PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu Partielle Differentialgleichungen I. Benützt
- an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2004/5,
- an der ANU Canberra im 2nd term 2008,
- an der Freien Universität Berlin im Sommersemester 2009.
- an der Universität Konstanz im Wintersemester 2012/3, 2016/17 und 2021/22.

Vielen Dank insbesondere an Friederike Dittberner, Anja Grabow, Felix Jachan und Thilo Notz für zahlreiche Korrekturen und an Elisabeth Greiler für das Setzen einiger Abschnitte.

Inhaltsverzeichnis

1. Beispiele

Wir benutzen insbesondere [1] aber auch [2, 3, 4, 5].

Notation 1.1.

(i) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. In Koordinaten schreiben wir $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

(ii) Ist u bezüglich $x \in \Omega$ hinreichend oft differenzierbar, so bezeichnen wir mit Du, D^2u, …, erste, zweite, … Ableitungen.

Date: 19. Oktober 2021.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25.

Key words and phrases. Laplacegleichung, harmonische Funktionen, Perron, Maximumprinzip, Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung.

Indices bezeichnen partielle Ableitungen

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, \ldots.$$

Für $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist t die $(n+1)$-ste Variable, $u(x,t)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ oder $\dot{u} = u_t$.

Wir verwenden zu den Koordinatenbezeichnungen in $\mathbb{R}^n$ analoge Bezeichnungen für vektorwertige Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $u = (u^1, \ldots, u^k)$, oder $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, z. B. $u^l_i = \frac{\partial u^l}{\partial x^i}$. Vektorwertige Funktionen werden (zunächst) kaum auftreten.

Definition 1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $u \in C^k(\Omega)$, $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$. Ein Ausdruck der Form

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt (für $n \geq 2$) partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung.

F kann auch lediglich auf einer offenen Teilmenge definiert oder vektorwertig sein. Auch wenn u nicht klassisch differenzierbar ist, spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Definition 1.3 (Typeinteilung für Differentialgleichungen zweiter Ordnung)**.** Sei $F \in C^1\left(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega\right)$.

(i) Eine Differentialgleichung $F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right) = 0$ zweiter Ordnung mit $F = F(r_{ij}, p_i, z, x)$ heißt (in x entlang einer Lösung u) elliptisch, falls die Ableitung $\left(a^{ij}\right)_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2u(x), Du(x), u(x), x)\right)_{i,j}$ symmetrisch und positiv definit ist. Die Zusätze kann man streichen, wenn dies für alle x bzw. u gilt. Der Operator $u \mapsto F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right)$ heißt in diesem Fall elliptisch.

(ii) Sei F elliptisch. Dann heißt die Differentialgleichung $\dot{u} = F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right)$ parabolisch.

(iii) Sei F elliptisch. Dann heißt die Differentialgleichung $u_{tt} = F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right)$ hyperbolisch.

Beispiel 1.4. Eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^n b^i u_i + du = f$$

heißt elliptisch, falls a^{ij} symmetrisch ist und $a^{ij} \succ 0$ erfüllt, d. h. positiv definit ist.

Beispiele 1.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) Laplacegleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{ii} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Diese Differentialgleichung ist elliptisch, da $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = \delta^{ij}$ gilt.

b) Eigenwertgleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Wärmeleitungsgleichung, $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$,

$$\dot{u} = \Delta u.$$

Diese Differentialgleichung ist parabolisch.

d) Schrödingergleichung, $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{C}$, $T > 0$,
$$iu_t + \Delta u = 0.$$
e) Wellengleichung, $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$,
$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$
Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch.

f) Poissongleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$-\Delta u = f(u).$$
g) p-Laplace Gleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $p > 0$,
$$\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right) = 0, \quad \text{d. h.}$$
$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(|Du|^{p-2} D_i u\right) = 0,$$
wobei D_i partielle Ableitungen bezeichnet, $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

h) Minimalflächengleichung
$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \Delta u - \frac{u_{ij} u^i u^j}{1 + |Du|^2} = 0,$$
wobei $u^i := \delta^{ij} u_j$.

Wir verwenden hier die Einsteinsche Summenkonvention, d. h. wir summieren über gleiche „oben“ und „unten“ stehende Indices von 1 bis zur Dimension n, also
$$u_{ij} u^i u^j \equiv \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} u_i u_j.$$
i) Mittlerer Krümmungsfluss für Graphen (MCF)
$$\dot{u} = \sqrt{1 + |Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right).$$
j) Monge-Ampère Gleichung
$$\det D^2 u = f(x, u, Du),$$
speziell: Gleichung vorgeschriebener Gaußkrümmung für Graphen
$$\frac{\det D^2 u}{\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}} = f(x, u).$$
k) Reaktions-Diffusions Gleichung
$$u_t - \Delta u = f(u).$$
l) Poröse Medien Gleichung
$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0, \quad \gamma > 0.$$
m) Korteweg-de Vries Gleichung (KdV)
$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0.$$
n) Riccifluss (H. Poincaré, R. Hamilton, G. Perelman)
$$\dot{g}_{ij} = -2 R_{ij}.$$

Häufig werden Differentialgleichungen mit Randwerten (oder Anfangswerten) untersucht, z. B.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkung 1.6 (Untersuchte Fragestellungen)**.**

- Existenz von Lösungen,
- Eindeutigkeit der Lösung,
- Stetige Abhängigkeit einer Lösung von den Daten (u. a. physikalisch wichtig),
- Regularität von Lösungen, z. B. Differenzierbarkeit,
- schwache Lösungen, d. h. Lösungen u einer Differentialgleichung k-ter Ordnung mit $u \notin C^k$.
- quantitatives oder qualitatives Verhalten
  - im Unendlichen, $|x| \to \infty$, $t \to \infty$,
  - in oder nahe Singularitäten,
  - Beschränktheit,
  - ....
- Klassifikation aller Lösungen, explizite Lösungsformeln.
- ....

Die verwendeten Methoden hängen in der Regel stark von der betrachteten Gleichung ab.

Wir werden insbesondere Randwertprobleme (RWP) wie

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

parabolische Anfangs- und Randwertprobleme wie

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ u = \varphi & \text{auf } (\partial\Omega \times [0, T)) \cup (\Omega \times \{0\}) \end{cases}$$

oder hyperbolische Cauchyprobleme wie

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, T), \\ (u, u_t) = (\varphi_0, \varphi_1) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

untersuchen.

In der Vorlesung werden wir lernen, die elliptische und die hyperbolische Gleichung zu lösen und erste Eigenschaften der Lösungen herleiten.

2. Lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten ein Transportproblem.

Theorem 2.1. *Sei $b\colon \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ in C^1_{loc}, $f \in C^0_{loc}$ sowie $g \in C^0_{loc}$. Sei u eine C^1_{loc}-Lösung der Differentialgleichung*

$$\begin{cases} \dot{u} + \langle b, Du \rangle = f & \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = g & \textit{auf } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dann gibt es eine Lösung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ *des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} \dot\varphi(x,t) = b(\varphi(x,t),t) & \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ \varphi(x,0) = x & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

und es gilt

$$u(\varphi(x,t),t) = g(x) + \int\limits_0^t f(\varphi(x,\tau),\tau)\,d\tau. \tag{2.2}$$

Beweis. Die eindeutige Lösbarkeit der gewöhnlichen Differentialgleichung für φ ist bekannt.

Sei u eine Lösung von (2.1). Dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt}u(\varphi(x,t),t) = \langle Du(\varphi(x,t),t), \dot\varphi(x,t)\rangle + \dot u(\varphi(x,t),t) = f(\varphi(x,t),t).$$

Integration liefert (2.2).

Beachte, dass eine Funktion u, die (2.2) erfüllt, auch die Randbedingung $u(\cdot,0) = g$ erfüllt. □

In einer Situation, in der $\varphi(\cdot,t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ explizit invertierbar ist, können wir mit (2.2) auf die Lösbarkeit schließen.

Theorem 2.2. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1 mit* f, $g \in C^1_{loc}$ *existiert im Falle eines konstanten Vektorfeldes* $b(x,t) = b$ *für alle* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ *eine eindeutig bestimmte Lösung* u*, die durch*

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int\limits_0^t f(x + (\tau - t)b, \tau)\,d\tau.$$

gegeben ist.

Beweis. In diesem Fall gilt $\varphi(x,t) = x + tb$. Wir erhalten also nach Theorem 2.1

$$u(x + tb, t) = g(x) + \int\limits_0^t f(x + \tau b, \tau)\,d\tau$$

oder

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int\limits_0^t f(x + (\tau - t)b, \tau)\,d\tau.$$

Jede Lösung muss nach Theorem 2.1 diese Gestalt haben. Wir erhalten für dieses u

$$\begin{aligned} &\dot u(x,t) + \langle Du(x,t), b\rangle \\ &= \langle Dg(x - tb), -b\rangle + f(x,t) + \int\limits_0^t \langle Df(x + (\tau - t)b, \tau), -b\rangle\,d\tau \\ &\quad + \langle Dg(x, -tb), b\rangle + \int\limits_0^t \langle Df(x + (\tau - t)b, \tau), b\rangle\,d\tau \end{aligned}$$

$$= f(x,t).$$

Weiterhin erfüllt u die Anfangsbedingung $u(\cdot,0) = g$. Somit ist u eine Lösung. $\square$

3. Die Laplacegleichung und Darstellungsformeln

3.1. **Die Fundamentallösung.** Wir wollen $n \ge 2$ annehmen. Sonst entspricht das betrachtete Problem einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Bemerkung 3.1 (Motivation)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ beschreibe die Temperatur in Ω. Wir nehmen an, dass die Temperatur zeitunabhängig ist, dass Temperatur und lokale Wärmemenge proportional zueinander sind, sowie dass die transportierte Wärmemenge proportional zu $|Du|$ ist und sich in Richtung $-\frac{Du}{|Du|}$ bewegt. Sei $U \Subset \Omega$ glatt und beschränkt. Die insgesamt durch ∂U transportierte Wärmemenge ist (Rechne bis auf eine Konstante, bezeichne mit ν die äußere Normale an U und benutze, dass u zeitunabhängig ist.)

$$\begin{aligned} 0 = & \int\limits_{\partial U} -\langle Du, \nu\rangle = \int\limits_U -\operatorname{div} Du \quad \text{(Gaußscher Integralsatz)} \\ = & \int\limits_U -\Delta u. \end{aligned}$$

Da U beliebig war, folgt $\Delta u = 0$ in Ω.

Definition 3.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C^2(\Omega)$. Dann heißt u (in Ω) harmonisch, falls

$$0 = \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{ii}$$

in Ω gilt.

Bemerkung 3.3 (Rotationssymmetrische Lösungen)**.** Sei $u \in C^2(B_R \setminus \{0\})$ eine rotationssymmetrische Lösung von $\Delta u = 0$, d. h. es gibt $v \in C^2((0,R))$, so dass $u(x) = v(r)$, wobei $r = |x| = \left(\sum\limits_{i=1}^n (x^i)^2\right)^{1/2}$.

Wir leiten zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für v her:

$$\begin{aligned} u_i = & v' r_i = v' \tfrac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)^{-1/2} 2x_i = v' \frac{x_i}{r}, \\ u_{ij} = & v'' \frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r} + v' \frac{1}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}\right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$0 = \Delta u = \delta^{ij} u_{ij} = v'' + v' \frac{n-1}{r}.$$

Entweder gilt $v' \equiv 0$ auf $(0,R)$ oder $v' \ne 0$ auf $(0,R)$. Im Fall $v' > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{v''}{v'} + \frac{n-1}{r} = (\log v')' + \frac{n-1}{r}, \\ \log v' = & -(n-1)\log r + \log a, \quad a > 0, \end{aligned}$$

$$v' = \frac{a}{r^{n-1}}.$$

Ebenso erhalten wir für $v' < 0$, dass $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$ für ein $a < 0$. Durch Integration erhalten wir im Falle $n = 2$ aus $v' = \frac{a}{r}$, dass $v = a \log r + b$ und im Falle $n \geq 3$ aus $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$, dass $v = \frac{a}{-n+2} \frac{1}{r^{n-2}} + b$, jeweils für ein $b \in \mathbb{R}$, ist.

Definition 3.4 (Fundamentallösung)**.** Die Funktion

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Hier bezeichnet ω_n das Volumen von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\omega_n = |B_1(0)|$.

Bemerkung 3.5. Für $x \neq 0$ gelten die Abschätzungen

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-1}} \quad \text{und} \quad \left|D^2\Phi(x)\right| \leq \frac{c}{|x|^n}$$

mit $c = c(n)$.

3.2. **Darstellungsformel für $\mathbb{R}^n$.** Sei nun $n \geq 2$. Wir benutzen die Fundamentallösung zur Konstruktion von Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Theorem 3.6. *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Definiere $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy.$$

Dann gelten $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Beweis.

(i) $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$: Wir transformieren das Integral

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\, dy.$$

Für $h \neq 0$ und $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 an der i-ten Stelle, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\right] dy.$$

Wir wollen zum Grenzwert $h \to 0$ übergehen. Nehme an, dass $|h| < 1$ und $\operatorname{supp} f \subset B_R = B_R(0)$.

Es gilt nun $f(x+he_i-y) - f(x-y) = 0$, falls $|x+he_i-y| > R$ und $|x-y| > R$. Dies ist für $|y| > R+1+|x|$ erfüllt, denn dann gelten $|x+he_i-y| \geq |y| - |x+he_i| \geq |y| - 1 - |x| > R$ und $|x-y| \geq |y| - |x| > R$. Wir dürfen also annehmen, dass der Integrand außerhalb von B_ρ, $\rho > 0$ geeignet, verschwindet. Da $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ ist, konvergiert

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \to f_i(x-y)$$

für $h \to 0$ gleichmäßig in $x - y \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = &\int\limits_{B_\rho} \Phi(y) f_i(x-y)\,dy\\ &+\int\limits_{B_\rho} \Phi(y)\left[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}-f_i(x-y)\right]\,dy\end{aligned}$$

und das zweite Integral konvergiert gegen 0, falls $\int\limits_{B_\rho} |\Phi(y)|\,dy$ endlich ist. Es gilt für $n=2$

$$\int\limits_{B_\rho} |\Phi(y)|\,dy \le c\int\limits_{B_\rho} |\log|y||\,dy \le c\int\limits_0^\rho |\log r|\cdot r\,dr < \infty,$$

sowie

$$\int\limits_{B_\rho} |\Phi(y)|\,dy \le c\int\limits_{B_\rho} |y|^{2-n}\,dy \le c\int\limits_0^\rho r\,dr < \infty$$

im Falle $n\ge 3$. Hierbei ist c eine universelle Konstante, d. h. c kann verschiedene Werte annehmen, ist aber stets beschränkt.

Also folgt für $n=1,\ldots,n$

$$u_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_i(x-y)\,dy.$$

Analog erhält man

$$u_{ij}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{ij}(x-y)\,dy.$$

Dieses Integral ist in x stetig, also erhalten wir $u\in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $-\Delta u = f$: Sei $\varepsilon>0$. Φ ist singulär. Daher spalten wir die Integration auf

$$\begin{aligned}\Delta u(x) = &\int\limits_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy\\ \equiv &\, I_\varepsilon + J_\varepsilon.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon\to 0$ erhalten wir $I_\varepsilon\to 0$: Benutze den Satz von der dominierten Konvergenz. Alternatives Vorgehen: Es gilt

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon| &\le c\cdot \left\|D^2 f\right\|_{C^0}\cdot \int\limits_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)|\,dy\\ &\le \begin{cases} c\cdot\left\|D^2f\right\|_{C^0}\cdot\int\limits_0^\varepsilon |\log r|\cdot r\,dr \le c\cdot\left\|D^2f\right\|_{C^0}\cdot\varepsilon\cdot\sup\limits_{z\in(0,\varepsilon)}|\log z|\cdot z, & n=2,\\ c\cdot\left\|D^2f\right\|_{C^0}\cdot\int\limits_0^\varepsilon r^{2-n}r^{n-1}\,dr \le c\cdot\left\|D^2f\right\|_{C^0}\cdot\varepsilon^2, & n\ge 3.\end{cases}\end{aligned}$$

Aufgrund der Kettenregel (doppelt angewandt) gilt $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon = & \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_y f(x-y)\, dy \\
= & \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} -\langle D\Phi(y), D_y f(x-y)\rangle\, dy + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \left\langle D_y f(x-y), -\tfrac{y}{|y|} \right\rangle dy \\
\equiv & K_\varepsilon + L_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Hierbei kommt das Vorzeichen der Normalen von der Tatsache, dass wir über den Außenraum integrieren. Die partielle Integration ist gerechtfertigt, denn für $|x| \le c$ hat der Integrand als Funktion von y einen kompakten Träger.

Wir schätzen L_ε wie folgt ab

$$|L_\varepsilon| \le \|Df\|_{C^0} \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} |\Phi| \le \left\{ \begin{matrix} c \cdot \|Df\|_{C^0} \cdot \varepsilon \cdot |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ c \cdot \|Df\|_{C^0} \cdot \varepsilon, & n \ge 3, \end{matrix} \right\} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Nach nochmaliger partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon = & \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta_y \Phi(y) \cdot f(x-y)\, dy - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \left\langle D_y \Phi(y), -\tfrac{y}{|y|} \right\rangle f(x-y)\, dy \\
= & \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \left\langle D_y \Phi(y), \tfrac{y}{|y|} \right\rangle f(x-y)\, dy,
\end{aligned}$$

da Φ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist,

$$\begin{aligned}
= & \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{1}{n\omega_n} |y|^{1-n} \left\langle \tfrac{y}{|y|}, \tfrac{y}{|y|} \right\rangle f(x-y)\, dy \\
= & \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} f(x-y)\, dy
\end{aligned}$$

und wegen $|\partial B_\varepsilon| = n\omega_n \varepsilon^{n-1}$ können wir $0 = f(x) - f(x)$ wie folgt hinzuaddieren

$$\begin{aligned}
= & \underbrace{\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} \underbrace{(f(x-y) - f(x))}_{\to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0} dy}_{|\int \ldots| \le \sup\limits_{y \in B_\varepsilon(0)} |f(x-y) - f(x)|} - f(x) \\
\to & \, 0 - f(x) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\Delta u(x) = -f(x). \qquad \square$$

Bemerkung 3.7. In der Tat gilt Theorem 3.6 auch noch für $f \in C^{0,\alpha}_c(\mathbb{R}^n)$, nur ist der Beweis deutlich komplizierter.

3.3. **Mittelwerteigenschaft.**

Theorem 3.8 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch. Dann gilt*

$$u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u = \fint\limits_{B_r(x)} u,$$

falls $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Beweis.

(i) Definiere

$$\varphi(r) := \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy.$$

Zeige zunächst, dass φ konstant ist: Es gilt (mit $z = y/r$)

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy = \fint\limits_{\partial B_r(0)} u(x+y)\,dy = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{\partial B_r(0)} u(x+y)\,dy \\
&= \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|} \int\limits_{\partial B_1(0)} u(x+rz) r^{n-1}\,dz = \frac{1}{|\partial B_1|} \int\limits_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,dz. \\
\varphi'(r) &= \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{|\partial B_1|} \int\limits_{\partial B_1(0)} \langle Du(x+rz), z\rangle\,dz \\
&= \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|} \int\limits_{\partial B_r(x)} \left\langle Du(y), \frac{y-x}{r}\right\rangle dy = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{\partial B_r(x)} \langle Du(y), \nu\rangle\,dy \\
&= \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy = 0,
\end{aligned}$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial B_r(x)$ ist und wir den Divergenzsatz verwendet haben. Somit ist $\varphi' = 0$. Also ist φ konstant. Da u stetig ist, erhalten wir

$$\varphi(r) = \lim_{t \searrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \searrow 0} \fint\limits_{\partial B_t(x)} u(y)\,dy = u(x).$$

(ii) Es gilt aufgrund der eben erzielten Ergebnisse

$$\int\limits_{B_r(x)} u(y)\,dy = \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\,dy\,ds = u(x) \int\limits_0^r \underbrace{n\omega_n s^{n-1}}_{=|\partial B_s|}\,ds = \omega_n r^n u(x).$$

□

Theorem 3.9 (Umkehrung der Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Falls für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy$$

gilt, so ist u harmonisch.

Beweis. Benutze die Notation des Beweises von Theorem 3.8. Ist $\Delta u \not\equiv 0$, so existiert $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so dass (ohne Einschränkung) $\Delta u > 0$ in $B_r(x)$ gilt. Dann folgt mit Hilfe der Rechnungen des Beweises von Theorem 3.8

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u > 0.$$

Widerspruch. □

Theorem 3.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint\limits_{B_r(x)} u(y)\,dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Theorem 3.11 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sei harmonisch. Dann gilt*

(i)
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, so ist u auf der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der zweiten. Daher beweisen wir nur diese.

Definiere

$$A := \left\{ x \in \Omega : u(x) = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \right\}.$$

A ist relativ abgeschlossen in Ω. Sei $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $x \in A$. Es folgt

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u = u(x) &= \fint\limits_{B_r(x)} u \quad \text{(Mittelwerteigenschaft)} \\ &\le \fint\limits_{B_r(x)} \sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\overline{\Omega}} u \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $u|_{B_r(x)} = \sup\limits_{\overline{\Omega}} u$ ist. Damit ist A relativ offen in Ω. □

Theorem 3.12 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Seien u und $\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen. Dann erfüllt $w := u - \tilde{u}$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Das Maximumprinzip impliziert nun, dass $w = 0$ in Ω gilt. □

3.4. **Regularität und innere Abschätzungen.**

Theorem 3.13 (Regularität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Erfüllt u die Mittelwerteigenschaft $u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u$ für alle Kugeln $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Wir bemerken, dass es genügt, kleine Kugeln zu betrachten.

Beweis. Sei η ein rotationssymmetrischer Friedrichscher Glättungskern ("mollifier") mit $\operatorname{supp} \eta \subset B_1(0)$. Definiere in $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ die Funktionen $u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$, wobei $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ist. Es gilt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Wir zeigen nun, dass $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε gilt. Hieraus folgt $u \in C^\infty(\Omega)$. Sei also $x \in \Omega_\varepsilon$. Wir benutzen die leicht doppeldeutige Notation $\eta(x) = \eta(|x|)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int\limits_{\partial B_r(x)} u \right) dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int\limits_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\omega_n r^{n-1}\,dr \quad \text{(Mittelwerteigenschaft)} \\
&= u(x) \int\limits_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(x).
\end{aligned}$$

□

Daher werden wir in Zukunft annehmen, dass harmonische Funktionen von der Klasse C^∞ sind.

Theorem 3.14 (Innere Abschätzungen für harmonische Funktionen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und u in Ω harmonisch. Sei $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und sei α ein Multiindex der Ordnung k, $|\alpha| = k$. Dann gilt

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{c_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))},$$

wobei

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\omega_n}, \\
c_k &= \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^k}{\omega_n}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach k.

(i) $k=0$: Aufgrund der Mittelwerteigenschaft gilt

$$|u(x_0)| = \left| \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(x_0)} u \right| \le \frac{1}{\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(x_0)} |u|.$$

(ii) $k=1$: Aus $\Delta u = 0$ und der Regularität von u folgt auch $\Delta u_i = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}|u_i(x_0)| &= \left| \fint\limits_{B_{r/2}(x_0)} u_i \right| = \frac{1}{\omega_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} \cdot \left| \int\limits_{B_{r/2}(x_0)} \langle Du, e_i \rangle \right| = \frac{2^n}{\omega_n r^n} \left| \int\limits_{\partial B_{r/2}(x_0)} u \langle \nu, e_i \rangle \right| \\ &\le \frac{2^n}{\omega_n r^n} \cdot \frac{\omega_n n r^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))} = \frac{2n}{r} \cdot |u(y_0)|\end{aligned}$$

für einen geeignet gewählten Punkt $y_0 \in \partial B_{r/2}(x_0)$. Es gilt $\overline{B_{r/2}(y_0)} \subset \Omega$. Also können wir aufgrund der Induktionsannahme wie folgt abschätzen

$$|u_i(x_0)| \le \frac{2n}{r} \frac{1}{\omega_n \left(\frac{r}{2}\right)^n} \|u\|_{L^1(B_{r/2}(y_0))} \le \frac{2^{n+1} n}{\omega_n r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

(iii) $k \ge 2$: Sei α ein Multiindex der Ordnung k, $D^\alpha w = \left(D^\beta\right) w_i$ für einen Multiindex β der Ordnung $k-1$. Wie im Beweis für den Fall $k=1$ erhalten wir auf einer Kugel vom Radius $\frac{r}{k}$

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{nk}{r} \left\| D^\beta u \right\|_{L^\infty(\partial B_{r/k}(x_0))} = \frac{nk}{r} \left| D^\beta u(y_0) \right|$$

für ein geeignetes $y_0 \in \partial B_{r/k}(x_0)$. Nun gilt $\overline{B_{\frac{k-1}{k} r}(y_0)} \subset \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und daher nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(x_0)| &\le \frac{nk}{r} \frac{\left(2^{n+1} n(k-1)\right)^{k-1}}{\omega_n} \left(\frac{k}{r(k-1)} \right)^{n+k-1} \cdot \|u\|_{L^1(B_{\frac{k-1}{k} r}(y_0))} \\ &\le \frac{\left(2^{n+1} nk\right)^k}{\omega_n r^{n+k}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.\end{aligned}$$

□

Theorem 3.15 (Satz von Liouville)**.** *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Es gilt

$$|Du(x_0)| \le \frac{c}{r^{n+1}} \cdot \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \le \frac{c}{r} \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

Es folgt $|Du(x_0)| = 0$. Somit ist u konstant. □

Theorem 3.16 (Darstellungsformel)**.** *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 3$. Dann ist jede beschränkte Lösung $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ von*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

von der Form

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Definiere
$$\tilde{u}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy.$$
Dann ist $\tilde{u} \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Für $|x| \to \infty$ gilt $\Phi(x) \to 0$ (für $n \geq 3$). Daher ist $\tilde{u}$ beschränkt. (Es würde dazu genügen, dass $\Phi(x)$ für $|x| \geq R$ beschränkt ist.) Sei nun $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ eine weitere beschränkte Lösung von
$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$
Dann ist $w := u - \tilde{u}$ beschränkt und harmonisch, $\Delta w = 0$. Nach dem Satz von Liouville, Theorem 3.15, folgt daher $w = C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 3.17. Für $n = 2$ ist $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ für $|x| \to \infty$ unbeschränkt. Daher ist $\tilde{u}$ i. a. unbeschränkt, nämlich genau dann, wenn $\int f \neq 0$ gilt, und dieser Beweis funktioniert nicht.

3.5. **Harnackungleichung.**

Theorem 3.18 (Harnackungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u > 0$ in Ω. Sei $\Omega_1 \Subset \Omega$ offen und zusammenhängend. Dann gibt es $c = c(n, \Omega_1, \Omega)$, so dass*
$$\sup_{\Omega_1} u \leq c \cdot \inf_{\Omega_1} u$$
gilt.

Für $x, y \in \Omega_1$ folgt also
$$\frac{1}{c} u(y) \leq u(x) \leq c \cdot u(y),$$
d. h. die Funktionswerte von u in Ω_1 sind untereinander vergleichbar.

Beweis. Definiere $r := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$ oder setze $r = 1$, falls $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist. Seien $x, y \in \Omega_1$ mit $|x - y| \leq r$. Wir benutzen die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen und erhalten
$$\begin{aligned} u(x) &= \fint\limits_{B_{2r}(x)} u = \frac{1}{\omega_n 2^n r^n} \cdot \int\limits_{B_{2r}(x)} u \\ &\geq \frac{1}{\omega_n 2^n r^n} \int\limits_{B_r(y)} u, \quad \text{da } B_r(y) \subset B_{2r(x)} \\ &= \frac{1}{2^n} \fint\limits_{B_r(y)} u = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$
Somit gilt für alle $x, y \in \Omega_1$ mit $|x - y| \leq r$
$$2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y).$$
Da $\overline{\Omega_1}$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_i \in \Omega_1$, $1 \leq i \leq N$, so dass $\overline{\Omega_1} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r/3}(x_i)$ ist. Seien nun $x, y \in \Omega_1$ beliebig. Modifiziere einen stetigen Weg von x nach y, so dass er nur aus Geradenstücken der Länge $\leq r$ zwischen Punkten aus $\{x, y, x_1, \ldots, x_N\}$ besteht. Jedes x_i werde dabei höchstens einmal besucht, z. B.
$$„x \to x_1 \to \ldots \to x_N \to y“.$$

Explizit funktioniert das wie folgt: Sei $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann gibt es aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von γ ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$\left|\gamma\left(\frac{l}{k}\right) - \gamma\left(\frac{l+1}{k}\right)\right| \le \frac{r}{3} \qquad \text{für } l = 0, \ldots, k-1.$$

Sei z_l ein Punkt aus der Menge $\{x, y, x_1, \ldots, x_N\} \subset \Omega_1$ mit minimalem Abstand zu $\gamma\left(\frac{l}{k}\right)$ für $l = 0, \ldots, k$. Wegen $\Omega_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r/3}(x_i)$ folgt $\left|z_l - \gamma\left(\frac{l}{k}\right)\right| < \frac{r}{3}$ für alle l. Es gelten $z_0 = x$ und $z_k = y$. Weiterhin gilt für alle $0 \le l < k$

$$\begin{aligned} |z_l - z_{l+1}| &\le \left|z_l - \gamma\left(\frac{l}{k}\right)\right| + \left|\gamma\left(\frac{l}{k}\right) - \gamma\left(\frac{l+1}{k}\right)\right| + \left|\gamma\left(\frac{l+1}{k}\right) - z_{l+1}\right| \\ &\le \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r. \end{aligned}$$

Gibt es $l < m$ mit $z_l = z_m$, so können wir die Punkte $z_{l+1}, z_{l+2}, \ldots, z_{m-1}$ ersatzlos streichen und erhalten wie gewünscht eine Teilfolge $(z_{l_i})_{0 \le i \le M}$ von $M + 1 \le N + 2$ Punkten mit

$$z_{l_0} = x, \quad z_{l_M} = y \quad \text{und} \quad |z_{l_i} - z_{l_{i+1}}| \le r$$

für alle $0 \le i \le M - 1$.

Es gilt

$$\begin{aligned} u(x) &\ge \frac{1}{2^n} u(x_1), \\ u(x_1) &\ge \frac{1}{2^n} u(x_2), \ \ldots, \end{aligned}$$

und hieraus folgt dann

$$u(x) \ge \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y).$$

□

3.6. **Greensche Funktion.** Wir folgen [3].

Lemma 3.19 (Greensche Formeln)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Dann gelten*

(i) $\int\limits_\Omega v\Delta u + \int\limits_\Omega \langle Du, Dv\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} v\langle Du, \nu\rangle$, *die 1. Greensche Formel, und*

(ii) $\int\limits_\Omega v\Delta u - u\Delta v = \int\limits_{\partial\Omega} v\langle Du, \nu\rangle - u \underbrace{\langle Dv, \nu\rangle}_{\equiv \frac{\partial v}{\partial \nu}}$, *die 2. Greensche Formel.*

Dabei bezeichnet ν die äußere Normale an $\partial\Omega$.

Beweis.

(i) Wende den Divergenzsatz auf vDu an.

(ii) Vertausche in der ersten Greenschen Formel die Rollen von u und v und bilde die Differenz. □

Da die Fundamentallösung $x \mapsto \Phi(x - y)$ singulär ist, können wir sie für $y \in \Omega$ nicht direkt in die Greenschen Formeln einsetzen. Schneiden wir jedoch einen kleinen Ball heraus, erhalten wir

Theorem 3.20 (Greensche Darstellungsformel)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega\in C^1$. Sei $u\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $y\in\Omega$. Dann gilt*
$$u(y)=\int\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)-u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\right)dx-\int\limits_{\Omega}\Phi(x-y)\Delta u(x)dx.$$
Hierbei sind sämtliche Ableitungen bezüglich der Variablen x.

Beweis. Sei $\rho>0$ so klein, dass $\overline{B_\rho(y)}\subset\Omega$ gilt. Dann erhalten wir unter Berücksichtigung von $\Delta\Phi(x-y)=0$ für $x\neq y$ aus der zweiten Greenschen Formel
$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\setminus B_\rho(y)}\Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx=&\int\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)-u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\right)dx\\&+\int\limits_{\partial B_\rho(y)}\left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)-u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\right)dx,\end{aligned}$$
wobei sich sämtliche Ableitungen auf die Variable x beziehen und ν stets die äußere Normale an $\Omega\setminus\overline{B_\rho(y)}$ ist. Wir erhalten für $\rho\searrow 0$
$$\left|\int\limits_{\partial B_\rho(y)}\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dx\right|=\left|\Phi(\rho)\cdot\int\limits_{\partial B_\rho(y)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|\le|\Phi(\rho)|\cdot n\omega_n\rho^{n-1}\cdot\sup_{B_\rho(y)}|Du|\to 0$$
sowie
$$\int\limits_{\partial B_\rho(y)}u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\,dx=-\Phi'(\rho)\cdot\int\limits_{\partial B_\rho(y)}u(x)\,dx=\frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int\limits_{\partial B_\rho(y)}u(x)\,dx\to u(y).$$
Mit $\rho\searrow 0$ erhalten wir also wegen $|\Phi|\in L^1_{loc}$
$$u(y)=\int\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)-u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\right)dx-\int\limits_{\Omega}\Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx$$
für $y\in\Omega$. □

Bemerkung 3.21.
(i) $-\int\limits_\Omega\Phi(x-y)f(x)\,dx$ (für geeignete integrierbare Funktionen f) heißt Newtonsches Potential von f.
(ii) Gilt $u\in C^2_c(\mathbb{R}^n)$, so folgt aus der Greenschen Darstellungsformel
$$u(y)=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx.$$
(iii) Ist u harmonisch, so verschwindet $\int\limits_\Omega\ldots$ in der Greenschen Darstellungsformel und u läßt sich mit Hilfe der Randintegrals $\int\limits_{\partial\Omega}\ldots$ darstellen.

Bemerkung 3.22. Gelte die Greensche Darstellungsformel und sei $h\in C^1(\overline{\Omega})\cup C^2(\Omega)$ mit $\Delta h=0$ in Ω. Dann folgt aus der zweiten Greenschen Formel
$$\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial\nu}-h\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)=-\int\limits_\Omega h\Delta u.$$

Wir definieren $G(x,y) := \Phi(x-y)+h(x)$, addieren die Greensche Darstellungsformel und erhalten

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(G(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) \right) dx - \int\limits_{\Omega} G(x,y)\Delta u(x)\, dx.$$

Gilt für festes $y \in \Omega$ bereits $G(x,y) = 0$ für alle $x \in \partial\Omega$, so folgt

$$u(y) = -\int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, dx - \int\limits_{\Omega} G(x,y)\Delta u(x)\, dx. \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.23. Da h als harmonische Funktion bei festem y und somit vorgegebenen Randwerten eindeutig bestimmt ist, ist G eindeutig bestimmt. Existiert G bzw. h, so können wir durch (3.1) eine harmonische Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ darstellen.

Für eine Kugel $B_R = B_R(0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

Lemma 3.24. *Sei $y \in B_R$. Wir definieren*

$$\overline{y} := \begin{cases} \frac{R^2}{|y|^2}y & \text{für } y \neq 0, \\ \infty & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Wir definieren weiterhin für $x \in \overline{B_R}\backslash\{y\}$

$$G(x,y) := \begin{cases} \Phi(|x-y|) - \Phi\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right), & y \neq 0, \\ \Phi(|x|) - \Phi(R), & y = 0. \end{cases}$$

Dann ist $G(x,y)$ die Greensche Funktion für B_R. Es gelten $G(x,y) = G(y,x)$ und $G(x,y) \geq 0$, für alle $x, y \in \overline{B_R}$ mit $x \neq y$, falls wir die Funktion G stetig auf $\left(\overline{B_R} \times \overline{B_R}\right) \setminus \Delta\left(\overline{B_R}\right)$ fortsetzen.

Beweis.

(i) Wir bemerken zunächst, dass $\overline{y} \notin B_R(0)$ für $y \in B_R(0)$ gilt.

(ii) Für $y \approx 0$ erhalten wir $\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}| = \frac{|y|}{R}\left|x - \frac{R^2}{|y|^2}y\right| \approx \frac{|y|}{R}\frac{R^2}{|y|^2}|y| = R$. Somit ist G für $y = 0$ stetig.

(iii) Aus

$$\begin{aligned} \frac{|y|}{R}|x-\overline{y}| &= \sqrt{\frac{|y|^2}{R^2}\left(|x|^2 - 2\frac{R^2}{|y|^2}\langle x,y\rangle + \frac{R^4}{|y|^4}|y|^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x,y\rangle + R^2} \end{aligned}$$

folgt

$$G(x,y) = \Phi\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2\langle x,y\rangle}\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x,y\rangle + R^2}\right) \tag{3.2}$$

für $x, y \in B_R$ mit $x \neq y$.

(iv) Aus der Definition von G sehen wir direkt, dass $\Delta_x(G(x,y) - \Phi(|x-y|)) = 0$ für $y \neq 0$ gilt. Für $y = 0$ ist dies nach Definition klar.

(v) Für $y \in B_R$ gilt $\overline{y} \notin \overline{B_R}$. Somit ist $h(x) = G(x,y) - \Phi(|x-y|)$ in $C^\infty\left(\overline{B_R}\right)$.

(vi) Aus (3.2) folgt $G(x,y) = 0$ für $|x| = R$. Somit ist G die Greensche Funktion.

(vii) Für $y \in B_R$ gilt $G(x,y) \to +\infty$ für $x \to y$. Da $G(\cdot,y) = 0$ auf ∂B_R gilt und $G(\cdot,y)$ in $B_R \setminus \{y\}$ harmonisch ist, folgt $G(\cdot,y) \ge 0$ in $B_R \setminus \{y\}$.
Die Symmetrie $G(x,y) = G(y,x)$ folgt direkt aus (3.2). □

Die Darstellungsformel aus dem folgenden Resultat werden wir in Theorem 3.27 benutzen um das Drichletproblem für harmonische Funktionen zu lösen.

Lemma 3.25. *Sei $u \in C^2\left(\overline{B_R}\right)$ harmonisch. Dann gilt*

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{u(x)}{|x-y|^n} dx.$$

Beweis. Für die Greensche Funktion G eines Balles folgt durch Ableiten von (3.2) bezüglich x für $|x| = R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) &= \left\langle DG, \frac{x}{R} \right\rangle \\ &= \Phi'(|x-y|) \cdot \left(\frac{\left\langle x-y, \frac{x}{R} \right\rangle}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x,y\rangle}} - \frac{\left\langle \frac{x|y|^2}{R^2} - y, \frac{x}{R} \right\rangle}{\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x,y\rangle + R^2}} \right) \\ &= \frac{-1}{n\omega_n} |x-y|^{1-n} \left(\frac{|x|^2 - \langle x,y\rangle}{|x-y|} - \frac{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - \langle x,y\rangle}{|x-y|} \right) \frac{1}{R} \\ &= \frac{-1}{n\omega_n |x-y|^n R} \left(R^2 - |y|^2\right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus (3.1). □

Insbesondere haben wir die folgende Normierung des hier auftretenden Integralkernes:

Korollar 3.26. *Sei $y \in B_R$. Dann gilt*

$$1 = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{1}{|x-y|^n} dx.$$

Beweis. Benutze $u \equiv 1$. □

3.7. **Poissonsche Integralformel für eine Kugel.**

Theorem 3.27. *Seien $R > 0$ und $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\varphi \in C^0(\partial B_R)$. Definiere*

$$u(x) := \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} dy & \text{für } x \in B_R, \\ \varphi(x) & \text{für } x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Dann ist $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ und u löst das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_R. \end{cases}$$

Aufgrund des Maximumprinzips ist u in B_R beschränkt. Mit Hilfe der inneren Abschätzungen und gemäß einer Übungsaufgabe ist u damit sogar reell analytisch: $u = C^\omega(B_R)$.

Beweis.

(i) **Differenzierbarkeit:** Die Glattheit von u folgt direkt aus dem Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen, da für $x \in B_{R-\varepsilon}$ der Integrand und partielle Ableitungen des Integranden nach x gleichmäßig beschränkt sind und eine entsprechende Argumentation auch für höhere Ableitungen gilt. Es folgt

$$u_i(x) = \int\limits_{\partial B_R} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \right) dy$$

und eine entsprechende Formel gilt auch für höhere Ableitungen.

(ii) u **ist harmonisch:** Es genügt, für $|y| = R$ zu zeigen, dass

$$k(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}$$

für $x \neq y$ eine harmonische Funktion ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
k(x) =& \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}, \\
k_i(x) =& -2x_i|x-y|^{-n} + \left(R^2 - |x|^2\right)(-n)|x-y|^{-n-2}(x_i - y_i), \\
k_{ij}(x) =& -2\delta_{ij}|x-y|^{-n} \\
&- 2x_i(-n)|x-y|^{-n-2}(x_j - y_j) \\
&- 2x_j(-n)|x-y|^{-n-2}(x_i - y_i) \\
&+ \left(R^2 - |x|^2\right)(-n)(-n-2)|x-y|^{-n-4}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \\
&+ \left(R^2 - |x|^2\right)(-n)|x-y|^{-n-2}\delta_{ij}, \\
|x-y|^{n+2}\Delta k(x) =& -2n|x-y|^2 + 4n\langle x, x-y\rangle \\
&+ \left(R^2 - |x|^2\right)n(n+2) - \left(R^2 - |x|^2\right)n^2 \\
=& 2n\left(-|x|^2 + 2\langle x,y\rangle - |y|^2 + 2|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2 - |x|^2\right) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Somit ist k und damit u für $x \in B_R$ harmonisch.

(iii) $u \in C^0\left(\overline{B_R}\right)$**:** Sei $x_0 \in \partial B_R$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von φ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \partial B_R$ mit $|y - x_0| < \delta$ auch $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Sei $x \in B_R$. Dann folgt aufgrund der Normierung des Integralkernes

$$u(x) - u(x_0) = u(x) - \varphi(x_0) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\partial B_R} \frac{\varphi(y) - \varphi(x_0)}{|x-y|^n}\, dy.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| \le& \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\{y \in \partial B_R : |x_0 - y| < \delta\}} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x_0)|}{|x-y|^n}\, dy \\
&+ \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int\limits_{\{y \in \partial B_R : |x_0 - y| \ge \delta\}} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x_0)|}{|x-y|^n}\, dy \\
\equiv& I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Nochmals aufgrund der Normierung des Integralkernes und wegen der Stetigkeit von φ folgt
$$I_1 \le \varepsilon.$$
Ist $|x-x_0|<\frac{\delta}{2}$, so folgt für y mit $|x_0-y|\ge\delta$
$$|x-y|\ge|x_0-y|-|x-x_0|\ge\frac{\delta}{2}.$$
Wir setzen $M=\sup\limits_{\partial B_R}|\varphi|$ und erhalten $I_2\le\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}2M\left(\frac{2}{\delta}\right)^n|\partial B_R|\to 0$ für $x\to x_0$, da dann $|x|\to R$ gilt. Somit ist u auf $\overline{B_R}$ stetig. □

4. Perronverfahren

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega\in C^2$, $g\in C^0(\partial\Omega)$. Wir wollen eine Funktion $u\in C^\infty(\Omega)\cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ finden, die das Randwertproblem
$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } \Omega,\\ u=g & \text{auf } \partial\Omega\end{cases}$$
löst.

4.1. Konvergenzsätze.

Theorem 4.1. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $u_l:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert, $u_l\rightrightarrows u$.*

Dann ist u in Ω harmonisch.

Beweis. Die Funktionen u_l sind harmonisch und erfüllen daher die Mittelwerteigenschaft
$$u_l(x)=\fint\limits_{B_r(x)}u_l.$$
Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $u_l\rightrightarrows u$ dürfen wir zum Grenzwert übergehen und erhalten $u(x)=\fint\limits_{B_r(x)}u$. Somit ist auch u harmonisch. □

Theorem 4.2. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Sei (u_l) eine Folge harmonischer Funktionen, die auf jeder kompakten Menge $K\subset\Omega$ die Abschätzung $|u_l(x)|\le c(K)$ für alle $l\in\mathbb{N}$ und alle $x\in K$ erfüllen. Dann gibt es eine Teilfolge der (u_l), die in $C^2_{loc}(\Omega)$ konvergiert. Der Grenzwert u ist eine glatte harmonische Funktion.*

Beweis. Aufgrund der inneren Abschätzungen für harmonische Funktionen, Theorem 3.14, gibt es für jedes $K\subset\Omega$ eine Umgebung U mit
$$K\subset U=K_\varepsilon\equiv\{x\in\Omega:\operatorname{dist}(x,K)<\varepsilon\}\subset K_{2\varepsilon}\Subset\Omega$$
für ein $\varepsilon>0$, so dass $\|u_l\|_{C^k(U)}\le c\left(k,n,U,\Omega,c\left(K_{2\varepsilon}\right)\right)$ gilt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es daher eine in $K_{\varepsilon/2}$ gleichmässig konvergente Teilfolge. Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, dass u_l in U gleichmässig gegen eine stetige Funktion u konvergiert. Aufgrund der inneren Abschätzungen erhalten wir in $K_{\varepsilon/4}$ auch die Konvergenz der Ableitungen. Der Limes u ist aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz (oder aufgrund der Konvergenz der Ableitungen) in $K_{\varepsilon/4}$ harmonisch.

Mit Hilfe eines Diagonalfolgenarguments in K folgt die Behauptung. □

Korollar 4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_l : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen $u_l \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch sind. Gelte $u_l = \varphi_l$ auf $\partial\Omega$.*

Konvergieren die Funktionen φ_l auf $\partial\Omega$ gleichmäßig gegen eine Funktion φ, so konvergieren die Funktionen u_l in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch ist.

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ auf $\partial\Omega$ und des Maximumprinzips folgt, dass $u_l \rightrightarrows u$ in $\overline{\Omega}$ gilt. Die Funktion u ist in Ω harmonisch und damit auch glatt. □

Theorem 4.4 (Harnacksches Konvergenztheorem)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei u_l eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen. Sei $y \in \Omega$ und sei $u_l(y)$ gleichmäßig beschränkt. Sei $\Omega' \Subset \Omega$. Dann konvergiert u_l auf Ω' gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion.*

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass Ω' zusammenhängend ist und $y \in \Omega'$ gilt. Dazu vergrößern wir das Gebiet etwas und verbinden dann die entstandenen endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein N, so dass für $m \ge l > N$

$$0 \le u_m(y) - u_l(y) < \varepsilon$$

gilt. Aufgrund der Harnackungleichung, Theorem 3.18 folgt

$$\sup_{\Omega'} |u_m - u_l| \le c(\Omega', \Omega) \cdot \varepsilon.$$

Somit konvergiert u_l auf Ω' gleichmäßig gegen u. Also ist u in Ω' harmonisch. □

Theorem 4.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien u_l harmonische Funktionen, die in $C^0_{loc}(\Omega)$ gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann konvergiert $u_l \to u$ in $C^k_{loc}(\Omega)$.*

Beweis. Wende die inneren Abschätzungen auf $u_l - u$ an. □

4.2. C^0-subharmonische Funktionen.

Definition 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) $u \in C^2(\Omega)$ heißt
- C^2-harmonisch, falls $-\Delta u = 0$,
- C^2-subharmonisch, falls $-\Delta u \le 0$,
- C^2-superharmonisch, falls $-\Delta u \ge 0$.

(ii) $u \in C^0(\Omega)$ heißt
- C^0-subharmonisch, falls für jede Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ und jede harmonische Funktion $h : C^2(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ mit $u \le h$ auf $\partial B_r(x)$ auch $u \le h$ in $B_r(x)$ folgt.
- C^0-superharmonisch, falls $-u$ subharmonisch ist.
- C^0-harmonisch, falls u subharmonisch und superharmonisch ist.

(iii) $u \in C^0(\Omega)$ heißt
- Sphären-subharmonisch, falls $u(x) \le \fint\limits_{\partial B_r(x)} u$ für alle $B_r(x) \Subset \Omega$ gilt.
- Ball-subharmonisch, falls $u(x) \le \fint\limits_{B_r(x)}$ für alle $B_r(x) \Subset \Omega$ gilt.
- Die Begriffe Sphären-superharmonisch, Sphären-harmonisch, Ball-superharmonisch und Ball-harmonisch sind analog definiert.

Wir werden diese Eigenschaften nur solange unterschiedlich bezeichnen, bis wir einige Äquivalenzen gezeigt haben.

Bemerkung 4.7. Bei C^0-subharmonischen Funktionen genügt der Vergleich mit der harmonischen Fortsetzung h der Randwerte, die nach Theorem 3.27 existiert. Sämtliche andere Funktionen H mit $H \ge h = u$ auf $\partial B_r(x)$ erfüllen im Inneren nämlich $H \ge h$.

Lemma 4.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Sphären- oder Ball-subharmonisch. Dann erfüllt u das starke Maximumprinzip, d. h.*

(i) für jede offene Teilmenge $\Omega' \Subset \Omega$ nimmt u sein Maximum auf dem Rand an und

(ii) ist Ω' zusätzlich zusammenhängend und nimmt u sein Maximum im Inneren von Ω' an, so ist $u|_{\Omega'}$ konstant.

Beweis. Gehe genau wie im Beweis von Theorem 3.11 vor. Statt der Mittelwerteigenschaft genügt es dort, dass u Sphären- oder Ball-subharmonisch ist. □

Korollar 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Seien $u, v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei u eine C^0-subharmonische Funktion und v eine C^0-superharmonische Funktion. Gelte $u = v$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt entweder $u < v$ in Ω oder $u \equiv v$. Im zweiten Fall sind beide Funktionen harmonisch.*

Beweis. Übung. □

Lemma 4.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) u ist C^0-subharmonisch,

(ii) u ist Sphären-subharmonisch,

(iii) u ist Ball-subharmonisch.

Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei $B_r(x) \Subset \Omega$. Sei h die harmonische Fortsetzung von $u|_{\partial B_r(x)}$ nach $B_r(x)$ aus Theorem 3.27, d. h. sei $h \in C^\infty(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ und gelte

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } B_r(x), \\ h = u & \text{auf } \partial B_r(x). \end{cases}$$

Nach der Poissonschen Darstellungsformel aus Theorem 3.27 folgt $h(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} h$.

Da u eine C^0-subharmonische Funktion ist und $u = h$ auf $\partial B_r(x)$ gilt, folgt weiterhin

$$u(x) \le h(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} h = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u.$$

Somit ist u Sphären-subharmonisch.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Wir integrieren

$$\int\limits_{\partial B_\rho(x)} u(x)\,dy \le \int\limits_{\partial B_\rho(x)} u(y)\,dy$$

von $\rho = 0$ bis $\rho = r$ und erhalten wegen

$$\int\limits_{B_r(x)} f(y)\,dy = \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B_\rho(x)} f(y)\,dy\,d\rho$$

die Ungleichung

$$\int\limits_{B_r(x)} u(x)\,dy \le \int\limits_{B_r(x)} u(y)\,dy.$$

Umordnen ergibt die Behauptung.

„(iii) $\implies$ (i)“: Sie h die harmonische Fortsetzung der Randwerte $u|_{\partial B_r(x)}$. Dann erfüllt $u-h$ dieselbe Mittelwerteigenschaft wie u. Wir können also Lemma 4.8 anwenden und erhalten $u \le h$ in $B_r(x)$. □

Bemerkung 4.11.

(i) Sei u eine C^2-subharmonische Funktion. Dann ist u Sphären-subharmonisch.

(ii) Eine C^0-subharmonische Funktion braucht nicht von der Klasse C^2 zu sein.

Beweis.

(i) In Theorem 3.8 haben wir allgemein für $u \in C^2$ gezeigt, dass

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) \equiv \frac{d}{dr} \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy = \frac{1}{|\partial B_r|} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy$$

gilt. Für eine subharmonische Funktion ($-\Delta u \le 0$) ist φ also monoton wachsend und es gilt $\lim\limits_{r\searrow 0} \varphi(r) = u(x)$. Die Behauptung folgt.

(ii) Betrachte $x \mapsto |x|$. Eindimensional ist klar, dass dies ein Gegenbeispiel ist. Höherdimensional kann man analog zu Lemma 4.14 argumentieren. □

Lemma 4.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei u in $C^0(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) u ist C^2-harmonisch,

(ii) u ist C^0-harmonisch,

(iii) u ist Sphären-harmonisch und

(iv) u ist Ball-harmonisch.

Beweis.

(a) C^2-harmonisch impliziert die drei letzten Bedingungen, die nach Lemma 4.10 äquivalent zueinander sind.

(b) Theorem 3.13 besagt, dass Funktionen, die eine dieser drei Bedingungen erfüllen, glatt sind. Theorem 3.9 impliziert dann, dass u auch C^2-harmonisch ist. □

Alternativbeweis.

(a) Nach Bemerkung 4.11 erfüllt eine C^2-Funktion jede der anderen nach Lemma 4.10 äquivalenten Definitionen.

(b) Sei u eine C^0-harmonische Funktion. Sei $B_r(x) \Subset \Omega$ und h die harmonische Fortsetzung der Randwerte $u|_{\partial B_r(x)}$ nach $B_r(x)$, vgl. Theorem 3.27. Dann folgt nach Definition einer C^0-harmonischen Funktion $u = h$ in $B_r(x)$. Somit ist $u \in C^2$. Nach Theorem 3.9 erhalten wir $-\Delta u = 0$.

(c) Die restlichen Äquivalenzen folgen nach Lemma 4.10. □

Lemma 4.13 (Harmonische Ersetzung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und $B \Subset \Omega$ eine Kugel.*

Sei $\overline{u} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ die harmonische Funktion mit $\overline{u} = u$ auf ∂B.

Wir definieren die harmonische Ersetzung von u in B durch

$$U(x) := \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

Dann ist U in Ω (C^0-)subharmonisch.

Beweis. Sei $B' \Subset \Omega$ eine Kugel. Sei h harmonisch in B' und $U \le h$ auf $\partial B'$. Wir wollen nachweisen, dass $U \le h$ in B' gilt.

Die Funktion u ist subharmonisch. Somit gilt $u \le U$ in Ω (und insbesondere in B). Wir benutzen die Annahme $U \le h$ auf $\partial B'$ und erhalten $u \le U \le h$ auf $\partial B'$. Da u subharmonisch ist, erhalten wir $u \le h$ in B'. Nach Definition von U folgt also $U \le h$ in $B' \setminus B$. Insbesondere gilt daher $U \le h$ auf $\partial B \cap B'$ und somit $U \le h$ auf $\partial(B \cap B')$. h und U sind harmonische Funktionen, wir schließen also, dass $U \le h$ in $B \cap B'$ gilt. Insgesamt erhalten wir also $U \le h$ in B'. Also ist U subharmonisch. □

Lemma 4.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u_1, \ldots, u_N$ in Ω subharmonisch. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

in Ω subharmonisch.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition von „subharmonisch". □

Definition 4.15. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Subfunktion oder Sublösung (für den Laplaceoperator $-\Delta$), wenn u subharmonisch ist und $u \le \varphi$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Superfunktionen sind analog definiert.

Bemerkung 4.16. Für gegebenes $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ sind Subfunktionen aufgrund des Maximumprinzips kleiner als Superfunktionen.

Sei $c_1 \ge \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$, dann ist $u(x) = c_1$ eine Superfunktion. Sei $c_2 \le \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$, dann ist $u(x) = c_2$ eine Subfunktion.

4.3. **Das Perronverfahren.**

Theorem 4.17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sei*

$$S_\varphi := \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : u \text{ ist Subfunktion bezüglich } \varphi\right\}.$$

Definiere

$$u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x).$$

Dann ist u in Ω harmonisch.

Beweis. Aufgrund des Maximumprinzips erfüllt $v \in S_\varphi$ die Ungleichung $v \le \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$. Nach Lemma 4.14 und Bemerkung 4.16 brauchen wir nur Funktionen $v \in S_\varphi$ mit $v \ge \inf \varphi$ zu betrachten, da $\max\{v, \inf \varphi\} \in S_\varphi$ gilt. Diese C^0-Schranken erlauben es später, die inneren Abschätzungen für harmonische Funktionen zu verwenden.

Sei $y \in \Omega$ beliebig. Nach Definition von u existiert eine (von y abhängige) Folge v_i, $v_i \in S_\varphi$, so dass $v_i(y) \to u(y)$. Sei $R > 0$, so dass $B_R(y) \Subset \Omega$ gilt. Sei V_i die harmonische Ersetzung von v_i bezüglich $B_R(y)$ wie in Lemma 4.13. Es gilt $V_i \in S_\varphi$. Die Funktion v_i ist subharmonisch. Also gilt $v_i \le V_i$. Nach Definition von u gilt also $V_i(y) \to u(y)$.

Die Funktionen V_i sind nun in $B_R(y)$ harmonisch und aufgrund der inneren Abschätzungen für Ableitungen harmonischer Funktionen konvergiert eine Teilfolge V_{i_k} auf jeder Kugel $B_\rho(y)$, $\rho < R$, gleichmäßig gegen eine in $B_R(y)$ harmonische Funktion v. Vergleiche dazu nochmals Theorem 4.2.

Nach Definition von u gilt daher $v \le u$. Es gilt auch $v(y) = u(y)$. Wir behaupten nun, dass in $B_R(y)$ sogar $u = v$ gilt: Angenommen es gibt ein $z \in B_R(y)$ mit $v(z) < u(z)$. Dann gibt es $\overline{u} \in S_\varphi$, so dass $v(z) < \overline{u}(z)$. Definiere $w_k := \max\{\overline{u}, V_{i_k}\}$. Es gilt $w_k \in S_\varphi$. Bezeichne mit W_k die zugehörigen harmonischen Ersetzungen in $B_{R_1}(y)$ mit $z \in B_{R_1}(y) \subset B_R(y)$. Dann gilt in $B_{R_1}(y)$

$$W_k \ge w_k \ge \underbrace{V_{i_k} \to v}_{\text{in } y}.$$

Wie oben existiert eine Teilfolge der W_k, die in $B_{R_1}(y)$ gegen eine harmonische Funktion w konvergiert. Dann gilt in $B_{R_1}(y)$ die Ungleichung $v \le w \le u$. Andererseits ist $v(y) = w(y) = u(y)$. Da v und w in $B_{R_1}(y)$ harmonische Funktionen sind, gilt aufgrund des Maximumprinzips $v = w$ in $B_{R_1}(y)$. Dies ist ein Widerspruch, da

$$v(z) < \overline{u}(z) \le w_k(z) \le W_k(z) \to w(z) = v(z).$$

Somit gilt $u = v$ in B und u ist in Ω harmonisch. □

Bemerkung 4.18. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Existiert eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist u gerade die Perronlösung, die wir in Theorem 4.17 konstruiert haben.

I. a. ist nicht klar, ob die Perronlösung die Randbedingung erfüllt.

Beweis. Wir beweisen nur, dass u die Perronlösung ist. Es gilt $u \in S_\varphi$. Sei $w \in S_\varphi$. Dann folgt aufgrund des Maximumprinzips, dass $w \le u$ ist. Die Behauptung folgt. □

4.4. **Barrieren und Randwerte.** Mit Hilfe von Barrieren zeigen wir nun, dass die Perronlösung stetige Randwerte auf hinreichend regulären Gebieten tatsächlich annimmt.

Definition 4.19 (Barriere). Sei $\xi \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, $w = w_\xi$, heißt Barriere für ξ relativ zu Ω, falls

(i) w in Ω superharmonisch ist,
(ii) $w(\xi) = 0$ und $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ gelten.

Bemerkung 4.20. Erfüllt w die Bedingungen von Definition 4.19 in einer Umgebung von ξ, so gibt es eine Barriere für ξ relativ zu Ω.

Beweis. Sei Definition 4.19 in $\Omega \cap B_r(\xi)$, $r > 0$, erfüllt. Wir wollen annehmen, dass $r > 0$ so gewählt ist, dass die Menge, über die wir nun das Infimum nehmen, nichtleer ist. Sei $m := \inf\limits_{(B_r(\xi)\setminus B_{r/2}(\xi))\cap\Omega} w > 0$. Dann ist leicht einzusehen, dass

$$\overline{w}(x) := \begin{cases} \min\{m, w(x)\}, & x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(\xi), \\ m, & x \in \overline{\Omega} \setminus B_{r/2}(\xi) \end{cases}$$

eine Barriere für ξ relativ zu Ω ist. □

Die Existenz einer Barriere ist also eine lokale Eigenschaft des Randes. Definiere daher

Definition 4.21. Ein Randpunkt heißt regulär (bezüglich des Laplaceoperators), falls es eine Barriere zu diesem Punkt gibt.

Lemma 4.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei u eine mittels Perronverfahren konstruierte Lösung, sei ξ ein regulärer Randpunkt von Ω und sei φ in ξ stetig. Dann gilt $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $M := \sup |\varphi|$. Sei w eine Barriere für ξ. Aufgrund der Stetigkeit von φ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ für $|x - \xi| < \delta$ gilt. Fixiere $k > 0$, so dass $kw(x) \geq 2M$ für $|x - \xi| \geq \delta$ gilt.

Nun ist $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ eine Superfunktion und $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ eine Subfunktion. Nach Definition von u gilt $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x)$. Da eine Superfunktion über einer Sublösung liegt, gilt $v(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$. Wir gehen zum Supremum über und erhalten $u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$. Insgesamt folgt also $|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x)$. Für $x \to \xi$ folgt $w(x) \to 0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir also $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$. □

Theorem 4.23. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für beliebiges $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ genau dann in $C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ lösbar, wenn jeder Randpunkt regulär ist.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Sei jeder Randpunkt regulär. Dann können wir Lemma 4.22 anwenden und erhalten, dass die Perronlösung die Randbedingung erfüllt und bis zum Rand stetig ist.

„$\Longrightarrow$“: Die Lösung zu $\varphi(x) = |x - \xi|$ ist eine Barriere zu $\xi \in \partial\Omega$. □

Definition 4.24. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann erfüllt Ω eine äußere Kugelbedingung, falls für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Kugel B existiert, so dass $\{x\} = \overline{B} \cap \overline{\Omega}$ gilt.

Ω erfüllt eine gleichmäßige Kugelbedingung, falls für alle $x \in \partial\Omega$ Kugeln mit gleichem Radius verwendet werden können.

Lemma 4.25. *Erfülle Ω in ξ eine äußere Kugelbedingung, $\{\xi\} = \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega}$. Dann ist*

$$w(x) := \begin{cases} R^{2-n} - |x - y|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \log \frac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

eine Barriere für $\xi \in \partial\Omega$.

Beweis. Klar. □

4.5. **Existenzsätze.**

Theorem 4.26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Sei u die Perronlösung. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. □

Theorem 4.27. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Beweis. Sei $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung zu

$$\Delta v = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

(v ist nicht eindeutig bestimmt, aber das macht nichts.) Sei $w \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung zu

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - v & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann löst $u := w + v$ das Randwertproblem (4.1). Die Eindeutigkeitsaussage folgt direkt aus dem Maximumprinzip. □

5. Maximumprinzipien

5.1. Maximumprinzipien für elliptische Differentialgleichungen.

Bemerkung 5.1. Für dieses Kapitel wollen wir die folgenden Generalvoraussetzungen annehmen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Wir betrachten Differentialoperatoren der Form

$$\begin{aligned} Lu(x) &= a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \\ &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x), \end{aligned}$$

wobei

(i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ gilt.

(ii) L gleichmäßig elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |d(x)| \le K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$.

Ein Beispiel hierfür ist $Lu = \Delta u$.

Theorem 5.2. *Sei $d \equiv 0$ und erfülle u in Ω die Differentialungleichung $Lu \ge 0$, d. h.*

$$a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \ge 0.$$

Dann gilt

$$\sup_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Ein analoges Resultat erhält man für $Lu \le 0$ und das Infimum durch Betrachten von $-u$.

Beweis. Nehme zunächst an, dass

$$Lu > 0 \quad \text{in } \Omega$$

gilt. In einem inneren Maximum x_0 gilt

$$\begin{aligned} u_i(x_0) &= 0 \quad \text{für alle } i, \\ u_{ij}(x_0) &\le 0 \quad \text{im Sinne von Matrizen.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt (diagonalisiere z. B. $u_{ij}(x_0)$)

$$Lu(x_0) = a^{ij} u_{ij} \le 0.$$

Widerspruch.

Sei nun $Lu \ge 0$. Definiere für $\alpha > 0$ die Funktion $v(x) = e^{\alpha x^1}$. Es gilt

$$Lv(x) = \big(\alpha^2 \underbrace{a^{11}(x)}_{\ge \lambda} + \alpha \underbrace{b^1(x)}_{|\cdot| \le K}\big) \cdot v(x).$$

Für $\alpha \gg 1$ hinreichend groß erhalten wir $Lv > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann folgt $L(u + \varepsilon v) > 0$. Somit folgt die Behauptung für $u + \varepsilon v$. Wir lassen nun $\varepsilon \searrow 0$ und erhalten die Behauptung für u. □

Korollar 5.3. *Seien $f \in C^0(\Omega)$ und $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ sowie $d \equiv 0$. Dann besitzt das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Wende das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. □

Korollar 5.4. *Sei $d \le 0$, $Lu \ge 0$ in Ω, $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ Dann gilt*

$$\sup_\Omega u^+ \le \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Beweis. Definiere $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. In Ω^+ gilt

$$a^{ij} u_{ij} + b^i u_i \ge 0.$$

Somit folgt $\sup\limits_{\Omega^+} u \le \max\limits_{\partial\Omega^+} u$. Sei ohne Einschränkung $\Omega^+ \ne \emptyset$. Wir erhalten

$$\sup_\Omega u^+ = \sup_{\Omega^+} u \le \max_{\partial\Omega^+} u \le \max_{\partial\Omega} u^+,$$

da $u = 0$ auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Omega) \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega)$. □

Theorem 5.5 (Starkes Maximumprinzip, E. Hopf)**.** *Sei $d \equiv 0$, $Lu \ge 0$. Sei Ω zusammenhängend. Nimmt u sein Maximum im Inneren von Ω an, so ist u konstant.*

Gilt $d \le 0$ und nimmt u sein nichtnegatives Maximum im Inneren von Ω an, so ist u konstant.

Der Beweis hiervon benutzt

Theorem 5.6 (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $d \le 0$, $Lu \ge 0$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und gelte*

(i) u ist in x_0 stetig,

(ii) $u(x_0) \geq 0$ *falls* $d \not\equiv 0$,
(iii) $u(x_0) > u(x)$ *für* $x \in \Omega$,
(iv) *es gibt eine Kugel* $B_R(y) \subset \Omega$ *mit* $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Dann gilt

$$\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle > 0,$$

falls diese Ableitung existiert.

Hier ist klar, dass $\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle \geq 0$ gilt.

Beweis von Theorem 5.6. Nehme an, dass $\partial B_R(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ ist. Sei $0 < \rho < R$. Betrachte im Annulus $B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}$ die Funktion

$$v(x) := e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2} \quad \text{für } \gamma \gg 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Lv(x) = &\left\{4\gamma^2 a^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\gamma a^{ij}\delta_{ij} - 2\gamma b^i(x_i - y_i) + d\right\} e^{-\gamma|x-y|^2} \\ &- de^{-\gamma R^2}. \end{aligned}$$

Für fixiertes ρ und $\gamma \gg 1$ hinreichend groß erhalten wir $Lv \geq 0$ in $B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}$. Nach Voraussetzung gilt $u(x) - u(x_0) < 0$ für $x \in B_R(y) \subset \Omega$. Somit existiert $\varepsilon > 0$, so dass

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in \partial B_\rho(y).$$

Auf $\partial B_R(y)$ gilt $v = 0$ und somit folgt dort ebenfalls $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0$. Weiterhin gilt

$$L(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) \geq -d(x)u(x_0) \geq 0.$$

Korollar 5.4, angewandt auf den Annulus, liefert daher

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in B_R(y) \setminus \overline{B_\rho(y)}.$$

Diese Funktion verschwindet in x_0. Also folgt in x_0, falls diese Ableitung existiert,

$$\langle D(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)), x_0 - y\rangle \geq 0 \quad \text{in } x = x_0.$$

Wir schließen, dass

$$\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle \geq -\varepsilon\langle Dv(x_0), x_0 - y\rangle = \varepsilon\left(2\gamma R^2 e^{-\gamma R^2}\right) > 0$$

gilt. Das Theorem folgt. □

Beweis von Theorem 5.5. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei u nicht konstant, nehme aber in Ω das Maximum m an. Sei $m \geq 0$, falls $d \not\equiv 0$ gilt. Definiere $\Omega' := \{x \in \Omega : u(x) < m\} \neq \emptyset$. Es ist $\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset$. Wähle $y \in \Omega'$ mit $d(y, \partial\Omega') < d(y, \partial\Omega)$. Sei $B_R(y)$ die größte Kugel in Ω' mit Mittelpunkt y, die noch in Ω' enthalten ist. Dann folgt $u(x_0) = m$ für ein $x_0 \in \partial B_R(y)$ und $u(x) < u(x_0)$ für $x \in \Omega'$. Wir wenden nun das Hopfsche Randpunktlemma, Theorem 5.6, an und erhalten $Du(x_0) \neq 0$. In x_0 nimmt aber u ein inneres Maximum an. Somit folgt dort $Du(x_0) = 0$. Wir erhalten einen Widerspruch und das Theorem folgt. □

5.2. **Parabolisches Maximumprinzip.**

Definition 5.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $T > 0$. Dann definieren wir den parabolischen Rand von $\Omega \times (0,T)$ durch

$$\mathcal{P}(\Omega \times (0,T)) := \left(\overline{\Omega} \times \{0\}\right) \cup (\partial\Omega \times [0,T)) .$$

Wir beweisen nur das schwache parabolische Maximumprinzip für zylinderförmige Gebiete.

Theorem 5.8. *Sei $T > 0$. Seien L, Ω wie in Bemerkung 5.1, jedoch auf $\Omega \times (0,T)$ statt auf Ω definiert. Gelte $d \equiv 0$. Erfülle*

$$u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left((\Omega \times (0,T)) \cup \mathcal{P}(\Omega \times (0,T))\right)$$

die Differentialungleichung

$$\dot{u} \le Lu \quad \text{in } \Omega \times (0,T).$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega \times (0,T)} u \le \sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))} u.$$

Varianten mit $d \not\equiv 0$ und $\dot{u} - Lu \le f$ mit $f \le c$ erhält man daraus als Übung.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Ist die Behauptung nicht erfüllt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Behauptung für $u_\varepsilon := u - \varepsilon t$ ebenfalls verletzt ist. Die Funktion u_ε erfüllt die Ungleichung $\dot{u}_\varepsilon - Lu_\varepsilon = \dot{u} - Lu - \varepsilon < 0$ in $\Omega \times (0,T)$. Da die angegebene Ungleichung für u_ε statt u verletzt ist, gibt es $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0,T)$ mit

$$u_\varepsilon(x_0, t_0) > \sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))} u_\varepsilon.$$

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $u_\varepsilon(x_0, t_0) \ge u_\varepsilon(x, t)$ für alle $(x,t) \in \Omega \times (0, t_0]$ gilt. Sonst können wir nämlich einen Punkt mit demselben Funktionswert zu einem früheren Zeitpunkt wählen, für den diese Ungleichung gilt.

Wir erhalten in (x_0, t_0) nach Wahl dieses Punktes die Ungleichungen $\dot{u}_\varepsilon \ge 0$, $(u_\varepsilon)_i = 0$ und $(u_\varepsilon)_{ij} \preccurlyeq 0$. Somit folgt

$$0 \le \dot{u}_\varepsilon - a^{ij}(u_\varepsilon)_{ij} - b^i(u_\varepsilon)_i < 0.$$

Widerspruch. □

6. Hilbertraummethoden

6.1. **Die Laplacegleichung – Eindeutigkeit.**

Die Aussage des folgenden Theorems ist nicht neu, sie folgt auch schon aus dem Maximumprinzip. Wir lernen hieran nur eine neue Methode kennen, die Energiemethode.

Theorem 6.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Dann besitzt das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung in $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Seien u, $\tilde{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ zwei Lösungen. Definiere $w := u - \tilde{u}$. Dann folgt

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Es folgt

$$0 = -\int\limits_\Omega w \cdot \Delta w = \int\limits_\Omega |Dw|^2.$$

Also gilt $Dw = 0$ in Ω. Somit ist w konstant. Aufgrund der Randwerte folgt $w = 0$. □

6.2. **Die Laplacegleichung – Schwache Existenz.** Wir benutzen Methoden der Funktionalanalysis, um eine schwache Lösung zu konstruieren.

Definition 6.2 (Generalvoraussetzungen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform

$$Lu = -\left(a^{ij}(x)u_i\right)_j + b^i(x)u_i + d(x)u.$$

Wir machen folgende Annahmen

- gleichmäßige Elliptizität:
$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \vartheta|\xi|^2$$
für eine Konstante $\vartheta > 0$.
- Symmetrie: $a^{ij} = a^{ji}$.
- Regularität: a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.
- Koerzivität: Es gibt $\beta > 0$, so dass
$$\int\limits_\Omega a^{ij}\varphi_i\varphi_j + b^i\varphi_i\varphi + d\varphi^2 \geq \beta\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

Beispiel 6.3. Koerzivität kann man beispielsweise wie folgt überprüfen. Es gilt

$$\int\limits_\Omega a^{ij}\varphi_i\varphi_j + b^i\varphi_i\varphi + d\varphi^2 \geq \int\limits_\Omega \vartheta|D\varphi|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon|D\varphi|^2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}|b|^2 + d\right)\varphi^2.$$

Wähle nun ε, so dass $\vartheta - \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ ist. Negative quadratische Terme in φ lassen sich (möglicherweise) mit Hilfe der Poincaréungleichung ($\|u\|_{L^2} \leq c \cdot \|Du\|_{L^2}$) in die $|D\varphi|^2-$Terme absorbieren. Benutze schließlich die Äquivalenz der Normen $\|u\|_{H^{1,2}}$ und $\|Du\|_{L^2}$ auf $H^{1,2}_0$.

Bemerkung 6.4. Im Falle einer glatten Lösung u von $Lu = f$ bei glatten Daten erhalten wir durch partielle Integration

$$\int\limits_\Omega a^{ij}u_i\varphi_j + b^iu_i\varphi + du\varphi = \int\limits_\Omega f\varphi$$

für alle Testfunktionen φ. Gilt dies für alle Testfunktionen, so folgt umgekehrt auch $Lu = f$. Durch Approximation sehen wir, dass wir dieselbe Gleichheit erhalten, wenn nur $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

Dies motiviert die folgende Definition einer schwachen Lösung.

Definition 6.5 (Schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in H^1_0(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wenn für alle Funktionen $\varphi \in H^1_0(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega a^{ij} u_i \varphi_j + b^i u_i \varphi + du\varphi = \int\limits_\Omega f\varphi$$

gilt.

Wir wollen das folgende Theorem aus der Funktionalanalysis benutzen. Es folgt direkt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, wenn die Bilinearform symmetrisch ist, denn dann definiert die Bilinearform ein zum Standardskalarprodukt äquivalentes Skalarprodukt (im Sinne von äquivalenten Normen) und wir können hierauf direkt den Rieszschen Darstellungssatz anwenden.

Theorem 6.6 (Lax-Milgram)**.** *Sei H ein Hilbertraum, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear, stetig, also*

$$|B[u, v]| \le \alpha \|u\| \cdot \|v\|,$$

und koerziv, also

$$\beta \|u\|^2 \le B[u, u],$$

für Konstanten α, $\beta > 0$ und alle u, $v \in H$. Sei $f \in H^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in H$ mit

$$B[u, v] = f(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

Beweis.

(i) Sei zunächst $u \in H$ fest. Die Abbildung $v \mapsto B[u, v]$ ist eine stetige lineare Abbildung. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es somit ein eindeutig bestimmtes $w \in H$, so dass
$$B[u, v] = \langle w, v\rangle \quad \text{für alle } v \in H.$$
Wir setzen $Au := w$.

(ii) Wir behaupten, dass der Operator $A : H \to H$ linear und stetig ist. Die Linearität folgt aus der Bilinearität von B. Aus der Abschätzung
$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = B[u, Au] \le \alpha \|u\| \cdot \|Au\|$$
folgt die Stetigkeit von A.

(iii) Der Operator ist injektiv, da B koerziv ist, denn
$$\beta \|u\|^2 \le B[u, u] = \langle Au, u\rangle \le \|Au\| \cdot \|u\|$$
impliziert $\beta\|u\| \le \|Au\|$.

(iv) Das Bild von A ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von H, da aufgrund der Abschätzung $\beta\|u\| \le \|Au\|$ eine Cauchyfolge im Bild von einer Cauchyfolge im Urbild herkommt.

(v) A ist surjektiv. Sonst existiert nämlich ein $0 \ne w \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, da $\operatorname{Im} A$ ein abgeschlossener Unterraum ist und wir erhalten
$$\beta \|w\|^2 \le B[w, w] = \langle Aw, w\rangle = 0.$$
Somit haben wir nachgewiesen, dass A ein Isomorphismus ist.

(vi) Aufgrund des Rieszschen Darstellungssatzes gibt es ein $w \in H$ mit

$$\langle w, v\rangle = f(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

Da A ein Isomorphismus ist, ist $u := A^{-1}w$ das gesuchte Element, denn es gilt

$$B[u, v] = \langle Au, v\rangle = \langle w, v\rangle = f(v).$$

(vii) $u \in H$ ist eindeutig bestimmt. Seinen nämlich u, $\tilde{u} \in H$ mit

$$B[u, v] = f(v) \text{ und } B[\tilde{u}, v] = f(v) \text{ für alle } v \in H,$$

so folgt auch $B[u-\tilde{u}, v] = 0$ für alle $v \in H$. Aufgrund der Koerzivität erhalten wir damit insbesondere für $v := u - \tilde{u}$

$$0 = B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] \geq \beta\|u - \tilde{u}\|^2$$

und es folgt $u = \tilde{u}$. □

Theorem 6.7. *Unter den Voraussetzungen von Definition 6.2 existiert genau eine schwache Lösung u des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Wir definieren $B : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$B[u, v] := \int\limits_\Omega a^{ij}u_iv_j + b^iu_iv + duv.$$

Wir hatten vorausgesetzt, dass B koerziv ist. Die Stetigkeit folgt aus der Beschränktheit der Koeffizienten und der Cauchyschen Ungleichung. Wir erhalten die Behauptung nun aus Lax-Milgram. □

6.3. **Die Wärmeleitungsgleichung.**

Theorem 6.8 (Eindeutigkeit mit Energieabschätzungen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und sei $T > 0$. Dann gibt es höchstens eine Lösung*

$$u \in C^2\left(\overline{\Omega} \times [0, T]\right)$$

des Randwertproblems

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = g & \text{auf } \mathcal{P}(\Omega \times (0, T)), \end{cases}$$

wobei wiederum $\mathcal{P}(\Omega \times (0, T)) := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T))$ der parabolische Rand ist und g als Einschränkung von u definiert ist.

Beweis. Die Differenz w zweier solcher Lösungen erfüllt

$$\begin{cases} \dot{w} = \Delta w & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ w = 0 & \text{auf } \mathcal{P}(\Omega \times (0, T)). \end{cases}$$

Definiere

$$e(t) := \int\limits_\Omega w^2(x, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Es gilt
$$\frac{d}{dt}e(t)=2\int\limits_\Omega w\cdot\dot w=2\int\limits_\Omega w\cdot\Delta w=-2\int\limits_\Omega |Dw|^2\le 0.$$
Damit ist $e(t)\le e(0)=0$ und wir erhalten $w=0$ in $\Omega\times[0,T]$. □

Theorem 6.9. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega\in C^1$ und sei $T>0$. Sei $u\in C^2\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$ eine Lösung des Randwertproblems*
$$\begin{cases}\dot u=\Delta u & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ u=0 & \text{auf } \partial\Omega\times(0,T).\end{cases}$$
Dann fällt $\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ exponentiell schnell ab.

Beweis. Definiere wieder $e(t):=\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2}$. Setze
$$\lambda:=\inf_{\substack{u\not\equiv0\\ u\in H^1_0(\Omega)}}\frac{\int\limits_\Omega |Du|^2}{\int\limits_\Omega |u|^2}.$$
Aufgrund der Poincaréschen Ungleichung gilt $\lambda>0$. Mit Hilfe der Rechnung aus Theorem 6.8 erhalten wir
$$\frac{d}{dt}e(t)=-2\int\limits_\Omega |Du|^2\le-2\lambda\int\limits_\Omega |u|^2=-2\lambda e(t).$$
Wir erhalten den behaupteten exponentiellen Abfall: $\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\le e^{-\lambda t}\|u(\cdot,0)\|_{L^2}$. □

6.4. **Die Wellengleichung.**

Theorem 6.10 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega\in C^1$, und $0<T<\infty$. Sei $u\in C^2\left(\overline{\Omega}\times[0,T]\right)$ eine Lösung des Anfangswertproblems*
$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u=f & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ u=g & \text{auf } (\partial\Omega\times(0,T))\cup(\Omega\times\{0\}),\\ u_t=h & \text{auf } \Omega\times\{0\}.\end{cases}$$
Dann ist u die einzige Lösung mit dieser Differenzierbarkeit.

Beweis. Sei $\tilde u$ eine weitere solche Lösung. Definiere $w:=u-\tilde u$ und die Energie
$$e(t):=\frac12\int\limits_\Omega w_t^2(x,t)+|Dw(x,t)|^2\,dx$$
für $0\le t<T$. Es gilt mit partieller Integration und aufgrund der Differentialgleichung
$$\frac{d}{dt}e(t)=\int\limits_\Omega w_t\cdot w_{tt}+\langle Dw,Dw_t\rangle\,dx=\int\limits_\Omega w_t(w_{tt}-\Delta w)\,dx=0.$$
Randterme treten bei der partiellen Integration nicht auf, denn aus $w=0$ auf $\partial\Omega\times(0,T)$ folgt dort auch $w_t=0$. Somit gilt $e(t)=e(0)=0$ aufgrund der gleichen Anfangsdaten; es ist $w(\cdot,0)=0$. Wir erhalten $w_t=0$ und $Dw=0$. Also folgt $w=0$ und daher $u=\tilde u$. □

Theorem 6.11 (Energieerhaltung)**.** *Sei* $u \in C^3_c(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *eine Lösung von* $u_{tt} = \Delta u$ *in* $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ *mit* $T > 0$*. Dann ist*

$$e(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2(\cdot,t) + |\nabla u|^2(\cdot,t)$$

unabhängig von t*.*

Beweis. Es gilt aufgrund der Differentialgleichung und mit partieller Integration

$$\frac{d}{dt}e(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 2u_t u_{tt} + 2\langle \nabla u, \nabla u_t\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 2u_t\Delta u - 2\Delta u u_t = 0. \qquad \square$$

Theorem 6.12 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)**.** *Sei* $u \in C^2$ *eine Lösung von*

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *und sei* $t_0 > 0$*. Gilt* $u \equiv u_t \equiv 0$ *in* $B_{t_0}(x_0) \times \{0\}$*, so folgt* $u \equiv 0$ *im Kegel*

$$C := \{(x,t) \,:\, 0 \le t \le t_0,\, |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$

Durch Betrachten der Differenz erhalten wir: Besitzen zwei Lösungen (entsprechender Regularität) gleiche Anfangswerte in $B_{t_0}(x_0)$, so stimmen diese in C überein.

Beweis. Definiere

$$e(t) := \frac{1}{2}\int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} u_t^2(x,t) + |Du(x,t)|^2\,dx$$

für $0 \le t \le t_0$. Das Integrationsgebiet ist zeitabhängig. Daher benutzt man zum Differenzieren beispielsweise

$$\int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} \ldots = \int\limits_0^{t_0-t} \int\limits_{\partial B_\rho(x_0)} \ldots\, d\mathcal{H}^{n-1}\,d\rho.$$

Es gilt für $0 \le t \le t_0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e(t) &= \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} u_t u_{tt} + \langle Du, Du_t\rangle - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(u_t^2 + |Du|^2\right)\\
&= \int\limits_{B_{t_0-t}(x_0)} u_t(u_{tt} - \Delta u) + \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial\nu}u_t - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(u_t^2 + |Du|^2\right)\\
&= \int\limits_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial\nu}u_t - \frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}|Du|^2\right) \le 0,
\end{aligned}$$

denn es gilt

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}u_t\right| \le |Du|\cdot|u_t| \le \frac{1}{2}|u_t|^2 + \frac{1}{2}|Du|^2.$$

Somit ist $e(t) \le 0$ für alle $0 \le t < t_0$. Wie im letzten Beweis gelten daher $u_t = 0$ und $Du = 0$ in C. Somit folgt in der Menge C die Behauptung $u = 0$. $\square$

Bemerkung 6.13. Für Lösungen $u \in C^2$ der gleichmäßig hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{tt} = a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + du \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty),$$

deren Koeffizienten a^{ij}, b^i, d samt ihren ersten Ableitungen (bezüglich x und t) gleichmäßig beschränkt sind, kann man ebenfalls zeigen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit endlich ist, indem man

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B_{\gamma(t_0-t)}} e^{-\mu t}(u_t^2 + a^{ij} u_i u_j + \kappa u^2)$$

für geeignete γ, μ, $\kappa \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Beweis. Übung. □

7. Die Darstellungsformel für die Wärmeleitungsgleichung

Bemerkung 7.1 (Physikalische Herleitung)**.** Ist der Wärmefluss proportional zu $-Du$, so erhalten wir für beliebige C^1-Gebiete V und die Temperatur u aus der Änderung der Wärmemenge in V

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V u = \int\limits_{\partial\Omega} \langle Du, \nu \rangle = \int\limits_V \Delta u.$$

Somit gilt $\dot{u} = \Delta u$.

Definition 7.2. Die Funktion

$$\Phi(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung $\dot{u} = \Delta u$.

Lemma 7.3. *Die Funktion Φ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung.*

Beweis. Definiere

$$w(x,t) := t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Dann gelten

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= -\frac{n}{2} t^{-n/2-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{|x|^2}{4t^2} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) w, \\
w_i &= -\frac{2x_i}{4t} w = -\frac{x_i}{2t} w, \\
w_{ij} &= \left(\frac{x_i x_j}{4t} - \frac{\delta_{ij}}{2t}\right) w, \\
\Delta w &= \left(\frac{|x|^2}{4t} - \frac{n}{2t}\right) w = \dot{w}.
\end{aligned}$$

□

Die Normierung in der Definition der Fundamentallösung erklärt sich aus dem folgenden

Lemma 7.4. *Für jedes $t > 0$ gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot, t) = 1.$$

Beweis. Aus der Analysis ist bekannt, dass

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy = \int\limits_0^\infty e^{-r^2} 2\pi r\,dr$$
$$= -\pi \int\limits_0^\infty \frac{d}{dr} e^{-r^2}\,dr = \pi$$

gilt. Wir haben in der Rechnung Polarkoordinaten benutzt.

Mit der Variablentransformation $z = \frac{x}{\sqrt{4t}}$ und „$dx^i = \sqrt{4t}\,dz^i$“ erhalten wir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\,dz$$
$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(z^1)^2} \cdot \ldots \cdot e^{-(z^n)^2}\,dz = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^n = 1. \qquad \square$$

Mit Hilfe der Fundamentallösung können wir das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf dem $\mathbb{R}^n$ lösen.

Theorem 7.5. *Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$. Definiere*

$$u(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\,dy \equiv \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Dann gelten

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
(ii) $\dot{u} - \Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *und*
(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0),\\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(x_0)$ *für beliebige Punkte* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis.

(a) Die Funktion $(x,t) \mapsto \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ ist in C^∞ und sämtliche Ableitungen sind auf $\mathbb{R}^n \times [\delta,\infty)$ für beliebiges $\delta > 0$ gleichmäßig beschränkt. Für $|x| \to \infty$ fallen die Funktion Φ und sämtliche Ableitungen schnell genug ab, so dass $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ gilt und die Ableitungen durch Ableitungen des Integrationskernes Φ dargestellt sind. (Details: Übung.)

Wir erhalten

$$\dot{u}(x,t) - \Delta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\dot{\Phi} - \Delta_x \Phi\right)(x-y,t) \cdot g(y)\,dy = 0,$$

da Φ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$, so dass $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y - x_0| < \delta$ gilt. Gelte $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$. Dann erhalten wir nach Lemma 7.4

$$|u(x,t) - g(x_0)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x_0))\,dy\right|$$

$$\le \underbrace{\int\limits_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\underbrace{|g(y)-g(x_0)|}_{\le\varepsilon}\,dy}_{\le\varepsilon} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)|g(y)-g(x_0)|\,dy.$$

Aus $|x-x_0|\le\frac{\delta}{2}$ schließen wir für y mit $|y-x_0|\ge\delta$

$$|y-x_0|\le|y-x|+\underbrace{|x-x_0|}_{\le\frac{\delta}{2}}\le|y-x|+\frac{1}{2}|y-x_0|.$$

Also ist $|y-x|\ge\frac{1}{2}|y-x_0|$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}|u(x,t)-g(x_0)| &\le \varepsilon + 2\|g\|_{L^\infty}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy\\ &\le \varepsilon+\frac{2\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi)^{n/2}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(x_0)}\frac{1}{t^{n/2}}\cdot e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\,dy\\ &= \varepsilon+\frac{2\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi)^{n/2}}\cdot\int\limits_\delta^\infty \frac{1}{t^{n/2}}\cdot e^{-\frac{r^2}{16t}}\cdot n\cdot\omega_n\cdot r^{n-1}\,dr\\ &\to \varepsilon+0\end{aligned}$$

für $t\searrow 0$. Beachte dazu, dass

$$e^{-\frac{r^2}{16t}}=e^{-\frac{r^2}{32t}}\cdot e^{-\frac{r^2}{32t}}\le e^{-\frac{\delta^2}{32t}}\cdot e^{-\frac{r^2}{32}}$$

für $0<t\le 1$ gilt. Benutze nun den r-abhängigen Faktor um die Endlichkeit des Integrals zu zeigen. Der t-abhängige Faktor sorgt dann für die Konvergenz. $\square$

Auch für $\dot u-\Delta u=f$ bekommen wir eine Lösung. Wir können hier den Fall $u(\cdot,0)=0$ behandeln und für andere Anfangswerte die Lösung aus Theorem 7.5 addieren.

Theorem 7.6. *Sei $f\in C^{2;1}_c(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Definiere*

$$\begin{aligned}u(x,t) &:= \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\cdot f(y,s)\,dy\,ds\\ &\equiv \int\limits_0^t\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\cdot f(y,s)\,dy\,ds.\end{aligned}$$

Dann gelten

(i) $u\in C^{2;1}_{loc}(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$,
(ii) $\dot u-\Delta u=f$ *in* $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ *und*
(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0),\\ x\in\mathbb{R}^n,\,t>0}} u(x,t)=0$ *für beliebige* $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Beweis.

(i) Die Funktion Φ ist in $(0,0)$ singulär. Daher gehen wir ähnlich wie in Theorem 3.6 vor.

Mit Hilfe einer Variablentransformation erhalten wir

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \cdot f(x-y,t-s)\,dy\,ds.$$

Es gilt $f \in C_c^{2;1}$. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz dürfen wir unter dem Integral differenzieren und erhalten für $t > 0$

$$\begin{aligned} \dot u(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x-y,t-s)\,dy\,ds + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) \cdot f(x-y,0)\,dy,\\ u_{ij}(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}(x-y,t-s)\,dy\,ds. \end{aligned}$$

Eine analoge Formel gilt auch für die ersten Ableitungen von u. Somit ist $u \in C^{2;1}_{loc}$.

(ii) Aus den obigen Formeln für Ableitungen von u erhalten wir für $t > 0$

$$\begin{aligned} (\dot u - \Delta u)(x,t) &= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x-y,t-s) \right\} dy\,ds \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) \cdot f(x-y,0)\,dy \\ &= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right\} dy\,ds \\ &\quad + \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right\} dy\,ds \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) \cdot f(x-y,0)\,dy \\ &\equiv I_\varepsilon + J_\varepsilon + K. \end{aligned}$$

Es gilt nach Lemma 7.4

$$|J_\varepsilon| \le \|f\|_{C^{2;1}} \cdot \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\,dy\,ds \le c\varepsilon.$$

Für positive Zeiten ist Φ regulär und f hat kompakten Träger. Somit erhalten wir mit partieller Integration in beiden Variablen

$$I_\varepsilon = \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right)\Phi(y,s)\right\}}_{=0} \cdot f(x-y,t-s)\,dy\,ds$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon)\cdot f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\cdot f(x-y,0)\,dy}_{=-K}.$$

Kombinieren wir dies, so erhalten wir für $t > 0$

$$\dot u(x,t) - \Delta u(x,t) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon)\cdot f(x-y,t-\varepsilon)\,dy = f(x,t).$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit wie im Beweis von Theorem 7.5.

(iii) Aus $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le t\cdot\|f\|_{L^\infty} \to 0$ für $t \searrow 0$ folgt die letzte Behauptung. □

Bemerkung 7.7.

(i) Selbst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot u = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty),\\ u(\cdot,t) \to 0 & \text{in } C^0_{loc} \text{ für } t \searrow 0 \end{cases}$$

ist nicht eindeutig lösbar.

(ii) Bei der in Theorem 7.5 angegebenen Lösung der Wärmeleitungsgleichung gilt

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty},$$

wenn wir u stetig bis $t = 0$ fortsetzen.

(iii) Da Φ überall positiv ist, besitzt die Wärmeleitungsgleichung eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit: Addition einer nicht-negativen Funktion $0 \not\equiv s_0 \in C^0_c(B_1(0))$ vergrößert $u(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$ für die aus der Faltung mit Φ entstandenen Lösung u.

8. Die Wellengleichung

Bemerkung 8.1 (Physikalische Herleitung)**.** Die folgende Herleitung funktioniert eindimensional gut. Ohne genaue Erklärung benutzen wir die aus dem Schulunterricht Physik übliche Notation.

Wir betrachten Federn mit gleichen Massestücken zwischen ihnen, die in einer Reihe hintereinander liegen und miteinander verbunden sind. Das Hookesche Gesetz lautet $F = D\cdot\Delta l$. Integration liefert für die Energie $E = \int\limits_0^{\Delta l} F = \frac12 D(\Delta l)^2$. Wir wollen nun sehen, wie sich die Federkonstante ändern muss, wenn wir die Feder gedanklich in kleinere Federn zerlegen, die jedoch den gleichen Effekt wie die ursprüngliche Feder haben sollen. Da sich die gespeicherte Energie nicht ändert, gilt für die Federkonstanten $D(1)$ einer solchen Feder der Länge 1 und der Federkonstanten $D(1/2)$ einer solchen Feder der Länge 1/2 wegen

$$E = \frac12 D(1)(\Delta l)^2 = \frac12 D(1/2)\cdot\left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2\cdot 2$$

die Beziehung $D(1) = D(1/2) \cdot \frac{1}{2}$. Entsprechend erhalten wir $D(l/N) = ND(l) \equiv ND$. Sei $u(k) = u(k,t)$ die Auslenkung an der Stelle k. Dann erhalten wir wegen $F = ma$ und da sich die Kraft auf die Stelle k zwischen zwei Federn als Differenz der Kräfte nach rechts und nach links ergibt

$$\begin{aligned}\frac{m}{N}\ddot{u}(k) &= F(k) = D\left(\frac{l}{N}\right)\left[u\left(k+\frac{l}{n}\right)-u(k)\right] - D\left(\frac{l}{N}\right)\left[u(k)-u\left(k-\frac{l}{N}\right)\right]\\ &= D(l)\frac{u\left(k+\frac{l}{N}\right)-2u(k)+u\left(k-\frac{l}{N}\right)}{\frac{1}{N}}.\end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ erhalten wir rechts im Grenzwert die zweite Ableitung von u, also insgesamt

$$m\ddot{u} = D(l)u_{xx}.$$

Lemma 8.2 (Lösung der eindimensionalen Wellengleichung)**.** *Seien $g \in C^2_{loc}(\mathbb{R})$ und $h \in C^1_{loc}(\mathbb{R})$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (-\infty,\infty),\\ u(\cdot,0) = g & \text{auf } \mathbb{R},\\ u_t(\cdot,0) = h & \text{auf } \mathbb{R}\end{cases}$$

lösbar und es gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy.$$

Interessanter als diese Formel ist jedoch, dass man dies auf das Lösen von zwei Transportgleichungen zurückführen kann, da

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt} - u_{xx}$$

gilt. So leitet man auch die obige Formel her.

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \tfrac{1}{2}(g'(x+t) - g'(x-t)) + \tfrac{1}{2}(h(x+t)+h(x-t)),\\ u_{tt}(x,t) &= \tfrac{1}{2}(g''(x+t) + g''(x-t)) + \tfrac{1}{2}(h'(x+t)-h'(x-t)),\\ u_x(x,t) &= \tfrac{1}{2}(g'(x+t) + g'(x-t)) + \tfrac{1}{2}(h(x+t)-h(x-t)),\\ u_{xx}(x,t) &= \tfrac{1}{2}(g''(x+t) + g''(x-t)) + \tfrac{1}{2}(h'(x+t)-h'(x-t)). \end{aligned}$$ ◻

Theorem 8.3. *Sei $u \in C^2_{loc}\left(\mathbb{R}^3 \times (-\infty,\infty)\right)$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (-\infty,\infty),\\ u(\cdot,0) = g & \text{auf } \mathbb{R}^3,\\ u_t(\cdot,0) = h & \text{auf } \mathbb{R}^3\end{cases}$$

mit $g \in C^3_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right)$ und $h \in C^2_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Dann gilt für $t > 0$ die Kirchhoffsche Formel

$$u(x,t) = \fint\limits_{\partial B_t(x)} th(y) + g(y) + \langle Dg(y), y-x\rangle\,dy.$$

Herleitung der Kirchhoffschen Formel. Statt das Theorem direkt zu beweisen leiten wir die Formel her. Dabei spezialisieren wir am Anfang noch nicht auf den Fall $n = 3$. Setze

$$U(x, r, t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y, t)\, dy,$$

sowie

$$G(x, r) := \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dy \quad \text{und} \quad H(x, r) := \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, dy.$$

Dann gelten $U(x, r, 0) = G(x, r)$, $U_t(x, r, 0) = H(x, r)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $r > 0$ sowie die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \tfrac{n-1}{r} U_r = 0 \quad \text{für } (x, r, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)^2. \tag{8.1}$$

Für die Herleitung von (8.1) sei an $|B_r| = \omega_n r^n$, $|\partial B_r| = n\omega_n r^{n-1}$ erinnert. Wir werden mehrfach die Variablentransformation $y = x + rz$ mit „$dy^i = r\, dz^i$" verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
U(x, r, t) &= \fint_{\partial B_r(x)} u(y, t)\, dy = \frac{1}{|\partial B_1|} \cdot \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz, t)\, dz,\\
U_r(x, r, t) &= \frac{1}{|\partial B_1|} \cdot \int_{\partial B_1(0)} \langle Du(x + rz, t), z\rangle\, dz\\
&= \frac{1}{|\partial B_1| \cdot r^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_r(x)} \left\langle Du(y, t), \tfrac{y-x}{r}\right\rangle\, dy\\
&= \frac{1}{|\partial B_r|} \cdot \int_{B_r(x)} \Delta u(y, t)\, dy = \frac{|B_r|}{|\partial B_r|} \cdot \fint_{B_r(x)} \Delta u(y, t)\, dy\\
&= \frac{r}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y, t)\, dy = \frac{r}{n} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y, t)\, dy\\
&= \frac{r}{n|B_1|} \int_{B_1(0)} \Delta u(x + rz, t)\, dz,
\end{aligned}$$

wobei wir die letzten Schritte nur zum Weiterrechnen benötigen.

$$\begin{aligned}
U_{rr}(x, r, t) &= \frac{1}{n} \cdot \fint_{B_r(x)} \Delta u(y, t)\, dy + \frac{r}{n|B_1|} \cdot \int_{B_1(0)} \langle D\Delta u(x + rz, t), z\rangle\, dz\\
&= \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \fint_{B_r(x)} \Delta u(y, t)\, dy}_{\equiv I} + \frac{r}{n|B_r|} \cdot \int_{B_r(x)} \left\langle D\Delta u(y, t), \tfrac{y-x}{r}\right\rangle\, dy.
\end{aligned}$$

Den letzten Integranden schreiben wir künstlich als Divergenz

$$\operatorname{div}_y \left(\tfrac{y-x}{r} \cdot \Delta u(y, t)\right) = \frac{n}{r} \cdot \Delta u(y, t) + \left\langle D\Delta u(y, t), \tfrac{y-x}{r}\right\rangle.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} U_{rr}(x,r,t) &= \frac{I}{n} + \frac{r}{n|B_r|} \cdot \int\limits_{B_r(x)} \operatorname{div}_y \left(\tfrac{y-x}{r} \cdot \Delta u(y,t) \right) - \frac{n}{r} \cdot \Delta u(y,t)\, dy \\ &= \frac{I}{n} + \underbrace{\frac{r|\partial B_r|}{n|B_r|}}_{=1} \cdot \frac{1}{|\partial B_r|} \cdot \int\limits_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy - \frac{1}{|B_r|} \cdot \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy \\ &= \fint\limits_{\partial B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \fint\limits_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt} - \fint\limits_{\partial B_r(x)} \Delta u + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \fint\limits_{B_r(x)} \Delta u \\ - \frac{n-1}{r} \cdot \frac{r}{n} \cdot \fint\limits_{B_r(x)} \Delta u = 0, \end{aligned}$$

da u die Wellengleichung erfüllt.

Sei nun speziell $n = 3$. Wir fixieren $x \in \mathbb{R}^n$ und unterdrücken die Abhängigkeit von x in der Notation. Definiere $\tilde{U}(r,t) \equiv \tilde{U}(x,r,t) := rU(x,r,t)$, $\tilde{G}(r) \equiv \tilde{G}(x,r) := rG(x,r)$ und $\tilde{H}(r) \equiv \tilde{H}(x,r) := rH(x,r)$. Dann gilt

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } (0,\infty)^2, \\ \tilde{U}(\cdot,0) = \tilde{G} & \text{auf } (0,\infty), \\ \tilde{U}_t(\cdot,0) = \tilde{H} & \text{auf } (0,\infty), \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{0\} \times (0,\infty). \end{cases}$$

Lediglich die erste Gleichung ist nichttrivial. Sie folgt aus (8.1) und $n = 3$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} &= rU_{tt} - (rU)_{rr} = r\left(U_{rr} + \tfrac{2}{r} U_r\right) - (U + rU_r)_r \\ &= rU_{rr} + 2U_r - U_r - U_r - rU_{rr} = 0. \end{aligned}$$

Man kann nun analog zum Beweis von Lemma 8.2 vorgehen und eine Spiegelungstechnik mit ungerade gespiegelten Anfangsdaten $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$ benutzen. Nehme an, dass $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$ entsprechend gespiegelt sind. Dies liefert

$$\tilde{U}(r,t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r) \right) + \frac{1}{2} \int\limits_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(\rho)\, d\rho.$$

Alternativ rechnet man direkt nach, dass dies eine Lösung ist. Beachte dazu, dass $\tilde{U}_t(\cdot,0) = \tilde{H}$ gilt, da $\tilde{G}_t$ eine gerade Funktion ist.

Momentan ist nicht klar, dass es neben $\tilde{U}$ keine weitere Lösung geben kann. Deshalb überprüfen wir im nächsten Abschnitt noch, dass die hergeleitete Formel tatsächlich eine Lösung liefert. Diese ist dann nach Theorem 6.12 eindeutig bestimmt. Nach Definition von U gilt $u(x,t) = \lim\limits_{r \searrow 0} U(x,r,t)$. Also erhalten wir

$$u(x,t) = \lim_{r \searrow 0} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r}$$

$$= \lim_{r\searrow 0}\left\{\frac{\tilde G(x,t+r)-\tilde G(x,t-r)}{2r}+\frac{1}{2r}\cdot\int\limits_{t-r}^{t+r}\tilde H(x,\rho)\,d\rho\right\}$$
$$=\frac{\partial\tilde G(x,t)}{\partial t}+\tilde H(x,t)=t\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}+G(x,t)+tH(x,t).$$

Rechnungen analog zu oben ergeben

$$G(x,t)=\fint\limits_{\partial B_t(x)} g(y)\,dy=\frac{1}{|\partial B_1|}\cdot\int\limits_{\partial B_1(0)} g(x+tz)\,dz,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)=\frac{1}{|\partial B_1|}\cdot\int\limits_{\partial B_1(0)}\langle Dg(x+tz),z\rangle\,dz=\fint\limits_{\partial B_t(x)}\left\langle Dg(y),\tfrac{y-x}{t}\right\rangle\,dy.$$

Zusammengenommen erhalten wir gerade die in Theorem 8.3 behauptete Kirchhoffsche Formel. □

Beweis der Kirchhoffschen Formel. Sei u wie in der Kirchhoffschen Formel definiert. Wir behaupten, dass u dann eine C^2-Lösung des Anfangswertproblems ist. Die Darstellungsformel folgt dann aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems, die wir aus dem Satz über die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, Theorem 6.12, erhalten.

(i) Wir benutzen $y=x+tz$, $\frac{\partial y^i}{\partial z^j}=t\delta^i_j$ und später $t\frac{\partial}{\partial x^i}g(x+tz)=\frac{\partial}{\partial z^i}g(x+tz)$. Sei $n=3$.

(ii) Es gilt

$$u(x,t)=\fint\limits_{\partial B_t(x)} th(y)+g(y)+\langle Dg(y),y-x\rangle\,dy$$
$$=\frac{t^{n-1}}{n\omega_n t^{n-1}}\int\limits_{\partial B_1(0)} th(x+tz)+g(x+tz)+\langle D_xg(x+tz),tz\rangle\,dz$$
$$=\fint\limits_{\partial B_1(0)} th(x+tz)+g(x+tz)+t\langle D_xg(x+tz),z\rangle\,dz,$$
$$u_t(x,t)=\fint\limits_{\partial B_1(0)} h(x+tz)+t\langle D_xh(x+tz),z\rangle$$
$$+\fint\limits_{\partial B_1(0)} 2\langle D_xg(x+tz),z\rangle+tD^2_xg(x+tz)\langle z,z\rangle\,dz.$$

Damit sind u und u_t bis $t=0$ stetig und erfüllen dort $u=g$ und $u_t=h$.

(iii) Die Differentialgleichung werden wir nur für glatte Funktionen g und h nachrechnen. (Wir benötigen für die Herleitung $g\in C^4_{loc}$ bzw. $h\in C^3_{loc}$.) Die Behaupung erhalten wir dann durch Approximation: Approximieren die glatten Funktionen g_ε und h_ε die Funktionen g bzw. h in C^3_{loc} bzw. C^2_{loc}, so erfüllen (wie wir noch zeigen werden) die über die Kirchhoffsche Formel definierten Funktionen u_ε die Wellengleichung. Es gilt, wie man direkt aus den noch folgenden Formeln für die Ableitungen von u abliest, dass $u_\varepsilon\to u$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ konvergiert. Damit erfüllt auch u die Wellengleichung.

(iv) Seien $g,\, h \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Betrachte zunächst den Fall $g \equiv 0$ und dann den Fall $h \equiv 0$. Gilt in beiden Fällen, dass die mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel definierte Funktion u die Wellengleichung erfüllt, so erhalten wir die Behauptung aus der Linearität. Sei also

$$u(x,t) := \fint_{\partial B_t(x)} th(y)\,dy.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \fint_{\partial B_1(0)} th(x+tz)\,dz,\\
u_t(x,t) &= \fint_{\partial B_1(0)} h(x+tz) + t\langle D_x h(x+tz), z\rangle\,dz,\\
u_{tt}(x,t) &= \fint_{\partial B_1(0)} 2\langle D_x h(x+tz), z\rangle + tD_x^2 h(x+tz)\langle z,z\rangle\,dz,\\
u_{x^i}(x,t) &= \fint_{\partial B_1(0)} th_{x^i}(x+tz)\,dz,\\
u_{x^ix^j}(x,t) &= \fint_{\partial B_1(0)} th_{x^ix^j}(x+tz)\,dz.
\end{aligned}$$

Wir setzen $f(z) := h(x+tz)$. Wegen $t\frac{\partial}{\partial x^i}h(x+tz) = \frac{\partial}{\partial z^i}h(x+tz)$ ist $h_{x^i}(x+tz) = \frac{1}{t}f_i(z)$. Wir heben im Folgenden Indices mit Hilfe des Kroneckerdeltas um die Einsteinsche Summenkonvention anwenden zu können. Es folgt

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= \frac{1}{t}\fint_{\partial B_1(0)} 2f_iz^i + f_{ij}z^iz^j\,dz,\\
\Delta_x u &= \frac{1}{t}\fint_{\partial B_1(0)} \Delta_z f\,dz = \frac{1}{t}\fint_{\partial B_1(0)} \Delta_z f\cdot \underbrace{z^jz_j}_{=1}\,dz,\\
t(u_{tt}-\Delta_x u) &= \fint_{\partial B_1(0)} \left(2f^j + f^j_i z^i - f^i_i z^j\right) z_j\,dz\\
&= \frac{1}{n\omega_n}\int_{B_1(0)} \left(2f^j + f^j_i z^i - f^i_i z^j\right)_j\,dz\\
&= \frac{1}{n\omega_n}\int_{B_1(0)} 2f^j_j + f^j_{ji}z^i + f^j_i\delta^i_j - f^i_{ij}z^j - f^i_i\underbrace{\delta^j_j}_{=3}\,dz = 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt $u_{tt} = \Delta u$ für alle $t > 0$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch bis $t = 0$.

(v) Im Fall $h \equiv 0$ setzen wir $f(z) := g(x+tz)$ und erhalten analog zu oben

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \fint_{\partial B_t(x)} g(y) + \langle Dg(y), y-x\rangle \, dy \\
&= \fint_{\partial B_1(0)} g(x+tz) + t\langle D_x g(x+tz), z\rangle \, dz, \\
u_t &= \fint_{\partial B_1(0)} 2g_{x^i}(x+tz)z^i + tg_{x^ix^j}(x+tz)z^iz^j \, dz, \\
u_{tt} &= \fint_{\partial B_1(0)} 3g_{x^ix^j}(x+tz)z^iz^j + tg_{x^ix^jx^k}(x+tz)z^iz^jz^k \, dz, \\
u_{x^i} &= \fint_{\partial B_1(0)} g_{x^i}(x+tz) + tg_{x^ix^k}(x+tz)z^k \, dz, \\
u_{x^ix^j} &= \fint_{\partial B_1(0)} g_{x^ix^j}(x+tz) + tg_{x^ix^jx^k}(x+tz)z^k \, dz, \\
\Delta_x u &= \fint_{\partial B_1(0)} \Delta_x g(x+tz) + t\Delta_x g_{x^k}(x+tz)z^k \, dz, \\
u_{tt} &= \frac{1}{t^2} \fint_{\partial B_1(0)} 3f_{ij}z^iz^j + f_{ijk}z^iz^jz^k \, dz, \\
\Delta_x u &= \frac{1}{t^2} \fint_{\partial B_1(0)} f^i_i + f^i_{ij}z^j \, dz, \\
t^2(u_{tt} - \Delta_x u) &= \fint_{\partial B_1(0)} \left(3f^k_i z^i + f^k_{ij}z^iz^j - f^i_i z^k - f^i_{ij}z^jz^k\right) z_k \, dz \\
&= -\frac{1}{n\omega_n} \int_{B_1(0)} \left(3f^k_i z^i + f^k_{ij}z^iz^j - f^i_i z^k - f^i_{ij}z^jz^k\right)_k \, dz \\
&= -\frac{1}{n} \fint_{B_1(0)} 3f^k_{ki}z^i + 3f^k_k + f^k_{kij}z^iz^j + 2f^k_{ki}z^i \, dz \\
&\quad -\frac{1}{n} \fint_{B_1(0)} -f^i_{ik}z^k - 3f^i_i - f^i_{ijk}z^jz^k - f^i_{ik}z^k - 3f^i_{ij}z^j \, dz = 0.
\end{aligned}
$$

Beachte, dass wir beim Ausdruck für Δu ein $z^k z_k$ auch dort hinzugefügt haben, wo bereits ein z^j stand. Sonst heben sich die Terme später nicht so direkt gegenseitig auf.

Auch hier gilt $u_{tt} = \Delta u$ wieder aus Stetigkeitsgründen bis $t = 0$. □

Bemerkung 8.4.

(i) Theorem 8.3 besagt insbesondere, dass $u(x,t)$ nur von Werten auf $\partial B_t(x)$ zur Zeit $t = 0$ abhängt. Solch eine Aussage gilt für alle ungeraden Raumdimensionen und heißt Huygenssches Prinzip.

(ii) Die Wellengleichung in $\mathbb{R}^2$ kann man vermöge $\tilde{u}\left(x^1, x^2, x^3, t\right) := u\left(x^1, x^2, t\right)$ auf die Wellengleichung in $\mathbb{R}^3$ zurückführen. Dies liefert, siehe [1], bei hinreichender Regularität für eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = g & \text{auf } \mathbb{R}^n, \\ u_t(\cdot,0) = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

für $n = 2$ die Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\langle Dg(y), y-x\rangle}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\,dy.$$

(iii) Ähnliche Ansätze funktionieren in höheren Dimensionen, sind aber etwas technisch.

Anhang A. Divergenzsatz

Theorem A.1 (Divergenzsatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1, $\xi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div}\xi = \int_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu\rangle.$$

Beweis.

a) Wir schreiben $x = (\hat{x}, x^n)$ mit $\hat{x} = (x^1, \ldots, x^{n-1})$. Sei $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Es gilt für $i < n$

$$D_i \int_0^{\varphi(\hat{x})} f(\hat{x}, x^n)\,dx^n = \int_0^{\varphi(\hat{x})} D_i f(\hat{x}, x^n)\,dx^n + f(\varphi(\hat{x}), x^n) D_i\varphi(\hat{x}).$$

b) $\operatorname{div}\xi := D_i\xi^i$ ist unter linearen invertierbaren Transformationen und Translationen invariant.

Dies ist für Translationen klar.

Sei $\tilde{x}^j = a^j_i x^i$ eine lineare Transformation. Dann gilt $\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} = a^j_i$ und $\tilde{\xi}^j = a^j_i \xi^i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\tilde{\xi}^i &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(a^i_l \xi^l\right) \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} a^i_l \frac{\partial}{\partial x^k}\xi^l, \quad \text{da } a^i_k \text{ ortsunabhängig} \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^k}\xi^l \\ &= \delta^k_l \frac{\partial}{\partial x^k}\xi^l \quad \text{(Kettenregel)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\xi^k = \operatorname{div}\xi. \end{aligned}$$

c) Überdecke $\overline{\Omega}$ durch endlich viele offene Mengen V_i, so dass jede dieser Mengen entweder ganz in Ω liegt oder einer Menge U wie folgt enthalten ist:

Nach einer geeigneten Rotation gibt es ein offenes und beschränktes $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so dass $U = \Sigma \times (0,2)$. Es gibt $\varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, $\frac{1}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}$, mit $\{(\hat{x}, x^n) : x^n < \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = U \cap \Omega$, $\{(\hat{x}, x^n) : x^n = \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = \operatorname{graph} \varphi|_\Sigma = U \cap \partial\Omega$, $\{(\hat{x}, x^n) : x^n > \varphi(\hat{x}),\, \hat{x} \in \Sigma\} = U \cap \complement\Omega$.

d) Sei η_i eine endliche, $\{V_i\}$ und $\complement\overline{\Omega}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. (Existenzbeweis über C_c^∞-Funktionen, die auf $B_1(0)$ positiv und außerhalb von $B_2(0)$ gleich 0 sind und mit Hilfe der Lebesgue-Zahl.)

e) Reduktion auf Vektorfelder ξ mit Träger in einem V_i:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \operatorname{div} \xi &= \int\limits_\Omega \operatorname{div}\left(\xi \sum_{i=1}^N \eta_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \operatorname{div}(\xi\eta_i) = \sum_{i=1}^N \int\limits_{V_i \cap \Omega} \operatorname{div}(\xi\eta_i).\end{aligned}$$

Nehme nun an, dass der Divergenzsatz auf Gebieten U wie oben schon gezeigt sei. Dann folgt, da $\xi\eta_i$ auf $(\partial\Sigma \times [0,2]) \cup (\Sigma \times \{0\}) \cup (\Sigma \times \{2\})$ verschwindet,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \operatorname{div} \xi &= \sum_{i=1}^N \int\limits_{V_i \cap \partial\Omega} \langle \xi\eta_i, \nu\rangle\\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^N \eta_i \langle \xi, \nu\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu\rangle.\end{aligned}$$

f) Wir dürfen also annehmen, dass ξ kompakten Träger in U hat. Wir benutzen schließlich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass das Volumenmaß auf $\partial\Omega$ lokal durch $\sqrt{1 + |D\varphi|^2} d\hat{x}$ gegeben ist, dass $\frac{(-D\varphi, 1)}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist und $\operatorname{supp} \xi \Subset U$.

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \operatorname{div} \xi &= \int\limits_\Omega D_i \xi^i\\ &= \int\limits_\Sigma \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} D_i \xi^i \, dx^n \, d\hat{x}\\ &= \int\limits_\Sigma \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} \sum_{i=1}^{n-1} D_i \xi^i \, dx^n \, d\hat{x} + \int\limits_\Sigma \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} D_n \xi^n \, dx^n \, d\hat{x}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_\Sigma \left\{ D_i \int\limits_0^{\varphi(\hat{x})} \xi^i(\hat{x}, x^n) \, dx^n - \xi^i(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) D_i \varphi(\hat{x}) \right\} d\hat{x}\\ &\quad + \int\limits_\Sigma \xi^n(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) - 0 \, d\hat{x}\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\Sigma} -\sum_{i=1}^{n-1} \xi^i(\hat{x},\varphi(\hat{x}))D_i\varphi(\hat{x}) + \xi^n(\hat{x},\varphi(\hat{x}))\,d\hat{x}$$
$$= \int\limits_{\Sigma} \left\langle \xi(\hat{x},\varphi(\hat{x})), \frac{(-D\varphi,1)}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}} \right\rangle \sqrt{1+|D\varphi|^2}\,d\hat{x}$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega\cap U} \langle \xi,\nu\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi,\nu\rangle.$$

□

Anhang B. Polarkoordinaten

Definition B.1. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$ offen und beschränkt, $\omega\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ und sei $f\in C^0\left(\overline{\operatorname{graph}\omega}\right)$. Setze $M:=\operatorname{graph}\omega$. Dann definieren wir

$$\int\limits_M f := \int\limits_\Omega f(x,\omega(x))\cdot\sqrt{1+|D\omega|^2}\,dx.$$

Nehme an, dass $M=M_1\dot\cup M_2\ldots\dot\cup M_N$ für messbare Mengen M_i, gilt und dass für jede Menge M_k in einem Graphen $\operatorname{graph}(\omega_k|_{\Omega_k})$, $\omega_k\colon\Omega_k\to\mathbb{R}$ wie oben ω, ggf. mit umbenannten Koordinaten, enthalten ist. Dann definieren wir

$$\int\limits_M f := \sum_{k=1}^N \int\limits_{\Omega_k} f\chi_{M_k}.$$

Bemerkung B.2.
(i) Ist M noch auf andere Art und Weise als Graph darstellbar, so liefert das Integral für beide Darstellungen denselben Wert.
(ii) Es genügt, dass ω Lipschitz stetig ist.
(iii) Wie im $\mathbb{R}^n$ kann man auch hier die Menge $L^1(M)$ einführen. Betrachte dazu die Menge der Funktionen $f\colon M\to\mathbb{R}$, so dass $\Omega_k\ni x\mapsto f(x,\omega(x))\cdot\sqrt{1+|D\omega|^2(x)}\in L^1(\Omega_k)$ ist.
(iv) Ist $\omega\in C^1(\Omega)$, so verwenden wir dieselbe Definition, falls f integrabel ist.

Theorem B.3 (Polarkoordinaten)**.** *Sei $R>0$ und $f\in L^1(B^n_R(0))$. Dann gilt*

$$\int\limits_{B^n_R(0)} f = \int\limits_0^R \int\limits_{\partial B_r(0)} f\,dr.$$

Beweis. Wir gehen wie folgt vor: Es genügt, $\{x^n>0\}$ zu betrachten. Wir transformieren Halbsphären auf Hyperebenen, wenden Fubini an und transformieren dann wieder zurück.

(i) Definiere $B^+_R(0):=\{(\hat{x},x^n)\in B_R(0)\colon x^n>0\}$ und $(\partial B_r(0))^+:=\{(\hat{x},x^n)\in\partial B_r(0)\colon x^n>0\}$. Wir schreiben auch $B^+_R(0)\equiv B^+_R$ und $(\partial B_r(0))^+\equiv(\partial B_r)^+$.
Dann genügt es,

$$\int\limits_{B^+_R} f = \int\limits_0^R \int\limits_{(\partial B_r)^+} f\,dr$$

zu zeigen. Die volle Behauptung erhält man daraus, indem man die Aussagen über die obere und untere Halbkugel bzw. obere und untere Hemisphären zusammensetzt. Dann fehlt nur noch eine Nullmenge $\{(\hat{x}, x^n) \in B_R(0) \colon x^n = 0\}$.

(ii) Definiere $\Phi \colon B_R^+(0) \to \mathbb{R}^{n-1} \times (0, R)$ durch

$$\Phi(\hat{x}, n^n) = \left(\frac{\hat{x}}{x^n}, \sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}\right) \equiv (\hat{z}, z^n)\,.$$

Schreibt man in eine zusätzliche mittlere Komponente noch eine 1, so ist $(\hat{x}, x^n) \mapsto \left(\frac{\hat{x}}{x^n}, 1\right)$ gerade die radiale Projektion auf die affine Hyperebene $\{x^n = 1\}$. Die letzte Komponente gibt den ursprünglichen Abstand zum Ursprung an.

Φ ist ein Diffeomorphismus. Die Inverse ist durch die folgende Zuordnung gegeben:

$$\Phi^{-1}(\hat{z}, z^n) = \left(\frac{z^n \cdot \hat{z}}{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}}, \frac{z^n}{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}}\right) = (\hat{x}, x^n)\,.$$

Dies zu kontrollieren ist eine einfache kleine Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{z^n \cdot \hat{z}}{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}} &= \frac{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2} \cdot \frac{\hat{x}}{x^n}}{\sqrt{1 + \left|\frac{\hat{x}}{x^n}\right|^2}} = \hat{x}, \\
\frac{z^n}{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}} &= \frac{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}}{\sqrt{1 + \left|\frac{\hat{x}}{x^n}\right|^2}} = x^n.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} &= \left(\frac{e_j}{x^n}, \frac{x_j}{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}}\right), \quad j < n, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x^n} &= \left(-\frac{\hat{x}}{(x^n)^2}, \frac{x_n}{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}}\right), \\
\det D\Phi &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x^n}\mathbb{1} & \frac{\hat{x}}{\sqrt{|\hat{x}|^2+(x^n)^2}} \\ -\frac{\hat{x}}{(x^n)^2} & \frac{x_n}{\sqrt{|\hat{x}|^2+(x^n)^2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Um diese Determinante zu berechnen addieren wir so viel der ersten Zeilen zur letzten, dass das Kästchen links unten verschwindet. Mit

$$\frac{x_n}{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}} + \frac{|\hat{x}|^2}{x^n\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}} = \frac{(x^n)^2 + |\hat{x}|^2}{x^n\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}} = \frac{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}}{x^n}$$

folgt

$$\det D\Phi = \frac{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}}{(x^n)^n} = \frac{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}^n}{(z^n)^{n-1}},$$

da

$$\frac{(x^n)^n}{\sqrt{|\hat{x}|^2 + (x^n)^2}} = \frac{(z^n)^n}{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(z^n)^2|\hat{z}|^2}{1+|\hat{z}|^2} + \frac{(z^n)^2}{1+|\hat{z}|^2}}} = \frac{(z^n)^{n-1}}{\sqrt{1 + |\hat{z}|^2}^n}.$$

Aus der allgemeinen Transformationsformel

$$\int\limits_{\Omega} f(z)\,dz = \int\limits_{\varphi(\Omega)} f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{|\det D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)|}\,dx$$

mit $x = \varphi(z)$ erhalten wir in diesem Fall

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_R^+} f(y)\,dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,R)} f\left(\frac{z^n\cdot\hat{z}}{\sqrt{1+|\hat{z}|^2}}, \frac{z^n}{\sqrt{1+|\hat{z}|^2}}\right) \frac{(z^n)^{n-1}}{\sqrt{1+|\hat{z}|^2}^n}\,dz \\
&= \int\limits_0^R \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(\frac{rz}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}}\right) \cdot \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1+|z|^2}^n}\,dz\,dr \\
&\overset{!}{=} \int\limits_0^R \int\limits_{(\partial B_r)^+} f\,dr.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir zwischendurch aus $\hat{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ein $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ gemacht.

(iii) Um die behauptete Gleichheit (ohne die Integration über r) nachzuweisen, transformieren wir wieder zurück (wobei wir in Gedanken wieder die mittlere Zusatzkomponente 1 benutzen) und projizieren anschließend auf die ersten $n-1$ Komponenten: Definiere für festes $0 < r < R$ einen Diffeomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to B_r^{n-1}(0)$ durch

$$\varphi(z) := \frac{rz}{\sqrt{1+|z|^2}} \equiv x.$$

Es gilt für das zweite Argument von f

$$\frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2|z|^2}{1+|z|^2}} = \sqrt{r^2-|x|^2}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi^i}{\partial z^j} &= \frac{r\delta^i_j}{\sqrt{1+|z|^2}} - \frac{rz^iz_j}{\sqrt{1+|z|^2}^3} = \frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}^3}\left(\delta^i_j\left(1+|z|^2\right) - z^iz_j\right), \\
\det D\varphi &= \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1+|z|^2}^{3(n-1)}} \cdot \left(1+|z|^2\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\right) \\
&= \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1+|z|^2}^{(n-1)}} \cdot \frac{1}{1+|z|^2} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1+|z|^2}^{(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den obigen Integranden

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(\frac{rz}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+|z|^2}}\right) \cdot \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1+|z|^2}^n}\,dz \\
= &\int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f\left(x, \sqrt{r^2-|x|^2}\right) \cdot \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1+|z|^2}^n} \cdot \frac{\sqrt{1+|z|^2}^{(n+1)}}{r^{n-1}}\,dx
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f\left(x, \sqrt{r^2-|x|^2}\right) \cdot \sqrt{1+|z|^2}\,dx.$$

Daraus folgt die Behauptung, wenn wir für $\omega\colon B_r^{n-1}(0) \to \mathbb{R}$ mit $\omega(x) = \sqrt{r^2-|x|^2}$ nachweisen, dass $\sqrt{1+|D\omega|^2} = \sqrt{1+|z|^2}$ gilt. Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}\omega(x) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{r^2-|x|^2} = \frac{-x_i}{\sqrt{r^2-|x|^2}},\\ |D\omega|^2(x) &= \frac{|x|^2}{r^2-|x|^2},\\ 1+|D\omega|^2(x) &= \frac{r^2}{r^2-|x|^2} = \frac{r^2}{r^2-\frac{r^2|z|^2}{1+|z|^2}} = 1+|z|^2. \end{aligned}$$

□

Im Zusammenhang mit Polarkoordinaten tritt auch häufiger das folgende Lemma auf.

Lemma B.4. *Sei $r>0$ und sei $f \in L^1(\partial B_r(0))$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\partial B_r(0)} f(x)\,dx = r^{n-1} \cdot \int\limits_{\partial B_1(0)} f(rz)\,dz.$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$\int\limits_{\partial B_r^n(0)} f(x)\,dx = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f(x)\cdot\sqrt{1+|D\omega|^2}\,dx$$

mit $\omega\colon B_r^{n-1}(0) \to \mathbb{R}$, $\omega(x) = \sqrt{r^2-|x|^2}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}\omega(x) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{r^2-|x|^2} = \frac{-x_i}{\sqrt{r^2-|x|^2}},\\ 1+|D\omega|^2 &= 1+\frac{|x|^2}{r^2-|x|^2} = \frac{r^2}{r^2-|x|^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten mit der Integraltransformation $z = \frac{x}{r}$, $\frac{dz^i}{dx^j} = \frac{1}{r}\delta^i_j$,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_r(0)} f(x)\,dx &= \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f(x)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-|x|^2}}\,dx\\ &= \int\limits_{B_1^{n-1}(0)} f(rz)\cdot\sqrt{\frac{1}{1-|z|^2}}\cdot r^{n-1}\,dz = r^{n-1}\cdot\int\limits_{\partial B_1^n(0)} f(rz)\,dz, \end{aligned}$$

da $\frac{1}{1-|z|^2} = 1+|D\omega|^2$ für $r=1$ gilt. □

Literatur

1. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
2. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, Vorlesungsmitschrift.
3. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

4. Jürgen Jost, *Partial differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 214, Springer-Verlag, New York, 2002.
5. Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984, Corrected reprint of the 1967 original.

Oliver C. Schnürer, Mathematik, Universität Konstanz
Email address: Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de