_r(x)} u$$

für alle Kugeln $B_r(x) \Subset \Omega$. Dann ist u auch C^0-subharmonisch.

Beweis. Sei $B_r(x) \Subset \Omega$ und h die C^2-harmonische Fortsetzung der Randwerte $u|_{\partial B_r}$. $u - h$ erfüllt dieselbe Mittelwerteigenschaft wie u. Der Beweis von Lemma 2.8 (i) benutzt nur die Mittelwerteigenschaft. Somit erfüllt u das Maximumprinzip. Es folgt $u - h \le 0$ in $B_r(x)$. Also ist u auch C^0-subharmonisch. □

Bemerkung 2.10. Ist u eine C^0-subharmonische Funktion, so gilt aufgrund der Poissonschen Darstellungsformel auch die Mittelwertungleichung mit Sphären. Integrieren wir diese, so erhalten wir die Mittelwerteigenschaft für Kugeln. Daher sind diese drei Definitionen äquivalent.

Lemma 2.11 (Harmonische Ersetzung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und $B \Subset \Omega$ eine Kugel.*

Sei $\overline{u} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ die harmonische Funktion mit $\overline{u} = u$ auf ∂B.

Wir definieren die harmonische Ersetzung von u in B durch

$$U(x) := \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

Dann ist U in Ω (C^0-)subharmonisch.

Beweis. Sei $B' \Subset \Omega$ eine Kugel. Sei h harmonisch in B' und $U \le h$ auf $\partial B'$. Wir wollen nachweisen, dass $U \le h$ in B' gilt.

Die Funktion u ist subharmonisch. Somit gilt $u \le U$ in Ω (und insbesondere in B). Wir benutzen die Annahme $U \le h$ auf $\partial B'$ und erhalten $u \le U \le h$ auf $\partial B'$. Da u subharmonisch ist, erhalten wir $u \le h$ in B'. Nach Definition von U folgt also $U \le h$ in $B' \setminus B$. Insbesondere gilt daher $U \le h$ auf $\partial B \cap B'$ und somit $U \le h$ auf $\partial(B \cap B')$. h und U sind harmonische Funktionen, wir schließen also, dass $U \le h$ in $B \cap B'$ gilt. Insgesamt erhalten wir also $U \le h$ in B'. Also ist U subharmonisch. □

Lemma 2.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u_1, \ldots, u_N$ in Ω subharmonisch. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

in Ω subharmonisch.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition von „subharmonisch“. □

Definition 2.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Subfunktion oder Sublösung (für den Laplaceoperator $-\Delta$), wenn u subharmonisch ist und $u \le \varphi$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Superfunktionen sind analog definiert.

Bemerkung 2.14. Für gegebenes $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ sind Subfunktionen aufgrund des Maximumprinzips kleiner als Superfunktionen.

Sei $c_1 \ge \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$, dann ist $u(x) = c_1$ eine Superfunktion. Sei $c_2 \le \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$, dann ist $u(x) = c_2$ eine Subfunktion.

2.3. **Das Perronverfahren.**

Theorem 2.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sei*

$$S_\varphi := \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : u \text{ ist Subfunktion bezüglich } \varphi\right\}.$$

Definiere

$$u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x).$$

Dann ist u in Ω harmonisch.

Beweis. Aufgrund des Maximumprinzips erfüllt $v \in S_\varphi$ die Ungleichung $v \le \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$. Nach Lemma 2.12 und Bemerkung 2.14 brauchen wir nur Funktionen $v \in S_\varphi$ mit $v \ge \inf \varphi$ zu betrachten, da $\max\{v, \inf \varphi\} \in S_\varphi$ gilt. Diese C^0-Schranken erlauben es später, die inneren Abschätzungen für harmonische Funktionen zu verwenden.

Sei $y \in \Omega$ beliebig. Nach Definition von u existiert eine (von y abhängige) Folge v_i, $v_i \in S_\varphi$, so dass $v_i(y) \to u(y)$. Sei $R > 0$, so dass $B = \overline{B_R(y)} \Subset \Omega$. Sei V_i die harmonische Ersetzung von v_i bezüglich B wie in Lemma 2.11. Es gilt $V_i \in S_\varphi$. Die Funktion v_i ist subharmonisch. Also gilt $v_i \le V_i$. Nach Definition von u gilt also $V_i(y) \to u(y)$.

Die Funktionen V_i sind nun in B harmonisch und aufgrund der inneren Abschätzungen für Ableitungen harmonischer Funktionen konvergiert eine Teilfolge V_{i_k} auf jeder Kugel $B_\rho(y)$, $\rho < R$, gleichmäßig gegen eine in B harmonische Funktion v. Vergleiche dazu nochmals Theorem 2.2.

Nach Definition von u gilt daher $v \le u$. Es gilt auch $v(y) = u(y)$. Wir behaupten nun, dass in B sogar $u = v$ gilt: Angenommen es gibt ein $z \in B$ mit $v(z) < u(z)$. Dann gibt es $\overline{u} \in S_\varphi$, so dass $v(z) < \overline{u}(z)$. Definiere $w_k := \max\{\overline{u}, V_{i_k}\}$. Es gilt $w_k \in S_\varphi$. Bezeichne mit W_k die zugehörigen harmonischen Ersetzungen in B. Dann gilt

$$W_k \ge w_k \ge \underbrace{V_{i_k} \to v}_{\text{in } y}.$$

Wie oben existiert eine Teilfolge der W_k, die in B gegen eine harmonische Funktion w konvergiert. Dann gilt in B die Ungleichung $v \le w \le u$. Andererseits ist $v(y) = w(y) = u(y)$. Da v und w in B harmonische Funktionen sind, gilt aufgrund des Maximumprinzips $v = w$ in B. Dies ist ein Widerspruch, da

$$v(z) < \overline{u}(z) \le w_k(z) \le W_k(z) \to w(z) = v(z).$$

Somit gilt $u = v$ in B und u ist in Ω harmonisch. □

Bemerkung 2.16. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Existiert eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist u gerade die Perronlösung, die wir in Theorem 2.15 konstruiert haben.

I. a. ist nicht klar, ob die Perronlösung die Randbedingung erfüllt.

Beweis. Wir beweisen nur, dass u die Perronlösung ist. Es gilt $u \in S_\varphi$. Sei $w \in S_\varphi$. Dann folgt aufgrund des Maximumprinzips, dass $w \le u$ ist. Die Behauptung folgt. □

2.4. **Barrieren und Randwerte.** Mit Hilfe von Barrieren zeigen wir nun, dass die Perronlösung stetige Randwerte auf hinreichend regulären Gebieten tatsächlich annimmt.

Definition 2.17 (Barriere)**.** Sei $\xi \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, $w = w_\xi$, heißt Barriere für ξ relativ zu Ω, falls

(i) w in Ω superharmonisch ist,

(ii) $w(\xi) = 0$ und $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ gelten.

Bemerkung 2.18. Erfüllt w die Bedingungen von Definition 2.17 in einer Umgebung von ξ, so gibt es eine Barriere für ξ relativ zu Ω.

Beweis. Sei Definition 2.17 in $\Omega \cap B_r(\xi)$, $r > 0$, erfüllt. Sei $m := \inf\limits_{(B_r(\xi)\setminus B_{r/2}(\xi))\cap\Omega} w > 0$. Dann ist leicht einzusehen, dass
$$\overline{w}(x) := \begin{cases} \min\{m, w(x)\}, & x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(\xi), \\ m, & x \in \overline{\Omega} \setminus B_{r/2}(\xi) \end{cases}$$
eine Barriere für ξ relativ zu Ω ist. □

Die Existenz einer Barriere ist also eine lokale Eigenschaft des Randes. Definiere daher

Definition 2.19. Ein Randpunkt heißt regulär (bezüglich des Laplaceoperators), falls es eine Barriere zu diesem Punkt gibt.

Lemma 2.20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei u eine mittels Perronverfahren konstruierte Lösung, sei ξ ein regulärer Randpunkt von Ω und sei φ in ξ stetig. Dann gilt $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $M := \sup|\varphi|$. Sei w eine Barriere für ξ. Aufgrund der Stetigkeit von φ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ für $|x - \xi| < \delta$ gilt. Fixiere $k > 0$, so dass $kw(x) \ge 2M$ für $|x - \xi| \ge \delta$ gilt.

Nun ist $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ eine Superfunktion und $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ eine Subfunktion. Nach Definition von u gilt $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \le u(x)$. Da eine Superfunktion über einer Sublösung liegt, gilt auch $u(x) \le \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$. Insgesamt folgt also $|u(x) - \varphi(\xi)| \le \varepsilon + kw(x)$. Für $x \to \xi$ folgt $w(x) \to 0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir also $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$. □

Theorem 2.21. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist das Dirichletproblem*
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega, \\ u = \varphi & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
für beliebiges $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ genau dann in $C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ lösbar, wenn jeder Randpunkt regulär ist.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Sei jeder Randpunkt regulär. Dann können wir Lemma 2.20 anwenden und erhalten, dass die Perronlösung die Randbedingung erfüllt und bis zum Rand stetig ist.

„$\Longrightarrow$“: Die Lösung zu $\varphi(x) = |x - \xi|$ ist eine Barriere zu $\xi \in \partial\Omega$. □

Definition 2.22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann erfüllt Ω eine äußere Kugelbedingung, falls für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Kugel B existiert, so dass $\{x\} = \overline{B} \cap \overline{\Omega}$ gilt.

Ω erfüllt eine gleichmäßige Kugelbedingung, falls für alle $x \in \partial\Omega$ Kugeln mit gleichem Radius verwendet werden können.

Lemma 2.23. *Erfülle Ω in ξ eine äußere Kugelbedingung, $\{\xi\} = \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega}$. Dann ist*

$$w(x) := \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \log \frac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

eine Barriere für $\xi \in \partial\Omega$.

Beweis. Klar. □

2.5. Existenzsätze.

Theorem 2.24. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega, \\ u = \varphi & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Sei u die Perronlösung. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. □

Theorem 2.25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \textit{in } \Omega, \\ u = \varphi & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Beweis. Sei $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung zu

$$\Delta v = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

(v ist nicht eindeutig bestimmt, aber das macht nichts.) Sei $w \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung zu

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - v & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann löst $u := w + v$ das Randwertproblem (2.1). Die Eindeutigkeitsaussage folgt direkt aus dem Maximumprinzip. □

3. Eindeutigkeit

3.1. **Energiemethoden.** Die Aussage des folgenden Theorems ist nicht neu, sie folgt auch schon aus dem Maximumprinzip. Wir lernen hieran nur eine neue Methode kennen.

Theorem 3.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Dann besitzt das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega, \\ u = g & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung in $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Seien u, $\tilde{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ zwei Lösungen. Definiere $w := u - \tilde{u}$. Dann folgt

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Es folgt

$$0 = -\int\limits_\Omega w \cdot \Delta w = \int\limits_\Omega |Dw|^2.$$

Also gilt $Dw = 0$ in Ω. Somit ist w konstant. □

Später werden wir lernen, wie man das nun untersuchte Funktional in geeigneten Funktionenräumen tatsächlich minimieren kann.

Theorem 3.2 (Dirichletprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Definiere*

$$I[w] := \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf,$$

und

$$\mathcal{A} := \left\{w \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \,:\, w = g \textit{ auf } \partial\Omega\right\},$$

wobei $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^2(U(\partial\Omega))$, also in C^2 in einer Umgebung U von $\partial\Omega$.

Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{in } \Omega, \\ u = g & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dann gilt

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Ist umgedreht $u \in \mathcal{A}$ ein Minimierer für I,

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w],$$

so löst u das Randwertproblem (3.1)*.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei u eine Lösung zu (3.1) und sei $w \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt

$$0 = \int\limits_\Omega (-\Delta u - f)(u-w) = \int\limits_\Omega \langle Du, D(u-w)\rangle - f(u-w),$$

wobei wir partiell integrieren durften, da $u - w$ Randwerte Null hat. Es folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |Du|^2 - uf &= \int\limits_\Omega \langle Du, Dw\rangle - wf \\ &\le \int\limits_\Omega |Du| \cdot |Dw| - wf \\ &\le \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 + \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 - uf \le \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf.$$

Somit minimiert u das Funktional I in $\mathcal{A}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun u ein Minimum von I in $\mathcal{A}$. Wir leiten die Euler-Lagrange Gleichung des Funktionals I her. Sei dazu $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Definiere

$$i(\tau) := I[u + \tau v].$$

Für $\tau \in \mathbb{R}$ gilt $u + \tau v \in \mathcal{A}$. Somit hat i für $\tau = 0$ ein Minimum. Wir werden nun nachweisen, dass i in τ differenzierbar ist. Also folgt $i'(0) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}i(\tau) &= \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Du + \tau Dv|^2 - (u + \tau v)f \\ &= \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 + \tau\langle Du, Dv\rangle + \frac{1}{2}\tau^2|Dv|^2 - (u+\tau v)f\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}0 = i'(0) = {}& \left.\frac{d}{d\tau} i\right|_{\tau=0} = \text{“}\delta i\text{”} \\ = {}& \int\limits_\Omega \langle Du, Dv\rangle - vf = \int\limits_\Omega (-\Delta u - f)v.\end{aligned}$$

Dies gilt für beliebiges $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit folgt $-\Delta u = f$ in Ω. □

3.2. **Maximumprinzipien für elliptische Differentialgleichungen.** Wir folgen [6].

Definition 3.3. Sei $F\left(D^2u, Du, u, x\right) = 0$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sei $F \in C^1\left(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega\right)$.

(i) Dann heißt die Differentialgleichung elliptisch, falls

$$\left(a^{ij}\right) := \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right) > 0$$

im Sinne von Matrizen.

(ii) Ist F elliptisch, so heißt

$$\dot{u} - F\left(D^2 u, Du, u, x\right) = 0 \quad \text{parabolisch}$$

und

$$u_{tt} - F\left(D^2 u, Du, u, x\right) = 0 \quad \text{hyperbolisch.}$$

Beispiel 3.4. Für die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ erhalten wir $a^{ij} = \delta^{ij}$. Somit ist

- $\Delta u = 0$ elliptisch,
- $\dot{u} - \Delta u = 0$ parabolisch
- und $u_{tt} - \Delta u = 0$ hyperbolisch.

Bemerkung 3.5. Für dieses Kapitel wollen wir die folgenden Generalvoraussetzungen annehmen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Wir betrachten Differentialoperatoren der Form

$$\begin{aligned} Lu(x) &= a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + cu \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_i(x) + c(x) u(x), \end{aligned}$$

wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ gilt.

(ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |c(x)| \le K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$.

Ein Beispiel hierfür ist $Lu = \Delta u$.

Theorem 3.6. *Sei $c \equiv 0$ und erfülle u in Ω die Differentialungleichung $Lu \ge 0$, d. h.*

$$a^{ij} u_{ij} + b^i u_i \ge 0.$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Ein analoges Resultat erhält man für $Lu \le 0$ und das Infimum durch Betrachten von $-u$.

Beweis. Nehme zunächst an, dass
$$Lu > 0 \quad \text{in } \Omega$$
gilt. In einem inneren Maximum x_0 gilt
$$\begin{aligned} u_i(x_0) &= 0 \quad \text{für alle } i, \\ u_{ij}(x_0) &\le 0 \quad \text{im Sinne von Matrizen.} \end{aligned}$$
Hieraus folgt (diagonalisiere z. B. $u_{ij}(x_0)$)
$$Lu(x_0) = a^{ij}u_{ij} \le 0.$$
Widerspruch.

Sei nun $Lu \ge 0$. Definiere für $\alpha > 0$ die Funktion $v(x) = e^{\alpha x^1}$. Es gilt
$$Lv(x) = \big(\alpha^2 \underbrace{a^{11}(x)}_{\ge \lambda} + \alpha \underbrace{b^1(x)}_{|\cdot| \le K}\big) \cdot v(x).$$
Für $\alpha \gg 1$ hinreichend groß erhalten wir $Lv > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann folgt $L(u + \varepsilon v) > 0$. Somit folgt die Behauptung für $u + \varepsilon v$. Wir lassen nun $\varepsilon \searrow 0$ und erhalten die Behauptung für u. □

Korollar 3.7. *Seien $f \in C^0(\Omega)$ und $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ sowie $c \equiv 0$. Dann besitzt das Dirichletproblem*
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Wende das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. □

Korollar 3.8. *Sei $c \le 0$, $Lu \ge 0$ in Ω, $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ Dann gilt*
$$\sup_\Omega u^+ \le \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Beweis. Definiere $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. In Ω^+ gilt
$$a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \ge 0.$$
Somit folgt $\sup\limits_{\Omega^+} u \le \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. Sei ohne Einschränkung $\Omega^+ \ne \emptyset$. Wir erhalten
$$\sup_\Omega u^+ = \sup_{\Omega^+} u \le \max_{\partial\Omega^+} u \le \max_{\partial\Omega} u^+,$$
da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Omega) \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega)$. □

Theorem 3.9 (Starkes Maximumprinzip, E. Hopf)**.** *Sei $c \equiv 0$, $Lu \ge 0$. Sei Ω zusammenhängend. Nimmt u sein Maximum im Inneren von Ω an, so ist u konstant.*

Gilt $c \le 0$ und nimmt u sein nichtnegatives Maximum im Inneren von Ω an, so ist u konstant.

Der Beweis hiervon benutzt

Theorem 3.10 (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $c \le 0$, $Lu \ge 0$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und gelte*

(i) u ist in x_0 stetig,

(ii) $u(x_0) \ge 0$ falls $c \not\equiv 0$,

(iii) $u(x_0) > u(x)$ für $x \in \Omega$,

(iv) es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Dann gilt

$$\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle > 0,$$

falls diese Ableitung existiert.

Hier ist klar, dass $\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle \ge 0$ gilt.

Beweis von Theorem 3.10. Nehme an, dass $\partial B_R(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ ist. Sei $0 < \rho < R$. Betrachte im Annulus $B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}$ die Funktion

$$v(x) := e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2} \quad \text{für } \gamma \gg 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Lv(x) = &\left\{4\gamma^2 a^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\gamma a^{ij}\delta_{ij} - 2\gamma b^i(x_i - y_i) + c\right\} e^{-\gamma|x-y|^2} \\ &- ce^{-\gamma R^2}. \end{aligned}$$

Für fixiertes ρ und $\gamma \gg 1$ hinreichend groß erhalten wir $Lv \ge 0$ in $B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}$. Nach Voraussetzung gilt $u(x) - u(x_0) < 0$ für $x \in B_R(y) \subset \Omega$. Somit existiert $\varepsilon > 0$, so dass

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \le 0 \quad \text{für } x \in \partial B_\rho(y).$$

Auf $\partial B_R(y)$ gilt $v = 0$ und somit folgt dort ebenfalls $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \le 0$. Weiterhin gilt

$$L(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) \ge -c(x)u(x_0) \ge 0.$$

Korollar 3.8, angewandt auf den Annulus, liefert daher

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \le 0 \quad \text{für } x \in B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}.$$

Diese Funktion verschwindet in x_0. Also folgt in x_0, falls diese Ableitung existiert,

$$\langle D(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)), x_0 - y\rangle \ge 0 \quad \text{in } x = x_0.$$

Wir schließen, dass

$$\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle \ge -\varepsilon\langle Dv(x_0), x_0 - y\rangle = \varepsilon\left(2\gamma R^2 e^{-\gamma R^2}\right) > 0$$

gilt. Das Theorem folgt. □

Beweis von Theorem 3.9. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei u nicht konstant, nehme aber in Ω das Maximum m an. Sei $m \ge 0$, falls $c \not\equiv 0$ gilt. Definiere $\Omega' := \{x \in \Omega : u(x) < m\} \neq \emptyset$. Es ist $\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset$. Wähle $y \in \Omega'$ mit $d(y, \partial\Omega') < d(y, \partial\Omega)$. Sei $B_R(y)$ die größte Kugel in Ω' mit Mittelpunkt y, die noch in Ω' enthalten ist. Dann folgt $u(x_0) = m$ für ein $x_0 \in \partial B_R(y)$ und $u(x) < u(x_0)$ für $x \in \Omega'$. Wir wenden nun das Hopfsche Randpunktlemma, Theorem 3.10, an und erhalten $Du(x_0) \neq 0$. In x_0 nimmt aber u ein inneres Maximum an. Somit folgt dort $Du(x_0) = 0$. Wir erhalten einen Widerspruch und das Theorem folgt. ☐

4. Sobolevräume

4.1. **Definition und grundlegende Eigenschaften.** Wir folgen [2]. Weitere gute Übersichten zu Sobolevräumen und deren Umfeld vermitteln die Bücher von William Ziemer [9] und Robert Adams [1].

Bemerkung 4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ heißt Testfunktion. Sei $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i\varphi,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $u \in C^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega D^\alpha u\varphi$$

für alle Multiindices $|\alpha| \le k$.

Definition 4.2 (Schwache Ableitung)**.** Sei nun $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $v \in L^1_{\text{loc}}$ heißt α-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega v\varphi$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Wir schreiben $D^\alpha u = v$.

Lemma 4.3 (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)**.** *Seien $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt $v = \tilde{v}$.*

Zum Beweis benötigen wir das Lemma von Du Bois-Reymond. Wir folgen der Darstellung in [3]

Lemma 4.4 (Du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt*

$$\int\limits_\Omega f\varphi = 0$$

für alle Testfunktionen φ, so gilt $f = 0$ fast überall, $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt, $f \in L^1(\Omega)$ zu betrachten, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es gelten $|g| \le 1$ und $f \cdot g = |f|$. Da $g \in L^\infty(\Omega)$ ist, folgt auch $g \in L^2(\Omega)$. Somit existiert eine Folge $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_\varepsilon \to g$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Nach [8, Theorem 3.12] konvergiert nun eine (nicht umbenannte) Teilfolge der η_ε dann fast überall gegen g. Wir dürfen annehmen, dass die Folge η_ε durch Glättung entstanden ist. Somit gilt

$$\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty} \le 1.$$

Aufgrund des Satzes über dominerende Konvergenz folgt nun

$$0 = \int\limits_\Omega f \cdot \eta_\varepsilon \to \int\limits_\Omega f \cdot g = \int\limits_\Omega |f|.$$

Wir schließen also, dass fast überall $f = 0$ gilt und erhalten $f = 0$ in $L^1(\Omega)$. $\square$

Beweis von Lemma 4.3. Es gilt

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \tilde{v}\varphi$$

für alle Testfunktionen φ. Wir erhalten also

$$\int\limits_\Omega (v - \tilde{v})\varphi = 0$$

und somit aufgrund des Lemma von Du Bois-Reymond auch $v = \tilde{v}$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. $\square$

Beispiel 4.5. Sei $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

Dann ist v die schwache Ableitung von u.

Beweis. Sei φ eine Testfunktion

$$\begin{aligned} \int\limits_0^2 u\varphi' &= \int\limits_0^1 x\varphi' + \int\limits_1^2 \varphi' \\ &= -\int\limits_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= -\int\limits_0^1 \varphi \\ &= -\int\limits_0^2 v\varphi. \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 4.6. Sei $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann besitzt u keine Ableitung im schwachen Sinne.

Beweis. Nehme an, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$ wäre eine schwache Ableitung. Dann folgt für alle Testfunktionen φ

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\varphi &= \int_0^2 u\varphi' \\ &= \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi' \\ &= -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + 2\varphi(2) - 2\varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi - \varphi(1). \end{aligned}$$

Sei φ_m eine Folge von Testfunktionen mit $0 \le \varphi_m \le 1$, $\varphi_m(1) = 1$, $\varphi_m(x) \to 0$ für $x \neq 1$. Dann gilt für $m \to \infty$

$$\begin{array}{ccc} -\int_0^2 v\varphi_m & = & -\int_0^1 \varphi_m - \varphi_m(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 - 1 = -1. \end{array}$$

Daher kann es keine solche Funktion v geben. □

Definition 4.7.

(1) Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ im schwachen Sinn für alle } |\alpha| \le k \right\}.$$

(2) Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ sind, wie wir später sehen werden, Hilberträume.

(3) Für u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ schreiben wir $u = v$, falls $u = v$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, d. h., falls $u = v$ fast überall gilt.

(4) Wir definieren die folgende Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \infty, & u \notin W^{k,p}(\Omega), \\ \left(\sum\limits_{|\alpha| \le k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha| \le k} \sup\limits_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Hier benutzen wir das wesentliche Supremum. Mit dieser Norm wird der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. Dies beweisen wir später.

(5) $u \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt.

(6) Wir schreiben $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, falls
$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$
und $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls
$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$$
für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

(7) Wir definieren
$$W^{k,p}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$
Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C^\infty_c(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ auch $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \le k-1$. Diese Aussage ist nicht trivial, da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.

(8) $H^k_0(\Omega) = W^{k,2}_0(\Omega)$.

Beispiel 4.8. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,
$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \neq 0.$$
Für welche Werte von $\alpha > 0$, n und p gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Für $x \neq 0$ gilt
$$\begin{aligned} u_i(x) =& \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},\\ |Du(x)| =& \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$
Sei $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ eine Testfunktion und $\varepsilon > 0$. Es folgt
$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u\varphi_i = -\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u_i\varphi + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right).$$
Wir erhalten
$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right)\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} \le c \cdot \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$$
für $\varepsilon \downarrow 0$, falls $n - 1 - \alpha > 0$ gilt.

Es gelten die folgenden Integralabschätzungen
$$\int\limits_{B_1(0)} |Du| \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha-1+n-1} dr \le c,$$
falls $-\alpha - 1 + n > 0$ und
$$\int\limits_{B_1(0)} u \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha+n-1} dr \le c,$$

falls $-\alpha+n>0$ ist. Die entsprechenden Integrale werden klein, wenn wir nur über eine Umgebung des Ursprungs integrieren. Somit erhalten wir für $\varepsilon\downarrow 0$

$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i\varphi$$

für alle Testfunktionen φ. $u_i(0)$ ist frei wählbar. Aufgrund der Eindeutigkeit der Ableitung ist die schwache Ableitung außerhalb des Ursprungs gleich der klassischen Ableitung. Die obigen Rechnungen zeigen, dass u in ganz Ω schwach differenzierbar ist.

Wann sind u und $Du\in L^p$? Es gilt

$$\int\limits_{B_1(0)} |u|^p = c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha p+n-1} < \infty \Longleftrightarrow -\alpha p+n>0$$

und

$$\int\limits_{B_1(0)} |Du|^p = c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha p-p+n-1} < \infty \Longleftrightarrow -\alpha p-p+n>0.$$

Die letzte Bedingung ist am einschränkendsten. Somit gilt

$$u\in W^{1,p}(\Omega)\Longleftrightarrow \alpha<\frac{n-p}{p}$$

und für $p\ge n$ ist $u(x)$ in keinem $W^{1,p}(\Omega)$-Raum.

Bemerkung 4.9. Sei y_k eine dichte Folge in $B_1(0)$. Dann ist

$$u(x)=\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}|x-y_k|^{-\alpha}\in W^{1,p}(B_1(0)),$$

falls $\alpha<\frac{n-p}{p}$. (Um einfach nachzuweisen, dass nicht nur die endlichen Summen in $W^{1,p}(B_1(0))$ sind, benutzt man am besten die Vollständigkeit von $W^{1,p}(B_1(0))$, die wir in Theorem 4.11 zeigen werden.) Es ist also möglich, dass eine Funktion $u\in W^{1,p}$ auf einer dichten Teilmenge unbeschränkt wird (selbst wenn man u auf einer Nullmenge abändert).

Theorem 4.10 (Eigenschaften schwacher Ableitungen)**.** *Seien $u,\ v\in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gelten*

(1) $D^\alpha u\in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ und $D^\beta\left(D^\alpha u\right)=D^\alpha\left(D^\beta u\right)=D^{\alpha+\beta}u$ für $|\alpha|+|\beta|\le k$.

(2) $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}\Longrightarrow \lambda u+\mu v\in W^{k,p}(\Omega)$ und $D^\alpha(\lambda u+\mu v)=\lambda D^\alpha u+\mu D^\alpha v$.

(3) Ist $\Omega'\subset\Omega$ offen, so folgt $u\in W^{k,p}(\Omega')$.

(4) Ist $\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$, so folgt $\zeta u\in W^{k,p}(\Omega)$ und es gilt die Leibnizregel

$$D^\alpha(\zeta u)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta\zeta D^{\alpha-\beta}u,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

ist und $\alpha!:=\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!$.

Beweis. (1) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist auch $D^\beta\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega D^\alpha u D^\beta \varphi =&(-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta}\varphi\\ =&(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}\int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta}u\varphi\\ =&(-1)^{|\beta|}\int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta}u\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^{\alpha+\beta}$ im schwachen Sinne.

(2) Ist klar.

(3) Ist klar.

(4) Seien $|\alpha| = 1$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \zeta u D^\alpha \varphi =& \int\limits_\Omega u D^\alpha(\zeta\varphi) - \int\limits_\Omega u\left(D^\alpha\zeta\right)\varphi\\ =&-\int\limits_\Omega D^\alpha u\zeta\varphi - \int\limits_\Omega u\left(D^\alpha\zeta\right)\varphi\\ =&-\int\limits_\Omega \left(\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right)\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt nun

$$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta.$$

Der Rest folgt nun per Induktion wie für klassisch differenzierbare Funktionen.

$\square$

Theorem 4.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.*

Bemerkung 4.12. Dies ist für $k = 0$ bekannt. Dann gilt nämlich $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Beweis von Theorem 4.11.

- Wir wollen zunächst zeigen, dass $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm ist: Es ist nur die Dreiecksungleichung im Falle $p < \infty$ nachzuweisen. Seien also u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} =& \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}\\ \le& \left(\sum_{|\alpha|\le k}\left(\|D^\alpha u\|_{L^p} + \|D^\alpha v\|_{L^p}\right)^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

da die Dreiecksungleichung in L^p gilt,

$$\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p\right)^{1/p},$$

da $\left(\mathbb{R}^l, \|\cdot\|_{l^p}\right)$ ein Banachraum ist.

$$=\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

- Zur Vollständigkeit: Sei u_m eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist auch $D^\alpha u$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq k$. Somit existiert für alle α mit $|\alpha| \leq k$ ein Grenzwert,

$$\begin{aligned} D^\alpha u_m &\to u_\alpha, \\ u_m &\to u. \end{aligned}$$

Es fehlt nun noch der Nachweis, dass die Grenzwertbildung mit dem Ableiten vertauscht, also dass $u_\alpha = D^\alpha u$ gilt. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{tikzcd} \int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] \arrow[d] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \varphi \arrow[d] \\ \int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha \varphi. \end{tikzcd}$$

Die Konvergenz folgt hier, da φ in jedem L^q-Raum ist. Somit ist $D^\alpha u = u_\alpha$ und es gilt $u_m \to u \in W^{k,p}(\Omega)$.

□

4.2. **Approximierbarkeit.** In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}$-Norm approximieren.

Theorem 4.13 (Lokale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.**
Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

und es gilt

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Die Regularitätsaussage ist bekannt. Sei also $|\alpha| \leq k$. Wir behaupten, dass

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

gilt, dass also Glätten und schwaches Ableiten kommutieren. Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = D^\alpha \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy,
\end{aligned}
$$

da $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ für festes $x \in \Omega_\varepsilon$ eine Testfunktion ist. Somit folgt

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x).$$

Sei nun $\Omega' \Subset \Omega$. Da die Mollifizierungen in L^p konvergieren, erhalten wir

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega').$$

Also konvergiert jeder Bestandteil der Norm und es gilt auch

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega').$$

□

Bemerkung 4.14. Dies funktioniert im Falle $p = \infty$ nicht, da sich L^∞-Funktionen i. a. aufgrund ihrer Sprungstellen nicht durch glatte Funktionen in L^∞ approximieren lassen.

Theorem 4.15 (Globale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweisskizze.

(1) Zerlege mit Hilfe von Abschneidefunktionen u in Anteile auf „Zwiebelschalen". Betrachte also $u\eta_i$ statt u, wobei (η_i) eine Zerlegung der Eins ist, wobei die Träger dieser Funktionen jeweils in einer festen Anzahl benachbarter Zwiebelschalen enthalten sind.

(2) Approximiere dort bis auf einen Fehler $\frac{\delta}{2^{i+1}}$ in der $W^{k,p}$-Norm, so dass der Träger der Approximation maximal in zwei zusätzliche benachbarte Schichten reicht.

(3) Die Summe der Approximationen ist lokal endlich und daher in C^∞. Auf $\Omega' \Subset \Omega$ schätzt man den Fehler in der Approximation mit Hilfe der Dreiecksungleichung gleichmäßig in Ω' nach oben durch δ ab. Lasse nun $\Omega' \nearrow \Omega$ und erhalte eine bis auf $\delta > 0$ approximierende Funktion.

(4) Verwende nun $\delta > 0$ als Folgenindex.

□

Bemerkung 4.16. Wir benötigen keine Randregularität von Ω und bekommen dafür nur $u_m \in C^\infty(\Omega)$ und nicht $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 4.17 (Globale Approximierbarkeit in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass*

$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis.

(1) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert (nach Umbenennen der Koordinatenachsen) eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1, so dass

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x^n > \gamma(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$$

gilt. Definiere $V := \Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.

(2) Definiere für $x \in V$ und $\varepsilon > 0$ den Punkt $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert ein $\lambda = \lambda(|D\gamma|) \gg 1$, so dass $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x_0)$ gilt, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Definiere $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für $x \in V$, die um $\lambda\varepsilon$ in Richtung e_n verschobene Funktion. Mollifiziere und definiere $v^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Dies ist für $\lambda \gg 1$ in der Menge V wohldefiniert. Wir erhalten insbesondere $v^\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{V}\right)$.

(3) Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Wie in Theorem 4.13 sehen wir, dass $D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon \to 0$ in L^p gilt. Weiterhin gilt $D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u \to 0$ in L^p, da Translationen in L^p stetig sind. Hieraus folgt dann $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

Wir wollen noch genauer begründen, warum Translationen in L^p für $1 \le p < \infty$ stetige Abbildungen sind. Seien also $\delta > 0$ und $u \in L^p$ vorgegeben. Wir wollen nachweisen, dass $u(\cdot) - u(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p gilt. Approximiere dazu zunächst die Funktion u bis auf $\delta/3$ in L^p durch eine glatte Funktion. Das Ergebnis, $\tilde{u}$, hat einen beschränkten Gradienten, wobei die Schranke von der Approximation abhängt. Dies funktioniert so nur auf beschränkten Gebieten. Auf unbeschränkten Gebieten sind aber die Beiträge zum L^p-Integral außerhalb einer großen Kugel ohnehin klein und können direkt abgeschätzt werden. Da Translationen für Funktionen mit beschränktem Gradienten in L^p stetig sind, erhalten wir $\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p. Wir wählen nun $|h|$ so klein, dass auch diese Differenz durch $\delta/3$ beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\|u(\cdot) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \le& \|u(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_{L^p} + \|\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h)\|_{L^p} \\ &+ \|\tilde{u}(\cdot - h) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \\ \le& \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.\end{aligned}$$

(4) Sei nun $\delta > 0$. Da Ω beschränkt ist, existieren endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und Radien $r_i > 0$, so dass $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$ wie in (1) ist und $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r_i/2}(x_i^0)$ gilt. Wie oben gezeigt, gibt es also $v_i \in C^\infty\left(\overline{V}_i\right)$ mit

$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \le \delta$. Wähle noch $V_0 \Subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N} V_i$ gilt. Nach Theorem 4.13 gibt es $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V}_0\right)$ mit $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \le \delta$.

(5) Sei nun ζ_i eine den Mengen V_i untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Definiere $v := \sum\limits_{i=0}^{N} \zeta_i v_i$. Es gilt $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} =& \left\| \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i u) \right\|_{L^p(\Omega)} \\
\le& \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\
\le& c \cdot \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\
\le& c \cdot (N+1)\delta,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass die Ableitungen der Funktionen ζ_i gleichmäßig beschränkt sind. Die Behauptung folgt.

□

4.3. **Fortsetzbarkeitssätze.**
In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ als $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, so dass deren Norm durch die ursprüngliche Norm abgeschätzt bleibt.

Theorem 4.18 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \Subset V$. Dann gibt es eine beschränkte lineare Abbildung*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$

so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgendes gilt

- *$Eu = u$ fast überall in Ω,*
- supp$(Eu) \subset V$*,*
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(p, \Omega, V) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Die Funktion Eu heißt Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis.

(1) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Nehme zunächst an, dass lokal $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Dann gibt es $r > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
B^+ :=& B_r(x_0) \cap \{x^n \ge 0\} \subset \overline{\Omega}, \\
B^- :=& B_r(x_0) \cap \{x^n \le 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.
\end{aligned}$$

(2) Nehme zunächst an, dass $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Definiere eine Spiegelung von höherer Ordnung durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) + 4u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\frac{1}{2}x^n\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

(3) Wir behaupten zunächst, dass $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$ ist. Definiere dazu $u^- := \overline{u}|_{B^-}$ und $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Für die Normalableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial u^-}{\partial x^n} = 3\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\tfrac{1}{2}x^n\right).$$

Somit gilt auf $\{x^n = 0\}$ für die Normalenableitungen $u^-_{x^n} = u^+_{x^n}$. Auf der Menge $\{x^n = 0\}$ stimmen die Funktionswerte von u^+ und u^- und damit auch die Tangentialableitungen überein. Somit ist $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$.

(4) Es gilt

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B_r(x_0))} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

da in der Definition der Spiegelung höherer Ordnung nie weiter als bisher von $\{x^n = 0\}$ entfernt ausgewertet wird. Da die Spiegelung eine Linearkombination von $W^{1,p}$-Funktionen ist und da das neue Argument die Norm höchstens um eine Konstante vergrößert, folgt die Behauptung.

(5) Ist der Rand nicht eben/flach, so biegt man den Rand zunächst flach, setzt dann fort und transformiert anschließend zurück.

(6) Da sich der Rand nicht mit einer solchen Umgebung überdecken läßt, zerlegt man die Funktion zunächst mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und baut das Resultat anschließend wieder zusammen.

(7) Durch Multiplikation mit einer Abschneidefunktion stellt man sicher, dass der Träger der fortgesetzten Funktion nicht zu groß wird.

(8) Wir erhalten also die Abschätzung

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Die Details zu den letzten Schritten sind eine Übung.

(9) Seien nun $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir approximieren u durch Funktionen $u_m \in C^\infty(\overline{u})$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Die Abbildung $v \mapsto Ev := \overline{v}$ ist ein linearer Operator. Die Stetigkeit folgt dabei aus der obigen Abschätzung für glatte Funktionen. Diese Abschätzung liefert aber auch

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Eu_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun $\overline{u} = Eu$ als den Grenzwert dieser Folge. Eu ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig und die gesuchte Fortsetzung.

(10) Der Fall $p = \infty$ ist ebenfalls eine Übung.

□

Bemerkung 4.19. Für $\partial\Omega \in C^2$ funktioniert die obige Konstruktion auch noch für $W^{2,p}(\Omega)$-Funktionen. Dabei bleibt eine C^2-Funktion jedoch nicht in dieser Klasse. Mit Hilfe von Spiegelungen höherer Ordnung kann man analog aber auch Fortsetzungsoperatoren für die Räume $W^{k,p}$ konstruieren. Dies bleibt als Übung.

4.4. **Spuren von Sobolevfunktionen.** Wir wollen Randwerte von $W^{1,p}$-Funktionen definieren. Diese Funktionen sind i. a. nicht stetig und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

Sei Ω beschränkt. Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < \infty$, so besitzt u Randwerte als L^p-Funktion.

Theorem 4.20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ ist und

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c(p, \Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt.

Beweis.

(1) Nehme zunächst an, dass $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist, dass $\partial\Omega$ in der Nähe eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ flach ist, lokal also $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Wähle nun $r > 0$ so, dass $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap \{x^n > 0\}$ gilt. Definiere $\hat{B} := B_{r/2}(x_0)$ und $B := B_r(x_0)$. Setze weiterhin $\Gamma := \partial\Omega \cap \{x^n = 0\} \cap \hat{B}$ und $(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x^n = 0\}$, wobei das letzte Gleichheitszeichen die Identifikation der beiden Mengen andeutet.

Sei $\zeta \in C_c^\infty(B)$, $\zeta \ge 0$ und $\zeta = 1$ in $\hat{B}$. Setze $B^+ := B \cap \Omega$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma |u|^p d\hat{x} \le & \int\limits_{\{x^n=0\}} \zeta \cdot |u|^p d\hat{x} \\ = & -\int\limits_{B^+} \left(\zeta |u|^p\right)_{x^n} dx \text{ (Hauptsatz)} \\ \le & \int\limits_{B^+} |D\zeta| \cdot |u|^p + p|u|^{p-1}|Du|\zeta \\ \le & c \cdot \int\limits_{B^+} |u|^p + |Du|^p \quad \left(\text{Young, } \tfrac{p-1}{p} + \tfrac{1}{p} = 1\right).\end{aligned}$$

(2) Für ein allgemeines C^1-Gebiet Ω, eine kleine Umgebung Γ von $x_0 \in \partial\Omega$ in $\partial\Omega$ erhält man durch Aufbiegen ebenfalls

$$\int\limits_\Gamma |u|^p \le c \cdot \int\limits_\Omega |u|^p + |Du|^p.$$

(3) Überdecke nun $\partial\Omega$ mit solchen Randstücken Γ, zerlege mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und erhalte
$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$
falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Definiere $Tu := u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Es folgt
$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$
falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Wir bemerken, dass T ein linearer Operator ist.

(4) Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Sei $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ eine approximierende Folge, also $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir erhalten
$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$
Daher ist Tu_m eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega)$. Wir definieren also
$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m \text{ in } L^p(\partial\Omega).$$
Diese Definition ist unabhängig von der approximierenden Folge u_m.

(5) Sei schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Die in Theorem 4.17 konstruierte Folge ist so definiert, dass sie in diesem Falle auf ganz $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen u konvergiert. Daher folgt hier $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Da der Grenzwert aber von der approximierenden Folge unabhängig ist, gilt dies auch, wenn man andere approximierende Folgen verwendet.

$\square$

Theorem 4.21. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*
$$u \in W^{1,p}_0(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beweis.

"$\Longrightarrow$": Sei zunächst $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. Dann gibt es nach Definition der $W^{1,p}_0(\Omega)$-Funktionen eine Folge von Funktionen $u_m \in C^\infty_c(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für alle Folgenglieder gilt $Tu_m = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ein stetiger linearer Operator ist, folgt auch $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.

"$\Longleftarrow$": Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir benutzen eine Zerlegung der Eins und biegen den Rand $\partial\Omega$ lokal auf. Daher dürfen wir annehmen, dass $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \equiv W^{1,p}(\{x^n > 0\})$, $\operatorname{supp} u \Subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$ und $Tu = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ gelten. Wir wollen nachweisen, dass sich u in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ durch $C^\infty_c\left(\mathbb{R}^n_+\right)$-Funktionen approximieren läßt. Es gilt $Tu = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$. Daher gibt es $u_m \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, so dass
$$u_m \to u \text{ in } W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right),$$
$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ in } L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right).$$
Sei nun $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x^n \ge 0$. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir
$$|u_m(\hat{x}, x^n)| \le |u_m(\hat{x}, 0)| + \int_0^{x^n} |u_{m,x^n}(\hat{x}, t)| dt.$$

Wir betrachten die p-te Potenz dieser Ungleichung und schätzen mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit den Exponenten p und $\frac{p}{p-1}$ ab

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, x^n)|^p d\hat{x} \le & c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ & + c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_0^{x^n} 1 \cdot |Du(\hat{x}, t)| dt \right)^p d\hat{x} \\ \le & c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ & + c(p) \cdot (x^n)^{p-1} \cdot \int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(\hat{x}, t)|^p d\hat{x}\, dt.\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ gilt $u_m \to 0$ in $L^p\left(\partial \mathbb{R}^n_+\right)$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Daher folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p \, d\hat{x} \le c(p) t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau.$$

Wir integrieren dies bezüglich t und erhalten

$$\int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p \, d\hat{x}\, dt \le c(p) \int\limits_0^{x^n} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau\, dt. \tag{4.1}$$

Definiere nun die approximierenden Funktionen mit Randwerten Null. Sei $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $0 \le \zeta \le 1$ und

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } [0,1], \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \setminus [0,2]. \end{cases}$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$ Funktionen

$$\zeta_m(x) := \zeta(m x^n)$$

und

$$w_m(x) := u(x)(1 - \zeta_m).$$

Es folgt

$$w_{m,x^n} = u_{x^n}(1 - \zeta_m) - m u \zeta'$$

und

$$D_{\hat{x}} w_m = D_{\hat{x}} u (1 - \zeta_m).$$

Zeige nun, dass $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ konvergiert. Es gilt $w_m \to u$ in L^p aufgrund der Stetigkeit des Integrals bezüglich des Integrationsgebietes. Wir schätzen wie folgt ab

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \le c(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p + c(p, \zeta) m^p \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \equiv A + B.$$

Wir benutzen nochmals die Stetigkeit bezüglich des Integrationsgebietes (oder den Satz von der dominierenden Konvergenz mit entsprechend "abgeschnittenen" Funktionen) und erhalten $A \to 0$ für $m \to \infty$. Das zweite Integral schätzen wir mit Hilfe von (4.1) ab

$$\begin{aligned}
B \le & c \cdot m^p \int\limits_0^{2/m} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x} d\tau dt \\
\le & c \cdot m^p \left(\int\limits_0^{2/m} t^{p-1} dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \right) \\
\le & c \cdot \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \\
\to & 0
\end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Wir erhalten also $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Andererseits gilt $w_m = 0$ für $0 < x^n < 1/m$. Daher erhält man durch Mollifizierung der w_m eine Folge $u_m \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ und es gilt (wie behauptet) $u \in W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. □

4.5. **Sobolevungleichungen und Einbettungssätze.** Sobolevräume betten in andere Funktionenräume ein. Diese Einbettungen

$$\left(W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow ?\right)$$

unterscheiden sich, je nachdem, ob

- $1 \le p < n$,
- $p = n$ oder
- $n < p \le \infty$

gilt. Es genügt, die entsprechenden Abschätzungen für glatte Funktionen zu beweisen, da diese dicht in den entsprechenden Sobolevfunktionen liegen.

4.6. **Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung.**

Definition 4.22. Sei $1 \le p < n$. Der zu p konjugierte Sobolevexponent ist $p^* = \frac{np}{n-p}$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Es gilt $p^* > p$.

Theorem 4.23 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung)**.** *Sei $1 \le p < n$. Dann gibt es eine Konstante c, die nur von p und n abhängt, so dass*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ gilt.

Bemerkung 4.24. Aufgrund des Skalierungsverhaltens der Ungleichung bei einer Funktionenfamilie der Form $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ sieht man (Übung), dass solch eine Ungleichung nur für den hier angegebenen Wert von p^* richtig sein kann.

Beweis von Theorem 4.23. Sei zunächst $p = 1$. Da u kompakten Träger hat, folgt für festes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x^i} u_i\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, y^i, x^{i+1}, \ldots, x^n\right) dy^i.$$

Wir schließen hieraus zunächst, dass

$$|u(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|Du\left(x^1, \ldots, y^i, \ldots, x^n\right)\right| dy^i$$

gilt und erhalten somit auch

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du(x^1, \ldots, y^i, \ldots, x^n)| dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Diese Ungleichung integrieren wir nun bezüglich der Variablen x^1

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx^1 \le{}& \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx^1 \\
={}& \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx^1 \\
& \text{da im ersten Faktor nun keine } x^1\text{-Abhängigkeit mehr vorliegt} \\
\le{}& \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

aufgrund der verallgemeinerten Hölderschen Ungleichung, angewandt auf den zweiten Faktor für die Variable x^1.

Wir fahren nun analog zu dieser Rechnung fort. Zunächst integrieren wir bezüglich x^2, ziehen wieder einen Faktor, in dem kein x^2 vorkommt, nach vorne und verwenden dann für den Rest wiederum die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx^1\, dx^2 \le{}& \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \\
& \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy^1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=3}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dx^1\, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx^2
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx^1 \, dy^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy^1 \, dx^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx^1 \, dx^2 \, dy^i \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Per Induktion erhält man hieraus durch weitere Integrationen die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx^1 \ldots dy^i \ldots dx^n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| \right)^{\frac{n}{n-1}} . \end{aligned}$$

Dies ist gerade die behauptete Ungleichung im Falle $p = 1$

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Sei nun $1 < p < n$ beliebig. Für $\gamma > 1$ ist (wie man leicht direkt nachrechnet) mit u auch $|u|^\gamma \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Aus der obigen Ungleichung im Falle $p = 1$ erhalten wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung $\left(\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1\right)$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma| \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma \cdot |u|^{\gamma-1} |Du| \\ &\leq \gamma \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Wir wählen nun γ so, dass die Exponenten in den Integralen mit $|u|$ übereinstimmen, also so dass

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1}$$

gilt. Dies ist der Fall für

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1.$$

Mit dieser Wahl von γ gilt dann auch

$$\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{pn}{n-p} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1} = p^*$$

und

$$\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{np - p - np + n}{pn} = \frac{n-p}{pn} = \frac{1}{p^*}.$$

Wir erhalten somit die behauptete Ungleichung

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\right)^{1/p^*} \le \frac{p(n-1)}{n-p} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\right)^{1/p}.$$

□

Theorem 4.25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $1 \le p < n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $u \in L^{p^*}(\Omega)$ und*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit $c = c(p, n, \Omega)$.

Beweis. Sei $\overline{u}$ eine $W^{1,p}$-Fortsetzung von u mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$,

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Da $\overline{u}$ kompakten Träger hat, gibt es Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$u_m \to \overline{u} \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ konvergiert.}$$

Nach Theorem 4.23 folgt somit

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da u_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}$ ist, ist auch u_m eine Cauchyfolge in L^{p^*} und es gilt $u_m \to v \in L^{p^*}$ für ein $v \in L^{p^*}$. Da aber beide Konvergenzen auch L^1_{loc}-Konvergenz implizieren, stimmen die Grenzwerte überein und es gilt somit $u_m \to \overline{u}$ auch in L^{p^*}. Wir wenden nun nochmals Theorem 4.23 an und erhalten

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Gehen wir hierbei zum Grenzwert über, so erhalten wir die mittlere Ungleichung in der folgenden Ungleichungskette. Die erste Ungleichung folgt aufgrund der Inklusion der beteiligten Gebiete und die letzte Ungleichung ist eine Konsequenz der Fortsetzungseigenschaft von Ω. Insgesamt ergibt sich also

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le \|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

was gerade die Behauptung des Theorems ergibt. □

Einen solchen Einbettungssatz bekommen wir auch, wenn das Gebiet nicht von der Klasse C^1 ist, die Sobolevfunktion dafür aber Randwerte Null hat.

Theorem 4.26 (Poincaréungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $1 \le p < n$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für beliebiges $q \in [1, p^*]$, wobei $c = c(p, q, n, \Omega)$.

Beweis. Da $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ist, gibt es Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, die in $W^{1,p}(\Omega)$ gegen u konvergieren. Setze diese durch Null nach $\mathbb{R}^n$ fort. Benutze Theorem 4.23 und lasse $m \to \infty$. Es folgt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Da $|\Omega|$ beschränkt ist, bekommen wir aufgrund der Hölderschen Ungleichung eine Schachtelung der L^p-Räume und wir erhalten

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

für $1 \leq q \leq p^*$. □

Korollar 4.27. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \leq p < n$. Dann sind auf $W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{und} \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

äquivalente Normen.

4.7. **Hölderräume.**

Definition 4.28. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Wir definieren für $0 < \alpha < 1$ die Hölderhalbnorm

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Im Fall $\alpha = 1$ erhalten wir lipschitzstetige Funktionen.

Wir definieren die Höldernorm

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Der Hölderraum $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, besteht aus allen Funktionen $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, für die die Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\beta| \leq k} \left\|D^\beta u\right\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta| = k} \left[D^\beta u\right]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

endlich ist.

Bemerkung 4.29. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Die Räume $C^{k,\alpha}$ sind Banachräume. Für $0 < \alpha < 1$ ist $C^{0,\alpha}$ nicht separabel, da eindimensional die Funktionen $u_i(x) = |x - x_i|^\alpha$ einen Abstand in $C^{0,\alpha}$ haben, der für $x_i \to x_j$ nicht gegen Null konvergiert.

4.8. **Morreyungleichung.**

Theorem 4.30 (Morrey)**.** *Sei $n < p < \infty$. Dann gibt es $c = c(p,n)$, so dass*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ggf. mit unendlicher rechter Seite, gilt, wobei $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ ist.

Beweis.

(1) Fixiere eine Kugel $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$. Wir behaupten zunächst, dass es eine Konstante $c = c(n)$ gibt, so dass

$$\fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\, dy \leq c \cdot \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy.$$

Dies sieht man wie folgt ein: Fixiere $w \in \partial B_1(0)$. Dann gilt für $0 < s < r$

$$\begin{aligned}|u(x+sw)-u(x)| &= \left|\int_0^s \frac{d}{dt}u(x+tw)\,dt\right|\\ &= \left|\int_0^s \langle Du(x+tw), w\rangle\,dt\right|\\ &\le \int_0^s |Du(x+tw)|\,dt.\end{aligned}$$

Integriere dies bezüglich w über die Sphäre und erhalte

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,dw \le \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |Du(x+tw)|\,dw\,dt.$$

Setze nun $y := x + tw$. Dann gilt $t = |x-y|$ und es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,dw &\le \int_0^s t^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dw\,dt\\ &= \int_{B_s(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\\ &\le \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy,\end{aligned}$$

da $0 < s < r$ ist. Wir multiplizieren diese Ungleichung nun mit s^{n-1}, integrieren über s von 0 bis r und erhalten wie behauptet die Ungleichung

$$\int_{B_r(x)} |u(y)-u(x)|\,dy \le \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

(2) Fixiere nun $x \in \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der soeben gewonnenen Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}|u(x)| = &\fint_{B_1(x)} |u(x)|\,dy\\ \le &\fint_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,dy + \fint_{B_1(x)} |u(y)|\,dy\\ \le &c \cdot \int_{B_1(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy + c\cdot \|u\|_{L^p(B_1(x))}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + c \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

wobei wir für die letzte Ungleichung die folgende Integralabschätzung verwendet haben

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dy &= c \cdot \int_0^1 r^{n-1} r^{-(n-1)\frac{p}{p-1}} dr \\
&= c \cdot r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \Big|_0^1 < \infty,
\end{aligned}
$$

da $n > (n-1)\frac{p}{p-1}$ genau dann gilt, wenn $p > n$ ist. Somit folgt

$$
\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.
$$

(3) Seien nun $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $r := |x-y|$. Wir definieren $W := B_r(x) \cap B_r(y)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &= \fint_W |u(x) - u(y)| dz \\
&\leq \fint_W |u(x) - u(z)| dz + \fint_W |u(y) - u(z)| dz.
\end{aligned}
$$

Wir benutzen nun wiederum den ersten Teil des Beweises und erhalten

$$
\begin{aligned}
\fint_W |u(x) - u(z)| dz &\leq c \cdot \fint_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| dz \\
&\leq c \cdot \int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \\
&\leq c \cdot \left(\int_{B_r(x)} |Du|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{B_r(x)} \frac{1}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dz \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq c \cdot \left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Analog folgt

$$
\fint_W |u(y) - u(z)| dz \leq c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$
|u(x) - u(y)| \leq c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
$$

$$=c \cdot |x-y|^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Für den noch nicht abgeschätzten Anteil der Höldernorm folgt also

$$\begin{aligned}[u]_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \equiv& \sup_{x \neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \\ \leq& c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

und es ergibt sich die Behauptung des Theorems.

□

Bemerkung 4.31. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt für $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ auch noch

$$\|u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Durch leichte Modifikation des Beweises bekommt man

$$|u(y)-u(x)| \leq c \cdot r^{1-\frac{n}{p}} \cdot \left(\int\limits_{B_{2r}(x)} |Du|^p \right)^{1/p}$$

für $u \in C^1(B_{2r}(x))$, $y \in B_r(x)$ und $n < p < \infty$. Wählen wir nun jeweils einen stetigen Repräsentanten der hier auftretenden Funktionen so folgt die letzte Ungleichung durch Approximation auch noch für $u \in W^{1,p}(B_{2r}(x))$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 4.32. Durch Approximation beweist man, dass die Morreysche Ungleichung auch noch für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dabei ist zu beachten, dass die Morreysche Ungleichung gleichmäßige Hölderschranken für die Funktionen der approximierenden Folge liefert. Daher können wir auch für den Grenzwert u einen Hölderstetigen Repräsentanten wählen. In Zukunft werden wir stets diesen Repräsentanten betrachen.

Theorem 4.33. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $n < p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann besitzt u einen stetigen Repräsentanten, $u^* \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, und es gilt*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit $c = c(p, n, \Omega)$.

Beweis. Der Beweis benutzt den Morreyschen Einbettungssatz genauso, wie im Beweis von Theorem 4.25 der Sobolevsche Einbettungssatz, Theorem 4.23, eingeht. Details: Übungsaufgabe. □

Für Funktionen, die schwache Ableitungen höherer Ordnung besitzen, erhält man den folgenden Einbettungssatz. Zum Beweis wendet man einfach solange den Sobolevschen oder Morreyschen Einbettungssatz an, bis dies nicht mehr möglich ist.

Theorem 4.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(1) *Falls $k < \frac{n}{p}$ gilt, dann ist $u \in L^q(\Omega)$ mit*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}},$$

wobei $c = c(k, p, n, \Omega)$ ist.

(2) *Falls $k > \frac{n}{p}$ gilt, so ist*

$$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right),$$

wobei

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ < 1 \text{ (beliebig)}, & \frac{n}{p} \in \mathbb{N}, \end{cases},$$

und es gilt

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq c(k, p, n, \gamma, \Omega) \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Beweis.

(1) Sei $k < \frac{n}{p}$. Nach Definition gilt $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ für $|\alpha| \leq k$. Aufgrund der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung erhalten wir

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \text{ für } |\beta| \leq k - 1.$$

Somit ist

$$u \in W^{k-1,p^*}(\Omega) \text{ mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

und

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Analog folgt

$$\|u\|_{W^{k-2,(p^*)^*}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \text{ mit } \frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}.$$

Die Behauptung folgt nun per Induktion.

(2) Sei $k > \frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$. Wie im ersten Teil erhalten wir

$$\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

für $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$, falls $lp < n$ ist. Wähle l maximal, so dass dies erfüllt ist, d. h.

$$l < \frac{n}{p} < l + 1, \quad l = \left[\frac{n}{p}\right].$$

Man überprüft direkt, dass

$$r = \frac{pn}{n - pl} > n$$

ist. Nun können wir die Morreysche Ungleichung anwenden und erhalten

$$D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{r}}\left(\overline{\Omega}\right)$$

für $|\alpha| \le k - l - 1$. Es gilt nach Definition von r

$$1 - \frac{n}{r} = 1 - \frac{n}{p} + l = 1 - \frac{n}{p} + \left[\frac{n}{p}\right].$$

Daher ist

$$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\left[\frac{n}{p}\right]+1-\frac{n}{p}}\left(\overline{\Omega}\right)$$

mit den entsprechenden Normabschätzungen.

(3) Sei $k > \frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$. Setze $l = \left[\frac{n}{p}\right] - 1 = \frac{n}{p} - 1$. Wie oben erhalten wir

$$u \in W^{k-l,r}(\Omega) \text{ mit } r = \frac{np}{n - pl} = n.$$

Nach der Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg-Sobolev erhalten wir somit $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$ für alle q mit $n \le q < \infty$ und $|\alpha| \le k - l - 1 = k - \left[\frac{n}{p}\right]$. Nun können wir den Morreyschen Einbettungssatz anwenden und erhalten $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $n < q < \infty$ und $|\alpha| \le k - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$. Wir erhalten somit wie gewünscht

$$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ für alle } 0 < \gamma < 1$$

samt entsprechender Normabschätzungen.

□

4.9. **Kompaktheitssätze.** Für $1 \le p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ sind die Einbettungen $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ stetig. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ist für $1 \le q < p^*$ sogar eine kompakte Einbettung.

Definition 4.35. Seinen X, Y Banachräume, $X \subset Y$. X ist kompakt enthalten in Y,

$$X \Subset Y,$$

falls

(1) $\|x\|_Y \le c \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$,

(2) jede beschränkte Folge in X ist in Y präkompakt.

Theorem 4.36 (Rellich-Kondrachov). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < n$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega)$$

für alle $1 \le q < p^*$.

Beweis.

- Die Sobolevschen Einbettungssätze und die Beschränktheit von Ω liefern die Stetigkeit der Einbettung.
- Sei also u_m in $W^{1,p}(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Es genügt, eine in $L^q(\Omega)$ konvergente Teilfolge zu finden.

- Da sich die Funktionen u_m zu $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger in einer großen Kugel B_R fortsetzen lassen, genügt es, solche Funktionen mit
$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(B_R)} < \infty$$
zu betrachten.

  Wir glätten und definieren $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$ für $\varepsilon > 0$, wobei wir annehmen dürfen, dass $\operatorname{supp} u_m^\varepsilon \Subset B_{R+1}$ gilt.

- Wir behaupten zunächst, dass $u_m^\varepsilon \to u_m$ für $\varepsilon \to 0$ in L^q konvergiert und zwar sogar gleichmäßig in m.

  Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir zunächst glatte Funktionen u_m und erhalten
$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int\limits_{B_1(0)} \eta(y)(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\,dy \\ &= \int\limits_{B_1(0)} \eta(y) \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} u_m(x - \varepsilon t y)\,dt\,dy \\ &= -\varepsilon \int\limits_{B_1(0)} \eta(y) \int\limits_0^1 \langle Du_m(x-\varepsilon t y), y\rangle\,dt\,dy. \end{aligned}$$
  Hieraus folgt
$$\begin{aligned} \int\limits_{B_{R+1}} |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\,dx \le& \varepsilon \int\limits_{B_1(0)} \eta(y) \int\limits_0^1 \int\limits_{B_{R+1}} |Du_m(x-\varepsilon t y)|\,dx\,dt\,dy \\ \le& \varepsilon \int\limits_{B_{R+2}(0)} |Du_m(z)|\,dz. \end{aligned}$$
  Mittels Approximation sehen wir, dass diese Ungleichung auch noch für $W^{1,p}$-Funktionen mit Träger in $B_R(0)$ gilt. Da das Maß dieser Kugel endlich ist, folgt
$$\begin{aligned} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B_{R+1})} \le& \varepsilon \cdot \|Du_m\|_{L^1(B_{R+2})} \\ \le& \varepsilon \cdot c \cdot \|Du_m\|_{L^p(B_{R+2})}. \end{aligned}$$
  Da $\|Du_m\|_{L^p(B_R)}$ gleichmäßig beschränkt ist, ist die folgende Konvergenz für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig in m
$$u_m^\varepsilon \to u_m \text{ in } L^1(B_{R+1}).$$
  Dies zeigt die Behauptung im Falle $q = 1$. Im allgemeinen Fall ist $1 < q < p^*$. Daher gibt es ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so dass
$$\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{1} + \frac{1-\vartheta}{p^*}$$

gilt. Somit gilt auch

$$1 = \frac{\vartheta q}{1} + \frac{(1-\vartheta)q}{p^*}$$

und wir erhalten die folgende Interpolationsungleichung für L^p-Räume

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q} = &\left(\int f^q\right)^{1/q} = \left(\int f^{\vartheta q} \cdot f^{(1-\vartheta)q}\right)^{1/q} \\ \le &\left(\int f\right)^{\vartheta} \cdot \left(\int f^{p^*}\right)^{\frac{1-\vartheta}{p^*}} \\ = &\|f\|_{L^1}^{\vartheta} \cdot \|f\|_{L^{p^*}}^{1-\vartheta}. \end{aligned}$$

In unserem Falle folgt also

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B_{R+1})} \le \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B_{R+1})}^{\vartheta} \, \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(B_{R+1})}^{1-\vartheta}.$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite hier ist aufgrund der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung gleichmäßig beschränkt. Benutze dabei insbesondere, dass $\|u_m^\varepsilon\|_{L^{p^*}} \le \|u_m\|_{L^{p^*}}$ ist, siehe [9, Thm 1.6.1]. Im ersten Teil dieses Teilbeweises haben wir gesehen, dass der erste Faktor gegen Null geht. Somit erhalten wir auch $u_m^\varepsilon \to u_m$ in $L^q(B_{R+1})$, gleichmäßig in m, und die Behauptung folgt.

- Als nächstes behaupten wir, dass die Folge u_m^ε für festes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

  Wähle dazu $x \in \mathbb{R}^n$. Beachte für die nachfolgenden Rechnungen, dass bei Glättungen, um das L^1-Integral konstant zu halten, $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ist. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(x)| \le &\int\limits_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|dy \\ \le &\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_m\|_{L^1(B_{R+1}(x))} \le \frac{c}{\varepsilon^n} < \infty \end{aligned}$$

  und

$$\begin{aligned} |Du_m^\varepsilon(x)| \le &\int\limits_{B_\varepsilon(x)} |D\eta_\varepsilon(x-y)| \cdot |u_m(y)|dy \\ \le &\|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u_m\|_{L^1(B_{R+1}(x))} \le \frac{c}{\varepsilon^{n+1}} < \infty. \end{aligned}$$

  Dies zeigt die Behauptung.

- Sei nun $\delta > 0$. Wir behaupten, dass es eine Teilfolge u_{m_j} der u_m gibt, so dass

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(B_{R+1})} \le \delta$$

  gilt. Sei also $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B_{R+1})} \le \frac{\delta}{3} \tag{4.2}$$

gilt. Fixiere nun $\varepsilon > 0$ entsprechend. Aufgrund der oben bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz, können wir dies unabhängig von m erreichen. Nach Arzelà-Ascoli gibt es für festes $\varepsilon > 0$ eine in B_{R+1} gleichmäßig konvergente Teilfolge $u^\varepsilon_{m_j}$ der u^ε_m. Insbesondere gilt für diese Teilfolge also

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u^\varepsilon_{m_j} - u^\varepsilon_{m_k}\|_{L^q(B_{R+1})} = 0.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und (4.2) folgt also die Behauptung.

- Das Theorem folgt nun, wenn wir in der letzten Behauptung $\delta \downarrow 0$ lassen und die Teilfolgen iterativ aus vorhergehenden (für eine Folge von $\delta_i \to 0$) wählen. Eine Diagonalfolge aus dieser Folge von Teilfolgen ist dann die gesuchte Cauchyfolge in L^q.

□

Bemerkung 4.37.

(1) Es gilt stets $p^* > p$ und $p^* \to \infty$ für $p \uparrow n$. Daher gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \Subset L^p(\Omega) \quad \forall\, 1 \le p \le \infty$$

für Ω wie oben. Im Falle $n < p \le \infty$ benutzt man dazu die Morreysche Ungleichung und ebenfalls den Satz von Arzelà-Ascoli.

(2) Falls Ω nur beschränkt ist, gilt auch noch

$$W^{1,p}_0(\Omega) \Subset L^p(\Omega).$$

Beweis. Übung. □

Theorem 4.38 (Poincaré)**.** *Sei die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es $c = c(n, p, \Omega)$, so dass*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt, wobei

$$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega u.$$

Beweis. Falls dies nicht der Fall ist, finden wir $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k \cdot \|Du_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hierzu definieren wir (Wohldefiniertheit folgt nach Annahme)

$$v_k := \frac{u_k - (u_k)_\Omega}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}.$$

Nach Definition gelten $(v_k)_\Omega = 0$ und $\|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Wir erhalten nach Definition der u_k

$$\|Dv_k\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}}{\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} < \frac{1}{k}.$$

Insbesondere sind die v_k also in $W^{1,p}(\Omega)$ gleichmäßig beschränkt. Daher konvergiert nach Rellich-Kondrachov eine (nicht umbenannte) Teilfolge,

$$v_k \to v \text{ in } L^p(\Omega).$$

Auch im Limes bleiben die Eigenschaften $(v)_\Omega = 0$ und $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ erhalten. Sei nun $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega v \cdot D_i\varphi = \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega v_k \cdot D_i\varphi = -\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega D_i v_k \varphi = 0,$$

da $Dv_k \to 0$ in L^p konvergiert. Damit ist $v \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $Dv = 0$ fast überall in Ω. Also ist (Übung) die Funktion v konstant. Wegen $(v)_\Omega = 0$ folgt daher $v \equiv 0$ im Widerspruch zu $\|v\|_{L^p} = 1$. $\square$

Theorem 4.39 (Poincaré für eine Kugel)**.** *Sei* $1 \le p \le \infty$. *Dann gibt es* $c = c(n,p)$ *mit*

$$\|u - (u)_{B_r(x)}\|_{L^p(B_r(x))} \le c \cdot r \cdot \|Du\|_{L^p(B_r(x))}$$

für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ *und für alle* $u \in W^{1,p}(B_r(x))$.

Beweis. Übung. Betrachte zunächst eine feste Kugel und skaliere dann, um die genaue Abhängigkeit vom Radius r zu erhalten. $\square$

Bemerkung 4.40. Sei $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Nach Theorem 4.39 mit $p = 1$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\fint\limits_{B_r(x)} \left|u - (u)_{B_r(x)}\right| &\le c \cdot r \cdot \fint\limits_{B_r(x)} |Du| \\
&\le c \cdot r \cdot \left(\fint\limits_{B_r(x)} |Du|^n \right)^{1/n} \quad \text{(Hölder)} \\
&\le c \cdot \left(\int\limits_{B_r(x)} |Du|^n \right)^{1/n} \\
&\le c \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^n \right)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Definiere die BMO-Halbnorm ("bounded mean oscillation") als

$$[u]_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B_r(x) \subset \mathbb{R}^n} \left\{ \fint\limits_{B_r(x)} \left|u - (u)_{B_r(x)}\right| \right\}.$$

Die obige Rechnung zeigt somit, dass

$$[u]_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

gilt.

4.10. **Differenzenquotienten.**

Definition 4.41. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega' \Subset \Omega$, $1 \le i \le n$ und $h \neq 0$. Sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Definiere den i-ten Differenzenquotienten der Göße h durch

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$
$$D^h u := \left(D_1^h u,\, \ldots,\, D_n^h u\right).$$

Bemerkung 4.42 (Funktionalanalysis)**.**

(1) Eine Folge u_k in einem Banachraum X konvergiert schwach gegen $u \in X$,
$$u_k \rightharpoonup u,$$
falls
$$u^*(u_k) \to u^*(u)$$
für jedes beschränkte lineare Funktional $u^* \in X^*$ gilt.

(2) Beispiel $\mathbb{R}^n$.

Beispiel in l^2 für schwache Konvergenz von $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ Stück}}, 1, 0, \ldots)$ ohne Konvergenz: $e_i \rightharpoonup 0$, aber $e_i \not\to 0$. (ausführen).

(3) Es gilt
$$u_k \to u \quad \Longrightarrow u_k \rightharpoonup u.$$

(4) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt (Banach-Steinhaus),
$$\|u\| \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|.$$

(5) Ein Banachraum heisst reflexiv, falls die kanonische Einbettung in den Bidualraum ein Isomorphismus ist.

(6) Für $1 \le p < \infty$ und eine offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt
$$\left(L^p(\Omega)\right)^* = L^q(\Omega)$$
mit
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Somit ist $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv.

(7) Weiterhin ist jeder Hilbertraum reflexiv.

(8) In einem reflexiven Banachraum gilt: Jede beschränkte Folge enthält eine schwach konvergente Teilfolge.

Theorem 4.43 (Differenzenquotienten und schwache Ableitungen)**.**

(1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\Omega' \Subset \Omega$ gibt es ein $c > 0$, so dass
$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$
für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(2) *Sei* $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ *und* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Gibt es* $c > 0$ *und* $\Omega' \Subset \Omega$ *mit*
$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$$
für alle $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, *so gilt* $u \in W^{1,p}(\Omega')$ *und*
$$\|Du\|_{L^p(\Omega')} \le c.$$

Beweis.

(1) Sei $1 \le p < \infty$ und sei u glatt. Sei $x \in \Omega'$, $1 \le i \le n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Es gilt
$$u(x + he_i) - u(x) = \int\limits_0^1 u_i(x + the_i) h \, dt$$
$$|u(x + he_i) - u(x)| \le |h| \cdot \int\limits_0^1 |Du(x + the_i)| \, dt$$
und aufgrund der Hölderschen Ungleichung
$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} \left|D^h u\right|^p \le & c \sum_i \int\limits_{\Omega'} \int\limits_0^1 |Du(x + the_i)|^p \, dt \, dx \\ = & c \sum_i \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |Du(x + the_i)|^p \, dx \, dt \\ \le & c \int\limits_{\Omega} |Du|^p.\end{aligned}$$
Da Ω' von $\partial\Omega$ mindestens Abstand $2|h|$ hat, folgt die Behauptung durch Approximation.

(2) Gelte $\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$ eine Testfunktion. Dann gilt die folgende "partielle Integrationsformel", falls $|h| \le c(\varphi)$ klein genug ist
$$\int\limits_{\Omega'} u(x) \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h} dx = -\int\limits_{\Omega'} \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h} \varphi(x) \, dx,$$
$$\int\limits_{\Omega'} u \left(D_i^h \varphi\right) = -\int\limits_{\Omega} \left(D_i^{-h} u\right) \varphi.$$
Nach Voraussetzung ist
$$\sup_h \left\|D_i^{-h} u\right\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$
Daher existiert $v_i \in L^p(\Omega')$ und eine Folge $h_k \to 0$, so dass
$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \quad \text{in } L^p(\Omega').$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} u\varphi_i &= \int\limits_{\Omega} u\varphi_i \\ &= \lim_{h_k\to 0} \int\limits_{\Omega} u \cdot D_i^{h_k}\varphi \\ &= \lim_{h_k\to 0} -\int\limits_{\Omega} D_i^{-h_k} u\varphi \\ &= \lim_{h_k\to 0} -\int\limits_{\Omega'} D_i^{-h_k} u\varphi \\ &= -\int\limits_{\Omega'} v_i\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $v_i = u_i$ im schwachen Sinne. Wegen der schwachen Konvergenz ist $v_i \in L^p(\Omega')$ und wir erhalten $Du \in L^p(\Omega')$. Da auch $u \in L^p(\Omega')$ ist, folgt $u \in W^{1,p}(\Omega')$. Die Normabschätzung folgt aus der Unterhalbstetigkeit der Norm.

□

Übung 4.44.

- Zeige, dass der zweite Teil von Theorem 4.43 für $p = 1$ falsch ist.
- Lies [2, S. 279-281].
- Zeige, dass
$$u \in W^{1,\infty} \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ ist gleichmäßig Lipschitz.}$$
- Zeige, dass eine Funktion $u \in W^{1,p}$ für $p > n$ fast überall differenzierbar ist.

5. L^2-Theorie

5.1. **Existenz.** Wir benutzen Methoden der Funktionalanalysis, um eine schwache Lösung zu konstruieren.

Definition 5.1 (Generalvoraussetzungen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform

$$Lu = -\left(a^{ij}(x)u_i\right)_j + b^i(x)u_i + d(x)u.$$

Wir machen folgende Annahmen

- gleichmäßige Elliptizität:
$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$$
für eine Konstante $\vartheta > 0$.
- Symmetrie: $a^{ij} = a^{ji}$.

- Regularität: a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.
- Koerzivität: Es gibt $\beta > 0$, so dass
$$\int\limits_\Omega a^{ij}\varphi_i\varphi_j + b^i\varphi_i\varphi + d\varphi^2 \ge \beta\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

Beispiel 5.2. Koerzivität kann man beispielsweise wie folgt überprüfen. Es gilt
$$\int\limits_\Omega a^{ij}\varphi_i\varphi_j + b^i\varphi_i\varphi + d\varphi^2 \ge \int\limits_\Omega \vartheta|D\varphi|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon|D\varphi|^2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}|b|^2 + d\right)\varphi^2.$$
Wähle nun ε, so dass $\vartheta - \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ ist. Negative quadratische Terme in φ lassen sich (möglicherweise) mit Hilfe der Poincaréungleichung (Theorem 4.26) in die $|D\varphi|^2$−Terme absorbieren. Benutze schließlich die Äquivalenz der Normen aus Korollar 4.27.

Bemerkung 5.3. Im Falle einer glatten Lösung u von $Lu = f$ bei glatten Daten erhalten wir durch partielle Integration
$$\int\limits_\Omega a^{ij}u_i\varphi_j + b^iu_i\varphi + du\varphi = \int\limits_\Omega f\varphi$$
für alle Testfunktionen φ. Durch Approximation sehen wir, dass wir dieselbe Gleichheit erhalten, wenn nur $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

Dies motiviert die folgende Definition einer schwachen Lösung.

Definition 5.4 (Schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in H^1_0(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$
wenn für alle Funktionen $\varphi \in H^1_0(\Omega)$
$$\int\limits_\Omega a^{ij}u_i\varphi_j + b^iu_i\varphi + du\varphi = \int\limits_\Omega f\varphi$$
gilt.

Wir wollen die folgenden beiden Theoreme aus der Funktionalanalysis benutzen. Dabei bezeichnet H einen Hilbertraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt auf H und $\|\cdot\|$ die Norm von H.

Theorem 5.5 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Sein Dualraum H^* ist kanonisch isomorph zu H, d. h. zu jedem $f \in H^*$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $u \in H$, so dass*
$$f(v) = \langle u, v\rangle \quad \text{für alle } v \in H$$
gilt. Die Abbildung $f \mapsto u$ ist ein linearer Isomorphismus von H^* auf H.

Das folgende Theorem folgt direkt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, wenn die Bilinearform symmetrisch ist, denn dann definiert die Bilinearform ein zum Standardskalarprodukt äquivalentes Skalarprodukt (im Sinne von äquivalenten Normen) und wir können hierauf direkt den Rieszschen Darstellungssatz anwenden.

Theorem 5.6 (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear, stetig, also*
$$|B[u,v]| \leq \alpha\|u\| \cdot \|v\|,$$
und koerziv, also
$$\beta\|u\|^2 \leq B[u,u],$$
für Konstanten α, $\beta > 0$ und alle u, $v \in H$. Sei $f \in H^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmes $u \in H$ mit
$$B[u,v] = f(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

Beweis.

(1) Sei zunächst $u \in H$ fest. Die Abbildung $v \mapsto B[u,v]$ ist eine stetige lineare Abbildung. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es somit ein eindeutig bestimmtes $w \in H$, so dass
$$B[u,v] = \langle w, v\rangle \quad \text{für alle } v \in H.$$
Wir setzen $Au := w$.

(2) Wir behaupten, dass der Operator $A : H \to H$ linear und stetig ist. Die Linearität folgt aus der Bilinearität von B. Aus der Abschätzung
$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = B[u, Au] \leq \alpha\|u\| \cdot \|Au\|$$
folgt die Stetigkeit von A.

(3) Der Operator ist injektiv, da B koerziv ist, denn
$$\beta\|u\|^2 \leq B[u,u] = \langle Au, u\rangle \leq \|Au\| \cdot \|u\|$$
impliziert $\beta\|u\| \leq \|Au\|$.

(4) Das Bild von A ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von H, da aufgrund der Abschätzung $\beta\|u\| \leq \|Au\|$ eine Cauchyfolge im Bild von einer Cauchyfolge im Urbild herkommt.

(5) A ist surjektiv. Sonst existiert nämlich ein $0 \neq w \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, da $\operatorname{Im} A$ ein abgeschlossener Unterraum ist und wir erhalten
$$\beta\|w\|^2 \leq B[w,w] = \langle Aw, w\rangle = 0.$$
Somit haben wir nachgewiesen, dass A ein Isomorphismus ist.

(6) Aufgrund des Rieszschen Darstellungssatzes gibt es ein $w \in H$ mit
$$\langle w, v\rangle = f(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$
Da A ein Isomorphismus ist, ist $u := A^{-1}w$ das gesuchte Element, denn es gilt
$$B[u,v] = \langle Au, v\rangle = \langle w, v\rangle = f(v).$$

(7) $u \in H$ ist eindeutig bestimmt. Seinen nämlich u, $\tilde{u} \in H$ mit
$$B[u, v] = f(v) \text{ und } B[\tilde{u}, v] = f(v) \text{ für alle } v \in H,$$
so folgt auch $B[u - \tilde{u}, v] = 0$ für alle $v \in H$. Aufgrund der Koerzivität erhalten wir damit insbesondere für $v := u - \tilde{u}$
$$0 = B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] \geq \beta \|u - \tilde{u}\|^2$$
und es folgt $u = \tilde{u}$.

□

Theorem 5.7. *Unter den Voraussetzungen von Definition 5.1 existiert genau eine schwache Lösung u des Randwertproblems*
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Wir definieren $B : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch
$$B[u, v] := \int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j + b^i u_i v + duv.$$
Wir hatten vorausgesetzt, dass B koerziv ist. Die Stetigkeit folgt aus der Beschränktheit der Koeffizienten und der Cauchyschen Ungleichung. Wir erhalten die Behauptung nun aus Lax-Milgram. □

5.2. **Alternativer Existenzbeweis mit Methoden der Variationsrechnung.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}$ von
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Dazu wollen wir
$$I(u) := \int\limits_\Omega \tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu$$
unter allen Funktionen $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ minimieren.

Wir benutzen einige Resultate aus der Funktionalanalysis:

Definition 5.8 (Schwache Konvergenz)**.** Sei V ein Banachraum und V^* sein Dualraum. Dann konvergiert x_n schwach gegen x, $x_n \rightharpoonup x$, falls
$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$$
für alle $f \in V^*$ gilt.

Sei H ein Hilbertraum. Dann ist H^* kanonisch isomorph zu H. Wir identifizieren H und H^*. Hier benötigen wir schwache Konvergenz nur in Hilberträumen.

Definition 5.9 (Separabel)**.** Ein metrischer Raum M ist separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Das folgende Lemma gilt auch in Banachräumen.

Lemma 5.10. *Sei H ein Hilbertraum und $x_n \rightharpoondown x$ eine schwach konvergente Folge in H. Dann gilt*
$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Beweis. Es gilt
$$\begin{aligned}0 \le \|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - 2\langle x_n, x\rangle + \langle x, x\rangle\\ &= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x_n\|^2.\end{aligned}$$
Aufgrund der schwachen Konvergenz gilt $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Somit ist
$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\|^2 \ge 2\|x\|^2 - \|x\|^2 = \|x\|^2.$$
□

Korollar 5.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_k \rightharpoondown u$ eine schwach konvergente Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt*
$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 \le \int\limits_\Omega |\nabla u|^2.$$

Beweis. Auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist (die Wurzel von) $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ eine zu $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega u^2$ äquivalente Norm und ist vom Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle$ induziert. □

Theorem 5.12 (Banach-Alaoglu)**.** *Sei H ein separabler Hilbertraum und sei (x_n), $x_n \in H$, eine beschränkte Folge. Dann besitzt (x_n) eine schwach konvergente Teilfolge. Für den schwachen Grenzwert gilt $\|x\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Beweis. Mit Hilfe der Gram-Schmidtschen Orthogonalisierung einer abzählbaren dichten Mengt erhalten wir eine Orthonormalbasis. Ist diese endlich, so ist H isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ und die Behauptung ist klar. Sonst ist H isomorph zu l^2, dem Raum der quadratsummierbaren Folgen. Wir nehmen daher ab jetzt ohne Einschränkung an, dass $H = l^2$ ist.

Nach Voraussetzung ist $\langle x_n, e_1\rangle$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Nach Umbenennen dürfen wir also annehmen, dass $\langle x_n, e_1\rangle \to x^1$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Wir wiederholen dies mit e_2 statt e_1 und erhalten ohne Einschränkung $\langle x_n, e_2\rangle \to x^2$. Nach abzählbar vielen solchen Schritten haben wir eine Folge, nämlich die Diagonalfolge der obigen Folgen, gefunden, die $\langle x_n, e_i\rangle \to x^i$ für $i \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Wir definieren $x := \left(x^i\right)$ und behaupten, dass $x \in l^2$ ist und dass $x_n \rightharpoondown x$ gilt.

Zunächst zeigen wir die behauptete Normabschätzung. Dazu schneiden wir die Folgen nach der k-ten Stelle ab und erhalten für die so abgeschnittenen Folgen „$\hat{x}$“ die Ungleichung
$$\|\hat{x}\| = \liminf_{n\to\infty} \|\hat{x}_n\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
Mit $k \to \infty$ folgt die Behauptung.

Zum Beweis der schwachen Konvergenz sei $\varepsilon > 0$. Sei $f \in l^2$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $|\langle x_n - x, f\rangle|$ für $n \to \infty$ kleiner als (eine geeignete Funktion von) ε

wird. Da $f \in l^2$ ist, können wir $k > 0$ wählen, so dass $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \left(f^i\right)^2 < \varepsilon$ gilt. Wir haben oben gesehen, dass $\|x\|$, $\|x_n\| \le c$ ist. Also ist nach Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x, f\rangle| \le{}& \left|\sum_{i=1}^{k} (x_n - x)^i \cdot f^i\right| + \left|\sum_{i=k+1}^{\infty} (x_n - x)^i \cdot f^i\right| \\ \le{}& \left|\sum_{i=1}^{k} (x_n - x)^i \cdot f^i\right| + \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \left((x_n - x)^i\right)^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \left(f^i\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Der erste Term geht für $n \to \infty$ gegen Null, da $x_n \to x$ komponentenweise gilt. Der zweite Term ist durch

$$\|x_n - x\| \cdot \varepsilon^{1/2} \le (\|x_n\| + \|x\|) \cdot \varepsilon^{1/2} \le 2c \cdot \varepsilon^{1/2}$$

nach oben beschränkt. Daher folgt die Behauptung. □

Sei nun u_k, $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$, eine Minimalfolge für $I(u)$, d. h. es gelte

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} I(u).$$

Im folgenden werden wir häufiger $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \ge \lambda \int\limits_\Omega u^2$ für ein $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ verwenden.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass das betrachtete Infimum endlich ist. Es gilt

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu \ge \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega u^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 \ge -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} > -\infty,$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Mit einer analogen Rechnung können wir die $W^{1,2}$-Norm der u_k's gleichmäßig beschränken. Aufgrund der Minimalfolgeneigenschaft gilt

$$\begin{aligned} c \ge{}& \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int_\Omega f u_k \ge \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u_k^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 \\ \ge{}& \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ klein und bringen den $\int\limits_\Omega f^2$-Term auf die linke Seite. Die Behauptung folgt. Aufgrund der Äquivalenz der Normen mit und ohne L^2-Term auf $W_0^{1,2}$ ist auch $\int\limits_\Omega u_n^2$ gleichmäßig beschränkt.

Nach Banach-Alaoglu besitzt u_n also eine Teilfolge (wir benennen nicht um), die in $W^{1,2}$ schwach gegen u konvergiert. Nach Definition ist $W_0^{1,2}$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}$. Ein abgeschlossener Unterraum ist, wie man durch Testen mit einem Vektor aus dem orthogonalen Komplement sieht, auch unter schwacher Konvergenz abgeschlossen. Daher hat auch der Grenzwert u wieder Randwerte Null. Da

$W^{1,2} \Subset L^2$ ist, dürfen wir weiterhin annehmen, dass diese Folge in $L^2(\Omega)$ (schwach) gegen u konvergiert. Somit ist

$$\begin{aligned}
\inf_{w\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w) &= \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \int\limits_\Omega f u_n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \int\limits_\Omega f u \ge \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \int\limits_\Omega f u \\
&\ge \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega f u = I(u) \ge \inf_{w\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w)
\end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit. u minimiert also I in $W_0^{1,2}$ und die Euler-Lagrange-Gleichung besagt gerade, dass u eine schwache Lösung ist: Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt} I(u+tv)\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + |\nabla v|^2\right) + fu + tfv\right|_{t=0} \\
&= \int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle + fv.
\end{aligned}$$

5.3. **Regularität.**

Bemerkung 5.13 (Motivation)**.** Gelte $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Sei u glatt und falle im Unendlichen schnell genug ab. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 = \sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{ii} u_{jj} = -\sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{iij} u_j \\
&= \sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{ij} u_{ij} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D^2 u\right|^2.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\|f\|_{L^2} = \left\|D^2 u\right\|_{L^2}.$$

Das Problem dabei ist, dass wir benutzt haben, dass $u \in C^3$ ist. Dies ist später durch Abschätzungen von Differenzenquotienten zu rechtfertigen. Durch Differenzieren der Gleichung und ähnliche Rechnungen kommt man auf Abschätzungen der Form

$$c \cdot \|Df\|_{L^2} \ge \left\|D^3 u\right\|_{L^2}$$

mit entsprechenden Verallgemeinerungen für höhere Ableitungen. Wenn man dies lange genug fortsetzt, besteht die Hoffnung, dass man mit Hilfe der Sobolevschen Einbettungssätze Abschätzungen für Ableitungen in L^p für $p \gg 1$ und damit dann Hölderstetigkeit der Funktion u beweisen kann. Dies funktioniert für glatte Daten.

Hier gilt die Faustregel, dass Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen zweimal häufiger differenzierbar sind als die rechte Seite.

5.4. **Generalvoraussetzungen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ in Divergenzform,

$$Lu = -\left(a^{ij}u_i\right)_j + b^i u_i + du,$$

mit

- gleichmäßig elliptischem (aber nicht notwendigerweise symmetrischem) a^{ij},
- a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$.

5.5. **Innere H^2-Regularität.**

Theorem 5.14 (Innere H^2-Regularität)**.** *Sei $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(\Omega', \Omega, L)$.

Beweis.

(1) Wähle $\Omega'' \Subset \Omega$ offen, so dass

$$\Omega' \Subset \Omega'' \subset \Omega$$

ist und eine Abschneidefunktion ζ, so dass

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } \Omega', \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega'', \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$

(2) Da u eine schwache Lösung ist, folgt

$$\int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int\limits_\Omega \tilde{f} v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $\tilde{f} := f - b^i u_i - du$.

(3) Sei $|h| > 0$ klein, $1 \le k \le n$. Wähle

$$v := -D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right).$$

Das Quadrat in der Abschneidefunktion ist später nützlich. Diese Wahl von v ist durch den glatten Fall motiviert. Da aber nicht bekannt ist, dass zweite Ableitungen von u in der Testfunktion erlaubt sind, ist diese Testfunktion mit Differenzenquotienten nötig.

Setze

$$A := \int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j,$$

$$B := \int\limits_\Omega \tilde{f} v.$$

(4) Abschätzungen für A:

$$\begin{aligned} A = & -\int\limits_\Omega a^{ij} u_i \left[D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right]_j \\ = & \int\limits_\Omega D_k^h\left(a^{ij}u_i\right)\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j, \end{aligned}$$

da Ableitung und Differenzenquotientenbildung kommutieren und mit Hilfe "partieller Integration" für Differenzenquotienten

$$= \int\limits_\Omega a^{ij,h}\left(D_k^h u_i\right)\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i \left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j,$$

da mit $v^h := v(x+he_k)$ die folgende "Produktregel" gilt:

$$D_k^h(vw) = v^h D_k^h w + w D_k^h v.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} A = & \int\limits_\Omega a^{ij,h}\left(D_k^h u_i\right)\left(D_k^h u_j\right)\zeta^2 \\ & + \int\limits_\Omega a^{ij,h}\left(D_k^h u_i\right)\left(D_k^h u\right) 2\zeta\zeta_j + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i D_k^h u_j \zeta^2 + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i \left(D_k^h u\right) 2\zeta\zeta_j \\ \equiv & A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Elliptizität folgt

$$A_1 \geq \vartheta \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2.$$

Nach Voraussetzung an die Koeffizienten folgt

$$\begin{aligned} |A_2| \leq & c \cdot \int\limits_\Omega \zeta\left|D_k^h Du\right|\left|D_k^h u\right| + \zeta\left|D_k^h Du\right||Du| + \zeta\left|D_k^h u\right||Du| \\ \leq & \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2\left|D_k^h Du\right|^2 + \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega''}\left|D_k^h u\right|^2 + |Du|^2 \text{ (Cauchy).} \end{aligned}$$

Setze $\varepsilon = \frac{\vartheta}{2}$ und benutze, dass

$$\int\limits_{\Omega''}\left|D_k^h u\right|^2 \leq c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2$$

ist. Es folgt

$$|A_2| \leq \frac{\vartheta}{2}\int\limits_\Omega \zeta^2\left|D_k^h Du\right|^2 + c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2$$

und

$$A \geq \frac{\vartheta}{2}\int\limits_\Omega \zeta^2\left|D_k^h Du\right|^2 - c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2.$$

(5) Abschätzungen für B: Zunächst einmal gilt nach Definition und Cauchyscher Ungleichung

$$|B| \le \int\limits_\Omega \left|\tilde{f}\right| |v| \le c \cdot \int\limits_\Omega (|f| + |Du| + |u|)|v| \le \varepsilon \int\limits_\Omega v^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_\Omega \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right).$$

Weiterhin erhalten wir nach Wahl von v

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega |v|^2 = & \int\limits_\Omega \left|D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \\ \le & c \cdot \int\limits_\Omega \left|D\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \\ \le & c \cdot \int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 \\ \le & c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2. \end{aligned}$$

Somit folgt mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung

$$|B| \le \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_\Omega \left(f^2 + u^2\right) + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_\Omega |Du|^2.$$

(6) Wir wählen nun speziell $\varepsilon = \frac{\vartheta}{4}$ und erhalten mit Hilfe der letzten beiden Beweisteile

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta}{4} \int\limits_{\Omega'} \left|D_k^h Du\right|^2 \le & \frac{\vartheta}{4} \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 \\ \le & c \cdot \int\limits_\Omega \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right) \end{aligned}$$

für $1 \le k \le n$ und $|h| \ne 0$ genügend klein. Aufgrund der gleichmäßigen Schranken an die Differenzenquotienten folgt daher

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Durch Dazwischenschachteln einer weiteren Menge,

$$\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega,$$

erhalten wir

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')}\right).$$

Bis auf die H^1-Norm von u auf der rechten Seite statt der L^2-Norm ist dies gerade die gewünschte Ungleichung. Dies wollen wir im letzten Schritt noch korrigieren.

(7) Sei ζ eine neue Abschneidefunktion mit

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } \Omega'', \\ \operatorname{supp} \zeta \subset \Omega, \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$

Es gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$
$$\int_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) v.$$
Wir wählen speziell $v = \zeta^2 u$ und erhalten
$$\begin{aligned}\int_\Omega a^{ij} u_i v_j =& \int_\Omega a^{ij} u_i \left(\zeta^2 u\right)_j \\ =& \int_\Omega a^{ij} u_i u_j \zeta^2 + 2a^{ij} u_i u \zeta \zeta_j \\ \geq& \vartheta \int_\Omega \zeta^2 |Du|^2 - \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 |Du|^2 - c \int_\Omega u^2.\end{aligned}$$
Für die andere Seite erhalten wir
$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) v =& \int_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) \zeta^2 u \\ \leq& \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 |Du|^2 + c \cdot \int_\Omega \left(u^2 + f^2\right).\end{aligned}$$
Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ klein und erhalten
$$\frac{\vartheta}{2} \int_\Omega \zeta^2 |Du|^2 \leq c \cdot \int_\Omega \left(u^2 + f^2\right).$$
Dies bauen wir in die Abschätzung aus dem letzten Abschnitt ein und bekommen die gewünschte Abschätzung
$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

□

Bemerkung 5.15. Ist $u \in H^2_{\text{loc}}$, so können wir partiell integrieren und erhalten
$$\int_\Omega Lu\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$
Hieraus folgt nach Du Bois-Reymond $Lu = f$ fast überall in Ω.

5.6. **Höhere Regularität.**

Theorem 5.16 (Höhere innere Regularität)**.** *Sei* $0 < m \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in& C^{m+1}(\Omega), \\ f \in& H^m(\Omega). \end{aligned}$$
Sei $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*
$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$
Dann ist $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ *und für alle* $\Omega' \Subset \Omega$ *gilt die Abschätzung*
$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$
mit $c = c(m, \Omega, \Omega', L)$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Theorem 5.14 ist dabei der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt "$m \to m+1$" dürfen wir annehmen, dass

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i, d \in& C^{m+2}(\Omega),\\ f \in& H^{m+1}(\Omega) \end{aligned}$$

gelten und $u \in H^1$ eine schwache Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$

ist. Nach Induktionsannahme ist dann auch $u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{H^{m+2}(\tilde\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

für alle $\tilde\Omega \Subset \Omega$ mit $c = c\left(m, \tilde\Omega, \Omega, L\right)$. Wir fixieren nun

$$\Omega' \Subset \tilde\Omega \Subset \Omega.$$

Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = m+1$, $\tilde v \in C^\infty_c\left(\tilde\Omega\right)$ eine Testfunktion. Definiere

$$v := (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde v \in C^\infty_c\left(\tilde\Omega\right).$$

Mit B wie im Beweis von Theorem 5.7 erhalten wir

$$B[u, v] = \int\limits_\Omega fv.$$

Durch partielle Integration und Umordnen der Terme folgt

$$B[\tilde u, \tilde v] = \int\limits_\Omega \tilde f \tilde v \quad \text{mit} \quad \tilde u := D^\alpha u \in H^1\left(\tilde\Omega\right)$$

und

$$\tilde f := D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta\le\alpha\\ \beta\neq\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left\{ -\left(D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta u_i\right)_j + D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_i + D^{\alpha-\beta} d D^\beta u \right\}.$$

Diese Darstellung folgt direkt aus der Leibnizformel

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v.$$

Somit ist $\tilde u$ eine schwache Lösung von

$$L\tilde u = \tilde f \text{ in } \tilde\Omega.$$

Nach Induktionsannahme und Definition von $\tilde f$ folgt $\tilde f \in L^2\left(\tilde\Omega\right)$ mit

$$\left\|\tilde f\right\|_{L^2(\tilde\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Nach Theorem 5.14 erhalten wir nun

$$\|\tilde u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\left\|\tilde f\right\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\tilde u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\right)$$

$$\leq c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Da nun aber $\tilde{u} = D^\alpha u$ mit $|\alpha| = m + 1$ gilt, folgt

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

□

Theorem 5.17 (Schwache Lösungen sind bei glatten Daten glatt)**.** *Seien*

$$a^{ij},\, b^i,\, d \in C^\infty(\Omega),$$
$$f \in C^\infty(\Omega).$$

Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann gilt

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Beweis. Benutze innere Abschätzungen und Einbettungssätze. □

Bemerkung 5.18. Am Rand kann u aber trotzdem singulär werden.

5.7. **Randregularität.** Bei glatten Daten erhalten wir $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 5.19 (H^2-Regularität am Rand)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Seien $a^{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so gilt $u \in H^2(\Omega)$ mit der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

wobei $c = c(\Omega, L)$.

Bemerkung 5.20. Ist $u \in H^1_0$ die einzige Lösung des Randwertproblems, so gilt aufgrund der Abschätzungen an die Inverse sogar

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Der Operator kann aber einen nichttrivialen Kern in besitzen. Dann wird solch eine Abschätzung falsch. Details finden sich in [2, Kapitel 6.2.3, Theorem 6].

Beweis von Theorem 5.19.

(1) Betrachte zunächst die aufgebogene Situation. Sei $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. (Auf kleineren Kugeln funktioniert die Abschätzung analog.) Definiere $V := B_{1/2}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. Sei $\varepsilon > 0$ klein und ζ eine glatte Abschneidefunktion, so dass

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } B_{1/2}(0), \\ \zeta \equiv 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus B_{1-\varepsilon}(0), \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist $\zeta = 1$ auf der Menge V und es gilt $\zeta = 0$ in einer Umgebung des nicht ebenen Teiles von $\partial\Omega$.

(2) Da u eine schwache Lösung ist, folgt
$$B[u,v]=\int\limits_\Omega fv$$
für alle $v\in H^1_0(\Omega)$. Wir definieren
$$\tilde f:=f-b^iu_i-du$$
und erhalten
$$\int\limits_\Omega a^{ij}u_iv_j=\int\limits_\Omega \tilde f v.$$

(3) Sei nun $|h|>0$ klein. Definiere für $1\le k\le n-1$
$$v:=-D_k^{-h}\left(\zeta^2D_k^hu\right).$$
Für $x\in\Omega$ erhalten wir also
$$\begin{aligned}v(x)=&-\frac1hD_k^{-h}\left(\zeta^2(x)[u(x+he_k)-u(x)]\right)\\=&\frac1{h^2}\left(\zeta^2(x-he_k)[u(x)-u(x-he_k)]-\zeta^2(x)[u(x+he_k)-u(x)]\right).\end{aligned}$$
Es gilt $u=0$ im Spursinn auf $\{x^n=0\}$ und $\zeta\equiv0$ in einer Umgebung des sphärischen Teiles von $\partial\Omega$. Daher ist $v\in H^1_0(\Omega)$. Somit ist v eine zulässige Testfunktion und wir erhalten
$$A\equiv\int\limits_\Omega a^{ij}u_iv_j=\int\limits_\Omega\tilde fv\equiv B.$$

(4) Analog zum Beweis der inneren Regularität (Details: Übung) erhalten wir
$$\begin{aligned}A\ge&\frac\vartheta2\int\limits_\Omega\zeta^2\left|D_k^hDu\right|^2-c\int\limits_\Omega|Du|^2,\\|B|\le&\frac\vartheta4\int\limits_\Omega\zeta^2\left|D_k^hDu\right|^2+c\int\limits_\Omega\left(f^2+u^2+|Du|^2\right),\\\int\limits_V\left|D_k^hDu\right|^2\le&c\int\limits_\Omega\left(f^2+u^2+|Du|^2\right).\end{aligned}$$
Daher erhalten wir wie beim Beweis der inneren Regularität
$$\sum_{\substack{k,l\\k+l<2n}}\|u_{kl}\|_{L^2(V)}\le c\cdot\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

(5) u_{nn}-Abschätzungen: Aufgrund der inneren Abschätzungen gilt
$$Lu=f\text{ fast überall in }\Omega.$$
Da $a^{ij}\in C^1$ ist, können wir die Differentialgleichung in nicht-Divergenzform umschreiben als
$$-a^{ij}u_{ij}+\tilde b^iu_i+du=f$$

mit $\tilde{b}^i := b^i - a^{ij}_j$. Wir erhalten

$$a^{nn}u_{nn} = -\sum_{i+j<2n} a^{ij}u_{ij} + \tilde{b}^i u_i + du - f$$

ohne Summenkonvention auf der linken Seite. Wegen der gleichmäßigen Elliptizität ist $a^{nn} \geq \vartheta > 0$ und wir erhalten aufgrund der obigen Abschätzungen

$$\begin{aligned}|u_{nn}| \leq& c \cdot \left(\sum_{i+j<2n} |u_{ij}| + |Du| + |u| + |f|\right),\\ \|u\|_{H^2(V)} \leq& c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)\\ \leq& c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die H^1-Norm wie am Ende des Beweises von Theorem 5.14 insbesondere durch die L^2-Norm abgeschätzt haben. Es gilt $u \in H^2(V)$.

(6) Betrachte nun ein allgemeines Gebiet Ω. Nach Umbenennen der Koordinaten gilt für $x_0 \in \partial\Omega$ für ein $r > 0$

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \left\{x \in B_r(x_0) : x^n > \omega\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right)\right\},$$

wobei $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion ist. Gelte ohne Einschränkung $x_0 = (0, \ldots, 0, x_0^n)$. Wir definieren nun die Aufbiegetransformation Φ durch

$$\begin{aligned}y^i :=& x^i \text{ für } i < n,\\ y^n :=& x^n - \omega\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right),\\ y =:& \Phi(x)\end{aligned}$$

und ihre Inverse Ψ durch $x =: \Psi(y)$.

(7) Sei nun $s > 0$ so klein, dass

$$\Omega' := B_s(0) \cap \{y^n > 0\} \subset \Phi(\Omega \cap B_r(x_0))$$

ist. Definiere weiterhin

$$V' := B_{s/2}(0) \cap \{y^n > 0\}$$

und

$$u'(y) := u(\Psi(y)) \text{ für } y \in \Omega'.$$

Es gilt

$$u' \in H^1(\Omega')$$

und

$$u' = 0 \text{ auf } \partial\Omega' \cap \{y^n = 0\}.$$

Dies folgt, das die Transformation die H^1-Norm glatter Funktionen auch höchstens um eine Konstante ändern kann. Die Gleichheit auf dem Rand gilt im Spursinne und folgt aufgrund der Normabschätzung für den Spuroperator und da $H^1_0 = \overline{C^\infty_c}^{H^1}$ ist.

(8) Wir behaupten, dass u' eine schwache Lösung der Gleichung
$$L'u' = f' \text{ in } \Omega'$$
ist, wobei
$$\begin{aligned} f'(y) :=& f(\Psi(y)),\\ L'u' :=& -\left(a'^{kl}u'_k\right)_l + b'^k u'_k + d'u', \end{aligned}$$
mit Ableitungsindices bezüglich y
$$\begin{aligned} a'^{kl}(y) :=& a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_r\Phi^l_s,\\ b'^k(y) :=& b^r(\Psi(y))\Phi^k_r(\Psi(y)),\\ d'(y) :=& d(\Psi(y)). \end{aligned}$$
Ist $v' \in H^1_0(\Omega')$ und $B'[\cdot,\cdot]$ die zu L' gehörige Bilinearform, so gilt
$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega'} a'^{kl}u'_kv'_l + b'^ku'_kv' + d'u'v'.$$
Definiere $v(x) := v'(\Phi(x))$. Wir erhalten
$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega'} a'^{kl}u_i\Psi^i_kv_j\Psi^j_l + \int\limits_{\Omega'} b'^ku_i\Psi^i_kv + \int\limits_{\Omega'} d'uv.$$
Es gilt aufgrund der Kettenregel, auf $\Psi\circ\Phi = \mathrm{Id}$ angewandt,
$$a'^{kl}\Psi^i_k\Psi^j_l = a^{rs}\Phi^k_r\Phi^l_s\Psi^i_k\Psi^j_l = a^{ij}.$$
Es gilt
$$u'_k = u_i\Psi^i_k.$$
Weiterhin folgt
$$b'^k\Psi^i_k = b^r\Phi^k_r\Psi^i_k = b^i.$$
Da $|\det D\Phi| = 1$ ist, folgt nach Variablentransformation
$$B'[u',v'] = \int\limits_\Omega a^{ij}u_iv_j + b^iu_iv + duv = B[u,v] = \int\limits_\Omega fv = \int\limits_{\Omega'} f'v'.$$
Daher löst u' in Ω' die Gleichung $L'u' = f'$ im schwachen Sinne.

(9) Da Φ ein Diffeomorphismus ist, können wir die Elliptizität der transformierten Gleichung wie folgt zeigen. Seien $y \in \Omega'$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt
$$a'^{kl}(y)\xi_k\xi_l = a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_r\Phi^l_s\xi_k\xi_l \ge \vartheta\cdot\left|\Phi^k_\cdot\xi_k\right|^2 \ge \vartheta'|\xi|^2.$$
Da Φ und $\Psi \in C^2$ sind, ist auch $a'^{kl} \in C^1$.

(10) Wir können also die Resultate für den aufgebogenen Rand anwenden und erhalten
$$\|u'\|_{H^2(V')} \le c\cdot\left(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}\right).$$
Durch Rücktransformation erhalten wir (unter Benutzung von $\partial\Omega \in C^2$) für $V := \Psi(V')$
$$\|u\|_{H^2(V)} \le c\cdot\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ein Überdeckungsargument für eine Randumgebung und innere Abschätzungen liefern nun die behauptete Ungleichung.

□

Theorem 5.21 (Höhere Randregularität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Seien $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in & C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right), \\ f \in & H^m(\Omega). \end{aligned}$$

Sei $u \in H_0^1$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(m, \Omega, L)$.

Beweis. Dies ist ein Induktionsbeweis wie beim Beweis der höheren inneren Regularität. Benutze hierzu die Randabschätzungen. □

Bemerkung 5.22. Wie in Bemerkung 5.20 können wir auch hier wieder die L^2-Norm weglassen, wenn die Lösung eindeutig bestimmt ist. Ist m groß genug, hat man eine klassische Lösung und man kann $\|u\|_{L^2} \le \|u\|_{L^\infty}$ unter geeigneten Voraussetzungen auch mit Hilfe des klassischen Maximumprinzips beschränken.

Theorem 5.23 (Glattheit bei glatten Daten)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$. Seien weiterhin*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in & C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \\ f \in & C^\infty\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Es gilt $u \in H^m(\Omega)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wende nun die Einbettungssätze an. □

6. Eigenwerte des Laplaceoperators

6.1. **Existenz und Basiseigenschaften.** Wir folgen [6, S. 231 ff.]. Sei hier stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $\partial\Omega \in C^\infty$. Bezeichne hier $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$.

Theorem 6.1. *Der kleinste Eigenwert des Laplaceoperators bei Dirichletrandwerten ist gegeben durch*

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\int\limits_\Omega |Du|^2}{\int\limits_\Omega u^2} \equiv \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u, u\rangle} > 0.$$

Es gibt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $u > 0$ *in* Ω, *so dass*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

λ_1 *ist ein Eigenwert der Vielfachheit eins.*

Beweis. Es gilt

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u, u\rangle} = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_{L^2}=1}} \langle Du, Du\rangle.$$

Das Infimum ist nichtnegativ. Somit gibt es eine Minimalfolge

$$u_i \in H_0^1$$

mit $\|u_i\|_{L^2} = 1$, d. h. es gilt

$$\langle Du_i, Du_i\rangle \to \lambda_1.$$

Da somit $\|u_i\|_{H_0^1}$ gleichmäßig beschränkt ist, gibt es nach dem Rellichschen Kompaktheitssatz eine in L^2 konvergente Teilfolge. Wir dürfen also ohne Einschränkung annehmen, dass

$$u_i \to u \text{ in } L^2$$

gilt mit $\|u\|_{L^2} = 1$.

Da λ_1 das Infimum des Raleigh Quotienten ist, folgt

$$\|D(u_k + u_l)\|^2_{L^2} \ge \lambda_1 \|u_k + u_l\|^2_{L^2}.$$

Es gilt die Polarisationsformel

$$\|D(u_k - u_l)\|^2_{L^2} + \|D(u_k + u_l)\|^2_{L^2} = 2\|Du_k\|^2_{L^2} + 2\|Du_l\|^2_{L^2}.$$

Kombination der beiden letzten Formeln liefert, da $u_k + u_l \to 2u$ für $k,\, l \to \infty$,

$$\begin{aligned} \|Du_k - Du_l\|^2_{L^2} \le & 2\|Du_k\|^2_{L^2} + 2\|Du_l\|^2_{L^2} - \lambda_1 \|u_k + u_l\|^2_{L^2} \\ \to \quad & 2\lambda_1 + 2\lambda_1 - \lambda_1 \cdot 4\|u\|^2_{L^2} \\ = & 0. \end{aligned}$$

Damit ist u_k auch eine Cauchyfolge in $H_0^1(\Omega)$ und wir erhalten

$$\frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u, u\rangle} = \lambda_1.$$

Nach Theorem 4.26 gilt $\lambda_1 > 0$.

Sei nun $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Ist $|t|$ so klein, dass der Nenner im folgenden Bruch nicht verschwindet, so gilt

$$\frac{\langle D(u+t\varphi), D(u+t\varphi)\rangle}{\langle u+t\varphi, u+t\varphi\rangle} \geq \lambda_1$$

oder

$$\begin{aligned} 0 \leq& \langle D(u+t\varphi), D(u+t\varphi)\rangle - \lambda_1\langle u+t\varphi, u+t\varphi\rangle \\ =& \int\limits_\Omega |Du|^2 + 2t\int\limits_\Omega \langle Du, D\varphi\rangle + t^2\int\limits_\Omega |D\varphi|^2 \\ &- \lambda_1\int\limits_\Omega u^2 - \lambda_1 2t\int\limits_\Omega u\varphi - \lambda_1 t^2\int\limits_\Omega \varphi^2. \end{aligned}$$

mit Gleichheit für $t = 0$. Aufgrund der Minimalität der rechten Seite für $t = 0$ verschwindet also ihre Ableitung an der Stelle $t = 0$

$$0 = \int\limits_\Omega \langle Du, D\varphi\rangle - \lambda_1\int\limits_\Omega u\varphi.$$

Somit ist u eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgrund der L^2-Regularitätstheorie für schwache Lösungen aus Kapitel 5.3 erhalten wir daher $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

• $u > 0$: Definiere $u^+ := \max\{u, 0\}$ und $u^- := \min\{u, 0\}$. Es gilt (nicht vollkommen trivial)

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{f. ü. in } \{u \geq 0\}, \\ 0 & \text{f. ü. in } \{u \leq 0\}. \end{cases}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \lambda_1 =& \langle Du, Du\rangle = \langle Du^+, Du^+\rangle + \langle Du^-, Du^-\rangle \\ \geq& \lambda_1\langle u^+, u^+\rangle + \lambda_1\langle u^-, u^-\rangle \text{ nach Definition von } \lambda_1 \\ =& \lambda_1\langle u, u\rangle = \lambda_1. \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit, also

$$\langle Du^\pm, Du^\pm\rangle = \lambda_1\langle u^\pm, u^\pm\rangle$$

und $u^\pm$ ist eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u^\pm = \lambda_1 u^\pm & \text{in } \Omega, \\ u^\pm = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wir erhalten $-\Delta u^+ \geq 0$ in Ω. Aufgrund der L^2-Regularitätstheorie ist u^+ eine klassische glatte Lösung. Aufgrund des Maximumprinzips gilt daher $u^+ > 0$ oder $u^+ \equiv 0$ in Ω. Analog schließt man für u^- und erhält (ggf. nach Multiplikation mit -1) $u > 0$.

• Vielfachheit= 1: Sind u und v linear unabhängige Eigenvektoren (=Eigenfunktionen) zum Eigenwert λ_1, so wechselt eine geeignete Linearkombination davon in Ω

das Vorzeichen und bleibt Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 im Widerspruch zur oben bewiesenen Positivität der ersten Eigenfunktion. $\square$

Theorem 6.2. *Seien (λ_i, u_i), $1 \le i \le k$ die ersten k Eigenwerte und Eigenfunktionen (mit Vielfachheit). (Diese sind wie üblich bei Eigenwerten mit Vielfachheit nicht eindeutig bestimmt.) Dann ist*

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\substack{0 \not\equiv u \in H_0^1(\Omega) \\ \langle u, u_i \rangle = 0,\, 1 \le i \le k}} \frac{\langle Du, Du \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Es gibt $u_{k+1} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, so dass

$$\begin{cases} \Delta u_{k+1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_{k+1} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

gilt.

Beweis. Übungsaufgabe. Beachte, dass die Eigenschaft, schwache Lösung zu sein, zum Teil schon aus der Orthogonalitätsbedingung folgt. $\square$

Theorem 6.3. *Es gibt abzählbar viele Eigenwerte λ_k des Laplaceoperators und es gilt*

$$\lambda_k \to \infty \text{ für } k \to \infty.$$

Die Eigenfunktionen u_k bilden (bei Konstruktion wie oben und nach Normierung) eine Orthonormalbasis in $L^2(\Omega)$ und es gilt

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle u_i \text{ für alle } v \in L^2, \\ \langle v, v \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in L^2, \\ \langle Dv, Dv \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in H_0^1. \end{aligned}$$

Beweis. Falls $\lambda_k \le c$ für unendlich viele k gilt, so folgt

$$\|Du_k\|_{L^2} \le c.$$

Nach Rellich konvergiert daher eine Teilfolge in L^2. Dies ist aber nicht möglich, da nach Konstruktion $\langle u_k, u_l \rangle = 0$ für $k \ne l$ gilt und somit

$$\|u_k - u_l\|_{L^2} = \sqrt{2} \not\to 0.$$

Definiere

$$H_m := \left\{ v \in H_0^1 : \langle v, u_i \rangle = 0 \text{ für } i \le m-1 \right\}.$$

Sei zunächst $v \in L^2 \cap H_0^1 = H_0^1$. Definiere

$$\begin{aligned} \beta_i &:= \langle v, u_i \rangle, \\ v_m &:= \sum_{i \le m} \beta_i u_i, \end{aligned}$$

$$w_m := v - v_m.$$

Dann ist w_m die L^2-Orthogonalprojektion von v auf H_{m+1}, v_m ist orthogonal zu H_{m+1}. Also gilt für $i \le m$

$$\begin{aligned} \langle w_m, u_i\rangle &= 0, \\ \langle Dw_m, Dw_m\rangle &\ge \lambda_{m+1}\langle w_m, w_m\rangle. \end{aligned}$$

Sei u_i, $i \le m$, ein Eigenvektor. Dann folgt mit partieller Integration

$$\langle Dw_m, Du_i\rangle = \lambda_i\langle u_i, w_m\rangle = 0,$$

also sind auch die Ableitungen orthogonal zueinander. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle w_m, w_m\rangle &= \langle v, v\rangle - 2\langle v, v_m\rangle + \langle v_m, v_m\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - 2\langle w_m + v_m, v_m\rangle + \langle v_m, v_m\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \langle v_m, v_m\rangle, \\ \langle Dw_m, Dw_m\rangle &= \langle Dv, Dv\rangle - \langle Dv_m, Dv_m\rangle \end{aligned} \tag{6.1}$$

und

$$\begin{aligned} \langle w_m, w_m\rangle &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\langle Dw_m, Dw_m\rangle \\ &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\langle Dv, Dv\rangle. \end{aligned}$$

Somit gilt $w_m \to 0$ in L^2 und wir erhalten die folgende in L^2 konvergente Summe

$$v = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, u_i\rangle u_i.$$

Für allgemeines $v \in L^2$ erhalten wir nun diese Formel durch Approximation in L^2 durch H_0^1-Funktionen. Gilt nämlich $v^k \to v$ in L^2, so folgt gleichmäßig für alle $N \gg 1$

$$\left\|\sum_{i=1}^{N}\left\langle v - v^k, u_i\right\rangle u_i\right\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{N}\left|\left\langle v - v^k, u_i\right\rangle\right|^2 \le \left\|v - v^k\right\|_{L^2}^2,$$

da die Eigenfunktionen u_i orthonormal zueinander sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle u_i - v\right\|_{L^2} &\le \left\|\sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle u_i - \sum_{i=1}^{N}\langle v^k, u_i\rangle u_i\right\|_{L^2} + \left\|\sum_{i=1}^{N}\langle v^k, u_i\rangle u_i - v\right\|_{L^2} \\ &\le \left\|v - v^k\right\|_{L^2} + \left\|\sum_{i=1}^{N}\langle v^k, u_i\rangle u_i - v\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Nun fixieren wir zunächst k groß, so dass der erste Term klein wird. Da $v^k \in H_0^1$ ist und wir k fixiert haben, wird der zweite Term aufgrund der obigen Rechnungen für $N \to \infty$ klein. Somit approximiert die Summe auch beliebige $v \in L^2$ bezüglich der L^2-Norm. Die u_i sind also eine Orthonormalbasis für L^2.

Weiterhin erhalten wir

$$0 = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle u_i - v\right\|_{L^2}^2$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^N \langle v,u_i\rangle^2 - 2\sum_{i=1}^N \langle v,u_i\rangle^2 + \langle v,v\rangle\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\langle v,v\rangle - \sum_{i=1}^N \langle v,u_i\rangle^2\right).$$

Somit folgt

$$\langle v,v\rangle = \sum_{i=1}^\infty \langle v,u_i\rangle^2.$$

Für $v \in H_0^1$ gilt

$$Dv_m = \sum_{i\le m} \beta_i Du_i.$$

Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung der Du_i in L^2 und (6.1) folgt

$$\langle Dv, Dv\rangle \ge \langle Dv_m, Dv_m\rangle = \sum_{i\le m} \beta_i^2 \langle Du_i, Du_i\rangle = \sum_{i\le m} \beta_i^2 \lambda_i.$$

Da alle λ_i positiv sind, ist der letzte Ausdruck, als Folge in m aufgefasst, absolut konvergent. Somit gilt für $m < n$

$$\|Dw_m - Dw_n\|^2_{L^2} = \langle Dw_m - Dw_n, Dw_m - Dw_n\rangle = \langle Dv_n - Dv_m, Dv_n - Dv_m\rangle$$
$$= \|Dv_n - Dv_m\|^2_{L^2} = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \beta_i^2 \to 0$$

für $m,\, n \to \infty$. Somit sind Dw_m und Dv_m Cauchyfolgen in L^2. Also konvergieren w_m und v_m in H_0^1. Die Grenzwerte stimmen mit den L^2-Grenzwerten überein und ist somit Null bzw. v. Somit folgt analog zu oben

$$\langle Dv, Dv\rangle = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \beta_i^2$$

für alle $v \in H_0^1$. □

6.2. **Separation der Variablen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ sei glatt. Seien $u_0,\, u_1 \in L^2(\Omega)$. Wir wollen die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times [0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{6.2}$$

und

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (-\infty,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u_t(\cdot,0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{6.3}$$

lösen. Dabei beschreibt die Wärmeleitungsgleichung (6.2) die Wärmeverteilung in einem Körper Ω als Funktion der Zeit, wenn die Außenflächen eine konstante Temperatur haben. Die Wellengleichung beschreibt die Auslenkung der Membran einer wenig ausgelenkten Trommel.

Wärmeleitungsgleichung. Um die Gleichung (6.2) zu lösen, machen wir den Ansatz $u(x,t) := f(t)v(x)$, nehmen $u \neq 0$ (für die Herleitung) an, und erhalten

$$\frac{1}{u}(\dot{u} - \Delta u) = \frac{v}{vf} \cdot \frac{d}{dt}f - \frac{f}{vf}\Delta v = \frac{1}{f} \cdot \frac{d}{dt}f - \frac{1}{v}\Delta v.$$

Wir haben also die Abhängigkeit von den beiden Variablen separiert. Gleichheit gilt somit, wenn $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt}f$ und $\frac{-\Delta v}{v}$ beide mit einer gegebenen Konstanten λ übereinstimmen.

Eigenfunktionen u des Laplaceoperators auf Ω mit Randwerten Null zu einem Eigenwert λ

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gibt es nur für eine diskrete Menge von positiven Konstanten λ. Sei (u_i, λ_i) ein solches Tupel.

Die Differentialgleichung $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt}f = \lambda$ besitzt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung $f(t) = f(0)e^{-\lambda t}$.

Nun löst $w(x,t) := \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dot{w} - \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Linearkombinationen von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind wieder Lösungen. Somit ist auch

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (6.2).

Ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ beliebig, so gibt es nach Theorem 6.3 Konstanten $\beta_i := \langle u_0, u_i \rangle$ für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so dass

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i.$$

Mit zusätzlicher Arbeit kann man nachweisen, dass nun

$$u(x,t) := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x) \tag{6.4}$$

in einem geeigneten Sinne das Anfangswertproblem (6.2) für positive Zeiten löst. Für positive Zeiten ist die Lösung glatt. Für $t = 0$ erhält man jedoch i. a. nur eine L^2-Funktion.

Diese Probleme bei $t = 0$ wollen wir für den Rest der Betrachtungen von (6.2) und (6.3) nicht weiter verfolgen.

Wir beobachten, dass hohe Frequenzen (große Eigenwerte) in (6.4) schneller abklingen als tiefe. Weiterhin kann man einen gemeinsamen Faktor $e^{-\lambda_1 t}$ ausklammern und sieht, dass $u(x,t)$ mindestens mit dieser Rate gegen Null konvergiert. Im generischen Fall, wenn $\beta_1 = \int\limits_\Omega u_0 u_1 \neq 0$ ist, kann man die Lösung reskalieren. Es gilt dann

$$\frac{1}{\beta_1} e^{\lambda_1 t} u(x,t) \to u_1(x) \text{ für } t \to \infty.$$

Somit verteilt sich die Wärme für große Zeiten immer gleichmäßiger in dem gegebenen Körper und das Profil der Temperaturverteilung approximiert (nach Reskalieren) generisch die erste Eigenfunktion. Ist $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$, so approximiert man entsprechend die k-te Eigenfunktion.

Wellengleichung. Hier führt ein Ansatz $u(x,t) = f(t)v(x)$ zu

$$\frac{1}{u}(u_{tt} - \Delta u) = \frac{1}{f} f_{tt} - \frac{\Delta v}{v}$$

zum Gleichungssystem

$$-\frac{1}{f} f_{tt} = \lambda = -\frac{\Delta v}{v}.$$

Lösungen u_i des rechten Teiles kennen wir bereits. Lösungen des ersten Teiles sind gegeben durch

$$f(t) = \alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right).$$

Der formale Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right)\right) u_i(x)$$

führt also zu

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) u_i(x), \\ u_t(x,0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) u_i(x). \end{aligned}$$

Da die u_i eine Orthonormalbasis von L^2 bilden, können wir damit das Anfangswertproblem (6.3) zumindest formal lösen. Im Unterschied zu (6.2) existiert solch eine Lösung für alle Zeiten, während im parabolischen Fall eine Lösung für negative Zeiten im allgemeinen nicht existiert, da die Exponentialfaktoren sofort die Konvergenz der Reihe zerstören; die rückwärtige Wärmeleitungsgleichung ist allgemein nicht lösbar.

Anschaulich bedeutet die angegebene Lösung, dass die betrachtete Membran eine Überlagerung von Eigenschwingungen ausführt. In der Musik bezeichnet man λ_1 als Grundton und λ_i als Obertöne. Diese sind von der Geometrie des Instrumentes abhängig.

Im Falle endlicher Summen liegt eine klassische Lösung vor und die formalen Rechnungen werden sofort rigoros.

7. Maximumprinzipien für parabolische Gleichungen

Wir folgen [7].

Theorem 7.1 (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $T > 0$. Seien a^{ij}, $b^i \in L^\infty$. Sei a^{ij} ohne Einschränkung symmetrisch. Nehme an, dass ein $\vartheta > 0$ existiert, so dass überall in $\Omega \times (0,T)$*

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Erfülle $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^1\big(\overline{\Omega \times [0,T]}\big)$ (in t würde auch C^1 genügen) die parabolische Differentialgleichung

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \ge 0.$$

Gelte $u < M$ in $\Omega \times (0,T)$ und $u(x_0,t_0) = M$ für ein $x_0 \in \partial\Omega$ und ein $t_0 \in (0,T)$. Sei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$. Dann gilt

$$\langle Du, \nu\rangle(x_0,t_0) > 0.$$

Beweis. Da $\partial\Omega \in C^2$ ist, erfüllt Ω eine innere Kugelbedingung. Es existiert also ein Ball $B_r(x_1) \subset \Omega$, so dass $\partial B_r(x_1) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ gilt. Gelte ohne Einschränkung $r < t_0$.

Wir betrachten nun die Mengen

$$\begin{aligned} D :=& \hat{B}_r(x_1,t_0) \cap \hat{B}_{r/2}(x_0,t_0) \cap \{t < t_0\},\\ C' :=& \partial D \cap \hat{B}_r(x_1,t_0) \cap \{t < t_0\},\\ C'' :=& \partial D \cap \hat{B}_{r/2}(x_0,t_0) \cap \{t < t_0\}, \end{aligned}$$

wobei wir mit $\hat{B}$ in diesem Kapitel andeuten wollen, dass es sich dabei um Bälle in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ handelt.

Es gilt

(i) $u < M$ auf C'', $u = M$ in (x_0,t_0) und
(ii) es existiert $\eta > 0$, so dass $u \le M - \eta$ auf C' ist.

Definiere

$$v(x,t) := \exp\left(-\alpha[|x-x_1|^2 + (t-t_0)^2]\right) - \exp(-\alpha r^2)$$

und erhalte

$$\begin{aligned} v_i &= \exp(-\alpha[\ldots])(-2\alpha(x-x_1)_i),\\ v_{ij} &= \exp(-\alpha[\ldots])\left\{(-2\alpha(x-x_1)_i)(-2\alpha(x-x_1)_j) - 2\alpha\delta_{ij}\right\},\\ \dot{v} &= \exp(-\alpha[\ldots])(-2\alpha(t-t_0)). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} Lv =& 2\alpha\exp(-\alpha[\ldots])\cdot\\ &\cdot\left\{2\alpha a^{ij}(x-x_1)_i(x-x_1)_j - a^{ij}\delta_{ij} - b^i(x-x_1)_i + (t-t_0)\right\} \end{aligned}$$

$$> 0 \quad \text{in } \overline{D} \quad \text{für } \alpha \gg 1.$$

Definiere $w := u + \varepsilon v$ mit einer noch geeignet zu fixierenden Konstanten $0 < \varepsilon \ll 1$. Es gilt stets

$$Lw = Lu + \varepsilon Lv > 0 \quad \text{in } D.$$

Für genügend kleine $\varepsilon > 0$ gilt $w < M$ auf C'. Auf $\partial \hat{B}_r(x_1, t_0) \supset C''$ gilt $v = 0$. Somit erhalten wir $w < M$ in C'' mit Gleichheit in (x_0, t_0).

Wir behaupten nun, dass $w < M$ in D gilt: Im zeitlich ersten Punkt in D mit $w = M$ (der aufgrund der obigen Überlegungen nicht auf dem parabolischen Rand von D liegen kann) gilt $\frac{\partial w}{\partial t} \geq 0$, $w_{ij} \leq 0$ im Sinne von Matrizen und $w_i = 0$ für alle i. Hieraus folgt in diesem Punkt $Lw \leq 0$. Widerspruch. Die Behauptung folgt.

Da in (x_0, t_0) aber $w = M$ gilt, erhalten wir dort

$$0 \leq \langle Dw, \nu \rangle = \langle Du, \nu \rangle + \varepsilon \langle Dv, \nu \rangle,$$

$$\langle Dv, \nu \rangle = \left\langle Dv, \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|} \right\rangle = -2\alpha \exp(-\alpha[\ldots])|x_0 - x_1| < 0.$$

Hieraus folgt

$$\langle Du, \nu \rangle (x_0, t_0) > 0.$$

□

Lemma 7.2. *Sei L wie in Theorem 7.1 und $u \in C^2$ erfülle in*

$$K_{t_1} := \left\{ (x,t) : |x - x_1|^2 + (t - t_1)^2 < R,\, t \leq t_1 \right\}$$

die Ungleichung $Lu \geq 0$. Gelte $u < M$ in $K_{t_1} \cap \{t < t_1\}$ und $u(x_1, t_1) \geq u(x, t_1)$ für alle x. Dann folgt $u(x_1, t_1) < M$.

Beweis. Nehme an, dass doch $u(x_1, t_1) = M$ gilt.

Definiere für eine noch zu fixierende Konstante $\alpha > 0$

$$D := \{(x,t) \in K_{t_1} : |x - x_1|^2 + \alpha(t - t_1) < 0\},$$
$$C' := (\partial K_{t_1} \cap D) \setminus \{(x_1, t_1)\},$$

und

$$C'' := \partial D \cap K_{t_1} = \{(x,t) \in K_{t_1} : |x - x_1|^2 + \alpha(t - t_1) = 0\}.$$

Definiere weiterhin

$$v(x,t) := \exp\left(-[|x - x_1|^2 + \alpha(t - t_1)] \right) - 1.$$

Dann gilt

$$Lv = \exp(-[\ldots]) \cdot \left\{ 4a^{ij}(x - x_1)_i (x - x_1)_j - 2a^{ij}\delta_{ij} - 2b^i (x - x_1)_i + \alpha \right\}.$$

Fixiere $\alpha \gg 1$, so dass $Lv > 0$ in $K := K_{t_1}$ gilt.

Nach Voraussetzung gilt $u < M$ auf C'. Daher gibt es $\eta > 0$ so dass $u \leq M - \eta$ auf C' gilt. Definiere $w(x,t) := u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$ für ein noch zu fixierendes ε mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Da auf C'' nach Definition $v = 0$ gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

(i) $Lw = Lu + \varepsilon Lv > 0$ in D,

(ii) $w = u + \varepsilon v < M$ auf C',

(iii) $w = e + \varepsilon v \le M$ auf C''.

Da $w(x_1, t_1) = M$ ist, w am Rand $\overline{C' \cup C''}$ die Ungleichung $w \le M$ erfüllt und wegen $Lw > 0$ in D nimmt auch die Funktion $w = w|_{\overline{D}}$ ihr Maximum in (x_1, t_1) an. Wir erhalten dort $\frac{\partial w}{\partial t} \ge 0$ und $\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha < 0$. Somit ist $\frac{\partial u}{\partial t} \ge -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} > 0$. Aufgrund der vorausgesetzten Maximalbedingung an u folgt aber dort auch $u_i = 0$ für alle i und $u_{ij} \le 0$ (im Sinne von Matrizen). Somit erhalten wir $Lu < 0$. Widerspruch. $\square$

Lemma 7.3. *Sei L wie in Theorem 7.1, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen. Sei $0 < T < \infty$ und sei $u \in C^2(\Omega \times (0, T))$. Erfülle u die Ungleichung $Lu \ge 0$ in $\Omega \times (0, T)$. Sei $\sup\limits_{\Omega \times (0,T)} u = M$. Sei K eine Kugel, $\overline{K} \subset \Omega \times (0, T)$. Gelte $u < M$ in K und $u = M$ für einen Punkt P auf ∂K. Dann ist P der Nord- oder der Südpol.*

Beweis. Sei $K = B_R((\bar{x}, \bar{t}))$. Wir dürfen annehmen, dass $u|_{\overline{K}}$ nur in P den Wert M annimmt, sonst betrachten wir eine kleinere Kugel. Sei $P = (x_1, t_1)$. Es genügt, die Annahme $x_1 \ne \bar{x}$ zu einem Widerspruch zu führen. Wähle $R_1 < |x_1 - \bar{x}|$. (Dies funktioniert in den Polen nicht.) Verkleinere R_1 – falls nötig – so dass $K_1 := B^{n+1}_{R_1}((x_1, t_1)) \Subset \Omega \times (0, T)$ ist. Seien $C' := \partial B_{R_1}((x_1, t_1)) \cap B_R((\bar{x}, \bar{t}))$ und $C'' := \partial B_{R_1}((x_1, t_1)) \cap \complement B_R((\bar{x}, \bar{t}))$. Da in K die Ungleichung $M > u$ gilt und da Gleichheit in $\overline{K}$ nur in P eintritt, existiert ein $\eta > 0$, so dass $u \le M - \eta$ auf C' und $u \le M$ auf $C'' \subset \Omega \times (0, T)$ gelten. Definiere

$$v(x, t) := \exp\left(-\alpha\left[|x - \bar{x}|^2 + (t - \bar{t})^2\right]\right) - \exp\left(-\alpha R^2\right).$$

Wir erhalten

$$Lv = 2\alpha e^{-\alpha[\ldots]} \cdot \left\{2\alpha a^{ij}(x - \bar{x})_i (x - \bar{x})_j - a^{ij}\delta_{ij} - b^i (x - \bar{x})_i + (t - \bar{t})\right\}.$$

In $\overline{K_1}$ gilt $|x - \bar{x}| \ge |x_1 - \bar{x}| - R_1 > 0$. Für $\alpha \gg 1$ hinreichend groß erhalten wir daher

$$Lv > 0 \quad \text{in } \overline{K_1}.$$

Definiere $w(x, t) := u(x, t) + \varepsilon v(x, t)$ für $\varepsilon > 0$. Da $u \le M - \eta$ auf C' gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass noch

$$w = u + \varepsilon v < M \quad \text{auf } C'$$

gilt. Auf dem „offenen" Sphärenteil C'' ist v negativ. Da dort aber $u \le M$ gilt, erhalten wir auch auf C'' die Ungleichung

$$w = u + \varepsilon v < M.$$

Zusammengenommen ist $w < M$ auf ∂K_1 erfüllt. Nach Definition war $v = 0$ auf ∂K. Somit ist

$$w(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) + \varepsilon v(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) = M.$$

Dies ist ein Widerspruch, denn es gelten $Lw > 0$ in K_1 und $w < M$ auf ∂K_1. Das Lemma folgt. $\square$

Lemma 7.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $T > 0$. Sei L wie in Theorem 7.1 und $u \in C^2(\Omega \times (0, T))$ erfülle die Ungleichung $Lu \ge 0$. Gelte $u \le M$ in $\Omega \times (0, T)$ und*

$$u < M \quad \textit{in } (x_1, t_1) \in \Omega \times (0, T).$$

Dann gilt

$$u < M \quad \textit{auf } \Omega \times \{t_1\}.$$

Beweis. Es genügt, zu zeigen, dass es kein (zusammenhängendes) Geradenstück l in $\Omega \times (0,T)$ geben kann, so dass

$$\begin{aligned} (x_0,t_1) \in l, &\quad (x_1,t_1) \in l,\\ u(x_0,t_1) = M, &\quad u(x_1,t_1) < M. \end{aligned}$$

Definiere

$$d_0 := \min\left\{|x_1-x_0|, \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(\{((1-\lambda)x_0+\lambda x_1,t_1)\,:\,0\le\lambda\le 1\},\partial(\Omega\times(0,T)))\right\},$$

wobei der zweite Term gleich dem halben Abstand der Verbindungsstrecke von (x_0,t_1) nach (x_1,t_1) bis zum Rand ist. Definiere

$$y_\tau := x_0 + \tau\cdot\frac{x_1-x_0}{|x_1-x_0|}$$

für $0 \le \tau \le |x_1-x_0|$, also einen Punkt auf dieser Verbindungsstrecke. Zunächst dürfen wir ohne Einschränkung $u(y_\tau,t_1) < M$ für $0 < \tau \le |x_1-x_0|$ annehmen, denn sonst verschieben wir x_0 solange auf x_1 zu, bis dies erfüllt ist. Definiere für $\tau \le d_0$

$$d(\tau) := \operatorname{dist}((y_\tau,t_1),\{u=M\}).$$

Da $u(x_0,t_1) = M$ ist, erhalten wir $d(\tau) \le \tau$. Nach Lemma 7.3 liegt der jeweils nächste Punkt mit $u = M$ direkt über oder direkt unter (y_τ,t_1), es gilt also

$$u(y_\tau,t_1+d(\tau)) = M \quad\text{oder}\quad u(y_\tau,t_1-d(\tau)) = M.$$

Aus

$$|(y_{\tau+\delta},t_1)-(y_\tau,t_1\pm d(\tau))| = \sqrt{d(\tau)^2+\delta^2}.$$

folgt

$$d(\tau+\delta) \le \sqrt{d(\tau)^2+\delta^2} < d(\tau) + \frac{\delta^2}{2d(\tau)}. \tag{7.1}$$

Die zweite Ungleichung folgt dabei sofort durch Quadrieren, da $d(\tau)$ nach Annahme für $t>0$ strikt positiv ist. Ebenso folgt $d(\tau+\delta)^2+\delta^2 \ge d(\tau)^2$. Hieraus erhalten wir $d(\tau+\delta) \ge \sqrt{d(\tau)^2-\delta^2}$ für $\delta > 0$ so klein, dass die Differenz unter der Wurzel positiv ist. Fixiere $\tau > 0$ und $\delta > 0$, so dass $0 < \delta < d(\tau)$ ist. Wir unterteilen das Intervall $(\tau,\tau+\delta)$ in kleine Teilintervalle und erhalten aus (7.1)

$$\begin{aligned} d\left(\tau+\tfrac{j+1}{m}\delta\right) - d\left(\tau+\tfrac{j}{m}\delta\right) &\le \frac{\delta^2}{2m^2 d\left(\tau+\frac{j}{m}\delta\right)}\\ &\le \frac{\delta^2}{2m^2\sqrt{d(\tau)^2-\left(\frac{j}{m}\right)^2\delta^2}} \le \frac{\delta^2}{2m^2\sqrt{d(\tau)^2-\delta^2}} \end{aligned}$$

für $j = 0,\ldots,m-1$. Wir summieren diese Ungleichung auf. Es tritt eine Teleskopsumme auf. Diese vereinfacht sich zu

$$d(\tau+\delta) - d(\tau) \le \frac{\delta^2}{2n\sqrt{d(\tau)^2-\delta^2}}.$$

Mit $n\to\infty$ folgt

$$d(\tau+\delta) \le d(\tau) \quad \text{für } \delta > 0 \text{ klein genug},$$

d ist also monoton fallend. Andererseits gilt $d(\tau) \le \tau$. Somit ist $d(\tau) \equiv 0$ für alle $0 \le \tau \le d_0$. Daher ist $u(y_\tau,t_1) = M$ für $0 \le \tau \le d_0$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme $u(y_\tau,t_1) < M$ für $0 < \tau < |x_1-x_0|$. (Alternativ könnten wir auch das obige Argument iterieren und erhielten dann aus $u(x_1, t_1) = M$ einen Widerspruch.) $\square$

Theorem 7.5 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend sowie $0 < T < \infty$. Seien a^{ij}, $b^i \in L^\infty$ und gelte die Elliptizitätsbedingung*
$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2 \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n$$
für ein $\vartheta > 0$. Erfülle $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ die parabolische Differentialgleichung
$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \ge 0.$$
Sei $u \le M$ in $\overline{\Omega} \times [0,T]$. Gibt es $(x_0,t_0) \in \Omega \times (0,T)$ mit
$$u(x_0,t_0) = M,$$
so folgt
$$u = M \quad \textit{in } \overline{\Omega} \times [0,t_0].$$

Beweis. Aus Lemma 7.4 erhalten wir
$$u = M \quad \text{in } \overline{\Omega} \times \{t_0\}.$$
Angenommen, es gibt $(x_1,t_1) \in \Omega \times (0,t_0)$ mit $u(x_1,t_1) < M$. Sei
$$\tau := \sup\{t < t_0 : u(x_1,\sigma) < M \text{ für alle } \sigma \in (t_1,t)\}.$$
Dann ist $u(x_1,\tau) = M$. Da $u(x_1,t) < M$ für $t_1 \le t < \tau$ gilt, folgt nach Lemma 7.4
$$u < M \quad \text{in } \Omega \times [t_1,\tau)$$
und nach Lemma 7.2 erhalten wir auch $u(x_1,\tau) < M$. Widerspruch. $\square$

Theorem 7.6 (Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $0 < T < \infty$. Sei L wie in Theorem 7.5. Erfülle $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ in $\Omega \times (0,T)$ die Differentialgleichung $Lu = 0$, so gilt*
$$\inf_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u \le \inf_{\Omega\times(0,T)} u \le \sup_{\Omega\times(0,T)} u \le \sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u,$$
wobei
$$\mathcal{P}(\Omega \times (0,T)) := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$$
der parabolische Rand des Gebietes $\Omega \times (0,T)$ ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus Theorem 7.5, kann aber auch direkt mit einem einfacheren Beweis – ähnlich wie das elliptische Maximumprinzip – gezeigt werden. $\square$

Theorem 7.7 (Eindeutigkeit)**.** *Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.6 sind Lösungen von $Lu = 0$ eindeutig durch ihre Werte auf $(\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ bestimmt.*

Beweis. Wende das Maximumprinzip auf die Differenz von zwei Lösungen an. $\square$

Theorem 7.8 (Maximumprinzip auf $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei* $0 < T < \infty$ *und*

$$u \in C^2\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C^0\left(\mathbb{R}^n \times [0,T]\right).$$

Löst u *das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u = g & \textit{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

und gibt es Konstanten a, $A > 0$, *so dass*

$$u(x,t) \le A \cdot e^{a|x|^2}$$

ist, so gilt

$$\sup\limits_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} g.$$

Beweis. Es genügt, $u \le \sup g$ auf einem kleinen Zeitintervall $(0,T)$ zu zeigen, so dass $4aT < 1$ gilt. Wir nehmen daher ohne Einschränkung $4aT < 1$ an. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $4a(T+\varepsilon) < 1$ gilt und definiere $\gamma > 0$ durch $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu > 0$ definieren wir

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right).$$

Behauptung: Es gilt $\dot{v} = \Delta v$.

Dafür genügt es, nachzuweisen, dass

$$w = (T-t)^{-n/2} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. (Man könnte auch $y = 0$ annehmen.) Wir bemerken, dass dies (bis auf unwichtige Konstanten) gerade die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{w} =& \frac{n}{2}(T-t)^{-n/2-1} \cdot \exp(\ldots) + (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{|x-y|^2}{4(T-t)^2}, \\ w_i =& (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2(x-y)_i}{4(T-t)}, \\ w_{ij} =& (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2(x-y)_i}{4(T-t)} \cdot \frac{2(x-y)_j}{4(T-t)} \\ &+ (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2\delta_{ij}}{4(T-t)}, \\ \dot{w} - \Delta w =& \exp(\ldots) \cdot (T-t)^{-n/2-1} \cdot \left\{ \frac{n}{2} + \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} - \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} - \frac{1}{2}\delta^{ij}\delta_{ij} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Setze $r := |x-y|$ und betrachte v für große Werte von r. Es gilt

$$\begin{aligned} v(x,t) =& u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ \le& Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} \cdot e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

nach Voraussetzung an u und da beide Faktoren einzeln durch Weglassen von t kleiner werden

$$\leq A \cdot e^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} \cdot e^{(a+\gamma)\cdot r^2}$$

aufgrund der Dreiecksungleichung und nach Definition von γ. Für $r \gg 1$ wird dies beliebig klein, insbesondere kleiner als $\sup g$. Somit ist $v \leq \sup g$ auf $\partial B_R(y)\times(0,T)$, falls $R \gg 1$ groß genug ist. Weiterhin gilt aber $v \leq \sup g$ in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Aufgrund des parabolischen Maximumprinzips folgt also

$$v \leq \sup g \quad \text{in } B_R(y) \times (0,T).$$

Wie wir oben gesehen haben gilt diese Ungleichung aber auch außerhalb von $B_R(y)$. Also erhalten wir überall

$$v \leq \sup g.$$

R hängt zwar von μ ab, aber die obige Abschätzung ist von R unabhängig. Lasse also $\mu \searrow 0$. Es folgt

$$u \leq \sup g.$$

□

Theorem 7.9 (Eindeutigkeit mit Energieabschätzungen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ des Randwertproblems*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g & \text{auf } \mathcal{P}(\Omega \times (0,T)), \end{cases}$$

wobei wiederum $\mathcal{P}(\Omega \times (0,T)) := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0,T))$ der parabolische Rand ist.

Beweis. Die Differenz w zweier solcher Lösungen erfüllt

$$\begin{cases} \dot{w} = \Delta w & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ w = 0 & \text{auf } \mathcal{P}(\Omega \times (0,T)). \end{cases}$$

Definiere

$$e(t) := \int\limits_\Omega w^2(x,t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt}e(t) = 2\int\limits_\Omega w \cdot \dot{w} = 2\int\limits_\Omega w \cdot \Delta w = -2\int\limits_\Omega |Dw|^2 \leq 0.$$

Damit ist $e(t) \leq e(0) = 0$ und wir erhalten $w = 0$ in $\Omega \times [0,T]$. □

Da die Wärmeleitungsgleichung die Entwicklung der Temperaturverteilung unter idealisierten Bedingungen beschreibt, besagt das folgende Theorem, dass die gleiche Temperaturverteilung am Ende nur entstehen kann, wenn diese Verteilung auch schon am Anfang gleich war.

Theorem 7.10 (Rückwärtige Eindeutigkeit). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $0 < T < \infty$. Seien u und $\tilde{u}$ glatte Lösungen von*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u, & \dot{\tilde{u}} = \Delta \tilde{u} \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g, & \tilde{u} = g \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

(Die Randbedingung wird also nur an den „seitlichen“ Rand gestellt.)

Gilt $u(x,T) = \tilde{u}(x,T)$ für $x \in \Omega$, so folgt $u \equiv \tilde{u}$ in $\Omega \times (0,T)$.

Beweis. Setze $w := u - \tilde{u}$ und

$$e(t) := \int\limits_\Omega w^2(x,t).$$

Wie im Beweis von Theorem 7.9 folgt

$$\dot{e}(t) = -2 \int\limits_\Omega |Dw|^2$$

und daraus ergibt sich

$$\ddot{e}(t) = -4 \int\limits_\Omega \langle Dw, D\dot{w}\rangle = 4 \int\limits_\Omega \Delta w \cdot \dot{w} = 4 \int\limits_\Omega (\Delta w)^2,$$

denn aufgrund der Randbedingung ist $\dot{w} = 0$ auf $\partial\Omega$ und wir dürfen ohnen Randterm integrieren. Wegen $w = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ erhalten wir

$$\int\limits_\Omega |Dw|^2 = -\int\limits_\Omega w \cdot \Delta w \le \left(\int\limits_\Omega w^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega (\Delta w)^2\right)^{1/2}$$

und somit

$$(\dot{e}(t))^2 = 4 \left(\int\limits_\Omega |Dw|^2\right)^2 \le 4 \int\limits_\Omega w^2 \cdot \int\limits_\Omega (\Delta w)^2 = e(t) \cdot \ddot{e}(t).$$

Falls die Behauptung nicht gilt, gibt es $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ mit

$$e(t) > 0 \quad \text{für } t_1 \le t < t_2 \quad \text{und } e(t_2) = 0.$$

Definiere

$$f(t) := \log e(t) \quad \text{für } t_1 \le t < t_2.$$

Wir erhalten

$$\dot{f} = \frac{\dot{e}}{e} \quad \text{und} \quad \ddot{f} = \frac{e\ddot{e} - (\dot{e})^2}{e^2} \ge 0$$

aufgrund der obigen Rechnung. Dies bedeutet, dass f im Intervall (t_1, t_2) konvex ist. Somit gilt insbesondere

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \le (1-\tau) f(t_1) + \tau f(t)$$

für $t_1 < t < t_2$ und $0 \le \tau \le 1$. Wir wenden die Exponentialfunktion auf diese Ungleichung an und erhalten nach Definition von f

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \le e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t)^\tau.$$

Da die Funktion e samt ihren Ableitungen für glatte Lösungen in t stetig ist, erhalten wir

$$0 \le e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t_2)^\tau.$$

Da aber $e(t_2) = 0$ ist, folgt $e = 0$ in ganz (t_1, t_2). Widerspruch. □

8. Die Wellengleichung

Theorem 8.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, und $0 < T < \infty$. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g & \text{auf } (\partial\Omega \times (0,T)) \cup (\Omega \times \{0\}), \\ u_t = h & \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Dann ist u die einzige Lösung mit dieser Differenzierbarkeit.

Beweis. Sei $\tilde{u}$ eine weitere solche Lösung. Definiere $w := u - \tilde{u}$ und die Energie

$$e(t) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega w_t^2(x,t) + |Dw(x,t)|^2 \, dx$$

für $0 \le t < T$. Es gilt mit partieller Integration und aufgrund der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} e(t) = \int\limits_\Omega w_t \cdot w_{tt} + \langle Dw, Dw_t \rangle \, dx = \int\limits_\Omega w_t (w_{tt} - \Delta w) \, dw = 0.$$

Randterme treten bei der partiellen Integration nicht auf, denn aus $w = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ folgt dort auch $w_t = 0$. Somit gilt $e(t) = e(0) = 0$ aufgrund der gleichen Anfangsdaten; es ist $w(\cdot, 0) = 0$. Wir erhalten $w_t = 0$ und $Dw = 0$. Also folgt $w = 0$ und daher $u = \tilde{u}$. □

Theorem 8.2 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)**.** *Sei $u \in C^2$ eine Lösung von*

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei $t_0 > 0$. Gilt $u \equiv u_t \equiv 0$ in $B_{t_0}(x_0) \times \{0\}$, so folgt $u \equiv 0$ im Kegel

$$C := \{(x,t) \,:\, 0 \le t \le t_0,\, |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$

Durch Betrachten der Differenz erhalten wir: Besitzen zwei Lösungen (entsprechender Regularität) gleiche Anfangswerte in $B_{t_0}(x_0)$, so stimmen diese in C überein.

Beweis. Definiere

$$e(t) := \frac{1}{2} \int\limits_{B_{t_0 - t}(x_0)} u_t^2(x,t) + |Du(x,t)|^2 \, dx$$

für $0 \le t \le t_0$. Das Integrationsgebiet ist zeitabhängig. Daher benutzt man zum Differenzieren beispielsweise

$$\int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} \ldots = \int\limits_0^{t_0-t} \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} \ldots \, d\mathcal{H}^{n-1} \, d\rho.$$

Es gilt für $0 \le t \le t_0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e(t) &= \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} u_t u_{tt} + \langle Du, Du_t \rangle - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(u_t^2 + |Du|^2\right) \\
&= \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} u_t(u_{tt} - \Delta u) + \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(u_t^2 + |Du|^2\right) \\
&= \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |Du|^2 \right) \le 0,
\end{aligned}$$

denn es gilt

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \le |Du| \cdot |u_t| \le \frac{1}{2} |u_t|^2 + \frac{1}{2} |Du|^2.$$

Somit ist $e(t) \le 0$ für alle $0 \le t < t_0$. Wie im letzten Beweis gelten daher $u_t = 0$ und $Du = 0$ in C. Somit folgt in der Menge C die Behauptung $u = 0$. □

Anhang A. Divergenzsatz

Theorem A.1 (Divergenzsatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1, $\xi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} \xi = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu \rangle.$$

Beweis.

a) Wir schreiben $x = (\hat{x}, x^n)$ mit $\hat{x} = (x^1, \ldots, x^{n-1})$. Sei $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Es gilt für $i < n$

$$D_i \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} f(\hat{x}, x^n) \, dx^n = \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} D_i f(\hat{x}, x^n) \, dx^n + f(\varphi(\hat{x}), x^n) D_i \varphi(\hat{x}).$$

b) $\operatorname{div} \xi := D_i \xi^i$ ist unter linearen invertierbaren Transformationen und Translationen invariant.

   Dies ist für Translationen klar.

Sei $\tilde{x}^j = a^j_i x^i$ eine lineare Transformation. Dann gilt $\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} = a^j_i$ und $\tilde{\xi}^j = a^j_i \xi^i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\tilde{\xi}^i &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(a^i_l \xi^l\right)\\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} a^i_l \frac{\partial}{\partial x^k}\xi^l, \quad \text{da } a^i_k \text{ ortsunabhängig}\\
&= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^k}\xi^l\\
&= \delta^k_l \frac{\partial}{\partial x^k}\xi^l \quad \text{(Kettenregel)}\\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}\xi^k = \operatorname{div}\xi.
\end{aligned}$$

c) Überdecke $\overline{\Omega}$ durch endlich viele offene Mengen V_i, so dass jede dieser Mengen entweder ganz in Ω liegt oder einer Menge U wie folgt enthalten ist:

Nach einer geeigneten Rotation gibt es ein offenes und beschränktes $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so dass $U = \Sigma \times (0,2)$. Es gibt $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $\frac{1}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}$, mit $\{(\hat{x}, x^n) : x^n < \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = U \cap \Omega$, $\{(\hat{x}, x^n) : x^n = \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = \operatorname{graph}\varphi|_\Sigma = U \cap \partial\Omega$, $\{(\hat{x}, x^n) : x^n > \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = U \cap \complement\Omega$.

d) Sei η_i eine endliche, $\{V_i\}$ und $\complement\overline{\Omega}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. (Existenzbeweis über C^∞_c-Funktionen, die auf $B_1(0)$ positiv und außerhalb von $B_2(0)$ gleich 0 sind und mit Hilfe der Lebesgue-Zahl.)

e) Reduktion auf Vektorfelder ξ mit Träger in einem V_i:

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \operatorname{div}\xi &= \int\limits_\Omega \operatorname{div}\left(\xi\sum_{i=1}^N \eta_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \operatorname{div}(\xi\eta_i) = \sum_{i=1}^N \int\limits_{V_i\cap\Omega} \operatorname{div}(\xi\eta_i).
\end{aligned}$$

Nehme nun an, dass der Divergenzsatz auf Gebieten U wie oben schon gezeigt sei. Dann folgt, da $\xi\eta_i$ auf $(\partial\Sigma \times [0,2]) \cup (\Sigma \times \{0\}) \cup (\Sigma \times \{2\})$ verschwindet,

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \operatorname{div}\xi &= \sum_{i=1}^N \int\limits_{V_i\cap\partial\Omega} \langle \xi\eta_i, \nu\rangle\\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^N \eta_i \langle \xi, \nu\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu\rangle.
\end{aligned}$$

f) Wir dürfen also annehmen, dass ξ kompakten Träger in U hat. Wir benutzen schließlich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass das Volumenmaß auf $\partial\Omega$ lokal durch $\sqrt{1+|D\varphi|^2}\,d\hat{x}$ gegeben ist, dass $\frac{(-D\varphi,1)}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist und $\operatorname{supp}\xi \Subset U$.

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div}\xi = \int\limits_\Omega D_i\xi^i$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\Sigma} \int\limits_{0}^{\varphi(\hat{x})} D_i \xi^i \, dx^n \, d\hat{x} \\
&= \int\limits_{\Sigma} \int\limits_{0}^{\varphi(\hat{x})} \sum_{i=1}^{n-1} D_i \xi^i \, dx^n \, d\hat{x} + \int\limits_{\Sigma} \int\limits_{0}^{\varphi(\hat{x})} D_n \xi^n \, dx^n \, d\hat{x} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\Sigma} \left\{ D_i \int\limits_{0}^{\varphi(\hat{x})} \xi^i(\hat{x}, x^n) \, dx^n - \xi^i(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) D_i \varphi(\hat{x}) \right\} d\hat{x} \\
&\quad + \int\limits_{\Sigma} \xi^n(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - 0 \, d\hat{x} \\
&= \int\limits_{\Sigma} - \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) D_i \varphi(\hat{x}) + \xi^n(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) \, d\hat{x} \\
&= \int\limits_{\Sigma} \left\langle \xi(\hat{x}, \varphi(\hat{x})), \frac{(-D\varphi, 1)}{\sqrt{1 + |D\varphi|^2}} \right\rangle \sqrt{1 + |D\varphi|^2} \, d\hat{x} \\
&= \int\limits_{\partial\Omega \cap U} \langle \xi, \nu \rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu \rangle .
\end{aligned}
$$

□

Anhang B. Hölderräume

Die im folgenden definierten Räume $C^{\cdot}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $C^{\cdot,\cdot}\left(\overline{\Omega}\right)$ sind Banachräume.

Definition B.1 (Hölderräume)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Es ist

(i) $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, falls u sich stetig bis zum Rand fortsetzen läßt und

$$\|u\|_{C^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u| < \infty.$$

(ii) $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, falls $D^\alpha u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ für alle $|\alpha| \leq k$ und

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u| < \infty.$$

(iii) $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, falls $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^0(\Omega)} + \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \equiv \|u\|_{C^0(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(iv) $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, falls $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ und

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(v) $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega'}\right)$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist kein Banachraum.

Für $0 < \alpha < 1$ heißen die Räume $C^{k,\alpha}$ Hölderräume. $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$ heißt Höldernorm, $[\cdot]_{C^{0,\alpha}}$ heißt Hölderhalbnorm.

Beispiel B.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega = (-1,1)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist $u(x) := |x|^\alpha$ hölderstetig. Es ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Anhang C. Zerlegung der Eins

Definition C.1.

(i) Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ mit $U_i \subset \mathbb{R}^n$ heißt Überdeckung einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, falls $\Omega \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ gilt.

(ii) Seien $(U_i)_{i\in I}$ und $(V_j)_{j\in J}$ Überdeckungen. Dann heißt $(V_j)_{j\in J}$ Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$, falls es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ gibt, so dass $V_j \subset U_i$ ist.

(iii) Sei $(U_i)_{i\in I}$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, eine Überdeckung. Dann heißt die Überdeckung lokal endlich, wenn es für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B_r(x) \cap U_i \neq \emptyset$$

nur für höchstens endlich viele $i \in I$ gilt.

Bemerkung C.2.

(i) In diesem Kapitel werden wir nur Überdeckungen durch offene Mengen betrachen ohne die Offenheit jeweils neu zu fordern.

(ii) Wie beschränken uns hier in der Darstellung auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Auch in parakompakten Räumen (in denen nach Definition offene Überdeckungen lokal endliche Verfeinerungen besitzen) gibt es Zerlegungen der Eins. Mannigfaltigkeiten sind parakompakte Räume.

(iii) Da wir hier nur Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ betrachten, konstruieren wir stets glatte Zerlegungen der Eins.

Lemma C.3. *Es gibt $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le u$, $u > 0$ in $\overline{B_1(0)}$ und* $\operatorname{supp} u \Subset B_2(0)$.

Beweisskizze. Definiere

$$u(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{2-|x|^2}}, & |x| < \sqrt{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Per Induktion sieht man, dass alle partiellen Ableitungen von u in $B_{\sqrt{2}}(0)$ von der Form $\frac{P(x^1,\ldots,x^n)}{(2-|x|^2)^k}u(x)$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ und eine Polynom P sind. Daher ist $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Die anderen Behauptungen sind klar. □

Lemma C.4. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es Folgen $x_k \in \mathbb{R}^n$ und $r_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $(B_{r_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_{2r_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete lokal endliche Verfeinerungen und Überdeckungen des $\mathbb{R}^n$ sind.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da die Mengen U_i den gesamten $\mathbb{R}^n$ überdecken und offen sind, gibt es ein $r = r(x) > 0$ mit $r(x) \le 1$ und ein $i \in I$, so dass $B_{2r(x)}(x) \subset U_i$ ist. Alle diese Bälle überdecken den $\mathbb{R}^n$.

Definiere für $k \in \mathbb{N}$ die Annuli $A_k := \overline{B_k(0)} \setminus B_{k-1}(0)$. Diese sind kompakt. Somit gibt es für jedes k endlich viele Bälle $B_{r(x)}(x)$, die A_k überdecken. Die Folge aller hier ausgewählten Punkte x_l und Radien r_l leistet das Gewünschte. □

Definition C.5 (Zerlegung der Eins)**.** Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $A \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Eine Zerlegung der Eins (zur Menge A) ist eine Familie $(\eta_j)_{j\in J}$ von Funktionen $\eta_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \eta_j$ für alle $j \in J$ und
$$\sum_{j\in J} \eta_j(x) = 1$$
für alle $x \in A$.

(ii) Eine Zerlegung der Eins $(\eta_j)_{j\in J}$ heißt glatt, falls $\eta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $j \in J$ gilt.

(iii) Eine Zerlegung der Eins $(\eta_j)_{j\in J}$ heißt der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet, wenn es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ gibt, so dass $\operatorname{supp} \eta_j \subset U_i$ ist.

Theorem C.6. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des $\mathbb{R}^n$, d. h. eine Überdeckung durch offene Mengen. Dann gibt es eine glatte, der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.*

Beweis. Sei $B_{r_k}(x_k)$ eine Folge von Bällen wie in Lemma C.4. Wir definieren C^∞_c-Funktionen
$$\tilde\eta_k(x) := u\left(\frac{x - x_k}{r_k}\right),$$
wobei u wie in Lemma C.3 ist. Nach Konstruktion gibt es zu jedem $k \in N$ ein (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmtes) $i \in I$, so dass $\operatorname{supp} \tilde\eta_k(x) \subset U_i$ ist. Für festes $i \in I$ summieren wir alle diese Funktionen $\tilde\eta_k$ auf und erhalten Funktionen $\hat\eta_i$. Aufgrund der lokalen Endlichkeit der Überdeckung sind diese Summen glatt und erfüllen alle geforderten Eigenschaften bis auf die Normierung. Daher definieren wir
$$\eta_i(x) := \frac{\hat\eta_i(x)}{\sum\limits_{i\in I} \hat\eta_i(x)}$$
und erhalten $\sum\limits_{i\in I} \eta_i \equiv 1$ in $\mathbb{R}^n$. □

Korollar C.7. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert eine der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins zur Menge A.*

Beweis. Setze $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann überdecken U_0 und $(U_i)_{i\in I}$ den gesamten $\mathbb{R}^n$. Seien η_0 und $(\eta_i)_{i\in I}$ die in Theorem C.6 zu dieser Überdeckung konstruierten Funktionen. Dann bilden $(\eta_i)_{i\in I}$ die geforderte Zerlegung der Eins zur Menge A. □

Literatur

1. Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
2. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
3. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, (Vorlesungsmitschrift).
4. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
6. Jürgen Jost, *Partial differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 214, Springer-Verlag, New York, 2002.
7. Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984, Corrected reprint of the 1967 original.
8. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
9. William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989.

Oliver C. Schnürer, Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@math.fu-berlin.de`