PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IA

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu Partielle Differentialgleichungen Ia. Basierend auf Vorlesungen/Benützt
- an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2004/5,
- an der Universität Konstanz im Sommersemester 2013 und 2017.

Inhaltsverzeichnis

1. A priori Abschätzungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Die nächsten Kapitel beschäftigen sich mit Anwendungen des parabolischen Maximumprinzips.

1.1. Globale Abschätzungen.

Mit Hilfe der Darstellungsformel können wir eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung explizit hinschreiben. Daraus folgen auch Darstellungsformeln für Ableitungen, die es erlauben, Schranken für die Ableitung herzuleiten. Eleganter und auch leichter auf andere Gleichungen übertragbar ist jedoch die folgende Methode, solche Abschätzungen herzuleiten.

Theorem 1.1. *Sei $u : C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot u = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

Date: 5. Oktober 2017.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25, 35K20.
Key words and phrases. L^2-Theorie, Eigenwerte, Laplace, Maximumprinzip.
Vielen Dank insbesondere an Daniel Bartl, Friederike Dittberner, Anja Grabow, Stefan Hölle, Felix Jachan, Wolfgang Maurer, Thilo Notz, David Palosch und Lena Reichle für zahlreiche Korrekturen und an Elisabeth Greiler für das Setzen einiger Abschnitte.

mit $u(x+p,t) = u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und alle $p \in \mathbb{Z}^n$, also eine periodische Lösung. Dann gilt

$$|Du(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{t}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Die Periodizität haben wir nur angenommen, um das Maximumprinzip anwenden zu können.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren

$$w_\varepsilon(x,t) := u^2(x,t) + (t-\varepsilon)|Du(x,t)|^2$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [\varepsilon,\infty)$. Die Konstante ε benötigen wir nur, da $t \cdot |Du(x,t)|^2$ für t nahe 0 unbeschränkt werden könnte.

Wir behaupten, dass

$$w_\varepsilon(x,t) \le \max_{\mathbb{R}^n \times \{\varepsilon\}} w_\varepsilon \le \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \le \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})} \tag{1.1}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [\varepsilon,\infty)$ gilt. Die zweite Ungleichung ist offensichtlich, die dritte eine direkte Folgerung aus dem Maximumprinzip. Hieraus folgt:

$$(t-\varepsilon)|Du(x,t)|^2 \le u^2(x,t) + (t-\varepsilon)|Du(x,t)|^2 \le \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

und somit

$$|Du(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{t-\varepsilon}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (\varepsilon,\infty)$. (Man sieht, dass wir für $u^2(x,t)$ nahe bei $\|u\|^2_{L^\infty}$ eine bessere Abschätzung bekommen könnten.) Mit $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir hieraus die Behauptung des Theorems.

Wir beweisen nun Behauptung (1.1): Dazu berechnen wir $\dot{w}_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon(x,t) &= u^2(x,t) + (t-\varepsilon)\,|Du(x,t)|^2\,,\\
\dot{w}_\varepsilon &= 2u\,\dot{u} + |Du|^2 + 2(t-\varepsilon)u^k\,\dot{u}_k,\\
w_{\varepsilon i} &= 2u\,u_i + 2(t-\varepsilon)u^k\,u_{ki},\\
w_{\varepsilon ij} &= 2u\,u_{ij} + 2u_i\,u_j + 2(t-\varepsilon)u^k u_{kij} + 2(t-\varepsilon)u^k_j u_{ki},\\
\dot{w}_\varepsilon - \Delta\, w_\varepsilon &= 2\,u(\dot{u}-\Delta u) + |Du|^2 - 2\,|Du|^2 + 2(t-\varepsilon)\,u^k(\dot{u}-\Delta u)_k\\
&\quad - 2(t-\varepsilon)\left|D^2u\right|^2\\
&\le 0.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Maximumprinzip. □

Theorem 1.2. *Sei u eine periodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ wie in Theorem 1.1. Sei $t_0 \ge 0$. Dann gilt*

$$\left|D^2u(x,t)\right| \le \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{t_0\})}$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t_0,\infty)$.

Beweis. Betrachte

$$w(x,t) := |Du(x,t)|^2 + (t-t_0)\cdot \left|D^2u(x,t)\right|^2$$

und argumentiere analog zum Beweis von Theorem 1.1. Die Details dazu lassen wir als einfache Übung.

Alternativ kann man benutzen, dass jeder der Funktionen u_k, $k \in \{1,\ldots,n\}$, die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, Theorem 1.1 anwenden und die resultierenden Abschätzungen aufsummieren. □

Entsprechende Verallgemeinerungen gelten auch für höhere Ableitungen. Kombiniert man mehrere solche Abschätzungen, so folgt für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\tau := {}^t\!/_m$

$$\begin{aligned}
|D^m u(x,t)| &= |D^m u(x,m\tau)| \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left\|D^{m-1}u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\{(m-1)\tau\})} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\tau}^2}\left\|D^{m-2}u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\{(m-2)\tau\})} \\
&\le \ldots \le \frac{1}{\tau^{m/2}}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\{0\})} = \frac{m^{m/2}}{t^{m/2}}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\{0\})}.
\end{aligned}$$

1.2. **Lokale Abschätzungen.** Als Vorbereitung für die lokalen Abschätzungen benötigen wir

Lemma 1.3. *Sei $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \ge 0$. Dann gilt in allen Punkten mit $\varphi > 0$*

$$\frac{|D\varphi|^2}{\varphi} \le 2\|D^2\varphi\|_{L^\infty}.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir möchten $\frac{|D\varphi|^2}{\varphi+\varepsilon}$ beschränken. Durch Einschränken auf eine Gerade können wir ohne Einschränkung $n = 1$ annehmen. Sei

$$w = \frac{\varphi'^2}{\varphi+\varepsilon}.$$

In einem Punkt, in dem w maximal ist, gilt

$$0 = w' = \frac{2\varphi'\varphi''(\varphi+\varepsilon) - \varphi'^2\varphi'}{(\varphi+\varepsilon)^2}$$

und daher

$$2\varphi'' = \frac{\varphi'^2}{\varphi+\varepsilon}$$

und somit $w \le 2\left\|D^2\varphi\right\|_{L^\infty}$. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. □

Theorem 1.4 (Innere Abschätzungen)**.** *Sei*

$$u \in C^3(B_R\times(0,T)) \cap C^0(B_R\times[0,T]),$$

mit $R,T > 0$, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $B_R\times(0,T)$. Sei $\varphi \in C^2_c(B_R\times[0,T])$ mit $\varphi \ge 0$. Definiere für $\lambda > 0$

$$w := t\varphi|Du|^2 + \lambda u^2.$$

Dann existiert $\lambda_0 = \lambda_0(T, \|\varphi\|_{c^2})$, *so dass für* $\lambda \ge \lambda_0$
$$\sup_{B_R\times[0,T]} w \le \sup_{\mathcal{P}(B_R\times(0,T))} w$$
gilt. Insbesondere gilt also
$$t\varphi|Du|^2 \le \lambda \cdot \|u\|^2_{L^\infty(\mathcal{P}(B_R\times(0,T)))}$$
in $B_R \times [0,T]$.

Beweis. Wir lassen es wieder als Übung,
$$(t-\varepsilon)\varphi|Du|^2 + \lambda u^2$$
und später den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ zu betrachten und arbeiten wieder direkt mit w. Es gilt in Punkten mit $\varphi > 0$
$$\begin{aligned}
w =& t\varphi|Du|^2 + \lambda u^2,\\
\dot w =& \varphi|Du|^2 + t\dot\varphi|Du|^2 + 2t\varphi u^k \dot u_k + 2\lambda u\dot u,\\
w_i =& t\varphi_i|Du|^2 + 2t\varphi u^k u_{ki} + 2\lambda u u_i,\\
w_{ij} =& t\varphi_{ij}|Du|^2 + 2t\varphi_i u^k u_{kj} + 2t\varphi_j u^k u_{ki}\\
&+ 2t\varphi u^k_j u_{ki} + 2t\varphi u^k u_{kij} + 2\lambda u_i u_j + 2\lambda u u_{ij},\\
\dot w - \Delta w =& \varphi|Du|^2 + t(\dot\varphi - \Delta\varphi)|Du|^2\\
&+ 2t\varphi u^k(\dot u - \Delta u)_k - 4t\varphi^i u^j u_{ij}\\
&- 2t\varphi\left|D^2u\right|^2 - 2\lambda|Du|^2 + 2\lambda u(\dot u - \Delta u)\\
\le& \varphi|Du|^2 + tc(\varphi)|Du|^2\\
&+ 2t\varphi\left|D^2u\right|^2 + 2t\frac{|D\varphi|^2}{\varphi}|Du|^2\\
&- 2t\varphi\left|D^2u\right|^2 - 2\lambda|Du|^2\\
\le& (\varphi + tc(\varphi) - 2\lambda)|Du|^2 \le 0,
\end{aligned}$$
wobei wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt und $\lambda \ge \lambda_0(T, \|\varphi\|_{C^2})$ angenommen haben. In Punkten mit $\varphi = 0$ gilt wegen $D\varphi = 0$ ebenfalls
$$\dot w - \Delta w \le tc(\varphi)|Du|^2 - 2\lambda|Du|^2 + 2\lambda u(\dot u - \Delta u) \le 0.$$
Die Behauptung folgt nun aus dem Maximumprinzip. □

Entsprechende Abschätzungen gelten auch für höhere Ableitungen von u.

2. L^2-Theorie

2.1. **Variationeller Existenzbeweis.** In der Funktionalanalysis haben wir mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram die Existenz einer schwachen Lösung gezeigt. Hier führen wir noch einen alternativen Existenzbeweis.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}$ von

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

d. h. ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + f\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

(Vergleiche dies mit der Definition der schwachen Ableitung. Auch hier genügt es, die Gleichheit für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ zu fordern, da sie sonst durch Approximation folgt.) Dazu wollen wir

$$I(u) := \int\limits_\Omega \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

unter allen Funktionen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ minimieren.

Sei $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Minimiert man nun I unter allen Funktionen u mit $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so kann man auch noch eine Randbedingung $u = g$ erhalten.

Lemma 2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_k \rightharpoonup u$ eine schwach konvergente Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\liminf_{k \to \infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 \ge \int\limits_\Omega |\nabla u|^2.$$

Beweis. Auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist (die Wurzel von) $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ eine zu $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega u^2$ äquivalente Norm und ist vom Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle$ induziert.

Sei X ein Banachraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf X. Dann konvergiert eine Folge genau dann schwach bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$, wenn sie bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ schwach konvergiert: Da die Normen äquivalent sind, stimmen die stetigen Funktionale auf X für beide Normen überein.

Die Behauptung folgt nun aus der Unterhalbstetigkeit der Norm bei schwacher Konvergenz. $\square$

Einfacher wäre es, wenn wenn $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ bezüglich der schwachen Topologie stetig wäre, denn dann gälte Gleichheit in

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 \underset{\text{i. a.}}{\neq} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2.$$

Unterhalbstetigkeit des Funktionals genügt jedoch um einen Minimierer zu finden.

Sei nun $(u_k)_k$, $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$, eine Minimalfolge für $I(u)$, d. h. es gelte

$$\lim_{k \to \infty} I(u_k) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} I(u).$$

Im folgenden werden wir häufiger $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \ge \lambda \int\limits_\Omega u^2$ für ein $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ verwenden.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass das betrachtete Infimum endlich ist. Es gilt

$$I(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu \ge \frac{1}{2}\lambda \int\limits_\Omega u^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega u^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_\Omega f^2 \ge -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} > -\infty,$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Mit einer analogen Rechnung können wir die $W^{1,2}$-Norm der u_k's gleichmäßig beschränken: Aufgrund der Minimalfolgeneigenschaft gilt

$$\begin{aligned} c \ge & \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega f u_k \ge \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_\Omega u_k^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_\Omega f^2 \\ \ge & \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda} \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 - \int\limits_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ klein und bringen den $\int\limits_\Omega f^2$-Term auf die linke Seite. Die Behauptung folgt. Aufgrund der Äquivalenz der Normen mit und ohne L^2-Term auf $W^{1,2}_0$ ist auch $\int\limits_\Omega u_k^2$ gleichmäßig beschränkt.

Nach Banach-Alaoglu besitzt u_k also eine Teilfolge (wir benennen nicht um), die in $W^{1,2}$ schwach gegen u konvergiert. Nach Definition ist $W^{1,2}_0$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}$. Ein abgeschlossener Unterraum ist, wie man durch Testen mit einem Vektor aus dem orthogonalen Komplement sieht, auch unter schwacher Konvergenz abgeschlossen. Daher hat auch der Grenzwert u wieder Randwerte Null. Da $W^{1,2}_0 \Subset L^2$ ist, dürfen wir weiterhin annehmen, dass diese Folge in $L^2(\Omega)$ (schwach) gegen u konvergiert. Somit ist

$$\begin{aligned} \inf_{w \in W^{1,2}_0(\Omega)} I(w) = & \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega f u_k \right) \\ = & \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega fu \ge \liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega fu \\ \ge & \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega fu = I(u) \ge \inf_{w \in W^{1,2}_0(\Omega)} I(w) \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit. u minimiert also I in $W^{1,2}_0$ und die Euler-Lagrange-Gleichung besagt gerade, dass u eine schwache Lösung ist: Sei $v \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 = & \left.\frac{d}{dt} I(u+tv)\right|_{t=0} \\ = & \left.\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + |\nabla v|^2\right) + fu + tfv\right|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + fv.$$

Damit haben wir folgendes bewiesen:

Theorem 2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2$. Dann gibt es ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, das das Funktional*

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

minimiert und u ist eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.2. **Regularität.**

Bemerkung 2.3 (Motivation)**.** Gelte $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Sei u glatt und falle im Unendlichen schnell genug ab. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 &= \sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{ii}u_{jj} = -\sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{iij}u_j \\ &= \sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{ij}u_{ij} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D^2 u\right|^2. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\|f\|_{L^2} = \left\|D^2 u\right\|_{L^2}.$$

Das Problem dabei ist, dass wir benutzt haben, dass $u \in C^3$ ist. Dies ist später durch Abschätzungen von Differenzenquotienten zu rechtfertigen. Durch Differenzieren der Gleichung und ähnliche Rechnungen kommt man auf Abschätzungen der Form

$$c \cdot \|Df\|_{L^2} \ge \left\|D^3 u\right\|_{L^2}$$

mit entsprechenden Verallgemeinerungen für höhere Ableitungen. Wenn man dies lange genug fortsetzt, besteht die Hoffnung, dass man mit Hilfe der Sobolevschen Einbettungssätze Abschätzungen für Ableitungen in L^p für $p \gg 1$ und damit dann Hölderstetigkeit der Funktion u beweisen kann. Dies funktioniert für glatte Daten.

Hier gilt die Faustregel, dass Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen zweimal häufiger differenzierbar sind als die rechte Seite.

2.3. **Generalvoraussetzungen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ in Divergenzform,

$$Lu = -\left(a^{ij}u_i\right)_j + b^i u_i + du,$$

mit

- gleichmäßig elliptischem (aber nicht notwendigerweise symmetrischem) a^{ij},
- a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$.

2.4. **Innere H^2-Regularität.**

Theorem 2.4 (Innere H^2-Regularität)**.** *Sei $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für alle offenen Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$ gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

mit $c = c(\Omega', \Omega, L)$.

Beweis.

(1) Wähle $\Omega'' \Subset \Omega$ offen, so dass

$$\Omega' \Subset \Omega'' \subset \Omega$$

ist und eine glatte Abschneidefunktion ζ, so dass

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } \Omega', \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega'', \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$

(2) Da u eine schwache Lösung ist, folgt

$$\int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int\limits_\Omega \tilde{f} v \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega),$$

wobei $\tilde{f} := f - b^i u_i - du$.

(3) Sei $|h| > 0$ klein, $1 \le k \le n$. Wähle

$$v := -D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right).$$

Das Quadrat in der Abschneidefunktion ist später nützlich. Diese Wahl von v ist durch den glatten Fall motiviert. Da aber nicht bekannt ist, dass zweite Ableitungen von u in der Testfunktion erlaubt sind, ist diese Testfunktion mit Differenzenquotienten nötig.

Setze

$$A := \int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j,$$

$$B := \int\limits_\Omega \tilde{f} v.$$

(4) Abschätzungen für A:

$$\begin{aligned} A = & - \int\limits_\Omega a^{ij} u_i \left[D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \right]_j \\ = & \int\limits_\Omega D_k^h \left(a^{ij} u_i \right) \left(\zeta^2 D_k^h u \right)_j , \end{aligned}$$

da Ableitung und Differenzenquotientenbildung kommutieren und mit Hilfe "partieller Integration" für Differenzenquotienten

$$= \int\limits_\Omega a^{ij,h}\left(D_k^h u_i\right)\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i \left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j,$$

da mit $v^h(x) := v(x+he_k)$ die folgende "Produktregel" gilt:

$$D_k^h(vw) = v^h D_k^h w + w D_k^h v.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} A = &\int\limits_\Omega a^{ij,h}\left(D_k^h u_i\right)\left(D_k^h u_j\right)\zeta^2 \\ &+ \int\limits_\Omega a^{ij,h}\left(D_k^h u_i\right)\left(D_k^h u\right)2\zeta\zeta_j + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i D_k^h u_j \zeta^2 + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i \left(D_k^h u\right) 2\zeta\zeta_j \\ \equiv &A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Elliptizität folgt

$$A_1 \ge \vartheta \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2.$$

Nach Voraussetzung an die Koeffizienten folgt für $0 < \varepsilon \le 1$, wobei wir $\varepsilon \le 1$ ohne Einschränkung annehmen,

$$\begin{aligned} |A_2| \le & c \cdot \int\limits_\Omega \zeta \left|D_k^h Du\right| \left|D_k^h u\right| + \zeta \left|D_k^h Du\right| |Du| + \zeta \left|D_k^h u\right| |Du| \\ \le & \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 + |Du|^2 \text{ (Cauchy).} \end{aligned}$$

Setze $\varepsilon = \frac{\vartheta}{2}$ und benutze, dass

$$\int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 \le c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2$$

ist. Es folgt

$$|A_2| \le \frac{\vartheta}{2} \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2$$

und

$$A \ge \frac{\vartheta}{2} \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 - c \cdot \int\limits_\Omega |Du|^2.$$

(5) Abschätzungen für B: Wir nehmen weiterhin ohne Einschränkung $0 < \varepsilon \le 1$ an. Zunächst einmal gilt nach Definition und Cauchyscher Ungleichung

$$|B| \le \int\limits_\Omega \left|\tilde f\right| |v| \le c \cdot \int\limits_\Omega (|f| + |Du| + |u|)|v| \le \varepsilon \int\limits_\Omega v^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_\Omega \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right).$$

Weiterhin erhalten wir nach Wahl von v

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |v|^2 =& \int\limits_\Omega \left|D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2\\ \le& c\cdot \int\limits_\Omega \left|D\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2\\ \le& c\cdot \int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2\\ \le& c\cdot \int\limits_\Omega |Du|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$|B| \le \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_\Omega \left(f^2+u^2\right) + \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_\Omega |Du|^2.$$

(6) Sei ohne Einschränkung $\vartheta \le 1$. Wir wählen nun speziell $\varepsilon = \frac{\vartheta}{4}$ und erhalten mit Hilfe der letzten beiden Beweisteile

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta}{4}\int\limits_{\Omega'} \left|D_k^h Du\right|^2 \le& \frac{\vartheta}{4}\int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2\\ \le& c\cdot \int\limits_\Omega \left(f^2+u^2+|Du|^2\right)\end{aligned}$$

für $1 \le k \le n$ und $|h| \neq 0$ genügend klein. Aufgrund der gleichmäßigen Schranken an die Differenzenquotienten folgt daher

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c\cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Durch Dazwischenschachteln einer weiteren Menge,

$$\Omega' \Subset \tilde\Omega \Subset \Omega,$$

erhalten wir

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c\cdot \left(\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \|u\|_{H^1(\tilde\Omega)}\right).$$

Bis auf die H^1-Norm von u auf der rechten Seite statt der L^2-Norm ist dies gerade die gewünschte Ungleichung. Dies wollen wir im letzten Schritt noch korrigieren.

(Alternativ zu diesem letzten Schritt kann man auch benutzen, dass (bei genügend regulär gewählten Gebieten) insbesondere die erste der Einbettungen $H^2 \hookrightarrow H^1 \hookrightarrow L^2$ kompakt ist und wir somit eine Abschätzung der Form

$$\|w\|_{H^1} \le \varepsilon\cdot \|w\|_{H^2} + c(\varepsilon)\cdot \|w\|_{L^2}$$

haben.)

(7) Sei ζ eine neue Abschneidefunktion mit

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{supp} \zeta \subset \Omega, \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$

Es gilt für alle $v \in H^1_0(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int\limits_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) v.$$

Wir wählen speziell $v = \zeta^2 u$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j &= \int\limits_\Omega a^{ij} u_i \left(\zeta^2 u\right)_j \\ &= \int\limits_\Omega a^{ij} u_i u_j \zeta^2 + 2a^{ij} u_i u \zeta \zeta_j \\ &\ge \vartheta \int\limits_\Omega \zeta^2 |Du|^2 - \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2 |Du|^2 - \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_\Omega u^2. \end{aligned}$$

Für die andere Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) v &= \int\limits_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) \zeta^2 u \\ &\le \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2 |Du|^2 + c(\varepsilon) \cdot \int\limits_\Omega \left(u^2 + f^2\right). \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ klein und erhalten

$$\frac{\vartheta}{2} \int\limits_\Omega \zeta^2 |Du|^2 \le c \cdot \int\limits_\Omega \left(u^2 + f^2\right).$$

Dies bauen wir in die Abschätzung aus dem letzten Abschnitt ein und bekommen die gewünschte Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \qquad \square$$

Bemerkung 2.5. Ist $u \in H^2_{\text{loc}}$, so können wir partiell integrieren und erhalten

$$\int\limits_\Omega Lu\varphi = \int\limits_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

Hieraus folgt nach Du Bois-Reymond $Lu = f$ fast überall in Ω.

2.5. **Höhere Regularität.**

Theorem 2.6 (Höhere innere Regularität). *Sei* $0 < m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d &\in C^{m+1}(\Omega), \\ f &\in H^m(\Omega). \end{aligned}$$

Sei $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann ist $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(m, \Omega, \Omega', L)$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Theorem 2.4 ist dabei der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt "$m \to m+1$" dürfen wir annehmen, dass

$$a^{ij},\, b^i, d \in C^{m+2}(\Omega),$$
$$f \in H^{m+1}(\Omega)$$

gelten und $u \in H^1$ eine schwache Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$

ist. Nach Induktionsannahme ist dann auch $u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{H^{m+2}\left(\tilde\Omega\right)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

für alle $\tilde\Omega \Subset \Omega$ mit $c = c\left(m, \tilde\Omega, \Omega, L\right)$. Wir fixieren nun

$$\Omega' \Subset \tilde\Omega \Subset \Omega.$$

Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = m+1$, $\tilde v \in C^\infty_c\left(\tilde\Omega\right)$ eine Testfunktion. Definiere

$$v := (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde v \in C^\infty_c\left(\tilde\Omega\right).$$

Definiere $B : H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$B[u, w] := \int\limits_\Omega a^{ij} u_i w_j + b^i u_i w + duw.$$

Wir erhalten

$$B[u, v] = \int\limits_\Omega fv.$$

Durch partielle Integration und Umordnen der Terme folgt

$$B[\tilde u, \tilde v] = \int\limits_\Omega \tilde f \tilde v \quad \text{mit} \quad \tilde u := D^\alpha u \in H^1\left(\tilde\Omega\right)$$

und

$$\tilde f := D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \ne \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left\{ -\left(D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta u_i\right)_j + D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_i + D^{\alpha-\beta} d D^\beta u \right\}.$$

Diese Darstellung folgt direkt aus der Leibnizformel

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v.$$

Somit ist $\tilde u$ eine schwache Lösung von

$$L\tilde u = \tilde f \text{ in } \tilde\Omega.$$

Nach Induktionsannahme und Definition von $\tilde{f}$ folgt $\tilde{f} \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right)$ mit

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2\left(\tilde{\Omega}\right)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Nach Theorem 2.4 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega')} &\le c \cdot \left(\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2\left(\tilde{\Omega}\right)} + \|\tilde{u}\|_{L^2\left(\tilde{\Omega}\right)}\right)\\ &\le c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Da nun aber $\tilde{u} = D^\alpha u$ mit $|\alpha| = m+1$ gilt, folgt

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

□

Theorem 2.7 (Schwache Lösungen sind bei glatten Daten glatt)**.** *Seien*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d &\in C^\infty(\Omega),\\ f &\in C^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Sei $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann gilt

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Beweis. Benutze innere Abschätzungen und Einbettungssätze. □

Bemerkung 2.8. Am Rand kann u aber trotzdem singulär werden.

2.6. **Randregularität.** Bei glatten Daten erhalten wir $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 2.9 (H^2-Regularität am Rand)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $\partial\Omega \in C^2$*. Seien* $a^{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$*,* b^i*,* $d \in L^\infty(\Omega)$ *und* $f \in L^2(\Omega)$*. Sei* $u \in H^1_0(\Omega)$ *eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega,\end{cases}$$

so gilt $u \in H^2(\Omega)$ *mit der Abschätzung*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei $c = c(\Omega, L)$*.*

Bemerkung 2.10. Ist $u \in H^1_0$ die einzige Lösung des Randwertproblems, so gilt aufgrund der Abschätzungen an die Inverse sogar

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Der Operator kann aber einen nichttrivialen Kern in besitzen. Dann wird solch eine Abschätzung falsch.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für den Fall, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung besitzt. (Beachte, dass die Eindeutigkeit der Lösung unabhängig von f und äquivalent zu $\ker L \neq \{0\}$ ist.) Wäre die Aussage falsch, so wäre $L^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$, $f \mapsto u$, nicht stetig. Es gäbe also Folgen $\left(\tilde{f}_k\right)_k$ und $(\tilde{u}_k)_k$ mit $\left\|\tilde{f}_k\right\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und $\|\tilde{u}_k\|_{H^2(\Omega)} \to \infty$, wobei $\tilde{u}_k \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ die Lösung von $L\tilde{u}_k = \tilde{f}_k$ ist. Wegen der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

(aus Theorem 2.9) folgt auch $\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Nach Umnormierung erhalten wir Folgen $(u_k)_k$ und $(f_k)_k$ mit $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und $\|f_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Nach Theorem 2.9 folgt $\|u_k\|_{H^2(\Omega)} \le c$. Eine nicht umbenannte Teilfolge erfüllt $u_k \rightharpoonup u$ in $H^2(\Omega)$. Für diese Teilfolge erhalten wir nach Rellich $u_k \to u$ in $H^1_0(\Omega)$ und in $L^2(\Omega)$ mit einem $u \in H^2$. Es gilt $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Nun können wir aufgrund der H^1-Konvergenz in der schwachen Formulierung zum Grenzwert übergehen. Somit ist u eine schwache Lösung von $Lu = 0$ mit $u \in H^1_0(\Omega)$. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des Randwertproblems folgt $u \equiv 0$. Dies widerspricht aber $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Die Stetigkeit von L^{-1} ist genau die behauptete Abschätzung. □

Beweis von Theorem 2.9.

(1) Betrachte zunächst die aufgebogene Situation. Sei $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. (Auf kleineren Kugeln funktioniert die Abschätzung analog.) Definiere $V := B_{1/2}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. Sei $\varepsilon > 0$ klein und ζ eine glatte Abschneidefunktion, so dass

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } B_{1/2}(0), \\ \zeta \equiv 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus B_{1-\varepsilon}(0), \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$

Dann ist $\zeta = 1$ auf der Menge V und es gilt $\zeta = 0$ in einer Umgebung des nicht ebenen Teiles von $\partial\Omega$.

(2) Da u eine schwache Lösung ist, folgt

$$B[u,v] = \int\limits_\Omega fv$$

für alle $v \in H^1_0(\Omega)$. Wir definieren

$$\tilde{f} := f - b^i u_i - du$$

und erhalten

$$\int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int\limits_\Omega \tilde{f} v.$$

(3) Sei nun $|h| > 0$ klein. Definiere für $1 \le k \le n-1$

$$v := -D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right).$$

Für $x \in \Omega$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} v(x) =& -\frac{1}{h} D_k^{-h} \left(\zeta^2(x)[u(x+he_k) - u(x)]\right) \\ =& \frac{1}{h^2} \left(\zeta^2(x-he_k)[u(x) - u(x-he_k)] - \zeta^2(x)[u(x+he_k) - u(x)]\right). \end{aligned}$$

Da u und somit auch $\zeta^2 u$ durch Funktionen mit kompaktem Träger approximierbar ist, gilt $v = 0$ im Spursinn auf $\{x^n = 0\}$ und $\zeta \equiv 0$ in einer Umgebung des sphärischen Teiles von $\partial\Omega$. Daher ist $v \in H_0^1(\Omega)$. Somit ist v eine zulässige Testfunktion und wir erhalten

$$A \equiv \int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int\limits_\Omega \tilde{f} v \equiv B.$$

(4) Analog zum Beweis der inneren Regularität (Details: Übung) erhalten wir

$$\begin{aligned} A \ge& \frac{\vartheta}{2} \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 - c \int\limits_\Omega |Du|^2, \\ |B| \le& \frac{\vartheta}{4} \int\limits_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + c \int\limits_\Omega \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right), \\ \int\limits_V \left|D_k^h Du\right|^2 \le& c \int\limits_\Omega \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir wie beim Beweis der inneren Regularität

$$\sum_{\substack{k,l \\ k+l<2n}} \|u_{kl}\|_{L^2(V)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

(5) u_{nn}-Abschätzungen: Aus der Funktionalanalysis wissen wir: $u \in H^1(\Omega)$ und $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ impliziert $\zeta u \in H^1(\Omega)$. Als Übung lassen wir, sich zu überlegen, dass dies auch noch im Falle $\zeta \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt.

Aufgrund der inneren Abschätzungen gilt

$$Lu = f \text{ fast überall in } \Omega.$$

Da $a^{ij} \in C^1$ ist, können wir die Differentialgleichung in nicht-Divergenzform umschreiben als

$$-a^{ij} u_{ij} + \tilde{b}^i u_i + du = f$$

mit $\tilde{b}^i := b^i - a^{ij}_j$. Wir erhalten

$$a^{nn} u_{nn} = -\sum_{i+j<2n} a^{ij} u_{ij} + \tilde{b}^i u_i + du - f$$

ohne Summenkonvention auf der linken Seite. Wegen der gleichmäßigen Elliptizität ist $a^{nn} \ge \vartheta > 0$ und wir erhalten aufgrund der obigen Abschätzungen

$$|u_{nn}| \le c \cdot \left(\sum_{i+j<2n} |u_{ij}| + |Du| + |u| + |f|\right),$$

$$\|u\|_{H^2(V)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right),$$
$$\|u\|_{H^2(V)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei wir im letzten Schritt die H^1-Norm wie am Ende des Beweises von Theorem 2.4 insbesondere durch die L^2-Norm abgeschätzt haben. Es gilt $u \in H^2(V)$.

(6) Betrachte nun ein allgemeines Gebiet Ω. Nach Umbenennen der Koordinaten gilt für $x_0 \in \partial\Omega$ für ein $r > 0$

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \left\{x \in B_r(x_0) : x^n > \omega\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right)\right\},$$

wobei $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion ist. Gelte ohne Einschränkung $x_0 = (0, \ldots, 0, x_0^n)$. Wir definieren nun die Aufbiegetransformation Φ durch

$$\begin{aligned} y^i &:= x^i \text{ für } i < n,\\ y^n &:= x^n - \omega\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right),\\ y &=: \Phi(x) \end{aligned}$$

und ihre Inverse Ψ durch $x =: \Psi(y)$.

(7) Sei nun $s > 0$ so klein, dass

$$\Omega' := B_s(0) \cap \{y^n > 0\} \subset \Phi(\Omega \cap B_r(x_0))$$

ist. Definiere weiterhin

$$V' := B_{s/2}(0) \cap \{y^n > 0\}$$

und

$$u'(y) := u(\Psi(y)) \text{ für } y \in \Omega'.$$

Es gilt

$$u' \in H^1(\Omega')$$

und

$$u' = 0 \text{ auf } \partial\Omega' \cap \{y^n = 0\}.$$

Dies folgt aus den Spurabschätzungen für Sobolevfunktionen, da die Transformation die H^1-Norm glatter Funktionen auch höchstens um eine Konstante ändern kann. Die Gleichheit auf dem Rand gilt im Spursinne und folgt aufgrund der Normabschätzung für den Spuroperator und da $H_0^1 = \overline{C_c^\infty}^{H^1}$ ist.

(8) Wir behaupten, dass u' eine schwache Lösung der Gleichung

$$L'u' = f' \text{ in } \Omega'$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} f'(y) &:= f\left(\Psi(y)\right),\\ L'u' &:= -\left(a'^{kl}u'_k\right)_l + b'^k u'_k + d'u', \end{aligned}$$

mit Ableitungsindices bezüglich y

$$\begin{aligned} a'^{kl}(y) &:= a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_r(\Psi(y))\Phi^l_s(\Psi(y)),\\ b'^k(y) &:= b^r(\Psi(y))\Phi^k_r(\Psi(y)), \end{aligned}$$

$$d'(y) := d(\Psi(y)).$$

Ist $v' \in H_0^1(\Omega')$ und $B'[\cdot,\cdot]$ die zu L' gehörige Bilinearform, so gilt

$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega'} a'^{kl}u'_k v'_l + b'^k u'_k v' + d'u'v'.$$

Definiere $v(x) := v'(\Phi(x))$. Wir erhalten

$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega'} a'^{kl}u_i\Psi^i_k v_j \Psi^j_l + \int\limits_{\Omega'} b'^k u_i \Psi^i_k v + \int\limits_{\Omega'} d'uv.$$

Es gilt aufgrund der Kettenregel, auf $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ angewandt,

$$a'^{kl}\Psi^i_k\Psi^j_l = a^{rs}\Phi^k_r\Phi^l_s\Psi^i_k\Psi^j_l = a^{ij}.$$

Es gilt

$$u'_k = u_i\Psi^i_k.$$

Weiterhin folgt

$$b'^k\Psi^i_k = b^r\Phi^k_r\Psi^i_k = b^i.$$

Da $|\det D\Phi| = 1$ ist, folgt nach Variablentransformation

$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega} a^{ij}u_iv_j + b^iu_iv + duv = B[u,v] = \int\limits_{\Omega} fv = \int\limits_{\Omega'} f'v'.$$

Daher löst u' in Ω' die Gleichung $L'u' = f'$ im schwachen Sinne.

(9) Da Φ ein Diffeomorphismus ist, können wir die Elliptizität der transformierten Gleichung wie folgt zeigen. Seien $y \in \Omega'$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$a'^{kl}(y)\xi_k\xi_l = a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_r\Phi^l_s\xi_k\xi_l \ge \vartheta \cdot \left|\Phi^k_\cdot\xi_k\right|^2 \ge \vartheta'|\xi|^2.$$

Da Φ und $\Psi \in C^2$ sind, ist auch $a'^{kl} \in C^1$.

(10) Wir können also die Resultate für den aufgebogenen Rand anwenden und erhalten

$$\|u'\|_{H^2(V')} \le c\cdot\left(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}\right).$$

Durch Rücktransformation erhalten wir (unter Benutzung von $\partial\Omega \in C^2$) für $V := \Psi(V')$

$$\|u\|_{H^2(V)} \le c\cdot\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ein Überdeckungsargument für eine Randumgebung und innere Abschätzungen liefern nun die behauptete Ungleichung. □

Theorem 2.11 (Höhere Randregularität). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Seien $m \in \mathbb{N}$,*

$$a^{ij},\, b^i,\, d \in C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right),$$
$$f \in H^m(\Omega).$$

Sei $u \in H^1_0$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$

Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(m, \Omega, L)$.

Beweis. Dies ist ein Induktionsbeweis wie beim Beweis der höheren inneren Regularität. Benutze hierzu die Randabschätzungen. □

Bemerkung 2.12. Wie in Bemerkung 2.10 können wir auch hier wieder die L^2-Norm weglassen, wenn die Lösung eindeutig bestimmt ist. Ist m groß genug, hat man eine klassische Lösung und man kann $\|u\|_{L^2} \le c \cdot \|u\|_{L^\infty}$ unter geeigneten Voraussetzungen auch mit Hilfe des klassischen Maximumprinzips beschränken.

Theorem 2.13 (Glattheit bei glatten Daten)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$. Seien weiterhin*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in & C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \\ f \in & C^\infty\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Es gilt $u \in H^m(\Omega)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wende nun die Einbettungssätze an. □

3. Eigenwerte des Laplaceoperators

3.1. **Existenz und Basiseigenschaften.** Wir folgen [6, S. 231 ff.]. Sei hier stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $\partial\Omega \in C^\infty$. Bezeichne hier $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$.

Theorem 3.1. *Der kleinste Eigenwert des Laplaceoperators bei Dirichletrandwerten ist gegeben durch*

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in H^1_0(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\int\limits_\Omega |Du|^2}{\int\limits_\Omega u^2} \equiv \inf_{\substack{u \in H^1_0(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du \rangle}{\langle u, u \rangle} > 0.$$

Es gibt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $u > 0$ in Ω, so dass

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

λ_1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit eins.

Beweis. Es gilt

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H^1_0(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du \rangle}{\langle u, u \rangle} = \inf_{\substack{u \in H^1_0(\Omega) \\ \|u\|_{L^2} = 1}} \langle Du, Du \rangle.$$

Das Infimum ist nichtnegativ. Somit gibt es eine Minimalfolge

$$u_i \in H_0^1$$

mit $\|u_i\|_{L^2} = 1$, d. h. es gilt

$$\langle Du_i, Du_i \rangle \to \lambda_1.$$

Da somit $\|u_i\|_{H_0^1}$ gleichmäßig beschränkt ist, gibt es eine (nicht umbenannte) Teilfolge mit $u_i \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Nach dem Rellichschen Kompaktheitssatz konvergiert diese Teilfolge in L^2: Es gilt

$$u_i \to u \text{ in } L^2$$

mit $\|u\|_{L^2} = 1$.

Da λ_1 das Infimum des Raleigh Quotienten ist, folgt

$$\|D(u_k + u_l)\|_{L^2}^2 \ge \lambda_1 \|u_k + u_l\|_{L^2}^2.$$

Es gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|D(u_k - u_l)\|_{L^2}^2 + \|D(u_k + u_l)\|_{L^2}^2 = 2\|Du_k\|_{L^2}^2 + 2\|Du_l\|_{L^2}^2.$$

Kombination der beiden letzten Formeln liefert, da $u_k + u_l \to 2u$ für $k, l \to \infty$,

$$\begin{aligned} \|Du_k - Du_l\|_{L^2}^2 \le & 2\|Du_k\|_{L^2}^2 + 2\|Du_l\|_{L^2}^2 - \lambda_1 \|u_k + u_l\|_{L^2}^2 \\ \to \quad & 2\lambda_1 + 2\lambda_1 - \lambda_1 \cdot 4\|u\|_{L^2}^2 \\ = & 0. \end{aligned}$$

Damit ist u_k auch eine Cauchyfolge in $H_0^1(\Omega)$ und wir erhalten

$$\frac{\langle Du, Du \rangle}{\langle u, u \rangle} = \lambda_1.$$

Aufgrund der Poincaréschen Ungleichung gilt $\lambda_1 > 0$.

Sei nun $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Ist $|t|$ so klein, dass der Nenner im folgenden Bruch nicht verschwindet, so gilt

$$\frac{\langle D(u + t\varphi), D(u + t\varphi) \rangle}{\langle u + t\varphi, u + t\varphi \rangle} \ge \lambda_1$$

oder

$$\begin{aligned} 0 \le & \langle D(u + t\varphi), D(u + t\varphi) \rangle - \lambda_1 \langle u + t\varphi, u + t\varphi \rangle \\ = & \int\limits_\Omega |Du|^2 + 2t \int\limits_\Omega \langle Du, D\varphi \rangle + t^2 \int\limits_\Omega |D\varphi|^2 \\ & - \lambda_1 \int\limits_\Omega u^2 - \lambda_1 2t \int\limits_\Omega u\varphi - \lambda_1 t^2 \int\limits_\Omega \varphi^2. \end{aligned}$$

mit Gleichheit für $t = 0$. Aufgrund der Minimalität der rechten Seite für $t = 0$ verschwindet also ihre Ableitung an der Stelle $t = 0$

$$0 = \int\limits_\Omega \langle Du, D\varphi \rangle - \lambda_1 \int\limits_\Omega u\varphi.$$

Somit ist u eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgrund der L^2-Regularitätstheorie für schwache Lösungen aus Kapitel 2.2 erhalten wir daher $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

• $u > 0$: Definiere $u^+ := \max\{u, 0\}$ und $u^- := \min\{u, 0\}$. Es gilt (nicht vollkommen trivial)

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{f. ü. in } \{u \ge 0\}, \\ 0 & \text{f. ü. in } \{u \le 0\}. \end{cases}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \lambda_1 =& \langle Du, Du\rangle = \langle Du^+, Du^+\rangle + \langle Du^-, Du^-\rangle \\ \ge& \lambda_1 \langle u^+, u^+\rangle + \lambda_1 \langle u^-, u^-\rangle \text{ nach Definition von } \lambda_1 \\ =& \lambda_1 \langle u, u\rangle = \lambda_1. \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit, also

$$\langle Du^\pm, Du^\pm\rangle = \lambda_1 \langle u^\pm, u^\pm\rangle$$

und $u^\pm$ minimiert das Funktional und ist deshalb eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u^\pm = \lambda_1 u^\pm & \text{in } \Omega, \\ u^\pm = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgrund der L^2-Regularitätstheorie ist u^+ eine klassische glatte Lösung. Wir erhalten $-\Delta u^+ \ge 0$ in Ω. Aufgrund des Maximumprinzips gilt daher $u^+ > 0$ oder $u^+ \equiv 0$ in Ω. Analog schließt man für u^- und erhält (ggf. nach Multiplikation mit -1) $u > 0$.

• Vielfachheit$=1$: Sind u und v linear unabhängige Eigenvektoren (=Eigenfunktionen) zum Eigenwert λ_1, so wechselt eine geeignete Linearkombination davon in Ω das Vorzeichen und bleibt Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 im Widerspruch zur oben bewiesenen Positivität der ersten Eigenfunktion. □

Theorem 3.2. *Seien $(\lambda_i,\, u_i)$, $1 \le i \le k$, die ersten k Eigenwerte mit $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ und Eigenfunktionen (mit Vielfachheit). (Diese sind wie üblich bei Eigenwerten mit Vielfachheit nicht eindeutig bestimmt.) Dann ist der nächste Eigenwert*

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\substack{0 \not\equiv u \in H_0^1(\Omega) \\ \langle u, u_i\rangle = 0,\, 1 \le i \le k}} \frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u, u\rangle}.$$

Es gibt $u_{k+1} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, so dass

$$\begin{cases} \Delta u_{k+1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0 & \textit{in } \Omega, \\ u_{k+1} = 0 & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

gilt.

Beweis. Übungsaufgabe. Beachte, dass die Eigenschaft, schwache Lösung zu sein, zum Teil schon aus der Orthogonalitätsbedingung folgt. □

Theorem 3.3. *Es gibt abzählbar viele Eigenwerte λ_k des Laplaceoperators mit Dirichletrandwerten und es gilt*

$$\lambda_k \to \infty \text{ für } k \to \infty.$$

Die Eigenfunktionen u_k bilden (bei Konstruktion wie oben und nach Normierung) eine Orthonormalbasis in $L^2(\Omega)$ und es gilt

$$\begin{aligned} v = & \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle u_i \text{ für alle } v \in L^2, \\ \langle v, v \rangle = & \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in L^2, \\ \langle Dv, Dv \rangle = & \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in H_0^1. \end{aligned}$$

Ist $v \in H_0^1(\Omega)$, so gilt

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle u_i$$

auch in $H_0^1(\Omega)$.

Beweis. Falls $\lambda_k \le c$ für unendlich viele k gilt, so folgt

$$\|Du_k\|_{L^2} \le c.$$

Nach Rellich konvergiert daher eine Teilfolge in L^2. Dies ist aber nicht möglich, da nach Konstruktion $\langle u_k, u_l \rangle = 0$ für $k \ne l$ gilt und somit

$$\|u_k - u_l\|_{L^2} = \sqrt{2} \not\to 0.$$

Definiere

$$H_m := \left\{ v \in H_0^1 : \langle v, u_i \rangle = 0 \text{ für } i \le m - 1 \right\}.$$

Sei zunächst $v \in L^2 \cap H_0^1 = H_0^1$. Definiere

$$\begin{aligned} \beta_i := & \langle v, u_i \rangle, \\ v_m := & \sum_{i \le m} \beta_i u_i, \\ w_m := & v - v_m. \end{aligned}$$

Dann ist w_m die L^2-Orthogonalprojektion von v auf H_{m+1}, v_m ist orthogonal zu H_{m+1}. Also gilt für $i \le m$

$$\begin{aligned} \langle w_m, u_i \rangle = & 0, \\ \langle Dw_m, Dw_m \rangle \ge & \lambda_{m+1} \langle w_m, w_m \rangle. \end{aligned}$$

Sei u_i, $i \le m$, ein Eigenvektor. Dann folgt mit partieller Integration

$$\langle Dw_m, Du_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, w_m \rangle = 0, \tag{3.1}$$

also sind auch die Ableitungen orthogonal zueinander. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle w_m, w_m \rangle = & \langle v, v \rangle - 2\langle v, v_m \rangle + \langle v_m, v_m \rangle \\ = & \langle v, v \rangle - 2\langle w_m + v_m, v_m \rangle + \langle v_m, v_m \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle v, v\rangle - \langle v_m, v_m\rangle, \\ \langle Dw_m, Dw_m\rangle &= \langle Dv, Dv\rangle - \langle Dv_m, Dv_m\rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

und

$$\begin{aligned} \langle w_m, w_m\rangle &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \langle Dw_m, Dw_m\rangle \\ &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \langle Dv, Dv\rangle \le \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $w_m \to 0$ in L^2 und wir erhalten die folgende in L^2 konvergente Summe

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i\rangle u_i.$$

Für allgemeines $v \in L^2$ erhalten wir nun diese Formel durch Approximation in L^2 durch H_0^1-Funktionen. Als Vorbereitung zeigen wir: Gilt $v^k \to v$ in L^2 mit $v^k \in H_0^1$, so folgt gleichmäßig für alle N aufgrund der Besselschen Ungleichung

$$\left\|v_N - v_N^k\right\|_{L^2}^2 \equiv \left\|\sum_{i=1}^{N} \left\langle v - v^k, u_i\right\rangle u_i\right\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\left\langle v - v^k, u_i\right\rangle\right|^2 \le \left\|v - v^k\right\|_{L^2}^2,$$

da die Eigenfunktionen u_i orthonormal zueinander sind. Damit erhalten wir

$$\|v - v_N\|_{L^2} \le \left\|v - v^k\right\|_{L^2} + \left\|v^k - v_N^k\right\|_{L^2} + \underbrace{\left\|v_N^k - v_N\right\|_{L^2}}_{\le \|v - v^k\|_{L^2}}$$

Nun fixieren wir zunächst k groß, so dass der erste Term klein wird. Damit ist auch der dritte Term abgeschätzt. Da $v^k \in H_0^1$ ist und wir k fixiert haben, wird der zweite Term aufgrund der obigen Rechnungen für $N \to \infty$ klein. Somit approximiert die Summe auch beliebige $v \in L^2$ bezüglich der L^2-Norm. Die u_i sind also eine Orthonormalbasis für L^2.

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^{N} \langle v, u_i\rangle u_i - v\right\|_{L^2}^2 \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \langle v, u_i\rangle^2 - 2\sum_{i=1}^{N} \langle v, u_i\rangle^2 + \langle v, v\rangle\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\langle v, v\rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle v, u_i\rangle^2\right). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i\rangle^2.$$

Für $v \in H_0^1$ gilt

$$Dv_m = \sum_{i\le m} \beta_i Du_i.$$

Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung der Du_i in L^2, d. h. $\langle Du_i, Du_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ (Rechnung dazu wie in (3.1)), folgt

$$\langle Dv, Dv\rangle \overset{(3.2)}{\geq} \langle Dv_m, Dv_m\rangle = \sum_{i\leq m} \beta_i^2 \langle Du_i, Du_i\rangle = \sum_{i\leq m} \beta_i^2 \lambda_i.$$

Da alle λ_i positiv sind, ist der letzte Ausdruck, als Folge in m aufgefasst, absolut konvergent. Somit gilt für $m < n$ wegen $Dw_m - Dw_n = Dv_n - Dv_m$

$$\|Dw_m - Dw_n\|_{L^2}^2 = \|Dv_n - Dv_m\|_{L^2}^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \beta_i^2 \to 0$$

für m, $n \to \infty$. Somit sind Dw_m und Dv_m Cauchyfolgen in L^2. Also konvergieren w_m und v_m in H_0^1. Die Grenzwerte stimmen mit den L^2-Grenzwerten überein und ist somit Null bzw. v. Somit folgt analog zu oben

$$\langle Dv, Dv\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i^2$$

für alle $v \in H_0^1$. □

3.2. **Separation der Variablen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ sei glatt. Seien u_0, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Wir wollen die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times [0,\infty),\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty),\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

und

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty,\infty),\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (-\infty,\infty),\\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega,\\ u_t(\cdot,0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

lösen. Dabei beschreibt die Wärmeleitungsgleichung (3.3) die Wärmeverteilung in einem Körper Ω als Funktion der Zeit, wenn die Außenflächen eine konstante Temperatur haben. Die Wellengleichung beschreibt die Auslenkung der Membran einer wenig ausgelenkten Trommel.

Wärmeleitungsgleichung. Um die Gleichung (3.3) zu lösen, machen wir den Ansatz $u(x,t) := f(t)v(x)$, nehmen an, dass wir durch u and f in der Herleitung (formale Rechnung) teilen dürfen, und erhalten

$$\frac{1}{u}(\dot{u} - \Delta u) = \frac{v}{vf} \cdot \frac{d}{dt} f - \frac{f}{vf} \Delta v = \frac{1}{f} \cdot \frac{d}{dt} f - \frac{1}{v} \Delta v.$$

Wir haben also die Abhängigkeit von den beiden Variablen separiert. Gleichheit gilt somit, wenn $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt} f$ und $\frac{-\Delta v}{v}$ beide mit einer gegebenen Konstanten λ übereinstimmen.

Eigenfunktionen u des Laplaceoperators auf Ω mit Randwerten Null zu einem Eigenwert λ

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gibt es nur für eine diskrete Menge von positiven Konstanten λ. Sei (u_i, λ_i) ein solches Tupel.

Die Differentialgleichung $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt}f = \lambda$ besitzt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung $f(t) = f(0)e^{-\lambda t}$.

Nun löst $w(x,t) := \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dot{w} - \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Linearkombinationen von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind wieder Lösungen. Somit ist auch

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.3).

Ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ beliebig, so gibt es nach Theorem 3.3 Konstanten $\beta_i := \langle u_0, u_i \rangle$ für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so dass

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i.$$

Mit zusätzlicher Arbeit kann man nachweisen, dass nun

$$u(x,t) := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x) \tag{3.5}$$

in einem geeigneten Sinne das Anfangswertproblem (3.3) für positive Zeiten löst. Für positive Zeiten ist die Lösung glatt. Für $t = 0$ erhält man jedoch i. a. nur eine L^2-Funktion.

Diese Probleme bei $t = 0$ wollen wir für den Rest der Betrachtungen von (3.3) und (3.4) nicht weiter verfolgen.

Wir beobachten, dass hohe Frequenzen (große Eigenwerte) in (3.5) schneller abklingen als tiefe. Weiterhin kann man einen gemeinsamen Faktor $e^{-\lambda_1 t}$ ausklammern und sieht, dass $u(x,t)$ mindestens mit dieser Rate gegen Null konvergiert. Im generischen Fall, wenn $\beta_1 = \int\limits_\Omega u_0 u_1 \neq 0$ ist, kann man die Lösung reskalieren. Es gilt dann

$$\frac{1}{\beta_1} e^{\lambda_1 t} u(x,t) \to u_1(x) \text{ für } t \to \infty.$$

Somit geht die Temperatur für große Zeiten gleichmäßig gegen Null und nach Reskalieren approximiert das Profil der Temperaturverteilung approximiert generisch die erste Eigenfunktion. Ist $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$, so approximiert man entsprechend die k-te Eigenfunktion.

Wellengleichung. Hier führt ein Ansatz $u(x,t) = f(t)v(x)$ zu

$$\frac{1}{u}(u_{tt} - \Delta u) = \frac{1}{f} f_{tt} - \frac{\Delta v}{v}$$

zum Gleichungssystem

$$-\frac{1}{f} f_{tt} = \lambda = -\frac{\Delta v}{v}.$$

Lösungen u_i des rechten Teiles kennen wir bereits. Lösungen des ersten Teiles sind gegeben durch

$$f(t) = \alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right).$$

Der formale Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right)\right) u_i(x)$$

führt also zu

$$u(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x),$$

$$u_t(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i(x).$$

Da die u_i eine Orthonormalbasis von L^2 bilden, können wir damit das Anfangswertproblem (3.4) zumindest formal lösen. Im Unterschied zu (3.3) existiert solch eine Lösung für alle Zeiten, während im parabolischen Fall eine Lösung für negative Zeiten im allgemeinen nicht existiert, da die Exponentialfaktoren sofort die Konvergenz der Reihe zerstören; die rückwärtige Wärmeleitungsgleichung ist im Allgemeinen nicht lösbar.

Anschaulich bedeutet die angegebene Lösung, dass die betrachtete Membran eine Überlagerung von Eigenschwingungen ausführt. In der Musik bezeichnet man λ_1 als Grundton und λ_i, $i > 1$, als Obertöne. Diese sind von der Geometrie des Instrumentes abhängig.

Im Falle endlicher Summen liegt eine klassische Lösung vor und die formalen Rechnungen werden sofort rigoros.

4. Maximumprinzipien für parabolische Gleichungen

Wir folgen [7, 8].

4.1. **Schwaches Maximumprinzip.** In diesem Kapitel verallgemeinern wir Resultate, die wir bereits auf zylinderförmigen Gebieten kennen.

Definition 4.1.

(i) Sei $(x_0, t_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Sei $r > 0$. Dann definieren wir den parabolischen Zylinder $Q_r(x_0, t_0)$ durch

$$Q_r(x_0,t_0) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon |x - x_0| < r \text{ und } t_0 - r^2 < t < t_0\}.$$

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine beliebige offene Menge. Dann definieren wir den parabolischen Rand $\mathcal{P}\Omega$ durch

$$\mathcal{P}\Omega := \{(x,t) \in \partial\Omega \colon Q_r(x,t) \not\subset \Omega \text{ für alle } r > 0\}.$$

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Dann besteht das parabolische Einflussgebiet des Punktes $(x_0,t_0) \in \Omega$ aus allen Punkten (x_1,t_1), so dass ein stetiger Weg $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ mit $\gamma(0) = (x_0,t_0)$ und $\gamma(1) = (x_1,t_1)$ existert, so dass $t \mapsto \gamma^{n+1}(t)$ monoton fallend (= nichtwachsend) ist, d. h. die Zeit t ist entlang von γ monoton fallend: $\gamma^{n+1}(t_2) \le \gamma^{n+1}(t_1)$ für alle $0 \le t_1 < t_2 \le 1$.

Theorem 4.2 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt. Definiere den parabolischen Operator L durch*

$$Lu := -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du$$

mit $a^{ij}, b^i, d \in L^\infty$, $1 \le i,j \le n$. Sei a^{ij} gleichmäßig elliptisch, d. h. es gebe ein $\vartheta > 0$ mit

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2 \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Gelte ohne Einschränkung $a^{ij} = a^{ji}$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ eine Lösung von $Lu \ge 0$ in Ω.

(a) Ist $d \equiv 0$, so gilt

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\mathcal{P}\Omega} u.$$

(b) Falls $d \le 0$ in $\{(x,t) \in \Omega \colon u(x,t) > 0\}$ gilt, erhalten wir

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\mathcal{P}\Omega} \max\{u, 0\}.$$

(c) Ist $d \in L^\infty$ beliebig und $\sup\limits_{\mathcal{P}\Omega} u \le 0$, so folgt

$$\sup_\Omega u \le 0.$$

Das Resultat gilt auch, wenn t in Ω nicht nach oben beschränkt ist: Man approximiert in diesem Fall Ω durch Gebiete $\Omega \cap \{(x,t)\colon t < T\}$ und lässt am Ende $T \to \infty$.

Beweis.

(i) Gelte zunächst $d \equiv 0$ und $Lu > 0$ in Ω. Wäre die Behauptung (a) verletzt, so gäbe es $\varepsilon > 0$ und $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ mit $u(x_0,t_0) = \sup\limits_{\mathcal{P}\Omega} u + \varepsilon$ und $u(x,t) \le u(x_0,t_0)$ für alle $(x,t) \in \Omega$ mit $t \le t_0$. Zusätzlich dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u(x,t) < u(x_0,t_0)$ für $(x,t) \in \Omega$ mit $t < t_0$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(I) Ist $(x_0,t_0) \in \Omega$, so gilt dort $\dot{u} \ge 0$, $u_{ij} \preccurlyeq 0$ und $u_i = 0$. Somit erhalten wir dort $Lu \le 0$. Widerspruch.

(II) Da dieser Beweisteil zwar kompliziert aussieht, aber auf einer einfachen Idee beruht, beschreiben wir unser Vorgehen zunächst einmal in Worten: Wir wollen wie in (iI) einen Widerspruch zeigen. Dazu betrachten wir vor t_0 in der Zeit abgeschnittene Gebiete $\left\{t < t_0 - \frac{1}{i}\right\}$ und erhalten für diese Gebiete Maximalpunkte (x_i, t_i). Für $i \to \infty$ erhalten wir eine konvergente Teilfolge mit Limes $(x^*, t^*) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}\Omega$ und $t^* = t_0$. Ein kleiner parabolischer Zylinder um den Limespunkt liegt in Ω. Die Maximalpunkte (x_i, t_i) liegen auch in diesem Zylinder und somit können wir wie in (iI) vorgehen und erhalten ebenfalls einen Widerspruch.

Ist $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, so erhalten wir mit Hilfe von ε sogar $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}\Omega$. Somit gibt es $r > 0$ mit $Q_r(x_0, t_0) \subset \Omega$. Definiere $T_i := t_0 - \frac{1}{i}$ und $\Omega_i := \{(x, t) \in \Omega \colon t < T_i\}$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass i so groß ist, dass $\Omega_i \neq \emptyset$ gilt. Wähle $(x_i, t_i) \in \overline{\Omega_i}$ mit $u(x_i, t_i) = \sup\limits_{\Omega_i} u$ und $u(x, t) \le u(x_i, t_i)$ für alle $(x, t) \in \Omega_i$ mit $t < t_i$. Aufgrund der obigen Überlegungen gilt dann $(x_i, t_i) \in \partial\Omega_i$. Da u in $\overline{\Omega}$ stetig ist und $Q_r(x_0, t_0) \subset \Omega$ gilt, folgt $\lim\limits_{i\to\infty} u(x_i, t_i) = u(x_0, t_0)$. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $((x_i, t_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Ohne Einschränkung gelte für die gesamte Folge $(x_i, t_i) \to (x^*, t^*)$. Wir erhalten $u(x^*, t^*) = u(x_0, t_0)$ und $u(x, t) \le u(x^*, t^*)$ für alle $(x, t) \in \Omega$ mit $t < t^*$. Aufgrund der obigen Überlegungen gilt $(x^*, t^*) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}\Omega$ („$\notin \Omega$“haben wir oben bereits gezeigt und nach Wahl von ε folgt auch „$\notin \mathcal{P}\Omega$“). Somit gibt es ein $\delta > 0$ mit $Q_\delta(x^*, t^*) \subset \Omega$. Wir bemerken, dass $t_i < t_0$ nach Konstruktion gilt, also auch $t^* \le t_0$, und wegen $u(x^*, t^*) = u(x_0, t_0)$ und der Wahl von (x_0, t_0) mit $u(x, t) < u(x_0, t_0)$ für $t < t_0$ folgt $t_0 = t^*$. Damit ist aber aufgrund der Konvergenz $(x_i, t_i) \to (x^*, t^*)$ und $t_i < t^* = t_0$ auch $(x_i, t_i) \in \Omega$, falls i groß genug ist. In (x_i, t_i) gilt jedoch $\dot{u} \ge 0$, $u_{ij} \preccurlyeq 0$, $u_i = 0$ im Widerspruch zu $Lu > 0$.

(ii) Sei nun $d \equiv 0$ und $Lu \ge 0$. Dann erfüllt $u - t\varepsilon$ für beliebige $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $L(u - t\varepsilon) > 0$ in Ω. Mit (i) erhalten wir

$$\sup_{\Omega}(u - t\varepsilon) \le \sup_{\mathcal{P}\Omega}(u - t\varepsilon).$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung (a).

(iii) Gelte nun $d \le 0$ in $\{(x, t) \in \Omega \colon u(x, t) > 0\}$. Wir definieren

$$\tilde{\Omega} := \{(x, t) \in \Omega \colon u(x, t) > 0\}$$

und $L_0 w := -\dot{w} + a^{ij} w_{ij} + b^i w_i$. Ist $\tilde{\Omega} = \emptyset$, so ist die Behauptung (b) klar. Sei also $\tilde{\Omega} \neq \emptyset$. Dann gilt in $\tilde{\Omega}$ nach Voraussetzung $0 \le Lu = L_0 u + du \le L_0 u$. Wir wenden nun (ii) mit $\tilde{\Omega}$ und L_0 an und erhalten wegen $\mathcal{P}\tilde{\Omega} \subset \mathcal{P}\Omega \cup \{(x, t) \colon u(x, t) = 0\}$ (benutze eine Fallunterscheidung $u > 0$ und $u = 0$) die Behauptung (b):

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\tilde{\Omega}} u \le \sup_{\mathcal{P}\tilde{\Omega}} u = \sup_{\mathcal{P}\Omega} \max\{u, 0\}.$$

(iv) Für den Beweis von (c) wählen wir $k \ge 0$ mit $|d| \le k$ und definieren $w(x,t) := u(x,t) \cdot e^{-kt}$. Mit $\dot{w} = \dot{u}e^{-kt} - kue^{-kt} = \dot{u}e^{-kt} - kw$ folgt

$$\begin{aligned} 0 \le{}& (Lu) \cdot e^{-kt} \\ ={}& \left(-\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du\right) \cdot e^{-kt} \\ ={}& -\dot{w} + a^{ij}w_{ij} + b^i w_i + dw - kw \\ ={}& \tilde{L}w, \end{aligned}$$

wozu wir

$$\tilde{L}v := -\dot{v} + a^{ij}v_{ij} + b^i v_i + (d-k)v$$

definieren. Wegen $d-k \le 0$ können wir (b) auf $\tilde{L}w \ge 0$ anwenden und erhalten

$$\sup_{\Omega} u(\cdot,t)e^{-kt} \le \sup_{\mathcal{P}\Omega} u(\cdot,t)e^{-kt} \le 0.$$

Die Behauptung folgt. $\square$

4.2. **Hopfsches Randpunktlemma.**

Theorem 4.3 (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $t_0 - r_0 < t_1 < t_0 + r_0$. Definiere $\Omega := \{(x,t) \in B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0) \colon t < t_1\}$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu := -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \ge 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit $a^{ij}, b^i, d \in L^\infty$, symmetrischem a^{ij} und einem $\vartheta > 0$, so dass $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ überall in Ω gilt. Gelte $u < M$ in $\Omega \cup \{(x,t_1) \colon |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$ und $u(x_1,t_1) = M$ für ein x_1 mit $(x_1,t_1) \in \partial B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0)$. (Somit gilt $x_0 \ne x_1$.)

(i) Sei $d \equiv 0$. Falls u in (x_1,t_1) differenzierbar ist, ist jede nach außen weisende Richtungsableitung von u positiv, d. h. für die zugehörige Richtung ξ gilt $\langle \xi, (x_1 - x_0, t_1 - t_0)\rangle > 0$ und $\xi^{n+1} \ge 0$, insbesondere gilt also

$$\langle Du(x_1,t_1), x_1 - x_0\rangle > 0.$$

Allgemein gilt für jedes $\delta > 0$

$$\liminf_{\substack{\overline{\Omega}\setminus\{(x_1,t_1)\}\ni(x,t)\to(x_1,t_1) \\ \left\langle \frac{(x,t)-(x_1,t_1)}{|(x,t)-(x_1,t_1)|}, \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \frac{u(x_1,t_1) - u(x,t)}{|(x_1,t_1) - (x,t)|} > 0.$$

(ii) Ist $d \le 0$, so gilt dieselbe Aussage falls $u(x_1,t_1) \ge 0$ ist.

(iii) Ist $u(x_1,t_1) = 0$, so gilt dieselbe Aussage auch ohne eine Vorzeichenbedingung an d.

Beweis. Indem wir statt $B_{r_0}(x_0,t_0)$ einen etwas kleineren Ball betrachten, der in (x_1,t_1) dieselbe Tangentialebene hat, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u < M$ in $\overline{\Omega} \setminus \{(x_1,t_1)\}$ gilt. Sei $r > 0$ mit $|x_0 - x_1| > 2r$. Definiere

$$D := B^{n+1}_r(x_1,t_1) \cap \Omega$$

sowie den Abschluss des Teils des parabolischen Randes von D in Ω

$$\partial_i D := \overline{\partial D \cap \Omega}$$

und den Teil des parabolischen Randes von D außerhalb von Ω

$$\partial_a D := \partial D \cap \partial B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0).$$

Es gilt $\mathcal{P}D = \partial_i D \cup \partial_a D$. Da wir $B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0)$ anfangs gegebenenfalls verkleinert haben folgt $u < M$ auf $\partial_i D$. Somit gibt es $\eta > 0$ mit $u < M - \eta$ auf $\partial_i D$. Weiterhin gilt $u \le M$ auf $\partial_a D$.

Definiere für $\alpha > 0$ die Hilfsfunktion

$$v(x,t) := e^{-\alpha\left(|x-x_0|^2+(t-t_0)^2\right)} - e^{-\alpha r_0^2}.$$

Dann gilt $v = 0$ unabhängig von der Wahl von α auf $\partial B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0) \supset \partial_a D$. Die Funktion v erfüllt die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} Lv = {}& 2\alpha e^{-\alpha\left(|x-x_0|^2+(t-t_0)^2\right)} \cdot \\ &\cdot \left((t-t_0) + 2\alpha a^{ij}(x-x_0)_i(x-x_0)_j - a^{ij}\delta_{ij} - b^i(x-x_0)_i + \frac{1}{2\alpha} d\right) \\ &+ \underbrace{d}_{\le 0} \cdot \underbrace{\left(-e^{-\alpha r_0^2}\right)}_{\le 0} \\ > {}& 0 \end{aligned}$$

für $\alpha \gg 1$ in $\overline{D}$, falls $d \le 0$ (oder $d \equiv 0$) gilt. Fixiere $\alpha \gg 1$ entsprechend.

Gelte also zunächst $d \le 0$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $w := u + \varepsilon v - M$ die Ungleichung $w \le 0$ auf $\partial_a D$ (da dort v verschwindet) und auf $\partial_i D$ (falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist) erfüllt. Weiterhin gilt

$$Lw = Lu + \varepsilon Lv - dM > 0 + \varepsilon \cdot 0 - du(x_1,t_1) \ge 0.$$

Somit folgt aufgrund des schwachen Maximumprinzips $w \le 0$ in D. Mit $w(x_1,t_1) = 0$ erhalten wir

$$\liminf_{\substack{\overline{\Omega}\setminus\{(x_1,t_1)\}\ni(x,t)\to(x_1,t_1) \\ \left\langle \frac{(x,t)-(x_1,t_1)}{|(x,t)-(x_1,t_1)|}, \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \frac{w(x_1,t_1)-w(x,t)}{|(x_1,t_1)-(x,t)|} \ge 0.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\limsup_{\substack{\overline{\Omega}\setminus\{(x_1,t_1)\}\ni(x,t)\to(x_1,t_1) \\ \left\langle \frac{(x,t)-(x_1,t_1)}{|(x,t)-(x_1,t_1)|}, \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \frac{v(x_1,t_1)-v(x,t)}{|(x_1,t_1)-(x,t)|} \\ \le &\sup_{\substack{(\xi,\tau)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\cap\mathbb{S}^n \\ \left\langle (\xi,\tau), \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \langle -(Dv,\dot v)(x_1,t_1), (\xi,\tau)\rangle \end{aligned}$$

(man könnte auch noch $\tau \ge 0$ fordern)

$$\begin{aligned} = & -2\alpha e^{-\alpha\left(|x_1-x_0|^2+(t_1-t_0)^2\right)} \cdot \underbrace{\inf_{\substack{(\xi,\tau)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\cap\mathbb{S}^n \\ \left\langle (\xi,\tau), \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \langle -(x_1-x_0, t_1-t_0), (\xi,\tau)\rangle}_{>0} \\ < & \, 0. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung im Falle $d \equiv 0$ oder $d \le 0$.

Ist $M=0$ und d beliebig, so definieren wir für ein k mit $k\ge\sup\limits_\Omega|d|$ den Differentialoperator $\tilde L$ durch

$$\tilde Lu:=-\dot u+a^{ij}u_{ij}+b^iu_i+(d-k)u.$$

Es gilt

$$\tilde Lu=\underbrace{Lu}_{\ge0}-\underbrace{k}_{\ge0}\underbrace{u}_{\le0}\ge0.$$

Wegen $d-k\le0$ folgt die Behauptung damit aus dem Fall „$d\le0$“. □

Das folgende Korollar heißt ebenfalls Hopfsches Randpunktlemma.

Korollar 4.4 (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega\in C^2$ ($C^{1,1}$ genügt auch). Sei $T>0$. Sei $u\in C^{2;1}(\Omega\times(0,T))\cap C^0\left(\overline\Omega\times[0,T]\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu:=-\dot u+a^{ij}u_{ij}+b^iu_i+du\ge0\quad\text{in }\Omega$$

mit a^{ij}, b^i, $d\in L^\infty$, symmetrischem a^{ij} und einem $\vartheta>0$, so dass $a^{ij}\xi_i\xi_j\ge\vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ überall in Ω gilt. Gelte $u<M$ in $\Omega\times(0,T)$ und $u(x_1,t_1)=M$ für ein $(x_1,t_1)\in\partial\Omega\times(0,T]$. Dann gelten die Folgerungen wie im Hopfschen Randpunktlemma 4.3, wobei x_0 der Mittelpunkt einer inneren Kugel zu Ω ist, d. h. es gelte $B_r(x_0)\subset\Omega$, $\partial B_r(x_0)\cap\partial\Omega=\{x_1\}$ für ein $r>0$, und Ω dort in der Folgerung durch $\Omega\times(0,t_1)$ und $\frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}$ durch $-\nu$ (ν = äußere Normale) zu ersetzen sind.

Beweis. Benutze das Hopfsche Randpunktlemma, Theorem 4.3. □

4.3. **Harnackungleichung.** Für Operatoren, die nicht in Divergenzform sind, erhalten wir die folgende Harnackungleichung.

Theorem 4.5 (Harnackungleichung)**.** *Seien $R,T>0$. Definiere*

$$Q:=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon|x|<R,\ -T<t<0\right\}.$$

Sei $u\in C^{2;1}(Q)\cap C^0\left(\overline Q\right)$ mit $u\ge0$ in Q eine Lösung der Differentialungleichung

$$Lu\equiv-\dot u+a^{ij}u_{ij}+b^iu_i+du\le0$$

in Q mit a^{ij}, $b^i,d\in L^\infty$ und $a^{ij}\xi_i\xi_j\ge\lambda|\xi|^2$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$ überall in Q für ein $\lambda>0$. Seien $h>0$ und $0<\varepsilon<\frac12$ mit

$$u\ge h\quad\text{in }B_{\varepsilon R}(0)\times\{-T\}.$$

Dann gibt es $\kappa=\kappa\left(R,T,\lambda,\left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty},\left\|b^i\right\|_{L^\infty},\|d\|_{L^\infty}\right)>0$, so dass

$$u\ge\varepsilon^\kappa\frac h2\quad\text{in }B_{R/2}(0)\times\{0\}$$

gilt.

Beweis. Definiere

$$\psi_0:=R^2+(1-\varepsilon^2)\cdot R^2\cdot\frac tT$$

und

$$\psi_1:=\psi_0-|x|^2.$$

Definiere für ein noch zu wählendes $q \ge 2$ die Funktion $\psi := \psi_1^2 \psi_0^{-q}$. Setze

$$\tilde{Q} := \{(x,t) \in Q \colon \psi_0 > |x|^2\}.$$

Dann ist $\psi \in C^{2;1}\big(\tilde{Q}\big)$.

Wir möchten nun zeigen, dass es $q = q\left(R, T, \lambda, \left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty}, \left\|b^i\right\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty}\right) \gg 1$ gibt, so dass die Ungleichung $L\psi \ge 0$ in $\tilde{Q}$ gilt. Dort erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_1^2 \psi_0^{-q},\\
\dot{\psi} &= 2\psi_1 \psi_0^{-q}(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T} - q\psi_1^2\psi_0^{-q-1}(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T},\\
\psi_i &= 2\psi_1\psi_0^{-q}(-2x_i),\\
\psi_{ij} &= 2\psi_0^{-q}(-2x_i)(-2x_j) + 2\psi_1\psi_0^{-q}(-2\delta_{ij}),\\
L\psi &= \psi_0^{-q}\left(q(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\frac{\psi_1^2}{\psi_0} - 2(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\psi_1\right.\\
&\qquad\qquad \left. + 8a^{ij}x_ix_j - 4a^{ij}\delta_{ij}\psi_1 - 4b^ix_i\psi_1 + d\psi_1^2\right)
\end{aligned}$$

und mit $\xi := \frac{\psi_1}{\psi_0}$

$$\begin{aligned}
&\ge \psi_0^{1-q}\left(q(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\xi^2 - 2(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\xi\right.\\
&\qquad\qquad \left. - 4a^{ij}\delta_{ij}\xi - 4b^ix_i\xi + d\frac{\psi_1^2}{\psi_0} + 8\lambda\frac{|x|^2}{\psi_0}\right).
\end{aligned}$$

Wegen $|\psi_1| \le |\psi_0| \le R^2$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ erhalten wir mit der Konstanten

$$c = c\left(R, T, \left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty}, \left\|b^i\right\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty}\right)$$

die Abschätzung

$$L\psi \ge \psi_0^{1-q}\left(\frac{q}{2}\frac{R^2}{T}\xi^2 - c\xi + 8\lambda\frac{|x|^2}{\psi_0}\right).$$

Wir unterscheiden nun die Fälle $\xi \ge \frac{1}{2}$ und $\xi \le \frac{1}{2}$: Ist $1 \ge \xi \ge \frac{1}{2}$, so sind die beiden ersten Terme auf der rechten Seite für $q \ge \frac{4cT}{R^2}$ nichtnegativ und wir erhalten $L\psi \ge 0$ in $\tilde{Q}$. Ist $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$, so folgt aus $\frac{1}{2} \ge \xi = \frac{\psi_1}{\psi_0} = \frac{\psi_0 - |x|^2}{\psi_0}$ die Ungleichung $\frac{1}{2}\psi_0 \le |x|^2$ oder $\frac{|x|^2}{\psi_0} \ge \frac{1}{2}$. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}
L\psi &\ge \psi_0^{1-q}\left(\frac{q}{2}\frac{R^2}{T}\xi^2 - c\frac{\sqrt{4\lambda}}{\sqrt{4\lambda}}\xi + 4\lambda\right)\\
&\ge \psi_0^{1-q}\left(\frac{q}{2}\frac{R^2}{T}\xi^2 - \frac{c^2\xi^2}{4\lambda}\right) \ge 0
\end{aligned}$$

falls $q \ge \frac{c^2T}{2\lambda R^2}$ gilt. Wir dürfen ohne Einschränkung $\lambda \le 1$ und $c \ge 1$ annehmen und erhalten für $q \ge \frac{4c^2T}{\lambda R^2}$ die Ungleichung $L\psi \ge 0$ in $\tilde{Q}$.

Auf $\mathcal{P}\tilde{Q} \cap \{t > -T\}$ gilt $\psi = \psi_1 = 0$. Auf $\mathcal{P}\tilde{Q} \cap \{t = -T\}$ gelten $\psi_0 = \varepsilon^2R^2$, $\psi_1 = \varepsilon^2R^2 - |x|^2$ und somit $|x| \le \varepsilon R$. Definiere $\tilde{\psi} := h(\varepsilon R)^{2q-4}\psi$. Dann gilt auf

$\mathcal{P}\tilde{Q} \cap \{t = -T\}$ die Ungleichung

$$\tilde{\psi} = h \cdot (\varepsilon R)^{2q-4} \cdot \left(\varepsilon^2 R^2 - |x|^2\right)^2 \cdot \left(\varepsilon^2 R^2\right)^{-q} \le h \le u.$$

Auf dem Rest von $\mathcal{P}\tilde{Q}$ gilt $0 = \tilde{\psi} \le u$ ebenfalls. Somit folgt

$$\begin{cases} L\left(\tilde{\psi} - u\right) \ge 0 & \text{in } \tilde{Q}, \\ \tilde{\psi} - u \le 0 & \text{auf } \mathcal{P}\tilde{Q}. \end{cases}$$

Aufgrund des schwachen Maximumprinzips erhalten wir $\tilde{\psi} - u \le 0$ in $\tilde{Q}$. Für $t = 0$ und $|x| < \frac{R}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} u \ge \tilde{\psi} = & h(\varepsilon R)^{2q-4}\psi = h(\varepsilon R)^{2q-4}\psi_1^2\psi_0^{-q} \\ = & h(\varepsilon R)^{2q-4}\left(R^2 - |x|^2\right)^2 R^{-2q} \\ \ge & h\varepsilon^{2q-4} R^{-4}\frac{9}{16}R^4 \ge \frac{1}{2}h\varepsilon^{2q-4}. \end{aligned}$$

Mit $\kappa = 2q - 4$ erhalten wir somit die Behauptung. □

4.4. **Striktes Maximumprinzip.** Als Vorbereitung zeigen wir zunächst eine Version des strikten Maximumprinzips für zylinderförmige Gebiete.

Lemma 4.6. *Seien $R, T > 0$. Sei $\Omega = B_{3R}(0) \times (-T, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu = -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \le 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty$ und $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ überall in Ω für ein $\vartheta > 0$. Gelte $u \ge 0$ in Ω und $u(0,0) = 0$. Dann gilt $u \equiv 0$ in $B_R(0) \times [-T, 0]$.

Beweis. Falls nicht, so existiert $(x_0, t_0) \in B_R(0) \times (-T, 0)$ mit $u(x_0, t_0) > 0$. Da u stetig ist brauchen wir den Fall $t_0 \in \{-T, 0\}$ nicht zu betrachten. Aufgrund der Stetigkeit von u existieren $h > 0$ und $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ mit $u \ge h$ in $B_{2\varepsilon R}(x_0) \times \{t_0\}$. Nach Lemma 4.5, angewandt auf $Q = B_{2R}(x_0) \times [t_0, 0]$, gibt es $\kappa > 0$, so dass

$$u \ge \varepsilon^\kappa \frac{h}{2} \quad \text{in } B_R(x_0) \times \{0\}$$

gilt. Wegen $0 \in B_R(x_0)$ und

$$0 = u(0,0) \ge \varepsilon^\kappa \frac{h}{2} > 0$$

erhalten wir einen Widerspruch. Somit folgt $u \equiv 0$ in $B_R(0) \times [0, T]$. □

Das Argument lässt sich induktiv anwenden und liefert $u \equiv 0$ in der Menge $B_{3R}(0) \times (-T, 0)$.

Damit erhalten wir das strikte parabolische Maximumprinzip für allgemeine beschränkte Gebiete.

Theorem 4.7 (Striktes parabolisches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu = -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \ge 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty$ *und gelte für ein* $\vartheta > 0$ *überall in* Ω *die Elliptizitätsbedingung* $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sei $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ *mit*

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}} u =: M.$$

(i) Ist $d \equiv 0$ *oder*

(ii) $d \le 0$ *und* $u(x_0, t_0) \ge 0$ *oder*

(iii) d *beliebig und* $u(x_0, t_0) = 0$ *oder*

(iv) $Lu \ge d \cdot M$, *aber nicht notwendigerweise* $Lu \ge 0$,

so ist u *im parabolischen Einflussgebiet von* (x_0, t_0) *konstant.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur letzten Fall. In allen anderen Fällen folgt die Behauptung direkt daraus.

Definiere $w := M - u$. Dann gilt mit $Lw \equiv L_0 w + dw$

$$Lw = dM - Lu \le 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Es gilt $w \ge 0$ mit Gleichheit in (x_0, t_0).

Sei $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ eine Kurve wie in der Definition des parabolischen Einflussgebietes eines Punktes mit $\gamma(0) = (x_0, t_0)$. Schreibe $\gamma(a) = (x_a, t_a)$. Wir behaupten, dass $w(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Da $w \circ \gamma$ stetig ist, gilt $w(\gamma(t)) = 0$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge von $[0,1]$. Sei $a \in [0,1]$ maximal, so dass $w(\gamma(t)) = 0$ auf $I := [0, a]$ gilt. Wir behaupten, dass $a = 1$ ist. Benutze, dass

$$\begin{cases} Lw \le 0 & \text{in } \Omega, \\ w \ge 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{in } (x_a, t_a) \end{cases}$$

gelten. Wegen $(x_a, t_a) \in \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ gibt es $R > 0$ und $T > 0$ mit $B_{3R}(x_a) \times (t_a - T, t_a) \subset \Omega$. Dort gilt insbesondere $Lw \le 0$. Nach Lemma 4.6 folgt $w \equiv 0$ in $B_R(x_a) \times (t_a - T, t_a)$. Da die Zeitkomponente $\gamma^{n+1}(t)$ in t nichtwachsend ist, widerspricht dies der Maximalität von a. $\square$

Theorem 4.8 (Maximumprinzip auf $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei* $0 < T < \infty$ *und*

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T]).$$

Löst u *das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u = g & \textit{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

und gibt es Konstanten a, $A > 0$, *so dass*

$$u(x,t) \le A \cdot e^{a|x|^2}$$

ist, so gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Beweis. Es genügt, $u \le \sup g$ auf einem kleinen Zeitintervall $(0,T)$ zu zeigen, so dass $4aT < 1$ gilt. Wir nehmen daher ohne Einschränkung $4aT < 1$ an. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $4a(T+\varepsilon) < 1$ gilt und definiere $\gamma > 0$ durch $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu > 0$ definieren wir

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right).$$

Behauptung: Es gilt $\dot{v} = \Delta v$.

Dafür genügt es, nachzuweisen, dass

$$w = (T-t)^{-n/2} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. (Man könnte auch $y = 0$ annehmen.) Wir bemerken, dass dies (bis auf unwichtige Konstanten) gerade die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot{w} =& \frac{n}{2}(T-t)^{-n/2-1} \cdot \exp(\ldots) + (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{|x-y|^2}{4(T-t)^2},\\
w_i =& (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2(x-y)_i}{4(T-t)},\\
w_{ij} =& (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2(x-y)_i}{4(T-t)} \cdot \frac{2(x-y)_j}{4(T-t)}\\
&+ (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2\delta_{ij}}{4(T-t)},\\
\dot{w} - \Delta w =& \exp(\ldots) \cdot (T-t)^{-n/2-1} \cdot \left\{\frac{n}{2} + \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} - \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} - \frac{1}{2}\delta^{ij}\delta_{ij}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Setze $r := |x-y|$ und betrachte v für große Werte von r. Es gilt

$$\begin{aligned}
v(x,t) =& u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}\\
\le& Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} \cdot e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung an u und da beide Faktoren einzeln durch Weglassen von t kleiner werden

$$\le A \cdot e^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} \cdot e^{(a+\gamma)\cdot r^2}$$

aufgrund der Dreiecksungleichung und nach Definition von γ. Für $r \gg 1$ wird dies beliebig klein, insbesondere kleiner als $\sup g$. Somit ist $v \le \sup g$ auf $\partial B_R(y) \times (0,T)$, falls $R \gg 1$ groß genug ist. Weiterhin gilt aber $v \le \sup g$ in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Aufgrund des parabolischen Maximumprinzips folgt also

$$v \le \sup g \quad \text{in } B_R(y) \times (0,T).$$

Wie wir oben gesehen haben gilt diese Ungleichung aber auch außerhalb von $B_R(y)$. Also erhalten wir überall

$$v \le \sup g.$$

R hängt zwar von μ ab, aber die obige Abschätzung ist von R unabhängig. Lasse also $\mu \searrow 0$. Es folgt

$$u \le \sup g.$$

□

Da die Wärmeleitungsgleichung die Entwicklung der Temperaturverteilung unter idealisierten Bedingungen beschreibt, besagt das folgende Theorem, dass die gleiche Temperaturverteilung am Ende nur entstehen kann, wenn diese Verteilung auch schon am Anfang gleich war.

Theorem 4.9 (Rückwärtige Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $0 < T < \infty$. Seien u und $\tilde{u}$ glatte Lösungen von*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u, \quad \dot{\tilde{u}} = \Delta \tilde{u} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = g, \quad \tilde{u} = g & \text{auf } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

(Die Randbedingung wird also nur an den „seitlichen“ Rand gestellt.)

Gilt $u(x, T) = \tilde{u}(x, T)$ für $x \in \Omega$, so folgt $u \equiv \tilde{u}$ in $\Omega \times (0, T)$.

Beweis. Setze $w := u - \tilde{u}$ und

$$e(t) := \int\limits_\Omega w^2(x, t).$$

Es folgt

$$\dot{e}(t) = -2 \int\limits_\Omega w\dot{w} = -2 \int\limits_\Omega w\Delta w = \int\limits_\Omega |Dw|^2$$

und daraus ergibt sich

$$\ddot{e}(t) = -4 \int\limits_\Omega \langle Dw, D\dot{w}\rangle = 4 \int\limits_\Omega \Delta w \cdot \dot{w} = 4 \int\limits_\Omega (\Delta w)^2,$$

denn aufgrund der Randbedingung ist $\dot{w} = 0$ auf $\partial\Omega$ und wir dürfen ohnen Randterm integrieren. Wegen $w = 0$ auf $\partial\Omega \times (0, T)$ erhalten wir

$$\int\limits_\Omega |Dw|^2 = -\int\limits_\Omega w \cdot \Delta w \le \left(\int\limits_\Omega w^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega (\Delta w)^2 \right)^{1/2}$$

und somit

$$(\dot{e}(t))^2 = 4 \left(\int\limits_\Omega |Dw|^2 \right)^2 \le 4 \int\limits_\Omega w^2 \cdot \int\limits_\Omega (\Delta w)^2 = e(t) \cdot \ddot{e}(t).$$

Falls die Behauptung nicht gilt, gibt es $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ mit

$$e(t) > 0 \quad \text{für } t_1 \le t < t_2 \quad \text{und } e(t_2) = 0.$$

Definiere

$$f(t) := \log e(t) \quad \text{für } t_1 \le t < t_2.$$

Wir erhalten

$$\dot{f} = \frac{\dot{e}}{e} \quad \text{und} \quad \ddot{f} = \frac{e\ddot{e} - (\dot{e})^2}{e^2} \ge 0$$

aufgrund der obigen Rechnung. Dies bedeutet, dass f im Intervall (t_1, t_2) konvex ist. Somit gilt insbesondere

$$f((1 - \tau)t_1 + \tau t) \le (1 - \tau) f(t_1) + \tau f(t)$$

für $t_1 < t < t_2$ und $0 \le \tau \le 1$. Wir wenden die Exponentialfunktion auf diese Ungleichung an und erhalten nach Definition von f

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \le e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t)^\tau.$$

Da die Funktion e samt ihren Ableitungen für glatte Lösungen in t stetig ist, erhalten wir

$$0 \le e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t_2)^\tau.$$

Da aber $e(t_2) = 0$ ist, folgt $e = 0$ in ganz (t_1, t_2). Widerspruch. □

5. Die Matrixharnackungleichung

Definition 5.1. Sei $N = (N_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mit $N_{ij} = N_{ij}(M_{kl}) \equiv N_{ij}((M_{kl})_{1\le k,l\le n})$ für symmetrische Matrizen $M = (M_{ij})_{1\le i,j\le n}$ symmetrisch. Dann erfüllt N die Null-Eigenvektor-Bedingung, falls aus $M_{ij}\xi^j = 0$ für $1 \le i \le n$ auch $N_{ij}\xi^i\xi^j \ge 0$ folgt.

Ist N zusätzlich orts- und zeitabhängig, so erfüllt N die Null-Eigenvektor-Bedingung, falls $N(\cdot, x, t)$ sie für alle (x, t) erfüllt.

Theorem 5.2 (Maximumprinzip für Tensoren)**.** *Sei $T > 0$. Sei $M = (M_{ij})_{1\le i,j\le n}$ mit $M_{ij} \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T)) \cap C^{2;1}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, $1 \le i,j \le n$, symmetrisch und periodisch mit $M_{ij}(x) = M_{ij}(y)$ für $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Sei $u = \left(u^k\right)_{1\le k\le n}$ mit $u^k \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T))$. Sei $N = (N_{ij}(M_{kl}, x, t))_{1\le i,j\le n}$ mit*

$$N_{ij} \in C^1\left(\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \times [0,T)\right)$$

symmetrisch, in $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion und erfülle die Null-Eigenvektor-Bedingung. Gelte

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ij} \succcurlyeq \Delta M_{ij} + u^k \frac{\partial}{\partial x^k} M_{ij} + N_{ij}(M_{kl}, \cdot) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Gilt $M_{ij}(\cdot, 0) \succcurlyeq 0$, so folgt $M_{ij}(\cdot, t) \succcurlyeq 0$ für $0 \le t < T$.

Beweis. Seien $\varepsilon, \delta > 0$. Wir wählen diese Konstanten später noch geeignet. Definiere

$$\tilde{M}_{ij} := M_{ij} + \varepsilon \cdot (\delta + t)\delta_{ij}.$$

Wir betrachten die Differentialgleichung auf einem Zeitintervall $[0, \tau]$ für ein beliebiges $0 < \tau < T$. Es genügt, das Theorem für beliebige $\tau < T$ zu zeigen. Wir schreiben nun wieder $[0,T]$ statt $[0,\tau]$. Aufgrund der Periodizität in x und der Kompaktheit von $[0,T]$ gelten $|M_{ij}(x,t)| \le c$ und $|N_{ij}(M_{kl}(x,t), x, t)| \le c$. Wir wollen zeigen, dass $\tilde{M}_{ij} \succcurlyeq 0$ gilt und lassen dann $\varepsilon \searrow 0$.

Als Differentialgleichung für $\tilde{M}_{ij}$ erhalten wir in $\mathbb{R}^n \times [0,T]$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{M}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} M_{ij} + \varepsilon\delta_{ij} \\
&\succcurlyeq \Delta M_{ij} + u^k \frac{\partial}{\partial x^k} M_{ij} + N_{ij}(M_{kl}, \cdot) + \varepsilon\delta_{ij} \\
&= \Delta\tilde{M}_{ij} + u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{M}_{ij} + N_{ij}\left(\tilde{M}_{ij}, \cdot\right) + \left(N_{ij}(M_{kl}, \cdot) - N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl}, \cdot\right)\right) + \varepsilon\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

$N_{ij}\big(\tilde{M}_{kl},\cdot\big)$ erfüllt die Null-Eigenvektor-Bedingung, aber für die zusätzliche Differenz benötigen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|N_{ij}(M_{kl},\cdot)-N_{ij}\left(\tilde{M}_{ij},\cdot\right)\right|\\
=&\left|\int\limits_0^1 \frac{d}{d\sigma}N_{ij}\left(\sigma M_{kl}+(1-\sigma)\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\,d\sigma\right|\\
=&\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial N_{ij}}{\partial r_{kl}}\left(\sigma M_{kl}+(1-\sigma)\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\,d\sigma\cdot\left(M_{kl}-\tilde{M}_{kl}\right)\right|\\
\le&\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial N_{ij}}{\partial r_{kl}}(\dots)\,d\sigma\right|\cdot c(n)\cdot\varepsilon\cdot(\delta+t)\\
\le&\, c\cdot\varepsilon\cdot(\delta+t).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{M}_{ij}\succcurlyeq\Delta\tilde{M}_{ij}+u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{M}_{ij}+N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right)+\varepsilon\delta_{ij}-c\cdot\varepsilon\cdot(\delta+t)\delta_{ij}.$$

Wir nehmen nun an, dass $0\le t\le\delta$ gilt und fixieren $\delta>0$ mit $c\cdot 2\delta\le\frac{1}{2}$. Somit gilt $\varepsilon\delta_{ij}-c\varepsilon(\delta+t)\delta_{ij}\succcurlyeq\frac{1}{2}\varepsilon\delta_{ij}$. Wir zeigen anschließend dass $\tilde{M}_{ij}\succcurlyeq 0$ für $0\le t\le\delta$ gilt. Mit $\varepsilon\searrow 0$ folgt dann auch $M_{ij}\succcurlyeq 0$ für $0\le t\le\delta$. Dies wenden wir endlich oft an und erhalten $M_{ij}\succcurlyeq 0$ für $0\le t\le T$.

Da $\tilde{M}_{ij}(x,0)$ für $x\in\mathbb{R}^n$ strikt positiv ist $\big(\tilde{M}_{ij}\succ 0\big)$, gilt entweder $\tilde{M}_{ij}\succ 0$ in $\mathbb{R}^n\times[0,\delta]$ oder es gibt (aufgrund der Periodizität) $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,T]$ mit $\tilde{M}_{ij}(x,t)\succ 0$ für alle $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,t_0)$ und $\xi\in\mathbb{R}^n$ mit $|\xi|=1$ und $\tilde{M}_{ij}(x_0,t_0)\xi^j=0$ für alle $1\le i\le n$. Fixiere dieses ξ und definiere $f(x,t):=\tilde{M}_{ij}(x,t)\xi^i\xi^j$. Dann erfüllt f die Differentialungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}f&=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{M}_{ij}\xi^i\xi^j\\
&\ge\left(\Delta\tilde{M}_{ij}+u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{M}_{ij}+N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right)+\frac{1}{2}\varepsilon\delta_{ij}\right)\xi^i\xi^j\\
&=\Delta f+u^k\frac{\partial}{\partial x^k}f+N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\xi^i\xi^j+\frac{1}{2}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit der Null-Eigenvektor-Bedingung und da (x_0,t_0) der erste Punkt mit einem Null-Eigenvektor ist, folgt in (x_0,t_0)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}f}_{\le 0}\ge\underbrace{\Delta f}_{\ge 0}+u^k\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k}f}_{=0}+\underbrace{N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\xi^i\xi^j}_{\ge 0}+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Widerspruch. □

Theorem 5.3 (Harnackungleichung mit Matrizen)**.** *Sei $T>0$. Sei*

$$u\in C^{4;2}\left(\mathbb{R}^n\times(0,T)\right)\cap C^{2;1}\left(\mathbb{R}^n\times[0,T)\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u}=\Delta u\quad \textit{in } \mathbb{R}^n\times(0,T)$$

mit $u(\cdot,0)\ge 0$, $u(\cdot,0)\not\equiv 0$ *und*

$$u(x,t)=u(y,t)\quad \textit{für } x-y\in\mathbb{Z}^n \textit{ und } t\ge 0.$$

Dann gilt

$$u_{ij}-\frac{1}{u}u_iu_j+\frac{u}{t}\delta_{ij}\succcurlyeq 0\quad \textit{in } \mathbb{R}^n\times(0,T).$$

Beweis. Definiere

$$M_{ij}:=u_{ij}-\frac{1}{u}u_iu_j+\frac{u}{t}\delta_{ij}$$

für $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T)$. Aufgrund des strikten Maximumprinzips gilt $u(x,t)>0$ für $t>0$, M_{ij} ist also wohldefiniert. Sei $\varepsilon>0$. Dann erfüllt auch $u+\varepsilon$ die Voraussetzungen. Definieren wir M^ε_{ij} mit $u+\varepsilon$ statt u, so ist $\frac{u+\varepsilon}{t}\delta_{ij}$ aufgrund der vorausgesetzten Regularität und $\frac{|Du|^2}{u}\le c\cdot\left\|D^2u\right\|_{L^\infty}$ für $0<t\approx 0$ der dominante Term in M^ε_{ij} und es folgt $M^\varepsilon_{ij}\succcurlyeq 0$, falls $t>0$ klein genug ist. Es genügt nun zu zeigen, dass $M^\varepsilon_{ij}(x,t)\succcurlyeq 0$ für $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T)$ gilt. Mit $\varepsilon\searrow 0$ für festes (x,t,ξ) folgt dann die Behauptung. Aus Bequemlichkeit schreiben wir ab jetzt wieder u statt $u+\varepsilon$.

Wir wollen das Maximumprinzip für Tensoren anwenden und berechnen dazu die Evolutionsgleichung von M_{ij}. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot M_{ij}={}&\dot u_{ij}+\frac{1}{u^2}\dot u u_iu_j-\frac{1}{u}\dot u_iu_j-\frac{1}{u}u_i\dot u_j+\frac{\dot u}{t}\delta_{ij}-\frac{u}{t^2}\delta_{ij},\\
M_{ij,k}\equiv{}&\frac{\partial}{\partial x^k}M_{ij}\\
={}&u_{ijk}+\frac{1}{u^2}u_ku_iu_j-\frac{1}{u}u_{ik}u_j-\frac{1}{u}u_iu_{jk}+\frac{u_k}{t}\delta_{ij},\\
M_{ij,kl}={}&u_{ijkl}+\frac{1}{u^2}u_{kl}u_iu_j-\frac{1}{u}u_{ikl}u_j-\frac{1}{u}u_iu_{jkl}+\frac{u_{kl}}{t}\delta_{ij}\\
&-2\frac{1}{u^3}u_iu_ju_ku_l+\frac{1}{u^2}u_ku_{il}u_j+\frac{1}{u^2}u_ku_iu_{jl}+\frac{1}{u^2}u_{ik}u_ju_l\\
&-\frac{1}{u}u_{ik}u_{jl}+\frac{1}{u^2}u_iu_{jk}u_l-\frac{1}{u}u_{il}u_{jk},\\
\dot M_{ij}-\Delta M_{ij}={}&-\frac{u}{t^2}\delta_{ij}+\frac{2}{u^3}|\nabla u|^2u_iu_j-\frac{2}{u^2}u^ku_{ki}u_j-\frac{2}{u^2}u^ku_{kj}u_i+\frac{2}{u}u_{ik}\delta^{kl}u_{lj}\\
\equiv{}&N_{ij}.
\end{aligned}$$

Wir möchten nun nachweisen, dass N_{ij} die Null-Eigenvektor-Bedingung erfüllt. Sei dazu $\xi\in\mathbb{R}^n$ mit $|\xi|=1$ und $M_{ij}\xi^j=0$ für $1\le i\le n$, also

$$0=M_{ij}\xi^j=u_{ij}\xi^j-\frac{1}{u}u_iu_j\xi^j+\frac{u}{t}\delta_{ij}\xi^j$$

oder

$$u_{ij}\xi^j=\frac{1}{u}u_iu_j\xi^j-\frac{u}{t}\delta_{ij}\xi^j.$$

Es gilt

$$N_{ij}\xi^i\xi^j=-\frac{u}{t^2}+\frac{2}{u^3}|\nabla u|^2\langle\nabla u,\xi\rangle^2-\frac{4}{u^2}u^ku_{kj}\xi^j\langle\nabla u,\xi\rangle+\frac{2}{u}\xi^iu_{ik}\delta^{kl}u_{lj}\xi^j$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{u}{t^2} + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2 \langle \nabla u, \xi\rangle^2 \\
&\quad - \frac{4}{u^2} u^k \left(\frac{1}{u} u_k \langle \nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{u}{t}\delta_{kj}\xi^j \langle \nabla u, \xi\rangle \right) \\
&\quad + \frac{2}{u} \left(\frac{1}{u} u_k \langle \nabla u, \xi\rangle - \frac{u}{t}\delta_{kj}\xi^j \right) \delta^{kl} \left(\frac{1}{u} u_l \langle \nabla u, \xi\rangle - \frac{u}{t}\delta_{li}\xi^i \right) \\
&= -\frac{u}{t^2} + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2 \langle \nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{4}{u^3}|\nabla u|^2 \langle \nabla u, \xi\rangle^2 + \frac{4}{ut}\langle \nabla u, \xi\rangle^2 \\
&\quad + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2 \langle \nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{4}{ut}\langle \nabla u, \xi\rangle^2 + \frac{2u}{t^2} \\
&= \frac{u}{t^2} > 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung aus dem Maximumprinzip für Tensoren. □

Theorem 5.4 (Differentielle Harnackungleichung)**.** *Sei $T > 0$. Sei*

$$u \in C^{4;2}\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C^{2;1}\left(\mathbb{R}^n \times [0,T)\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\dot u = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)$$

mit $u(\cdot,0) \ge 0$, $u(\cdot,0) \not\equiv 0$ und

$$u(x,t) = u(y,t) \quad \text{für } x - y \in \mathbb{Z}^n \text{ und } t \ge 0.$$

Dann gilt

$$\dot u - \frac{|\nabla u|^2}{u} + \frac{n \cdot u}{t} \ge 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Beweis. Bilde die Spur in der Harnackungleichung für Matrizen, Theorem 5.3, und benutze $\dot u = \Delta u$. □

Damit können wir die Abfallrate von u in einem festen Punkt beschränken.

Korollar 5.5. *Sei $T > 0$. Sei*

$$u \in C^{4;2}\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C^{2;1}\left(\mathbb{R}^n \times [0,T)\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\dot u = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)$$

mit $u(\cdot,0) \ge 0$, $u(\cdot,0) \not\equiv 0$ und

$$u(x,t) = u(y,t) \quad \text{für } x - y \in \mathbb{Z}^n \text{ und } t \ge 0.$$

Seien $0 < t_1 \le t_2 < T$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t_2) \ge u(x,t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n.$$

Beweis. Wir verwenden die Abschätzung aus Theorem 5.4 und erhalten für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Differentialungleichung $\dot u + \frac{nu}{t} \ge 0$. Eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist durch $c \cdot t^{-n}$ gegeben, insbesondere löst also $t \mapsto u(x,t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t}\right)^n$ die Differentialgleichung. Da eine Lösung der Gleichung bei gleichem Anfangswert zur Zeit t_1 für $t > t_1$ unterhalb einer Lösung der Ungleichung liegt, folgt die Behauptung. □

Wir können auch die Funktionswerte in verschiedenen Punkten miteinander vergleichen:

Korollar 5.6. *Sei $T > 0$. Sei*

$$u \in C^{4;2}\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C^{2;1}\left(\mathbb{R}^n \times [0,T)\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)$$

mit $u(\cdot,0) \ge 0$, $u(\cdot,0) \not\equiv 0$ und

$$u(x,0) = u(y,0) \quad \text{für } x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

Seien $0 < t_1 \le t_2 < T$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$u(x_2,t_2) \ge u(x_1,t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n \cdot e^{-\frac{|x_2-x_1|^2}{t_2-t_1}}.$$

Beweis. Wir definieren

$$f(s) := u((1-s)x_1 + sx_2, (1-s)t_1 + st_2)$$

für $s \in [0,1]$ und erhalten mit Theorem 5.4

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} f(s) =& \langle \nabla u(\ldots), x_2 - x_1\rangle + \dot{u}(\ldots) \cdot (t_2 - t_1)\\
&\ge \langle \nabla u, x_2 - x_1\rangle + (t_2 - t_1) \cdot \left(\frac{|\nabla u|^2}{u} - \frac{n \cdot u}{t}\right), \quad t = (1-s)t_1 + st_2,\\
&\ge -\frac{|\nabla u|^2}{u} \cdot (t_2 - t_1) - \frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1} \cdot u + (t_2 - t_1) \cdot \frac{|\nabla u|^2}{u} - \frac{n \cdot u}{t} \cdot (t_2 - t_1)\\
&= -\frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1} \cdot f(s) - \frac{n \cdot f(s)}{(1-s)t_1 + st_2} \cdot (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Man rechnet direkt nach, dass (die mit Hilfe von SAGE gefundene Funktion)

$$s \mapsto \text{konst.} \cdot \frac{e^{-\frac{|x_2-x_1|^2}{t_2-t_1} \cdot s}}{(t_1 + s(t_2 - t_1))^n} \equiv g(s)$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist. Wir wählen die Konstante als $u(x_1,t_1) \cdot t_1^n$, so dass $g(0) = u(x_1,t_1)$ gilt. Aufgrund der Differentialungleichung gilt $f(s) \ge g(s)$ für alle $s \in [0,1]$. Mit $u(x_2,t_2) = f(1) \ge g(1)$ folgt daraus

$$u(x_2,t_2) \ge u(x_1,t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n \cdot e^{-\frac{|x_2-x_1|^2}{t_2-t_1}}$$

wie behauptet. □

6. Konvergenz gegen translatierende Lösungen

Theorem 6.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und gelte $\partial\Omega \in C^\infty$. Sei $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}\right)$. Sei $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ eine Lösung der gleichmäßig parabolischen Differentialgleichung*

$$\dot{u}(x,t) = F\left(D^2u(x,t), Du(x,t), x\right) \quad \text{für } (x,t) \in \Omega \times [0,\infty).$$

Gelte

$$\langle Du, \nu\rangle = \varphi(x) \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty)$$

für ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir nehmen die folgenden a priori Schranken an: Es gelten $|u(x,t)| \le c \cdot (1+t)$ und

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha u\right| \le c(k,\alpha) \quad \text{für alle } k \ge 0,\ \alpha \text{ mit } k + |\alpha| > 0.$$

Dann gibt es eine glatte translatierende Lösung, d. h. eine Funktion $U\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $U \in C^\infty$ ist,

$$V = \dot{U}(x,t) = F\left(D^2U(x,t), DU(x,t), x\right) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}$$

sowie $\langle DU(x,t), \nu\rangle = \varphi(x)$ für $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $V \in \mathbb{R}$ gelten. U ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Weiterhin konvergiert u für $t \to \infty$ gegen eine translatierende Lösung, d. h. es gibt eine Konstante $h \in \mathbb{R}$ mit

$$\|u(\cdot,t) - U(\cdot,t) - h\|_{C^k(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty$$

für beliebige feste $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Konstante $\lambda > 0$ mit

$$\|u(\cdot,t) - U(\cdot,t) - h\|_{C^0(\Omega)} \le c \cdot e^{-\lambda t}$$

für alle $t \ge 0$, so fallen die höheren Ableitungen ebenfalls exponentiell mit fast derselben Rate ab: Für $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|u(\cdot,t) - U(\cdot,t) - h\|_{C^k(\Omega)} \le c(k,\varepsilon) \cdot e^{-(\lambda-\varepsilon)\cdot t}$$

für alle $t \ge 0$.

Bemerkung 6.2.

(i) Gleichmäßige Parabolizität bedeutet hier $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \succcurlyeq \vartheta \delta_{ij}$ für ein $\vartheta > 0$.

(ii) Dies ist eine recht allgemeine Aussage über das Langzeitverhalten von Lösungen in einer Situation in der es translatierende Lösungen geben könnte (insbesondere treten keine expliziten Abhängigkeiten von t und u auf). Um dieses Resultat anwenden zu können sind insbesondere die angegebenen a priori Schranken zu zeigen.

Wir beweisen Theorem 6.1 in einzelnen Schritten.

Beweis von Theorem 6.1.

(i) **Differentialgleichung für die Differenz:** Sei $t_0 > 0$ beliebig. Definiere

$$w(x,t) := u(x, t+t_0) - u(x,t).$$

Können wir zeigen, dass diese Größe für $t \to \infty$ gegen eine Konstante konvergiert, so haben wir beinahe gezeigt, dass u gegen eine translatierende Lösung konvergiert. Daher untersuchen wir diese Größe.

Seien allgemeiner u_1 und u_2 zwei glatte Lösungen von

$$\begin{cases} \dot{u} = F\left(D^2u, Du, x\right) & \text{in } \Omega \times [0,\infty), \\ \langle Du, \nu\rangle = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty). \end{cases}$$

Dann folgt für $w := u_1 - u_2$

$$\dot{w} = \dot{u}_1 - \dot{u}_2 = F\left(D^2u_1, Du_1, x\right) - F\left(D^2u_2, Du_2, x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial\tau} F\left(\tau D^2u_1 + (1-\tau)D^2u_2, \tau Du_1 + (1-\tau)Du_2, x\right)\, d\tau \\
&= \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\ldots)\, d\tau}_{=:a^{ij}(x,t)} \cdot (u_{1,ij} - u_{2,ij}) + \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_i}(\ldots)\, d\tau}_{=:b^i(x,t)} \cdot (u_{1,i} - u_{2,i}) \\
&= a^{ij}w_{ij} + b^i w_i.
\end{aligned}
$$

Als Randbedingung erhalten wir

$$\langle Dw, \nu\rangle = \underbrace{\langle Du_1, \nu\rangle}_{=\varphi} - \underbrace{\langle Du_2, \nu\rangle}_{=\varphi} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty).$$

Sei ab jetzt wieder $w(x,t) := u(x, t+t_0) - u(x,t)$ für ein festes $t_0 > 0$.

Wir wollen zunächst zeigen, dass $w(\cdot, t)$ für $t \to \infty$ gegen eine Konstante h konvergiert. Dann ist $u(x, t+t_0) \approx u(x,t) + h$ für große t. Somit ist u beinahe eine „diskret translatierende Lösung“.

(ii) $\max w(\cdot, t)$ **ist strikt fallend:** w erfüllt

$$\begin{cases} \dot w = a^{ij}w_{ij} + b^i w_i & \text{in } \Omega \times [0,\infty), \\ \langle Dw, \nu\rangle = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0,\infty). \end{cases}$$

Somit gilt aufgrund des Maximumprinzips $\sup\limits_\Omega w(\cdot, t_1) \ge \sup\limits_\Omega w(\cdot, t_2)$ für alle $0 \le t_1 \le t_2$. Aufgrund des strikten Maximumprinzips und des Hopfschen Randpunktlemmas ist $t \mapsto \sup\limits_\Omega w(\cdot, t)$ strikt monoton fallend oder w ist in $\Omega \times (0,\infty)$ konstant.

Mit einem analogen Beweis erhalten wir, dass $t \mapsto \inf\limits_\Omega w(\cdot, t)$ strikt wachsend oder w konstant ist. Somit ist

$$t \mapsto \operatorname*{osc}_\Omega w(\cdot, t) := \sup_\Omega w(\cdot, t) - \inf_\Omega w(\cdot, t)$$

strikt fallend oder identisch Null.

(iii) **Es gilt $\operatorname*{osc}\limits_\Omega w(\cdot, t) \to 0$:** Falls nicht, so ist $t \mapsto \operatorname{osc} w(\cdot, t)$ strikt fallend und konvergiert für $t \to \infty$ gegen $\varepsilon > 0$. Dies führen wir zu einem Widerspruch indem wir eine Lösung der Differentialgleichung derselben Form wie für w konstruieren, deren Oszillation für alle Zeiten konstant $\varepsilon > 0$ ist.

Sei $x_0 \in \Omega$ und sei $t_k \to \infty$ eine beliebige Folge. Betrachte

$$u(x, t+t_k) - u(x_0, t_k) \quad \text{und} \quad u(x, t+t_0+t_k) - u(x_0, t_0+t_k)$$

für $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [-t_k, \infty)$. Sämtliche l-te Ableitungen dieser Funktionen sind für $|l| \ge 1$ nach Annahme gleichmäßig in k durch Konstanten c_l beschränkt. Auch die Funktionswerte sind in $\overline{\Omega} \times [-T, T]$ für beliebige $T > 0$ gleichmäßig in k beschränkt: Aufgrund der Voraussetzungen an Ω gibt es für je zwei Punkte $x, y \in \Omega$ einen Weg $\gamma \in C^1([0,1], \Omega)$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $L(\gamma) \le c(\Omega)$.

Seien $(x,t)\in\Omega\times[-T,T]$ und $t_k>T$ beliebig. Sei γ ein solcher Verbindungsweg in Ω von x nach x_0. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&|u(x,t+t_k)-u(x_0,t_k)|\\
\le{}&|u(x,t+t_k)-u(x,t_k)|+|u(x,t_k)-u(x_0,t_k)|\\
={}&\left|\int\limits_0^t \frac{d}{ds}u(x,s+t_k)\,ds\right|+\left|\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}u(\gamma(s),t_k)\,ds\right|\\
={}&\left|\int\limits_0^t \dot u(x,s+t_k)\,ds\right|+\left|\int\limits_0^1 \langle\nabla u(\gamma(s),t_k),\dot\gamma(s)\rangle\,ds\right|\\
\le{}&t\cdot\sup|\dot u|+L(\gamma)\cdot\sup|Du|\\
\le{}&T\cdot\sup|\dot u|+c(\Omega)\cdot\sup|Du|.
\end{aligned}$$

Eine entsprechende Abschätzung gilt auch für die zweite Funktionenfolge. Somit erhalten wir auf beliebigen kompakten Teilmengen von $\overline{\Omega}\times(-\infty,\infty)$ für beide Funktionenfolgen in k gleichmäßige C^l-Abschätzungen für beliebige $l\in\mathbb{N}$ und damit auch für Ableitungen, die Zeitableitungen beinhalten, wobei wir stets annehmen, dass k so groß ist, dass beide Funktionenfolgen dort definiert sind. Nach Arzelà-Ascoli gibt es somit eine mit Hilfe eines Diagonalfolgenargumentes konstruierte Teilfolge der $(t_k)_k$, die wir wieder mit $(t_k)_k$ bezeichnen, so dass

$$u(x,t+t_k)-u(x_0,t_k)\to\tilde u^\infty(x,t)$$

und

$$u(x,t+t_0+t_k)-u(x_0,t_0+t_k)\to\tilde u^{t_0,\infty}(x,t)$$

lokal gleichmäßig in $\overline{\Omega}\times(-\infty,\infty)$ in C^l für beliebige $l\in\mathbb{N}$, ebenso für Zeitableitungen, gegen glatte Funktionen $\tilde u^\infty,\tilde u^{t_0,\infty}\colon\overline{\Omega}\times(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ konvergieren. Aufgrund der glatten Konvergenz sind auch $\tilde u^\infty$ und $\tilde u^{t_0,\infty}$ Lösungen der Differentialgleichung für u. Definiere $\tilde w:=\tilde u^{t_0,\infty}-\tilde u^\infty$. Wir behaupten, dass $\operatorname{osc}\tilde w(\cdot,t)=\varepsilon$ für beliebige $t\in\mathbb{R}$ gilt. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{osc}_\Omega\tilde w(\cdot,t)\\
={}&\operatorname*{osc}_\Omega\left(\tilde u^{t_0,\infty}(\cdot,t)-\tilde u^\infty(\cdot,t)\right)\\
={}&\sup_{x\in\Omega}\left(\tilde u^{t_0,\infty}(x,t)-\tilde u^\infty(x,t)\right)-\inf_{y\in\Omega}\left(\tilde u^{t_0,\infty}(y,t)-\tilde u^\infty(y,t)\right)\\
={}&\sup_{x\in\Omega}\lim_{k\to\infty}\{(u(x,t+t_0+t_k)-u(x_0,t_0+t_k))-(u(x,t+t_k)-u(x_0,t_k))\}\\
&-\inf_{y\in\Omega}\lim_{k\to\infty}\{(u(y,t+t_0+t_k)-u(x_0,t_0+t_k))-(u(y,t+t_k)-u(x_0,t_k))\}\\
={}&\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in\Omega}\{(u(x,t+t_0+t_k)-u(x_0,t_0+t_k))-(u(x,t+t_k)-u(x_0,t_k))\}\\
&-\lim_{k\to\infty}\inf_{y\in\Omega}\{(u(y,t+t_0+t_k)-u(x_0,t_0+t_k))-(u(y,t+t_k)-u(x_0,t_k))\},
\end{aligned}$$

da die Ausdrücke in den geschweiften Klammern für $k \to \infty$ gleichmäßig in x bzw. y konvergieren,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} \Big\{ \sup_{x\in\Omega} (u(x, t+t_0+t_k) - u(x, t+t_k)) - u(x_0, t_0+t_k) + u(x_0, t_k) \\
&\qquad - \inf_{x\in\Omega} (u(y, t+t_0+t_k) - u(y, t+t_k)) + u(x_0, t_0+t_k) - u(x_0, t_k) \Big\} \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big\{ \sup_{x\in\Omega} (u(x, t+t_0+t_k) - u(x, t+t_k)) \\
&\qquad - \inf_{x\in\Omega} (u(y, t+t_0+t_k) - u(y, t+t_k)) \Big\} \\
&= \lim_{k\to\infty} \operatorname*{osc}_{\Omega} w(\cdot, t+t_k) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dies ist ein Widerspruch. Ist nämlich w nicht konstant, so ist $\sup\limits_{\Omega} w(\cdot, t)$ strikt fallend und $\inf\limits_{\Omega} w(\cdot, t)$ strikt wachsend. Somit folgt $\operatorname*{osc}\limits_{\Omega} w(\cdot, t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(iv) **Existenz einer diskret translatierenden Lösung:** Es gilt für beliebige $x \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
\inf_{\Omega} w(\cdot, t) &\le u(x, t+t_0) - u(x, t) \\
&= w(x, t) \\
&\le \sup_{\Omega} w(\cdot, t) \\
&= \underbrace{\operatorname*{osc}_{\Omega} w(\cdot, t)}_{\to 0,\, t\to\infty} + \inf_{\Omega} w(\cdot, t)
\end{aligned}
$$

Definiere

$$V_0 := \frac{1}{t_0} \lim_{t\to\infty} \inf_{\Omega} w(\cdot, t) = \frac{1}{t_0} \lim_{t\to\infty} \sup_{\Omega} w(\cdot, t).$$

Somit erhalten wir für $t \to \infty$

$$w(\cdot, t) = u(\cdot, t+t_0) - u(\cdot, t) \to t_0 \cdot V_0 \quad \text{in } C^0(\Omega).$$

(Das folgende Argument wiederholt nur die bereits oben hergeleitete Konvergenz $u(x, t+t_k) - u(x_0, t_k) \to \tilde{u}^\infty(x, t)$ mit der Bezeichnung $u^0(x, t)$ für den Grenzwert:) Sei nun $(t_k)_k$ eine beliebige Folge mit $t_k \to \infty$. Betrachte für festes $x_0 \in \Omega$ die Funktionen

$$\overline{\Omega} \times [-t_k, \infty) \ni (x, t) \mapsto u(x, t+t_k) - u(x_0, t_k).$$

Wie eben erhalten wir lokal in $\overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ in jeder C^l-Norm in k gleichmäßige a priori Abschätzungen. Nach Arzelà-Ascoli erhalten wir eine wieder mit $(t_k)_k$ bezeichnete Teilfolge von $(t_k)_k$, so dass diese Funktionen lokal in $\overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ in jedem Raum C^l gegen eine glatte Funktion $u^0 \colon \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ konvergieren:

$$u(x, t+t_k) - u(x_0, t_k) \to u^0(x, t).$$

Aufgrund der glatten Konvergenz löst u^0 dieselbe Differentialgleichung (inclusive Randbedingung) wie u. Es gilt für beliebige $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} u^0(x,t+t_0) - u^0(x,t) = &\lim_{k\to\infty} (u(x,t+t_0+t_k) - u(x_0,t_k)) \\ &- \lim_{k\to\infty} (u(x,t+t_k) - u(x_0,t_k)) \\ = &\lim_{k\to\infty} (u(x,t+t_0+t_k) - u(x,t+t_k) \\ &+ u(x_0,t_k) - u(x_0,t_k)) \\ = &\lim_{k\to\infty} (u(x,t+t_0+t_k) - u(x,t+t_k)) \\ = &\lim_{t\to\infty} (u(x,t+t_0) - u(x,t)) \\ = &\, t_0 \cdot V_0. \end{aligned}$$

Somit ist u^0 eine „diskret translatierende Lösung“.

(v) **Existenz einer translatierenden Lösung:** Wir haben bisher aus (u, t_0) eine diskret translatierende Lösung u^0 konstruiert. Sei nun $t_1 > 0$. Wir werden später t_0 und t_1 als inkommensurable Zahlen wählen, z. B. $t_0 = 1$ und $t_1 = \sqrt{2}$. Wie aus (u, t_0) erhalten wir, ausgehend von (u^0, t_1), eine glatte diskret translatierende Lösung $u^1 \colon \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, d. h. es gibt $V_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$u^1(x, t+t_1) = u^1(x,t) + t_1 V_1$$

für alle $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$. Diese Konstruktion ist ein klein wenig einfacher, da u^0 bereits auf $\overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ definiert ist. Die Eigenschaft, bezüglich t_0 diskret translatierend zu sein, geht bei der Konstruktion nicht verloren. Somit erhalten wir per Induktion

$$u^1(x, t+kt_i) = u^1(x,t) + kt_iV_i$$

für $i = 0, 1$, alle $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir behaupten, dass $V_0 = V_1$ gilt. Sei dazu $\delta > 0$ klein und $T > 0$ groß. Dann gibt es $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_0t_0, n_1t_1 \geq T$ und $|n_0t_0 - n_1t_1| \leq \delta$. Es folgt für beliebige $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} \delta \cdot \sup |\dot{u}| \geq &\left| u^1(x, t+n_0t_0) - u^1(x, t+n_1t_1) \right| \\ = &\left| u^1(x,t) + n_0t_0V_0 - u^1(x,t) - n_1t_1V_1 \right| \\ = &\, |n_0t_0V_0 - n_1t_1V_1| \\ = &\, |n_0t_0V_0 - n_0t_0V_1 + n_0t_0V_1 - n_1t_1V_1| \\ \geq &\, n_0t_0 \cdot |V_0 - V_1| - |n_0t_0 - n_1t_1| \cdot |V_1| \\ \geq &\, |V_0 - V_1| \cdot T - \delta \cdot |V_1|. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung kann für $T \to \infty$ nur richtig sein, falls $V_0 = V_1$ gilt. Definiere $V := V_0 \equiv V_1$. Wir erhalten also für $k, l \in \mathbb{Z}$ und $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty)$

$$u^1(x, t+kt_0+lt_1) = u^1(x,t) + (kt_0 + lt_1) \cdot V.$$

Wir behaupten, dass $u^1 \colon \overline{\Omega} \times (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ eine mit Geschwindigkeit V translatierende Lösung der Differentialgleichung ist. Sie dazu $\tau \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei $((k_i, l_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Folge mit $k_it_0 + l_it_1 \to \tau$ für $i \to \infty$. Dann erhalten wir aus der Stetigkeit von u^1 durch Grenzübergang in der letzten Gleichung

$$u^1(x, t+\tau) = u^1(x, t) + \tau V.$$

Somit ist u^1 eine glatte translatierende Lösung.

(vi) **Eindeutigkeit der translatierenden Lösung:** Seien U, $\tilde{U}$ translatierende Lösungen mit Geschwindigkeiten V bzw. $\tilde{V}$. Sei $c > 0$, so dass

$$\tilde{U}(x, 0) - c \le U(x, 0) \le \tilde{U}(x, 0) + c$$

für alle $x \in \Omega$ gilt. Dann gilt eine entsprechende Ungleichung aufgrund des Maximumprinzips auch für alle $t > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x,t) - c \le{}& U(x,t) \le \tilde{U}(x,t) + c, \\ \tilde{U}(x,0) + t\tilde{V} - c \le{}& U(x,0) + tV \le \tilde{U}(x,0) + t\tilde{V} + c, \\ \tilde{U}(x,0) - U(x,0) - c \le{}& t \cdot \left(V - \tilde{V}\right) \le \tilde{U}(x,0) - U(x,0) + c, \\ t \cdot \left|V - \tilde{V}\right| \le{}& \left\|\tilde{U}(\cdot, 0)\right\|_{L^\infty} + \|U(\cdot,0)\|_{L^\infty} + c. \end{aligned}$$

Mit $t \to \infty$ folgt $V = \tilde{V}$.

Fixiere nun $t \in \mathbb{R}$ und definiere für $x \in \overline{\Omega}$

$$w(x) := U(x,t) - \tilde{U}(x,t).$$

Dann erfüllt w eine elliptische Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} 0 = a^{ij} w_{ij} + b^i w_i & \text{in } \Omega, \\ 0 = \langle Dw, \nu \rangle & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Somit ist w aufgrund des strikten Maximumprinzips und des Hopfschen Randpunktlemmas konstant. Daher sind translatierende Lösungen bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

(vii) **Konvergenz gegen eine translatierende Lösung:** Sei U eine translatierende Lösung. Dann löst $w := u - U$ eine parabolische Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} \dot{w} = a^{ij} w_{ij} + b^i w_i & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ 0 = \langle Dw, \nu \rangle & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty). \end{cases}$$

In dieser Situation haben wir bereits gesehen, dass

$$t \mapsto \sup_\Omega w(\cdot, t)$$

monoton fallend,

$$t \mapsto \inf_\Omega w(\cdot, t)$$

monoton wachsen ist und dass

$$\operatorname*{osc}_\Omega w(\cdot, t) \to 0$$

gilt. Somit konvergiert

$$u(\cdot, t) - U(\cdot, t) = w(\cdot, t) \to \lim_{t\to\infty} \inf_\Omega w(\cdot, t) = \lim_{t\to\infty} \sup_\Omega w(\cdot, t)$$

für $t \to \infty$ in $C^0(\Omega)$. Wir definieren

$$h := \lim_{t\to\infty} \sup_\Omega w(\cdot, t)$$

und erhalten
$$\|u(\cdot,t)-U(\cdot,t)-h\|_{C^0(\Omega)}\to 0$$
für $t\to\infty$.

(viii) **Glatte Konvergenz gegen eine translatierende Lösung:** Dies folgt direkt aus Lemma D.4. Dies liefert die Konvergenz der räumlichen Ableitungen. Da sich die Zeitableitungen und kombinierte räumliche und zeitliche Ableitungen mit Hilfe der differenzierten Gleichung und räumlichen Ableitungen ausdrücken lassen, konvergieren auch diese. (Es stört nicht, dass wir statt $t\to\infty$ nur eine Folge $k\to\infty$ betrachten; man kann das Resultat nämlich auf eine Gegenbeispielfolge $u(\cdot,t_k)$ anwenden.)

Beachte: Statt Lemma D.4 kann man alternativ auch Arzelà-Ascoli und die Eindeutigkeit des Grenzwertes in C^0 benutzen.

(ix) **Exponentielle Konvergenzraten:** Dies folgt aus den Resultaten aus Kapitel D, speziell Lemma D.5. $\square$

Anhang A. Ergänzung: Analytizität harmonischer Funktionen

Theorem A.1 (Analytizität)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und $u:\Omega\to\mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist u in Ω analytisch.*

Beweis. Sei $x_0\in\Omega$. Wir werden nachweisen, dass die Taylorreihe von u in x_0 in einer Kugel um x_0 konvergiert. Definiere
$$r:=\frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$$
bzw. $r:=1$ falls $\Omega=\mathbb{R}^n$ und
$$M:=\frac{1}{\omega_n r^n}\|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))}.$$
Da $u\in C^\infty(\Omega)$ ist, erhalten wir $M<\infty$.

Abschätzungen für Ableitungen: Wir kombinieren
$$|D^\alpha u(x)|\le\frac{\left(2^{n+1}n|\alpha|\right)^{|\alpha|}}{\omega_n}\frac{1}{r^{n+|\alpha|}}\|u\|_{L^1(B_r(x))}$$
und $B_r(x)\subset B_{2r}(x_0)\subset\Omega$ für $x\in B_r(x_0)$ und erhalten
$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}\le M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}\cdot|\alpha|^{|\alpha|}.$$
Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{k!}k^k\le e^k$ oder äquivalent dazu $k^k\le e^k k!$. Also ist $|\alpha|^{|\alpha|}\le e^{|\alpha|}|\alpha|!$. Das Multinomialtheorem liefert für $|\alpha|=k$
$$n^k=(1+\ldots+1)^k=\sum_{|\beta|=k}\frac{|\beta|!}{\beta!}\ge\frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$
Also ist $|\alpha|!\le n^{|\alpha|}\alpha!$. Wir erhalten
$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}\le M\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!.$$

Potenzreihe: Wir behaupten, dass (zumindest) für $|x-x_0|<\frac{r}{2^{n+2}n^3e}$ die Taylorreihe

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

gegen u konvergiert. Dazu betrachten wir die Restglieddarstellung

$$\begin{aligned} R_N(x) &:= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \end{aligned}$$

für ein $t\in[0,1]$. Dies erhält man durch Betrachtung der Funktion $g(t) := u(x+t(x-x_0))$, Entwicklung für $t=0$ und Auswertung bei $t=1$. Die obigen Abschätzungen für die Ableitungen von u liefern

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\le M \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3e}\right)^N \\ &= M \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{1}{2n}\right)^N \le Mn^N \left(\frac{1}{2n}\right)^N = \frac{M}{2^N} \\ &\to 0 \quad \text{für } N\to\infty. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Abschätzung $\sum\limits_{|\alpha|=N} 1 \le n^N$ erhält man wie folgt; Analogie: N Kugeln sind auf n Körbe zu verteilen; für jede Kugel hat man n Möglichkeiten, also insgesamt höchstens $n\cdots n = n^N$ Möglichkeiten. □

Anhang B. Hölderräume

Die im folgenden definierten Räume $C^\cdot\left(\overline{\Omega}\right)$ und $C^{\cdot,\cdot}\left(\overline{\Omega}\right)$ sind Banachräume.

Definition B.1 (Hölderräume)**.** Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $u:\Omega\to\mathbb{R}$. Es ist

(i) $u\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, falls u sich stetig bis zum Rand fortsetzen läßt und

$$\|u\|_{C^0(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega}|u| < \infty.$$

(ii) $u\in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, falls $D^\alpha u\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ für alle $|\alpha|\le k$ und

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u| < \infty.$$

(iii) $u\in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0\le\alpha\le1$, falls $u\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^0(\Omega)} + \sup_{x\ne y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \equiv \|u\|_{C^0(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(iv) $u\in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, $0\le\alpha\le1$, falls $u\in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ und

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k}[D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(v) $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega'}\right)$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist kein Banachraum.

Für $0 < \alpha < 1$ heißen die Räume $C^{k,\alpha}$ Hölderräume. $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$ heißt Höldernorm, $[\cdot]_{C^{0,\alpha}}$ heißt Hölderhalbnorm.

Beispiel B.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega = (-1, 1)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist $u(x) := |x|^\alpha$ hölderstetig. Es ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Anhang C. Zerlegung der Eins

Definition C.1.

(i) Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ mit $U_i \subset \mathbb{R}^n$ heißt Überdeckung einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, falls $\Omega \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ gilt.

(ii) Seien $(U_i)_{i\in I}$ und $(V_j)_{j\in J}$ Überdeckungen. Dann heißt $(V_j)_{j\in J}$ Verfeinerung von $(U_i)_{i\in I}$, falls es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ gibt, so dass $V_j \subset U_i$ ist.

(iii) Sei $(U_i)_{i\in I}$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$, eine Überdeckung. Dann heißt die Überdeckung lokal endlich, wenn es für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B_r(x) \cap U_i \neq \emptyset$$

nur für höchstens endlich viele $i \in I$ gilt.

Bemerkung C.2.

(i) In diesem Kapitel werden wir nur Überdeckungen durch offene Mengen betrachen ohne die Offenheit jeweils neu zu fordern.

(ii) Wie beschränken uns hier in der Darstellung auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Auch in parakompakten Räumen (in denen nach Definition offene Überdeckungen lokal endliche Verfeinerungen besitzen) gibt es Zerlegungen der Eins. Mannigfaltigkeiten sind parakompakte Räume.

(iii) Da wir hier nur Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ betrachten, konstruieren wir stets glatte Zerlegungen der Eins.

Lemma C.3. *Es gibt $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le u$, $u > 0$ in $\overline{B_1(0)}$ und* $\operatorname{supp} u \Subset B_2(0)$.

Beweisskizze. Definiere

$$u(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{2-|x|^2}}, & |x| < \sqrt{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Per Induktion sieht man, dass alle partiellen Ableitungen von u in $B_{\sqrt{2}}(0)$ von der Form $\frac{P(x^1,\ldots,x^n)}{(2-|x|^2)^k} u(x)$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ und eine Polynom P sind. Daher ist $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Die anderen Behauptungen sind klar. □

Lemma C.4. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es Folgen $x_k \in \mathbb{R}^n$ und $r_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, so dass $(B_{r_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_{2r_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete lokal endliche Verfeinerungen und Überdeckungen des $\mathbb{R}^n$ sind.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da die Mengen U_i den gesamten $\mathbb{R}^n$ überdecken und offen sind, gibt es ein $r = r(x) > 0$ mit $r(x) \le 1$ und ein $i \in I$, so dass $B_{2r(x)}(x) \subset U_i$ ist. Alle diese Bälle überdecken den $\mathbb{R}^n$.

Definiere für $k \in \mathbb{N}$ die Annuli $A_k := \overline{B_k(0)} \setminus B_{k-1}(0)$. Diese sind kompakt. Somit gibt es für jedes k endlich viele Bälle $B_{r(x)}(x)$, die A_k überdecken. Die Folge aller hier ausgewählten Punkte x_l und Radien r_l leistet das Gewünschte. $\square$

Definition C.5 (Zerlegung der Eins)**.** Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $A \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Eine Zerlegung der Eins (zur Menge A) ist eine Familie $(\eta_j)_{j\in J}$ von Funktionen $\eta_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \eta_j$ für alle $j \in J$ und
$$\sum_{j\in J} \eta_j(x) = 1$$
für alle $x \in A$.

(ii) Eine Zerlegung der Eins $(\eta_j)_{j\in J}$ heißt glatt, falls $\eta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $j \in J$ gilt.

(iii) Eine Zerlegung der Eins $(\eta_j)_{j\in J}$ heißt der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnet, wenn es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ gibt, so dass $\operatorname{supp} \eta_j \subset U_i$ ist.

Theorem C.6. *Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des $\mathbb{R}^n$, d. h. eine Überdeckung durch offene Mengen. Dann gibt es eine glatte, der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.*

Beweis. Sei $B_{r_k}(x_k)$ eine Folge von Bällen wie in Lemma C.4. Wir definieren C_c^∞-Funktionen
$$\tilde\eta_k(x) := u\left(\frac{x - x_k}{r_k}\right),$$
wobei u wie in Lemma C.3 ist. Nach Konstruktion gibt es zu jedem $k \in N$ ein (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmtes) $i \in I$, so dass $\operatorname{supp} \tilde\eta_k(x) \subset U_i$ ist. Für festes $i \in I$ summieren wir alle diese Funktionen $\tilde\eta_k$ auf und erhalten Funktionen $\hat\eta_i$. Aufgrund der lokalen Endlichkeit der Überdeckung sind diese Summen glatt und erfüllen alle geforderten Eigenschaften bis auf die Normierung. Daher definieren wir
$$\eta_i(x) := \frac{\hat\eta_i(x)}{\sum\limits_{i\in I} \hat\eta_i(x)}$$
und erhalten $\sum\limits_{i\in I} \eta_i \equiv 1$ in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Korollar C.7. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert eine der Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins zur Menge A.*

Beweis. Setze $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann überdecken U_0 und $(U_i)_{i\in I}$ den gesamten $\mathbb{R}^n$. Seien η_0 und $(\eta_i)_{i\in I}$ die in Theorem C.6 zu dieser Überdeckung konstruierten Funktionen. Dann bilden $(\eta_i)_{i\in I}$ die geforderte Zerlegung der Eins zur Menge A. $\square$

Anhang D. Interpolationsungleichungen

Eindimensional erhalten wir das folgende Resultat.

Lemma D.1. *Sei $u \in C^2$ auf $[0,\infty)$ oder $\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\|Du\|_{L^\infty}^2 \le 32 \cdot \|u\|_{L^\infty} \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty},$$

falls auf der rechten Seite nicht $0 \cdot \infty$ steht.

Beweis. Wir führen den Beweis in dem Fall, dass sämtliche Normen endlich sind und überlassen den Rest als Übung.

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $Du(0) \ge \frac{1}{2}\|Du\|_{L^\infty} \equiv \frac{1}{2}M$ gilt. Damit erhalten wir für alle x mit $0 \le x \le \frac{M}{4\cdot\|D^2u\|_{L^\infty}}$ die Abschätzung

$$Du(x) = Du(0) - \int\limits_0^x D^2u(t)\,dt \ge \frac{1}{2}M - \frac{M \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty}}{4 \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty}} = \frac{1}{4}M.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot \|u\|_{L^\infty} \ge \left| u\left(\frac{M}{4 \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty}}\right) - u(0)\right| &\ge \inf_{0 \le t \le \frac{M}{4\cdot\|D^2u\|_{L^\infty}}} Du \cdot \frac{M}{4 \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty}} \\ &\ge \frac{M}{4} \cdot \frac{M}{4 \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty}}. \end{aligned}$$

Umordnen liefert die Behauptung. □

Dies gilt mit denselben Konstanten auch höherdimensional. Man schränkt die betrachtete Funktion u einfach auf eine Gerade im Definitionsgebiet ein.

Schränkt man die Funktion u auf eine gekrümmte Kurve ein, so erhält man eine Interpolationsungleichung für beschränkte Gebiete.

Theorem D.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen beschränkt und mit C^2-Rand. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Dann gilt*

$$\|Du\|_{L^\infty}^2 \le c(\Omega) \cdot \|u\|_{L^\infty} \cdot \left(\left\|D^2u\right\|_{L^\infty} + \|Du\|_{L^\infty}\right).$$

Beweisskizze. Zu jedem Punkt $x \in \Omega$ und jedem Vektor $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ gibt es eine Kurve $\gamma\colon [0,\infty) \to \Omega$ mit $|\gamma'(t)| \le 1$, $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) \in \{\pm\xi\}$, so dass $\|\gamma''\|_{L^\infty} \le c(\Omega)$ gilt. Ab hier handelt es nun um einen normalen Beweis.

Nach Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} (u \circ \gamma)'(t) &= Du(\gamma(t))\langle\gamma'(t)\rangle, \\ (u \circ \gamma)''(t) &= D^2u(\gamma(t))\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle + Du(\gamma(t))\langle\gamma''(t)\rangle, \\ |(u \circ \gamma)'(t)| &\le |Du(\gamma(t))|, \\ |(u \circ \gamma)''(t)| &\le \left|D^2u(\gamma(t))\right| + c(\Omega) \cdot |Du(\gamma(t))|. \end{aligned}$$

Wir wenden nun Lemma D.1 auf die Funktion $u \circ \gamma$ an, wobei wir γ so wählen, dass $|(u \circ \gamma)'(0)| \ge \frac{1}{2} \sup\limits_\Omega |Du|$ ist. Die Behauptung folgt. □

Hieraus können wir eine additive Variante der Interpolationsungleichung erhalten.

Lemma D.3. *Unter den Voraussetzungen von Theorem D.2 gilt*

$$\|u\|_{C^1(\Omega)} \le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^2(\Omega)} + \frac{c(\Omega)}{\varepsilon}\|u\|_{C^0(\Omega)}.$$

Beweis. Wende die skalierte Youngsche Ungleichung auf

$$\|u\|_{C^1} \le c(\Omega) \cdot \sqrt{\|u\|_{C^0}} \cdot \sqrt{\|u\|_{C^2}}$$

an. □

Gilt eine additive Interpolationsungleichung und die Vorfaktoren lauten ε und $\frac{c}{\varepsilon}$, so folgt hieraus auch eine multiplikative Form: Wähle $\varepsilon = \frac{\sqrt{\|u\|_{C^0}}}{\sqrt{\|u\|_{C^2}}}$.

Das folgende Lemma zeigt, dass aus C^0-Konvergenz und gleichmäßigen Schranken bereits glatte Konvergenz folgt.

Lemma D.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^2-Rand. Sei $u_k\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge glatter Funktionen mit*

$$\|u_k\|_{C^0(\Omega)} \to 0$$

für $k \to \infty$ und $\|u_k\|_{C^l(\Omega)} \le c_l$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\|u_k\|_{C^l(\Omega)} \to 0$$

für $k \to \infty$ und beliebige $l \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir benutzen Interpolationsungleichungen der Form

$$\|Du\|^2_{C^0(\Omega)} \le c(\Omega) \cdot \|u\|_{C^0(\Omega)} \cdot \left(\left\|D^2u\right\|_{C^0(\Omega)} + \|Du\|_{C^0(\Omega)}\right).$$

Wenden wir dies mit u_k an, so folgt

$$\|Du_k\|^2_{C^0(\Omega)} \le c(\Omega) \cdot \underbrace{\|u_k\|_{C^0(\Omega)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\left\|D^2u_k\right\|_{C^0(\Omega)} + \|Du\|_{C^0(\Omega)}\right)}_{\le c_2}.$$

Somit gilt $\|Du_k\|_{C^0(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$, also $\|u_k\|_{C^1(\Omega)} \to 0$. Nun wenden wir die Interpolationsungleichung auf $\frac{\partial}{\partial x^i}u_k$, $1 \le i \le n$, an und erhalten $\|u_k\|_{C^2(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$. Per Induktion folgt die Behauptung. □

Häufig ist bekannt, dass der Abfall in C^0 exponentiell ist. In dieser Situation können wir auch den Abfall der höheren Ableitungen angeben.

Lemma D.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^2-Rand. Sei $u\colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt mit*

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^0(\Omega)} \le c_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

und $\|u(\cdot,t)\|_{C^l(\Omega)} \le c_l$ für alle t. Dann gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c > 0$, die nur von l, ε, c_0, c_1, …, c_{k_0} abhängt (mit von l und $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ abhängigen k_0), so dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^l(\Omega)} \le c \cdot e^{-(\lambda-\varepsilon)t}$$

gilt.

Beweis. Wir wenden wiederholt Interpolationsungleichungen an und erhalten damit

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{C^1(\Omega)} &\le c(\Omega)\cdot\underbrace{\|u(\cdot,t)\|^{\frac12}_{C^0(\Omega)}}_{\le\sqrt{c_0\cdot e^{-\lambda t}}}\cdot\|u(\cdot,t)\|^{\frac12}_{C^2(\Omega)}\le c\cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t},\\ \|u(\cdot,t)\|_{C^2(\Omega)} &\le c\cdot e^{-\frac{\lambda}{4}t},\ldots.\end{aligned}$$

Dabei haben wir auf die linke Seite nicht nur die erste oder zweite Ableitung geschrieben sondern die volle Norm, weil dies die Notation vereinfacht und die niedrigeren Ableitungen ohnehin mit besseren Raten abfallen.

Sei $0\le a_i^k\le 1$, $i,k\in\mathbb{N}$ für festes $i\in\mathbb{N}$ eine Folge von Zahlen, so dass wir auf diese Weise Abschätzungen der Form

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^i(\Omega)}\le c(k)\cdot e^{-a_i^k\lambda t}$$

zeigen können. Ohne Einschränkung können wir die Folge a_i^k in k monoton wachsend wählen. Definiere $a_i:=\lim\limits_{k\to\infty}a_i^k$. Wir behaupten, dass für $i\ge 1$ stets

$$a_i\ge\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$$

gilt, falls wir die Interpolationsungleichungen oben so angewandt haben, dass die Zahlen a_i^k im Limes $k\to\infty$ möglichst groß werden: Wäre nämlich $a_i<\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$ für ein i, so gäbe es ein k mit $a_i<\frac{a_{i-1}^k+a_{i+1}^k}{2}$. Mit Interpolation erhalten wir jedoch

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^i(\Omega)}\le c\cdot\sqrt{e^{-a_{i-1}^k\lambda t}}\cdot\sqrt{e^{-a_{i+1}^k\lambda t}}=c\cdot e^{-\frac{a_{i-1}^k+a_{i+1}^k}{2}\lambda t}.$$

Somit könnten wir $a_i^{k+1}>a_i$ bekommen und wir hätten die Interpolationsungleichungen nicht optimal angewandt.

Es gilt $a_0=1$. Wäre $a_1<1$, so folgt aus $a_1\ge\frac{a_0+a_2}{2}$ durch direktes Umformen die Ungleichung $a_1-a_2\ge a_0-a_1>0$. Ebenso erhalten wir

$$0<a_0-a_1\le a_1-a_2\le a_2-a_3\le a_3-a_4\le\ldots.$$

Setze $\delta:=a_0-a_1>0$. Dann folgt per Induktion $a_0-a_1=\delta$, $1\ge a_0-a_2=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)\ge 2\delta$, $\ldots$, $1\ge a_0-a_k\ge k\cdot\delta$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Dies ist für $k\to\infty$ unmöglich. Somit gilt $a_i=1$ für alle i. Da wir bereits nach endlich vielen Interpolationen erreichen können, dass a_i^k näher als eine vorgegebene Konstante an 1 ist, folgt die Behauptung. □

Anhang E. Differenzenquotienten

Definition E.1. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x\in\Omega'\Subset\Omega$, $1\le i\le n$ und $h\neq 0$. Sei $0<|h|<\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ und $u:\Omega\to\mathbb{R}$. Definiere den i-ten Differenzenquotienten der Göße h durch

$$\begin{aligned}D_i^h u(x)&:=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h},\\ D^h u&:=\left(D_1^h u,\,\ldots,\,D_n^h u\right).\end{aligned}$$

Theorem E.2 (Differenzenquotienten und schwache Ableitungen).

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\Omega' \Subset \Omega$ gibt es ein $c = c(\Omega, \Omega', n, p) > 0$, so dass

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(ii) Sei $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gibt es $c > 0$ und $\Omega' \Subset \Omega$ mit

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$$

für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, so gilt $u \in W^{1,p}(\Omega')$ und

$$\|Du\|_{L^p(\Omega')} \le c.$$

Beweis.

(i) Sei $1 \le p < \infty$ und sei u glatt. Sei $x \in \Omega'$, $1 \le i \le n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Es gilt

$$u(x + he_i) - u(x) = \int\limits_0^1 u_i(x + the_i) h \, dt$$

$$|u(x + he_i) - u(x)| \le |h| \cdot \int\limits_0^1 |Du(x + the_i)| \, dt$$

und aufgrund der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega'} \left|D^h u\right|^p &\le c \sum_i \int\limits_{\Omega'} \int\limits_0^1 |Du(x + the_i)|^p \, dt \, dx \\ &= c \sum_i \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |Du(x + the_i)|^p \, dx \, dt \le c \int\limits_{\Omega} |Du|^p. \end{aligned}$$

Da Ω' von $\partial\Omega$ mindestens Abstand $2|h|$ hat, folgt die Behauptung durch Approximation.

(ii) Gelte $\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$ eine Testfunktion. Dann gilt die folgende "partielle Integrationsformel", falls $|h| \le c(\varphi)$ klein genug ist

$$\int\limits_{\Omega'} u(x) \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h} dx = - \int\limits_{\Omega'} \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h} \varphi(x) \, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega'} u \left(D_i^h \varphi\right) = - \int\limits_{\Omega} \left(D_i^{-h} u\right) \varphi.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\sup_h \left\|D_i^{-h} u\right\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$

Daher existiert $v_i \in L^p(\Omega')$ und eine Folge $h_k \to 0$, so dass

$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \quad \text{in } L^p(\Omega').$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} u\varphi_i = \int\limits_{\Omega} u\varphi_i = \lim_{h_k\to 0}\int\limits_{\Omega} u\cdot D_i^{h_k}\varphi = \lim_{h_k\to 0} -\int\limits_{\Omega} D_i^{-h_k}u\varphi\\ = \lim_{h_k\to 0} -\int\limits_{\Omega'} D_i^{-h_k}u\varphi = -\int\limits_{\Omega'} v_i\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $v_i = u_i$ im schwachen Sinne. Wegen der schwachen Konvergenz ist $v_i \in L^p(\Omega')$ und wir erhalten $Du \in L^p(\Omega')$. Da auch $u \in L^p(\Omega')$ ist, folgt $u \in W^{1,p}(\Omega')$. Die Normabschätzung folgt aus der Unterhalbstetigkeit der Norm. □

Literatur

1. Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
2. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
3. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, (Vorlesungsmitschrift).
4. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
6. Jürgen Jost, *Partial differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 214, Springer-Verlag, New York, 2002.
7. Gary M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
8. Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984, Corrected reprint of the 1967 original.
9. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
10. William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989.

Oliver C. Schnürer, Mathematik, Universität Konstanz