# PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN II

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu Partielle Differentialgleichungen II. Die Vorlesung beinhaltet zwei große Theorieblöcke und kleinere Resultate.



*Date*: 19. Oktober 2022.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25, 35K20.
*Key words and phrases.* $L^2$-Theorie, Schaudertheorie, Eigenwerte, Laplace, Maximumprinzip, Harnackungleichung.
Vielen Dank insbesondere an Daniel Bartl, Friederike Dittberner, Anja Grabow, Stefan Hölle, Felix Jachan, Lothar Sebastian Krapp, Wolfgang Maurer, Thilo Notz, David Palosch, Lena Reichle und Paul Stephan für zahlreiche Korrekturen und an Elisabeth Greiler für das Setzen einiger Abschnitte.

Inhaltsverzeichnis

## Einordnung

Einige wichtige Theorieblöcke im Bereich der linearen elliptischen und parabolischen partiellen Differentialgleichungen sind

- $L^2$- und $L^p$-Theorie,
- Schaudertheorie (auch für Operatoren in Divergenzform),
- De Giorgi-Nash-Moser (Moser Iteration und Regularitätstheorie von Ennio De Giorgi und John F. Nash Jr.) und
- Krylov-Safonov Abschätzungen.

Wir werden hier die elliptische $L^2$-Theorie und die elliptische Schaudertheorie kennen lernen.

Die zugehörigen Abschätzungen besagen üblicherweise, dass Lösungen der Differentialgleichungen zweimal mehr differenzierbar sind als die rechte Seite, falls dies auch für die Randwerte gilt. Es hängt von der betrachteten Gleichung ab, welche Theorie anwendbar ist. Häufiger sind mehrere davon nacheinander anzuwenden. Mit Hilfe dieser Theorien kann man Existenzresultate beweisen.

## 1. $L^2$-Theorie

1.1. **Variationeller Existenzbeweis.** In der Funktionalanalysis haben wir mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram die Existenz einer schwachen Lösung gezeigt. Hier führen wir noch einen alternativen Existenzbeweis.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}$ von

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

d. h. ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + f\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

(Vergleiche dies mit der Definition der schwachen Ableitung. Auch hier genügt es, die Gleichheit für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ zu fordern, da sie sonst durch Approximation folgt.)

Dazu wollen wir

$$I(u) := \int_\Omega \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

unter allen Funktionen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ minimieren.

Sei $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Minimiert man nun $I$ unter allen Funktionen $u$ mit $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so kann man auch noch eine Randbedingung $u = g$ erhalten.

**Lemma 1.1.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_k \rightharpoonup u$ eine schwach konvergente Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \ge \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

*Beweis.* Auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist (die Wurzel von) $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ eine zu $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega u^2$ äquivalente Norm und ist vom Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle$ induziert.

Sei $X$ ein Banachraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf $X$. Dann konvergiert eine Folge genau dann schwach bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$, wenn sie bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ schwach konvergiert: Da die Normen äquivalent sind, stimmen die stetigen Funktionale auf $X$ für beide Normen überein.

Die Behauptung folgt nun aus der Unterhalbstetigkeit der Norm bei schwacher Konvergenz. $\square$

Einfacher wäre es, wenn wenn $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ bezüglich der schwachen Topologie stetig wäre, denn dann gälte Gleichheit in

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \underset{\text{i. a.}}{\neq} \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Unterhalbstetigkeit des Funktionals genügt jedoch um einen Minimierer zu finden.

Sei nun $(u_k)_k$, $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$, eine Minimalfolge für $I(u)$, d. h. es gelte

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(u).$$

Im folgenden werden wir häufiger $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \ge \lambda \int\limits_\Omega u^2$ für ein $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ verwenden.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass das betrachtete Infimum endlich ist. Es gilt

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu \ge \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega u^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 \ge -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} > -\infty,$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Mit einer analogen Rechnung können wir die $W^{1,2}$-Norm der $u_k$'s gleichmäßig beschränken: Aufgrund der Minimalfolgeneigenschaft gilt

$$\begin{aligned} c &\geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int_\Omega fu_k \geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u_k^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ klein und bringen den $\int\limits_\Omega f^2$-Term auf die linke Seite. Die Behauptung folgt. Aufgrund der Äquivalenz der Normen mit und ohne $L^2$-Term auf $W_0^{1,2}$ ist auch $\int\limits_\Omega u_k^2$ gleichmäßig beschränkt.

Nach Banach-Alaoglu besitzt $u_k$ also eine Teilfolge (wir benennen nicht um), die in $W^{1,2}$ schwach gegen $u$ konvergiert. Nach Definition ist $W_0^{1,2}$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}$. Ein abgeschlossener Unterraum ist, wie man durch Testen mit einem Vektor aus dem orthogonalen Komplement sieht, auch unter schwacher Konvergenz abgeschlossen. Daher hat auch der Grenzwert $u$ wieder Randwerte Null. Da $W_0^{1,2} \Subset L^2$ ist, dürfen wir weiterhin annehmen, dass diese Folge in $L^2(\Omega)$ (schwach) gegen $u$ konvergiert. Somit ist

$$\begin{aligned} \inf_{w \in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w) &= \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int_\Omega fu_k\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int_\Omega fu \geq \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int_\Omega fu \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega fu = I(u) \geq \inf_{w \in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w) \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit. $u$ minimiert also $I$ in $W_0^{1,2}$ und die Euler-Lagrange-Gleichung besagt gerade, dass $u$ eine schwache Lösung ist: Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt} I(u+tv)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + 2t\langle\nabla u, \nabla v\rangle + |\nabla v|^2\right) + fu + tfv\right|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle + fv. \end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes bewiesen:

**Theorem 1.2.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2$. Dann gibt es ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, das das Funktional*

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

*minimiert und $u$ ist eine schwache Lösung von*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

1.2. **Regularität.**

**Bemerkung 1.3** (Motivation)**.** Gelte $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Sei $u$ glatt und falle im Unendlichen schnell genug ab. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 &= \sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{ii} u_{jj} = -\sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{iij} u_j \\ &= \sum_{i,j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{ij} u_{ij} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D^2 u\right|^2. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\|f\|_{L^2} = \left\|D^2 u\right\|_{L^2}.$$

Das Problem dabei ist, dass wir benutzt haben, dass $u \in C^3$ ist. Dies ist später durch Abschätzungen von Differenzenquotienten zu rechtfertigen. Durch Differenzieren der Gleichung und ähnliche Rechnungen kommt man auf Abschätzungen der Form

$$c \cdot \|Df\|_{L^2} \ge \left\|D^3 u\right\|_{L^2}$$

mit entsprechenden Verallgemeinerungen für höhere Ableitungen. Wenn man dies lange genug fortsetzt, besteht die Hoffnung, dass man mit Hilfe der Sobolevschen Einbettungssätze Abschätzungen für Ableitungen in $L^p$ für $p \gg 1$ und damit dann Hölderstetigkeit der Funktion $u$ beweisen kann. Dies funktioniert für glatte Daten.

Hier gilt die Faustregel, dass Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen zweimal häufiger differenzierbar sind als die rechte Seite.

1.3. **Generalvoraussetzungen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ in Divergenzform,

$$Lu = -\left(a^{ij} u_i\right)_j + b^i u_i + du,$$

mit

- gleichmäßig elliptischem (aber nicht notwendigerweise symmetrischem) $a^{ij}$,
- $a^{ij}$, $b^i$, $d \in L^\infty(\Omega)$.

1.4. **Innere $H^2$-Regularität.**

**Theorem 1.4** (Innere $H^2$-Regularität)**.** *Sei $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

*Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für alle offenen Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$ gilt*

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

*mit $c = c(\Omega', \Omega, L)$.*

*Beweis.*

(1) Wähle $\Omega'' \Subset \Omega$ offen, so dass
$$\Omega' \Subset \Omega'' \subset \Omega$$
ist und eine glatte Abschneidefunktion $\zeta$, so dass
$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } \Omega', \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega'', \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$

(2) Da $u$ eine schwache Lösung ist, folgt
$$\int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int\limits_\Omega \tilde{f} v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$
wobei $\tilde{f} := f - b^i u_i - du$.

(3) Sei $|h| > 0$ klein, $1 \le k \le n$. Wähle
$$v := -D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u\right).$$
Das Quadrat in der Abschneidefunktion ist später nützlich. Diese Wahl von $v$ ist durch den glatten Fall motiviert. Da aber nicht bekannt ist, dass zweite Ableitungen von $u$ in der Testfunktion erlaubt sind, ist diese Testfunktion mit Differenzenquotienten nötig.

Setze
$$A := \int\limits_\Omega a^{ij} u_i v_j,$$
$$B := \int\limits_\Omega \tilde{f} v.$$

(4) Abschätzungen für $A$:
$$\begin{aligned} A &= -\int\limits_\Omega a^{ij} u_i \left[D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right]_j \\ &= \int\limits_\Omega D_k^h \left(a^{ij} u_i\right) \left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j, \end{aligned}$$
da Ableitung und Differenzenquotientenbildung kommutieren und mit Hilfe "partieller Integration" für Differenzenquotienten
$$= \int\limits_\Omega a^{ij,h} \left(D_k^h u_i\right) \left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i \left(\zeta^2 D_k^h u\right)_j,$$
da mit $v^h(x) := v(x + he_k)$ die folgende "Produktregel" gilt:
$$D_k^h (vw) = v^h D_k^h w + w D_k^h v.$$

Weiter folgt

$$
\begin{aligned}
A = & \int\limits_{\Omega} a^{ij,h} \left(D_k^h u_i\right) \left(D_k^h u_j\right) \zeta^2 \\
& + \int\limits_{\Omega} a^{ij,h} \left(D_k^h u_i\right) \left(D_k^h u\right) 2\zeta\zeta_j + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i D_k^h u_j \zeta^2 + \left(D_k^h a^{ij}\right) u_i \left(D_k^h u\right) 2\zeta\zeta_j \\
\equiv & A_1 + A_2.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der gleichmäßigen Elliptizität folgt

$$A_1 \geq \vartheta \int\limits_{\Omega} \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2.$$

Nach Voraussetzung an die Koeffizienten folgt für $0 < \varepsilon \leq 1$, wobei wir $\varepsilon \leq 1$ ohne Einschränkung annehmen,

$$
\begin{aligned}
|A_2| \leq & c \cdot \int\limits_{\Omega} \zeta \left|D_k^h Du\right| \left|D_k^h u\right| + \zeta \left|D_k^h Du\right| |Du| + \zeta \left|D_k^h u\right| |Du| \\
\leq & \varepsilon \int\limits_{\Omega} \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 + |Du|^2 \text{ (Cauchy)}.
\end{aligned}
$$

Setze $\varepsilon = \frac{\vartheta}{2}$ und benutze, dass

$$\int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 \leq c \cdot \int\limits_{\Omega} |Du|^2$$

ist. Es folgt

$$|A_2| \leq \frac{\vartheta}{2} \int\limits_{\Omega} \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + c \cdot \int\limits_{\Omega} |Du|^2$$

und

$$A \geq \frac{\vartheta}{2} \int\limits_{\Omega} \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 - c \cdot \int\limits_{\Omega} |Du|^2.$$

(5) Abschätzungen für $B$: Wir nehmen weiterhin ohne Einschränkung $0 < \varepsilon \leq 1$ an. Zunächst einmal gilt nach Definition und Cauchyscher Ungleichung

$$|B| \leq \int\limits_{\Omega} \left|\tilde{f}\right| |v| \leq c \cdot \int\limits_{\Omega} (|f| + |Du| + |u|)|v| \leq \varepsilon \int\limits_{\Omega} v^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega} \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right).$$

Weiterhin erhalten wir nach Wahl von $v$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |v|^2 = & \int\limits_{\Omega} \left|D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \\
\leq & c \cdot \int\limits_{\Omega} \left|D \left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \\
\leq & c \cdot \int\limits_{\Omega''} \left|D_k^h u\right|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2
\end{aligned}
$$

$$\leq c \cdot \int_\Omega |Du|^2 + \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2.$$

Somit folgt

$$|B| \leq \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + \frac{c}{\varepsilon} \int_\Omega \left(f^2 + u^2\right) + \frac{c}{\varepsilon} \int_\Omega |Du|^2.$$

(6) Sei ohne Einschränkung $\vartheta \leq 1$. Wir wählen nun speziell $\varepsilon = \frac{\vartheta}{4}$ und erhalten mit Hilfe der letzten beiden Beweisteile

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta}{4} \int_{\Omega'} \left|D_k^h Du\right|^2 \leq & \frac{\vartheta}{4} \int_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 \\ \leq & c \cdot \int_\Omega \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right) \end{aligned}$$

für $1 \leq k \leq n$ und $|h| \neq 0$ genügend klein. Aufgrund der gleichmäßigen Schranken an die Differenzenquotienten folgt daher

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Durch Dazwischenschachteln einer weiteren Menge,

$$\Omega' \Subset \tilde{\Omega} \Subset \Omega,$$

erhalten wir

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|u\|_{H^1(\tilde{\Omega})}\right).$$

Bis auf die $H^1$-Norm von $u$ auf der rechten Seite statt der $L^2$-Norm ist dies gerade die gewünschte Ungleichung. Dies wollen wir im letzten Schritt noch korrigieren.

(Alternativ zu diesem letzten Schritt kann man auch benutzen, dass (bei genügend regulär gewählten Gebieten) insbesondere die erste der Einbettungen $H^2 \hookrightarrow H^1 \hookrightarrow L^2$ kompakt ist und wir somit eine Abschätzung der Form

$$\|w\|_{H^1} \leq \varepsilon \cdot \|w\|_{H^2} + c(\varepsilon) \cdot \|w\|_{L^2}$$

haben.)

(7) Sei $\zeta$ eine neue Abschneidefunktion mit

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{supp} \zeta \subset \Omega, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Es gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int_\Omega \left(f - b^i u_i - du\right) v.$$

Wir wählen speziell $v = \zeta^2 u$ und erhalten

$$\int_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int_\Omega a^{ij} u_i \left(\zeta^2 u\right)_j$$

$$= \int\limits_\Omega a^{ij}u_iu_j\zeta^2 + 2a^{ij}u_iu\zeta\zeta_j$$
$$\ge \vartheta \int\limits_\Omega \zeta^2|Du|^2 - \varepsilon\int\limits_\Omega \zeta^2|Du|^2 - \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_\Omega u^2.$$

Für die andere Seite erhalten wir

$$\int\limits_\Omega \left(f - b^iu_i - du\right)v = \int\limits_\Omega \left(f - b^iu_i - du\right)\zeta^2 u$$
$$\le \varepsilon\int\limits_\Omega \zeta^2|Du|^2 + c(\varepsilon)\cdot\int\limits_\Omega \left(u^2+f^2\right).$$

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ klein und erhalten

$$\frac{\vartheta}{2}\int\limits_\Omega \zeta^2|Du|^2 \le c\cdot\int\limits_\Omega \left(u^2+f^2\right).$$

Dies bauen wir in die Abschätzung aus dem letzten Abschnitt ein und bekommen die gewünschte Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \le c\cdot\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \qquad \square$$

**Bemerkung 1.5.** Ist $u \in H^2_{\text{loc}}$, so können wir partiell integrieren und erhalten

$$\int\limits_\Omega Lu\varphi = \int\limits_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Hieraus folgt nach Du Bois-Reymond $Lu = f$ fast überall in $\Omega$.

### 1.5. **Höhere Regularität.**

**Theorem 1.6** (Höhere innere Regularität)**.** *Sei* $0 < m \in \mathbb{N}$,

$$a^{ij},\ b^i,\ d \in C^{m+1}(\Omega),$$
$$f \in H^m(\Omega).$$

*Sei* $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

*Dann ist* $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ *und für alle* $\Omega' \Subset \Omega$ *gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \le c\cdot\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

*mit* $c = c(m, \Omega, \Omega', L)$.

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis. Theorem 1.4 ist dabei der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt "$m \to m+1$" dürfen wir annehmen, dass

$$a^{ij},\ b^i, d \in C^{m+2}(\Omega),$$
$$f \in H^{m+1}(\Omega)$$

gelten und $u \in H^1$ eine schwache Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega$$

ist. Nach Induktionsannahme ist dann auch $u \in H^{m+2}_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{H^{m+2}(\tilde{\Omega})} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

für alle $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$ mit $c = c\left(m, \tilde{\Omega}, \Omega, L\right)$. Wir fixieren nun

$$\Omega' \Subset \tilde{\Omega} \Subset \Omega.$$

Sei $\alpha$ ein Multiindex mit $|\alpha| = m+1$, $\tilde{v} \in C_c^\infty\left(\tilde{\Omega}\right)$ eine Testfunktion. Definiere

$$v := (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{v} \in C_c^\infty\left(\tilde{\Omega}\right).$$

Definiere $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$B[u,w] := \int\limits_\Omega a^{ij} u_i w_j + b^i u_i w + duw.$$

Wir erhalten

$$B[u,v] = \int\limits_\Omega fv.$$

Durch partielle Integration und Umordnen der Terme folgt

$$B[\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_\Omega \tilde{f}\tilde{v} \quad \text{mit} \quad \tilde{u} := D^\alpha u \in H^1\left(\tilde{\Omega}\right)$$

und

$$\tilde{f} := D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left\{ -\left(D^{\alpha-\beta} a^{ij} D^\beta u_i\right)_j + D^{\alpha-\beta} b^i D^\beta u_i + D^{\alpha-\beta} d D^\beta u \right\}.$$

Diese Darstellung folgt direkt aus der Leibnizformel

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v.$$

Somit ist $\tilde{u}$ eine schwache Lösung von

$$L\tilde{u} = \tilde{f} \text{ in } \tilde{\Omega}.$$

Nach Induktionsannahme und Definition von $\tilde{f}$ folgt $\tilde{f} \in L^2\left(\tilde{\Omega}\right)$ mit

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Nach Theorem 1.4 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega')} &\leq c \cdot \left(\left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\right) \\ &\leq c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Da nun aber $\tilde{u} = D^\alpha u$ mit $|\alpha| = m+1$ gilt, folgt

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

$\square$

**Theorem 1.7** (Schwache Lösungen sind bei glatten Daten glatt)**.** *Seien*

$$a^{ij},\, b^i,\, d \in C^\infty(\Omega),$$
$$f \in C^\infty(\Omega).$$

*Sei* $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

*Dann gilt*

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

*Beweis.* Benutze innere Abschätzungen und Einbettungssätze. □

**Bemerkung 1.8.** Am Rand kann $u$ aber trotzdem singulär werden.

1.6. **Randregularität.** Bei glatten Daten erhalten wir $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

**Theorem 1.9** ($H^2$-Regularität am Rand)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $\partial\Omega \in C^2$*. Seien* $a^{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$*,* $b^i$*,* $d \in L^\infty(\Omega)$ *und* $f \in L^2(\Omega)$*. Sei* $u \in H^1_0(\Omega)$ *eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

*so gilt* $u \in H^2(\Omega)$ *mit der Abschätzung*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

*wobei* $c = c(\Omega, L)$.

**Bemerkung 1.10.** Ist $u \in H^1_0$ die einzige Lösung des Randwertproblems, so gilt aufgrund der Abschätzungen an die Inverse sogar

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Der Operator kann aber einen nichttrivialen Kern in besitzen. Dann wird solch eine Abschätzung falsch.

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage für den Fall, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine Lösung besitzt. (Beachte, dass die Eindeutigkeit der Lösung unabhängig von $f$ und äquivalent zu $\ker L \neq \{0\}$ ist.) Wäre die Aussage falsch, so wäre $L^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$, $f \mapsto u$, nicht stetig. Es gäbe also Folgen $\left(\tilde{f}_k\right)_k$ und $(\tilde{u}_k)_k$ mit $\left\|\tilde{f}_k\right\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und $\|\tilde{u}_k\|_{H^2(\Omega)} \to \infty$, wobei $\tilde{u}_k \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ die Lösung von $L\tilde{u}_k = \tilde{f}_k$ ist. Wegen der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

(aus Theorem 1.9) folgt auch $\|\tilde{u}_k\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Nach Umnormierung erhalten wir Folgen $(u_k)_k$ und $(f_k)_k$ mit $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und $\|f_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Nach Theorem 1.9 folgt $\|u_k\|_{H^2(\Omega)} \le c$. Eine nicht umbenannte Teilfolge erfüllt $u_k \rightharpoonup u$ in $H^2(\Omega)$. Für diese Teilfolge erhalten wir nach Rellich $u_k \to u$ in $H^1_0(\Omega)$ und in $L^2(\Omega)$ mit einem $u \in H^2$. Es gilt $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Nun können wir aufgrund der $H^1$-Konvergenz in der schwachen Formulierung zum Grenzwert übergehen. Somit ist $u$ eine schwache Lösung von $Lu = 0$ mit $u \in H^1_0(\Omega)$. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des Randwertproblems folgt $u \equiv 0$. Dies widerspricht aber $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Die Stetigkeit von $L^{-1}$ ist genau die behauptete Abschätzung. □

*Beweis von Theorem 1.9.*

(1) Betrachte zunächst die aufgebogene Situation. Sei $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. (Auf kleineren Kugeln funktioniert die Abschätzung analog.) Definiere $V := B_{1/2}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. Sei $\varepsilon > 0$ klein und $\zeta$ eine glatte Abschneidefunktion, so dass
$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } B_{1/2}(0), \\ \zeta \equiv 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus B_{1-\varepsilon}(0), \\ 0 \le \zeta \le 1. \end{cases}$$
Dann ist $\zeta = 1$ auf der Menge $V$ und es gilt $\zeta = 0$ in einer Umgebung des nicht ebenen Teiles von $\partial\Omega$.

(2) Da $u$ eine schwache Lösung ist, folgt
$$B[u, v] = \int_\Omega fv$$
für alle $v \in H^1_0(\Omega)$. Wir definieren
$$\tilde{f} := f - b^i u_i - du$$
und erhalten
$$\int_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int_\Omega \tilde{f} v.$$

(3) Sei nun $|h| > 0$ klein. Definiere für $1 \le k \le n-1$
$$v := -D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right).$$
Für $x \in \Omega$ erhalten wir also
$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h}\left(\zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]\right) \\ &= \frac{1}{h^2}\left(\zeta^2(x - he_k)[u(x) - u(x - he_k)] - \zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]\right). \end{aligned}$$
Da $u$ und somit auch $\zeta^2 u$ durch Funktionen mit kompaktem Träger approximierbar ist, gilt $v = 0$ im Spursinn auf $\{x^n = 0\}$ und $\zeta \equiv 0$ in einer Umgebung des sphärischen Teiles von $\partial\Omega$. Daher ist $v \in H^1_0(\Omega)$. Somit ist $v$ eine zulässige Testfunktion und wir erhalten
$$A \equiv \int_\Omega a^{ij} u_i v_j = \int_\Omega \tilde{f} v \equiv B.$$

(4) Analog zum Beweis der inneren Regularität (Details: Übung) erhalten wir
$$A \ge \frac{\vartheta}{2} \int_\Omega \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 - c \int_\Omega |Du|^2,$$

$$|B| \le \frac{\vartheta}{4} \int\limits_{\Omega} \zeta^2 \left|D_k^h Du\right|^2 + c \int\limits_{\Omega} \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right),$$

$$\int\limits_{V} \left|D_k^h Du\right|^2 \le c \int\limits_{\Omega} \left(f^2 + u^2 + |Du|^2\right).$$

Daher erhalten wir wie beim Beweis der inneren Regularität

$$\sum_{\substack{k,l\\ k+l<2n}} \|u_{kl}\|_{L^2(V)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

(5) $u_{nn}$-Abschätzungen: Aus der Funktionalanalysis wissen wir: $u \in H^1(\Omega)$ und $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ impliziert $\zeta u \in H^1(\Omega)$. Als Übung lassen wir, sich zu überlegen, dass dies auch noch im Falle $\zeta \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt.

Aufgrund der inneren Abschätzungen gilt

$$Lu = f \text{ fast überall in } \Omega.$$

Da $a^{ij} \in C^1$ ist, können wir die Differentialgleichung in nicht-Divergenzform umschreiben als

$$-a^{ij} u_{ij} + \tilde{b}^i u_i + du = f$$

mit $\tilde{b}^i := b^i - a^{ij}_j$. Wir erhalten

$$a^{nn} u_{nn} = - \sum_{i+j<2n} a^{ij} u_{ij} + \tilde{b}^i u_i + du - f$$

ohne Summenkonvention auf der linken Seite. Wegen der gleichmäßigen Elliptizität ist $a^{nn} \ge \vartheta > 0$ und wir erhalten aufgrund der obigen Abschätzungen

$$|u_{nn}| \le c \cdot \left( \sum_{i+j<2n} |u_{ij}| + |Du| + |u| + |f| \right),$$

$$\|u\|_{H^2(V)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right),$$

$$\|u\|_{H^2(V)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei wir im letzten Schritt die $H^1$-Norm wie am Ende des Beweises von Theorem 1.4 insbesondere durch die $L^2$-Norm abgeschätzt haben. Es gilt $u \in H^2(V)$.

(6) Betrachte nun ein allgemeines Gebiet $\Omega$. Nach Umbenennen der Koordinaten gilt für $x_0 \in \partial\Omega$ für ein $r > 0$

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \left\{x \in B_r(x_0) : x^n > \omega\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right)\right\},$$

wobei $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine $C^2$-Funktion ist. Gelte ohne Einschränkung $x_0 = (0, \ldots, 0, x_0^n)$. Wir definieren nun die Aufbiegetransformation $\Phi$ durch

$$\begin{aligned} y^i &:= x^i \text{ für } i < n,\\ y^n &:= x^n - \omega\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right),\\ y &=: \Phi(x) \end{aligned}$$

und ihre Inverse $\Psi$ durch $x =: \Psi(y)$.

(7) Sei nun $s > 0$ so klein, dass
$$\Omega' := B_s(0) \cap \{y^n > 0\} \subset \Phi(\Omega \cap B_r(x_0))$$
ist. Definiere weiterhin
$$V' := B_{s/2}(0) \cap \{y^n > 0\}$$
und
$$u'(y) := u(\Psi(y)) \text{ für } y \in \Omega'.$$
Es gilt
$$u' \in H^1(\Omega')$$
und
$$u' = 0 \text{ auf } \partial\Omega' \cap \{y^n = 0\}.$$
Dies folgt aus den Spurabschätzungen für Sobolevfunktionen, da die Transformation die $H^1$-Norm glatter Funktionen auch höchstens um eine Konstante ändern kann. Die Gleichheit auf dem Rand gilt im Spursinne und folgt aufgrund der Normabschätzung für den Spuroperator und da $H^1_0 = \overline{C^\infty_c}^{H^1}$ ist.

(8) Wir behaupten, dass $u'$ eine schwache Lösung der Gleichung
$$L'u' = f' \text{ in } \Omega'$$
ist, wobei
$$\begin{aligned} f'(y) :=& f\,(\Psi(y)), \\ L'u' :=& -\left(a'^{kl}u'_k\right)_l + b'^k u'_k + d'u', \end{aligned}$$
mit Ableitungsindices bezüglich $y$
$$\begin{aligned} a'^{kl}(y) :=& a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_r(\Psi(y))\Phi^l_s(\Psi(y)), \\ b'^k(y) :=& b^r(\Psi(y))\Phi^k_r(\Psi(y)), \\ d'(y) :=& d(\Psi(y)). \end{aligned}$$
Ist $v' \in H^1_0(\Omega')$ und $B'[\cdot,\cdot]$ die zu $L'$ gehörige Bilinearform, so gilt
$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega'} a'^{kl}u'_k v'_l + b'^k u'_k v' + d'u'v'.$$
Definiere $v(x) := v'(\Phi(x))$. Wir erhalten
$$B'[u',v'] = \int\limits_{\Omega'} a'^{kl}u_i\Psi^i_k v_j\Psi^j_l + \int\limits_{\Omega'} b'^k u_i \Psi^i_k v + \int\limits_{\Omega'} d'uv.$$
Es gilt aufgrund der Kettenregel, auf $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ angewandt,
$$a'^{kl}\Psi^i_k\Psi^j_l = a^{rs}\Phi^k_r\Phi^l_s\Psi^i_k\Psi^j_l = a^{ij}.$$
Es gilt
$$u'_k = u_i\Psi^i_k.$$
Weiterhin folgt
$$b'^k\Psi^i_k = b^r\Phi^k_r\Psi^i_k = b^i.$$

Da $|\det D\Phi| = 1$ ist, folgt nach Variablentransformation

$$B'[u',v'] = \int_\Omega a^{ij}u_iv_j + b^iu_iv + duv = B[u,v] = \int_\Omega fv = \int_{\Omega'} f'v'.$$

Daher löst $u'$ in $\Omega'$ die Gleichung $L'u' = f'$ im schwachen Sinne.

(9) Da $\Phi$ ein Diffeomorphismus ist, können wir die Elliptizität der transformierten Gleichung wie folgt zeigen. Seien $y \in \Omega'$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$a'^{kl}(y)\xi_k\xi_l = a^{rs}(\Psi(y))\Phi^k_r\Phi^l_s\xi_k\xi_l \geq \vartheta \cdot \left|\Phi^k_\cdot\xi_k\right|^2 \geq \vartheta'|\xi|^2.$$

Da $\Phi$ und $\Psi \in C^2$ sind, ist auch $a'^{kl} \in C^1$.

(10) Wir können also die Resultate für den aufgebogenen Rand anwenden und erhalten

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq c \cdot \left(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}\right).$$

Durch Rücktransformation erhalten wir (unter Benutzung von $\partial\Omega \in C^2$) für $V := \Psi(V')$

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ein Überdeckungsargument für eine Randumgebung und innere Abschätzungen liefern nun die behauptete Ungleichung. □

**Theorem 1.11** (Höhere Randregularität). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Seien $m \in \mathbb{N}$,*

$$a^{ij},\, b^i,\, d \in C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right),$$
$$f \in H^m(\Omega).$$

*Sei $u \in H^1_0$ eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

*mit $c = c(m, \Omega, L)$.*

*Beweis.* Dies ist ein Induktionsbeweis wie beim Beweis der höheren inneren Regularität. Benutze hierzu die Randabschätzungen. □

**Bemerkung 1.12.** Wie in Bemerkung 1.10 können wir auch hier wieder die $L^2$-Norm weglassen, wenn die Lösung eindeutig bestimmt ist. Ist $m$ groß genug, hat man eine klassische Lösung und man kann $\|u\|_{L^2} \leq c \cdot \|u\|_{L^\infty}$ unter geeigneten Voraussetzungen auch mit Hilfe des klassischen Maximumprinzips beschränken.

**Theorem 1.13** (Glattheit bei glatten Daten). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$. Seien weiterhin*

$$a^{ij},\, b^i,\, d \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right).$$

*Sei* $u \in H_0^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{in } \Omega, \\ u = 0 & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Dann gilt* $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

*Beweis.* Es gilt $u \in H^m(\Omega)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wende nun die Einbettungssätze an. □

## 2. Schaudertheorie

Wir orientieren uns an [3], [4] und für die Stetigkeitsmethode an [6, Kapitel 10].

Juliusz Schauder (1899-1943) war polnischer Mathematiker.

Die hier hergeleiteten Potentialabschätzungen werden wir für die Schaudertheorie benötigen.

### 2.1. Grundlagen.

Wir benutzen wieder Hölderräume.

**Definition 2.1.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, $x_0 \in \Omega$ und $0 < \alpha < 1$. Die Funktion $f$ heisst im Punkt $x_0$ hölderstetig mit Exponent $\alpha$, falls

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{x_0 \neq x \in \Omega \cap B_\varepsilon(x_0)} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty$$

gilt. $f$ heisst in $\Omega$ hölderstetig, falls $f$ für alle $x \in \Omega$ hölderstetig ist, jeweils zum Exponenten $\alpha$. Wir schreiben $f \in C^\alpha(\Omega)$. Gilt die obige Abschätzung für $\alpha = 1$, so heisst $f$ lipschitzstetig in $x_0$. Wir definieren $C^{k,\alpha}(\Omega)$ als den Raum der Funktionen $f \in C^k(\Omega)$, deren $k$-te partielle Ableitungen hölderstetig zum Exponenten $\alpha$ sind.

Ist

$$\sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty,$$

so ist $f \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$. Wir definieren auf diesem Raum eine Halbnorm durch

$$[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Eine Norm erhalten wir durch

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}.$$

Sind die $k$-ten Ableitungen einer $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$-Funktion sogar in $C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, so definieren wir auf diesem Raum eine Norm durch

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta| = k} \left[D^\beta f\right]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}.$$

Es gilt $C^{0,\alpha} = C^\alpha$.

**Bemerkung 2.2.** Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend und $\partial\Omega$ Lipschitz, so gibt es für alle $x,\, y \in \Omega$ einen $C^1$-Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und Länge $L(\gamma) = \int\limits_0^1 |\gamma'(t)|\, dt \le c(\Omega) \cdot |x-y|$ (Übung). In diesem Falle (außer für $C^1 \hookrightarrow C^{0,1}$ gilt dies auch für allgemeine beschränkte offene Mengen $\Omega$) sind die folgenden Einbettungen stetig

$$C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^1\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Daher sind die folgenden beiden Normen auf $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ äquivalent

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta f\right]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

und

$$\begin{aligned} &\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|\le k} \left[D^\beta f\right]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \\ = &\sum_{|\beta|\le k} \|D^\beta f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Resultat

**Lemma 2.3.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f_1,\, f_2 \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, so ist $f_1 \cdot f_2 \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gilt*

$$[f_1 f_2]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le [f_1]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \sup_\Omega |f_2| + [f_2]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \sup_\Omega |f_1|.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus der folgenden Ungleichung

$$\frac{|f_1(x)f_2(x) - f_1(y)f_2(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \frac{|f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^\alpha}|f_2(x)| + \frac{|f_2(x) - f_2(y)|}{|x-y|^\alpha}|f_1(y)|.$$

□

**Definition 2.4.** Sei $\omega_n = |B_1|$ in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Fundamentallösung für die Laplacegleichung als

$$\Gamma(x,y) \equiv \Gamma(x-y) \equiv \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x-y|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & n > 2. \end{cases}$$

Weiterhin benötigen wir noch das folgende einfache Lemma.

**Lemma 2.5.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar und sei $|E|$ das Maß dieser Menge. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$ und $n \ge 2$*

$$\int\limits_E \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \le \frac{\omega_n}{\alpha} n \left(\frac{|E|}{\omega_n}\right)^{\alpha/n},$$

*wobei $\omega_n = |B_1(0)|$ ist.*

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung $|E| < \infty$ und sei $B = B_R(x)$ eine Kugel mit gleichem Maß, $|E| = |B|$, d. h. sei $R = \left(\frac{|E|}{\omega_n}\right)^{1/n}$. Definiere $\tilde{B} := E \cap B$. Setze $r := |x-y|$ für fixiertes $x \in \mathbb{R}^n$. Wir erhalten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\int\limits_E \frac{1}{r^{n-\alpha}} &= \int\limits_{\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \int\limits_{E\setminus\tilde{B}=E\setminus B} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\
&\le \int\limits_{\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \frac{1}{R^{n-\alpha}} \left[|E| - \left|\tilde{B}\right|\right] \\
&\le \int\limits_{\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \int\limits_{B\setminus\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\
&= \int\limits_B \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\
&= \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_0^R \underbrace{\frac{1}{r^{n-\alpha}} r^{n-1}}_{=r^{\alpha-1}} \, dr \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \frac{1}{\alpha} r^\alpha \Big|_0^R \cdot \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| = \frac{1}{\alpha} R^\alpha n \omega_n,
\end{aligned}$$

da

$$\omega_n = |B_1(0)| = \int\limits_{B_1} 1 = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_0^1 r^{n-1} \, dr \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|$$

gilt. Nun ist $R = \left(\frac{|E|}{\omega_n}\right)^{1/n}$ und die Behauptung folgt. $\square$

**Lemma 2.6.** *Sei $0 < \alpha < n$. Es gilt für kleine $\delta > 0$*

$$\int\limits_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy \le n \frac{\omega_n}{\alpha} \delta^\alpha = O(\delta^\alpha)$$

*für beliebige $x$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls $n \ge 2$ ist. Weiterhin gilt in zwei Dimensionen, $n = 2$,*

$$\int\limits_{B_\delta(x_0)} |\log|x-y|| \, dy = o(\delta),$$

*ebenfalls für beliebige $x$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $|x - x_0| \le c$.*

*Beweis.* Der erste Teil der Behauptung folgt direkt aus Lemma 2.5.

Wir dürfen annehmen, dass $\delta < \frac{1}{4}$ ist. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $|x - x_0| \le \frac{1}{2}$ gilt. Sonst ist nach Dreiecksungleichung stets $|x-y| \ge \frac{1}{4}$, der Integrand also beschränkt und die Behauptung klar. Aus den obigen Annahmen ergibt sich $|x-y| \le \frac{3}{4}$, $\log|x-y|$ ist daher stets negativ. Somit dürfen wir wie in Lemma 2.5

argumentieren, da der Integrand auch hier monoton in $|y-x|$ ist. Daher genügt es, das Integral im Falle $x = x_0$ abzuschätzen. Es gilt

$$\int\limits_{B_\delta(x)} |\log|x-y||\,dy = \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_0^\delta |\log|x-y||\cdot r$$

mit $r = |y-x|$. Die Funktion $f(t) = \frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{4}t^2$ ist eine Stammfunktion zu $t\log t$. Die Behauptung folgt. $\square$

2.2. **Innere Hölderabschätzungen.** Die nachfolgenden Integrale sind absolut konvergent. Wir werden sie ausrechnen indem wir zunächst bei der Integration $\varepsilon$-Kugeln um die Singularitäten auslässt und dann $\varepsilon \searrow 0$ lässt. Dabei erhält man die üblichen Werte. Die so erhaltenen Ergebnisse bezeichnet man auch als Cauchyschen Hauptwerte. Sie können auch für nicht absolut konvergente Integrale existieren.

**Theorem 2.7** (Gauß)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $n \ge 2$ und $f \in L^\infty(E)$. Dann sind die Integrale*

$$\begin{aligned} U(x) &= \int\limits_E \Gamma(r)f(y)\,dy, \quad r = |x-y|,\\ U_i(x) &= \int\limits_E \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)f(y)\,dy \end{aligned}$$

*für alle $x \in \mathbb{R}^n$ absolut konvergent, es ist $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und für die Ableitungen gilt $\frac{\partial}{\partial x^i}U = U_i$ für alle $1 \le i \le n$. Es gelten die Abschätzungen*

$$\|U\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} \le c(E,n)\cdot\|f\|_{L^\infty(E)} \quad \textit{für } n \ge 3$$

*und*

$$\|DU\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} + \|U\|_{C^0(B_R(0))} \le c(E,n,R)\cdot\|f\|_{L^\infty(E)} \quad \textit{für } n = 2.$$

*Beweis.* Wir schreiben die Integrale als

$$U(x) = \lim_{\delta\searrow 0}\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \Gamma(r)f(y)\,dy$$

und

$$U_i(x) = \lim_{\delta\searrow 0}\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)f(y)\,dy.$$

Beachte zunächst, dass in allen Dimensionen $n \ge 2$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right| \le c\cdot r^{1-n}$$

gilt. Absolute Konvergenz folgt nun aus

$$\begin{aligned}
\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} |\Gamma(r)||f(y)| &\le \|f\|_{L^\infty}\cdot \int\limits_{E\setminus B_\delta} |\Gamma(r)| \\
&\le \begin{cases} c(E,n,R)\cdot\|f\|_{L^\infty}, & n=2, \quad x\in B_R(0),\\ c(E,n)\cdot\|f\|_{L^\infty}, & n\ge 3,\end{cases}\\
\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right| |f(y)| \le \|f\|_{L^\infty}\cdot &\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right| \le c(E,n)\cdot\|f\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

da die angegebenen Abschätzungen unabhängig von $\delta$ sind, wobei wir die Lemma 2.5 und 2.6 verwendet haben. Aus diesen Abschätzungen folgt auch (falls wir nachweisen können, dass $U_i$ die Ableitungen von $U$ sind) die behauptete Normabschätzung.

Wir haben noch die Ableitungen von $U$ mit $U_i$ zu vergleichen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Definiere $r_\varepsilon := (r^2+\varepsilon)^{1/2}$ und

$$U_\varepsilon(x) = \int\limits_E \Gamma(r_\varepsilon) f(y)\,dy.$$

Es gilt $U_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (was man wie beim Beweis der Glättung von Funktionen einsieht) und wir behaupten, dass $U_\varepsilon - U \rightrightarrows 0$ in $\mathbb{R}^n$ für $\varepsilon \searrow 0$ konvergiert. Es gilt nämlich (nehme im Falle $n=2$ ohne Einschränkung an, dass $\delta \le \frac{1}{2}$ und $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ gelten)

$$\begin{aligned}
|U(x)-U_\varepsilon(x)| &\le \int\limits_E |\Gamma(r)-\Gamma(r_\varepsilon)|\cdot|f| \\
&\le \|f\|_{L^\infty}\cdot\int\limits_E |\Gamma(r)-\Gamma(r_\varepsilon)|
\end{aligned}$$

und weiterhin gilt

$$\int\limits_E |\Gamma(r)-\Gamma(r_\varepsilon)| \le \int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} |\Gamma(r)-\Gamma(r_\varepsilon)| + 2\int\limits_{B_\delta(x)} |\Gamma(r)|.$$

Für den zweiten Term haben wir $|r_\varepsilon| > |r|$ und die Monotonie von $\Gamma$ benutzt. Aufgrund der Integrierbarkeit können wir zunächst $\delta$ so klein machen, dass das zweite Integral kleiner als ein $\varepsilon' > 0$ wird. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes schätzen wir das Argument im ersten Integral durch $c(\delta)\cdot\varepsilon$ ab. Hier hängt $c(\delta)$ insbesondere von $D\Gamma$ ab und dies wird im Unendlichen klein, verursacht also keine Probleme. Schließlich wählen wir nun $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ klein und können auch das erste Integral durch $\varepsilon'$ beschränken. Die behauptete gleichmäßige Konvergenz folgt.

Beim Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz haben wir insbesondere die Integrierbarkeit von $\Gamma$ benutzt. Dies funktioniert für $\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma$ ganz analog. Die Details sind eine Übung. Wir erhalten also auch

$$\frac{\partial}{\partial x^i} U_\varepsilon \rightrightarrows U_i,$$

also gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz sind $U$ und $U_i$ stetig.

Da wir bei gleichmäßiger Konvergenz Differentiation und Grenzwertbildung in der Folge vertauschen dürfen, folgt also $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $U_i = \frac{\partial}{\partial x^i} U$. $\square$

**Theorem 2.8.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \alpha \le 1$. Dann ist*

$$w(x) := \int\limits_\Omega \Gamma(r) f(y)\, dy \quad (\textit{wobei wiederum } r = |x-y| \textit{ ist})$$

*in $C^2(\Omega)$ und in $\Omega$ gilt*

$$\Delta w(x) = f(x).$$

*Sei $\Omega \subset \Omega_0 \Subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_0$ offen, und sei $\partial\Omega_0 \in C^1$ (ggf. ist auch $\Omega = \Omega_0$ zulässig; es genügt, $\Omega_0$ so zu wählen, dass der Divergenzsatz gilt). Setze $f$ durch* 0 *nach $\Omega_0$ fort. Dann gilt für $x \in \Omega$ die sogenannte* Dinische Formel

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r) \cdot [f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

*$\nu$ bezeichnet hier die äußere Normale an $\Omega_0$.*

*Schließlich gilt auf kompakten Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$*

$$\left\| D^2 w \right\|_{L^\infty(\Omega')} \le c\left(\Omega', \alpha, n, \Omega\right) \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

*Beweis.*

- Definiere

$$u(x) := \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r) \cdot [f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dieser Ausdruck ist für $x \in \Omega$ wohldefiniert, denn es gilt

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r) \right| \cdot |f(y) - f(x)| \le c \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \cdot \frac{r^\alpha}{r^n}.$$

Benutze nun Lemma 2.5. Das Randintegral ist unproblematisch, denn für alle $x \in \Omega$ ist der Abstand zu $\partial\Omega_0$ (nicht gleichmäßig) nach unten beschränkt. Somit tritt keine Singularität auf.

Sei $1 \le i \le n$ fixiert und setze $v := w_i$. Beachte, dass nach Theorem 2.7 $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Fixiere eine glatte Abschneidefunktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \eta \le 1$ und

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ 1, & t \ge 2, \end{cases}$$

so dass $|\dot\eta| \le 2$ gilt. Definiere

$$\eta_\varepsilon(t) := \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

und

$$v_\varepsilon(x) := \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \eta_\varepsilon(r) \cdot f(y)\, dy$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\cdot f(y)\,dy.$$

Aufgrund der eingefügten Abschneidefunktion ist wieder klar, dass $v_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

Wir behaupten, dass auf kompakten Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon \rightrightarrows u$$

für $\varepsilon \searrow 0$ gilt, also gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Es gilt (alle Integrationen sind bezüglich $y$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\right][f(y)-f(x)] + f(x)\cdot\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\eta_\varepsilon(r)\right]\\
&= \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\right][f(y)-f(x)] - f(x)\cdot\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial y^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\eta_\varepsilon(r)\right]\\
&= \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\right][f(y)-f(x)] - f(x)\cdot\int\limits_{\partial\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\cdot\nu_j.
\end{aligned}$$

Die Differenz zu $u$ schätzen wir für $x\in\Omega'$ wie folgt ab

$$\begin{aligned}
\left|u(x)-\frac{\partial}{\partial x^j}v_\varepsilon(x)\right| \le{}& \int\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\Gamma(r)\right|\cdot|1-\eta_\varepsilon(r)|\cdot|f(y)-f(x)|\,dy\\
&+\int\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right|\cdot\left|\frac{\partial}{\partial x^j}\eta_\varepsilon(r)\right|\cdot|f(y)-f(x)|\,dy\\
&+|f(x)|\cdot\int\limits_{\partial\Omega_0}\left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right|\cdot|1-\eta_\varepsilon(r)|\,dy\\
\equiv{}& I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

Da $x\in\Omega'\Subset\Omega$ ist und nach Wahl der Abschneidefunktion erhalten wir mit Hilfe von Lemma 2.5 für $0<\varepsilon\le\varepsilon(\Omega,\Omega')$

$$\begin{aligned}
I_1 &\le c\cdot\int\limits_{|y-x|\le 2\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^n}\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot|x-y|^\alpha\,dy\\
&\le c(n,\alpha)\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot\varepsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon>0$ klein ist, durften wir insbesondere annehmen, dass $\Omega'+B_{2\varepsilon}(0)\subset\Omega$ gilt, was die Abschätzung von $|f(y)-f(x)|$ mit Hilfe der Höldernorm rechtfertigt. Hier haben wir die Norm mit $\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ statt $\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ bezeichnet. Der Raum $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist kein Banachraum. Wenn wir aber diesen Index nur zur Bezeichnung der Norm verwenden, ist klar, dass es die Norm auf $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ sein soll, auch wenn wir den Abschluss weglassen. Dies wollen wir auch in Zukunft so handhaben.

Die Differentiation von $\eta_\varepsilon$ liefert einen zusätzlichen Faktor $\varepsilon^{-1}$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
I_2 &\le c \cdot \int\limits_{\varepsilon \le |y-x| \le 2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{|y-x|^{n-1}} \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot |x-y|^\alpha \, dy \\
&\le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\int\limits_{|y-x| \le 2\varepsilon} \frac{1}{|y-x|^{n-1-\alpha}} \, dy}_{\le c \cdot \varepsilon^{1+\alpha}} \\
&\le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \varepsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Das Integral $I_3$ verschwindet sogar, wenn $\varepsilon$ klein genug ist. Dann folgt aus

$$\varepsilon < \tfrac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \le \tfrac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega_0) \le \tfrac{1}{2}|x-y|$$

für $x \in \partial\Omega_0$ und $x \in \Omega'$ nämlich schon $\eta_\varepsilon(r) = 1$.

Wir erhalten somit

$$\left| u(x) - \frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon(x) \right| \le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \varepsilon^\alpha \to 0 \text{ für } x \in \Omega', \text{ falls } \varepsilon \to 0.$$

Als lokal gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen ist daher auch $u$ stetig, $u \in C^0(\Omega)$.

Wir behaupten, dass die $v_\varepsilon$ gleichmäßig in ganz $\Omega$ gegen eine (gleich noch definierte) Funktion $v$ konvergieren. Wir bilden für $x \in \mathbb{R}^n$ die Differenz von

$$v(x) := \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot f(y) \, dy$$

und (der bereits oben definierten Funktion)

$$v_\varepsilon(x) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \eta_\varepsilon(r) \cdot f(y) \, dy$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
|v(x) - v_\varepsilon(x)| &\le \int\limits_{\Omega_0} \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \right| \cdot |1 - \eta_\varepsilon(r)| \cdot |f(y)| \, dy \\
&\le c \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int\limits_{|x-y| \le 2\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \, dy \\
&\le c \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir haben also nun in $\Omega' \Subset \Omega$

$$v_\varepsilon \rightrightarrows v$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon \rightrightarrows u$$

nachgewiesen. Wir dürfen also die Grenzwertbildung $\varepsilon \searrow 0$ und die Differentiation vertauschen. Da $v = \frac{\partial w}{\partial x^i}$ gilt, folgt also $w \in C^2(\Omega)$ und die zweiten Ableitungen sehen so wie in der Dinischen Formel behauptet aus.

• Sei nun $x \in \Omega$. Wir wählen $\Omega_0 = B_R(x)$ für ein $R > 0$, so dass $\Omega \Subset B_R(x)$ gilt. Aufgrund der Dinischen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta w(x) = &\int\limits_{B_R} \Delta\Gamma(r)[f(y) - f(x)]\,dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial B_R(x)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r) \cdot \nu^i \\ = &- f(x) \cdot \begin{cases} \int\limits_{\partial B_R} \frac{1}{2\pi} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \frac{y^i - x^i}{|x-y|}\,dy, & n = 2, \\ \int\limits_{\partial B_R} \frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \frac{y^i - x^i}{|x-y|}\,dy, & n \ge 3. \end{cases} \\ = &\, f(x),\end{aligned}$$

da $|\partial B_R| = n\omega_n R^{n-1}$ ist. Im ersten Schritt haben wir benutzt, dass $\Gamma$ eine Fundamentallösung der Laplacegleichung ist, dass also für $r \neq 0$ die Gleichheit $\Delta\Gamma = 0$ gilt. Eine einfache Abschätzung, als Übungsaufgabe überlassen, zeigt, dass auch die Singularität bei $x = y$ keinen Beitrag zu diesem Integral liefert.

• Für die Normabschätzung verwenden wir nochmals die Dinische Formel. Sei also $x \in \Omega'$. Schreibe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x) = &\int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\Gamma(r) \cdot [f(y) - f(x)]\,dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r) \cdot \nu_j \,d\mathcal{H}^{n-1} \\ \equiv &\, I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Wir erhalten (da sich für $x \in \Omega'$ und $y \in \Omega_0$ der Hölderquotient abschätzen lässt, denn dann ist $|x - y| \ge \varepsilon$ und wir benutzen nur die $C^0$-Schranke)

$$\begin{aligned}|I_1| \le &\, c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \int\limits_{\Omega_0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\ \le &\, c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},\end{aligned}$$

und

$$|I_2| \le c \cdot \|f\|_{C^0(\Omega)}.$$

Das Theorem folgt. □

Für die zweiten Ableitungen wollen wir bei hölderstetiger rechter Seite noch die Hölderstetigkeit nachweisen.

Wir definieren zunächst Normen, die sich unter Homothetien des Gebietes nicht ändern.

**Definition 2.9** (Dimensionsunabhängige Normen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $d := \operatorname{diam}\Omega$. Dann definieren wir auf $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ bzw. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ dimensionsunabhängige Normen durch

$$\|u\|'_{C^k(\Omega)} := \sum_{i=0}^{k} d^i \cdot \sum_{|\beta|=i} \|D^\beta u\|_{C^0(\Omega)}$$

und

$$\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|'_{C^k(\Omega)} + d^{k+\alpha} \cdot \left[D^k u\right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

**Bemerkung 2.10.** Sei $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $v \in C^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Dann ist $u \cdot v \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gilt

$$\|u \cdot v\|'_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \le \|u\|'_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \|v\|'_{C^{0,\beta}(\Omega)}.$$

*Beweis.* Übung. □

Beim nachfolgenden Theorem mache man sich als Übung klar, dass gerade bei der angegebenen Ungleichung für die Normen das Skalierungsverhalten so ist, dass keine Abhängigkeit der Konstanten von $R$ auftritt.

**Theorem 2.11.** *Sei $R > 0$, $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{3R}(x_0)$. Sei $0 < \alpha < 1$, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{B_2}\right)$ und sei*

$$w(x) := \int\limits_{B_2} \Gamma(r) \cdot f(y)\, dy, \quad r = |x - y|.$$

*Dann ist $w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{B_1}\right)$ und es gilt*

$$\|D^2 w\|'_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le c(n, \alpha) \cdot \|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)},$$

*d. h.*

$$\left\|D^2 w\right\|_{C^0(B_R)} + R^\alpha \cdot \left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}(B_R)} \le c(n, \alpha) \cdot \left\{\|f\|_{C^0(B_{3R})} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}\right\}.$$

*Beweis.* Wir verwenden wiederum die Dinische Formel, diesmal mit $\Omega = \Omega_0 = B_2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x) = \int\limits_{B_2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r)[f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \int\limits_{\partial B_2} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j\, dy.$$

Hieraus folgt für $x \in B_1$ direkt (da $r \approx R$ auf $\partial B_2$)

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x)\right| &\le c \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_2)} \cdot \int\limits_{B_2} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \|f\|_{C^0(B_2)} \cdot \int\limits_{\partial B_2} |D\Gamma(r)| \\ &\le c \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_2)} \cdot R^\alpha + c \cdot \|f\|_{C^0(B_2)} \qquad (2.1) \\ &\le c \cdot \|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)}. \end{aligned}$$

Seien nun $x, \overline{x} \in B_1$, $0 < \delta := |x - \overline{x}|$, $\xi := \frac{x + \overline{x}}{2}$, $r = |x - y|$, $\overline{r} = |\overline{x} - y|$. Beachte, dass $B_\delta(\xi) \subset B_2$ ist. Es gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} w(\overline{x}) = \int\limits_{B_2} \frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} \Gamma(\overline{r})[f(y) - f(\overline{x})]\, dy - f(\overline{x}) \int\limits_{\partial B_2} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i} \Gamma(\overline{r}) \cdot \nu_j\, dy.$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} D_i D_j w(\overline{x}) - D_i D_j w(x) = &\, f(x) I_1 + [f(x) - f(\overline{x})] I_2 \\ &+ I_3 + I_4 + [f(x) - f(\overline{x})] I_5 + I_6 \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{\partial B_2} \{D_i\Gamma(r) - D_i\Gamma(\overline{r})\} \cdot \nu_j,\\
I_2 &= \int\limits_{\partial B_2} D_i\Gamma(\overline{r}) \cdot \nu_j,\\
I_3 &= \int\limits_{B_\delta(\xi)} D_iD_j\Gamma(r)[f(x) - f(y)],\\
I_4 &= \int\limits_{B_\delta(\xi)} D_iD_j\Gamma(\overline{r})[f(y) - f(\overline{x})],\\
I_5 &= \int\limits_{B_2\setminus B_\delta(\xi)} D_iD_j\Gamma(r),\\
I_6 &= \int\limits_{B_2\setminus B_\delta(\xi)} \{D_iD_j\Gamma(r) - D_iD_j\Gamma(\overline{r})\}[f(\overline{x}) - f(y)].
\end{aligned}
$$

Dies rechnet man unmittelbar nach, da alle Integrale – wie wir uns anhand der folgenden Rechnungen überzeugen – absolut konvergieren. Wir betrachten die auftetenden Integrale einzeln. Es genügt, jedes einzelne Integral (mit den entsprechenden Vorfaktoren) betragsmäßig nach oben durch

$$
c(n,\alpha) \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^\alpha \cdot \left\{\|f\|_{C^0(B_{3R})} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}\right\}
$$

abzuschätzen.

(i) Wir definieren $r_t = tx + (1-t)\overline{x} - y$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
D_i\Gamma(r) - D_i\Gamma(\overline{r}) &= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} D_i\Gamma(r_t)\,dt\\
&= \int\limits_0^1 D_iD_k\Gamma(r_t)\left(x^k - \overline{x}^k\right).
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir

$$
|I_1| \le c \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_{\partial B_2} \frac{1}{r_t^n}\delta \le c \cdot \frac{\delta}{R} \le c(n,\alpha) \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^\alpha,
$$

denn es gilt $\frac{\delta}{2R} \le 1$ und $|r_t||_{\partial B_2} \ge R$.

(ii) Es gilt

$$
|I_2| \le \int\limits_{\partial B_2} |D\Gamma(\overline{r})| \le c(n).
$$

Weiterhin gilt

$$
|f(x) - f(\overline{x})| \le [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot \delta^\alpha.
$$

(iii) Wir erhalten nach Lemma 2.5

$$|I_3| \le \int\limits_{B_\delta(\xi)} \left|D^2\Gamma(r)\right| \cdot |x-y|^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}} \le c(n,\alpha) \cdot \delta^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}}.$$

(iv) $I_4$ behandelt man analog zu $I_3$.

(v) Wir integrieren partiell

$$|I_5| \le \left| \int\limits_{\partial B_2} D_i\Gamma(r) \cdot \nu_j \right| + \left| \int\limits_{\partial B_\delta(\xi)} D_i\Gamma(r) \cdot \nu_j \right| \le c,$$

denn das erste Integral ist beschränkt und im zweiten Integral gilt $|x-y| \ge |y-\xi|-|x-\xi| = \delta-\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\delta$. Wir können die Beträge ins Integral hineinziehen. Der Rest funktioniert dann wie bei $I_2$. Hier ist die absolute Konvergenz ohnehin klar, da keine Singularität auftritt.

(vi) Es gilt mit $r_t$ wie oben

$$D_iD_j\Gamma(r) - D_iD_j\Gamma(\overline{r}) = \int\limits_0^1 D_iD_jD_k\Gamma(r_t)\left(x^k - \overline{x}^k\right).$$

Somit folgt mit $|x-\overline{x}| = \delta$

$$|I_6| \le c \cdot \int\limits_0^1 \delta \int\limits_{|y-\xi|\ge\delta} \frac{|y-\overline{x}|^\alpha}{|r_t|^{n+1}} \cdot [f]_{C^{0,\alpha}}.$$

Da $|y-\xi| \ge \delta$ ist, folgt

$$|y-\overline{x}| \le |y-\xi| + \underbrace{|\overline{x}-\xi|}_{=\frac{1}{2}\delta} \le 2|y-\xi|$$

und

$$|r_t| = |tx+(1-t)\overline{x}-y| \equiv |x_t-y| \ge |y-\xi| - \underbrace{|x_t-\xi|}_{\le\frac{1}{2}\delta} \ge \tfrac{1}{2}|y-\xi|.$$

Als Abschätzung für $I_6$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}|I_6| &\le c(n,\alpha)\cdot[f]_{C^{0,\alpha}}\cdot\delta\cdot \int\limits_{|y-\xi|>\delta} \frac{1}{|y-\xi|^{n+1-\alpha}} \\ &\le c(n,\alpha)\cdot[f]_{C^{0,\alpha}}\cdot\delta\cdot n\cdot\omega_n\cdot \int\limits_\delta^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+1-\alpha}}\,dr \\ &= \frac{c}{1-\alpha}\cdot n\cdot\omega_n\cdot\delta^\alpha\cdot[f]_{C^{0,\alpha}}.\end{aligned}$$

Damit sind alle Integrale wie gewünscht abgeschätzt und das Theorem folgt.

Wir halten noch einmal fest, dass für alle $x$, $\overline{x} \in B_1$ die folgende Abschätzung gilt. Dabei genügt, wie man sich anhand der obigen Abschätzungen leicht überzeugen kann, in der ersten Norm sogar die Norm über die kleinere Kugel.

$$|D_iD_jw(x)-D_iD_jw(\overline{x})| \le c(n,\alpha)\cdot\left\{R^{-\alpha}\cdot\|f\|_{C^0(B_1)}+[f]_{C^{0,\alpha}(B_2)}\right\}\cdot|x-\overline{x}|^\alpha. \tag{2.2}$$

□

**Bemerkung 2.12.** Sei $f \in C_c^{0,\alpha}(B_R(0))$ und sei in der bisherigen Notation

$$w(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(r)\cdot f(y)\,dy.$$

Dann ist $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\left[D^2w\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c(n,\alpha)\cdot[f]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.3}$$

$$\left\|D^2w\right\|'_{C^{0,\alpha}(B_R)} \le c(n,\alpha)\cdot\|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}, \tag{2.4}$$

sowie im Fall $n \ge 3$

$$\|w\|'_{C^1(B_R)} \le c(n)\cdot R^2\cdot\|f\|_{C^0(B_{3R})}. \tag{2.5}$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst (2.4). Nach (2.1) gilt

$$\left\|D^2w\right\|_{C^0(B_R)} \le c\cdot\left\{R^\alpha\cdot[f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}+\|f\|_{C^0(B_{3R})}\right\}.$$

Nach (2.2) gilt

$$\left[D^2w\right]_{C^{0,\alpha}(B_R)} \le c\cdot\left\{R^{-\alpha}\cdot\|f\|_{C^0(B_{3R})}+[f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}\right\}.$$

Die zweite Ungleichung hier mit $R^\alpha$ multipliziert und zur ersten addiert ergibt (wie in Theorem 2.11) gerade (2.4).

Lassen wir in (2.2) $R\to\infty$, so folgt (2.3).

Für den Beweis von (2.5) haben wir

$$\|w\|'_{C^1(B_R)} \equiv \|w\|_{C^0(B_R)}+R\cdot\|Dw\|_{C^0(B_R)}$$

abzuschätzen. Zunächst einmal erhalten wir für alle $x$

$$|w(x)| \le \int\limits_{B_R} |\Gamma(r)|\cdot|f(y)|\,dy \le c(n)\cdot R^2\cdot\|f\|_{C^0(B_R)}$$

nach Lemma 2.5 in Dimension $n\ge 3$. Analog folgt

$$|Dw(x)| \le \int\limits_{B_R} |D\Gamma(r)|\cdot|f(y)|\,dy \le c(n)\cdot R\cdot\|f\|_{C^0(B_R)}.$$

Wir addieren die letzte Ungleichung (mit $R$ multipliziert) zur vorletzten Ungleichung und erhalten (2.5). □

Aus Theorem 2.11 erhalten wir

**Theorem 2.13.** *Seien $f \in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Gelte $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$, so ist*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\cdot f(y)\,dy.$$

*Beweis.* Nach Theorem 2.8 erfüllt

$$w(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y)\, dy$$

die Differentialgleichung $\Delta w = f$ in $\mathbb{R}^n$ und es gilt $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Betrachte $v := w - u$. $v$ ist harmonisch. Daher genügt es aufgrund des Maximumprinzips, nachzuweisen, dass $v(x) \to 0$ konvergiert für $|x| \to \infty$. Da $u$ kompakten Träger hat, brauchen wir nur noch nachzuweisen, dass $w$ im Unendlichen verschwindet. (Dies folgt direkt aus Integralabschätzungen in Dimension $n \geq 3$. Übung.) Allgemein folgt dies aus der folgenden Anwendung des Divergenztheorems

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \cdot \Delta u(y)\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y^i} (\Gamma(x-y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^i} u(y)\, dy. \end{aligned}$$

Da $|D\Gamma(r)| \leq \frac{c}{r^{n-1}}$ ist, folgt die Behauptung. □

### 2.3. **Hölderabschätzungen bis zum Rand.**

**Theorem 2.14.** *Sei $\mathbb{R}^n_+ = \{x^n > 0\}$, $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, $R > 0$, $B_1^+ = B_R^+(x_0) = B_R(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+$, $B_2^+ = B_{3R}^+(x_0)$ und sei $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{B_2^+}\right)$ für ein $0 < \alpha < 1$. Dann gilt für das Volumenpotential (wieder mit $r = |x-y|$)*

$$w(x) = \int_{B_2^+} \Gamma(r) f(y)\, dy$$

*$w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{B_1^+}\right)$ mit der Abschätzung*

$$\left\|D^2 w\right\|_{C^0\left(B_1^+\right)} + R^\alpha \cdot \left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}\left(B_1^+\right)} \leq c(n,\alpha) \cdot \left\{\|f\|_{C^0\left(B_2^+\right)} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(B_2^+\right)}\right\}.$$

*Beweis.* Nach Theorem 2.11 ist $w \in C^{2,\alpha}\left(B_2^+\right)$ und es gilt $\Delta w = f$ in $B_2^+$. Es genügt, die Ableitungen $D_i D_j w$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, abzuschätzen, denn dann folgt aufgrund der Gleichung auch eine entsprechende Schranke für

$$D_n D_n w = f - \sum_{i=1}^{n-1} D_i D_i w.$$

Nehme also $j < n$ an. Da $\partial B_2^+$ stückweise glatt ist, gilt das Divergenztheorem auf $B_2^+$ und wir können die Dinische Formel anwenden.

$$D_i D_j w(x) = \int_{B_2^+} D_i D_j \Gamma(r)[f(y) - f(x)] - f(x) \cdot \int_{\partial B_2^+} D_i \Gamma(r) \cdot \nu_j.$$

Beachte, dass wir im zweiten Term nur über den sphärischen Teil des Randes zu integrieren brauchen, da nach Wahl von $j$ auf dem flachen Teil des Randes $\nu_j = 0$ gilt. Für $\overline{x} \in B_1^+$ bekommen wir mit $\overline{r} = |\overline{x} - y|$

$$D_i D_j w(\overline{x}) = \int\limits_{B_2^+} D_i D_j \Gamma(\overline{r})[f(y) - f(\overline{x})] - f(\overline{x}) \cdot \int\limits_{\partial B_2^+} D_i \Gamma(\overline{r}) \cdot \nu_j.$$

Wir bilden nun für $x \in B_1^+$

$$D_i D_j w(\overline{x}) - D_i D_j w(x) = \ldots$$

und fahren ganz analog zum Beweis von Theorem 2.11 fort. Die Details hierzu sind als Übung empfohlen. (Beachte insbesondere, dass der gerade Teil des Randes keinen Beitrag zum Randintegral liefert. Daher tritt auch keine Singularität auf, wenn man sich ihm nähert.) □

Der Bemerkung 2.12 entsprechend erhalten wir

**Korollar 2.15.** *Sei* $f \in C_c^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, $0 < \alpha < 1$, *und sei (in der üblichen Bezeichnung)*

$$w(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma(r) f(y).$$

*Dann ist* $w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ *und es gilt die Abschätzung*

$$\left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \le c(n,\alpha) \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}.$$

*Beweis.* Wähle $R > 0$, so dass $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ ist. Nach Theorem 2.14 folgt

$$R^\alpha \left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}\left(B_R^+\right)} \le c(n,\alpha) \left\{ \|f\|_{C^0\left(B_R^+\right)} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(B_R^+\right)} \right\}.$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir durch $R^\alpha$ dividieren und $R \to \infty$ lassen. □

Für Lösungen von $\Delta u = f$ erhalten wir noch die folgende Randabschätzung.

**Lemma 2.16.** *Sei* $u \in C_c^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ *und gelte* $\Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n_+$ *und* $u(\hat{x}, 0) = 0$ *für* $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. *Dann gilt*

$$\left[D^2 u\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \le c(n,\alpha) \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}.$$

*Beweis.* Da $\Delta u = f$ ist, hat $f$ kompakten Träger. Wir spiegeln $f$ gerade

$$\tilde{f}\left(\hat{x}, x^n\right) = \begin{cases} f(x), & x^n \ge 0, \\ f\left(\hat{x}, -x^n\right), & x^n < 0. \end{cases}$$

Auch $\tilde{f}$ hat kompakten Träger und es gilt (sogar mit Gleichheit)

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{C^{0,\alpha}} \le \|f\|_{C^{0,\alpha}},$$

$$\left[\tilde{f}\right]_{C^{0,\alpha}} \leq [f]_{C^{0,\alpha}}.$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n$ den Punkt $\tilde{x} = (\hat{x}, -x^n)$. Definiere weiterhin für $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} w(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} [\Gamma(|x-y|) - \Gamma(|\tilde{x}-y|)] \cdot f(y)\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} [\Gamma(|x-y|) - \Gamma(|x-\tilde{y}|)] \cdot f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie in der Definition ist $w(\hat{x}, 0) = 0$ und nach Gauß gilt $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma(|x-\tilde{y}|) \cdot f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \Gamma(|x-y|) \cdot \underbrace{f(\tilde{y})}_{=\tilde{f}(y)}.$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} w(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma(|x-y|) \cdot \tilde{f}(y) - \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \Gamma(|x-y|) \cdot \tilde{f}(y) \\ &= 2 \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma(|x-y|) \cdot \tilde{f}(y) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(|x-y|) \cdot \tilde{f}(y) \\ &\equiv w_1 + w_2. \end{aligned}$$

Es ist daher $w \in C^{2,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ und $\Delta w = f$ in $\mathbb{R}^n_+$. Weiterhin gilt sogar $w_1 \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ und nach Korollar 2.15

$$\left[D^2 w_1\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \leq c(n,\alpha) \cdot \left[\tilde{f}\right]_{C^{0,\alpha}}$$

sowie $w_2 \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit (vgl. Bemerkung 2.12)

$$\left[D^2 w_2\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq c(n,\alpha) \cdot \left[\tilde{f}\right]_{C^{0,\alpha}}.$$

Es genügt nun, nachzuweisen, dass in $\mathbb{R}^n_+$ die Gleichung $w = u$ gilt. Zum Beweis bemerken wir zunächst, dass nach Gauß die Abschätzung $|w| \leq \text{const.}$ für $n \geq 3$ gilt.

In allen Dimensionen $n \geq 2$ erhält man dies wie folgt: Sei $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ und daher ohne Einschränkung $y \in B_R(0)$. Dann gelten $|x-y| \geq |x| - R$, $|x - \tilde{y}| \geq |x| - R$ (ebenso für alle Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen $y$ und $\tilde{y}$) und $||x-y| - |x-\tilde{y}|| \leq 2R$. Wir erhalten

$$|\Gamma(x-y) - \Gamma(x-\tilde{y})| \leq \sup_{|z| \geq |x|-R} |D\Gamma(z)| \cdot 2R \to 0 \quad \text{für} \quad |x| \to \infty.$$

Schreiben wir $w$ in der Gestalt

$$w(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x-\tilde{y})] \cdot f(y)\,dy,$$

so folgt aus der obigen Abschätzung und der Stetigkeit auf einem Ball um den Ursprung die globale Beschränktheit. Aus diesen Argumenten folgt sogar $w(x) \to 0$

für $|x| \to \infty$. Weiterhin gilt $u = w$ auf $\partial R^n_+$. Da $u$ kompakten Träger besitzt folgt somit aufgrund des Maximumprinzips $u = w$. $\square$

2.4. **Kompaktheitssätze.** Wir wollen das folgende Kompaktheitslemma verwenden.

**Lemma 2.17** (Kompaktheitslemma, Ehrlings Lemma)**.** *Seien $E_i$, $i = 1, 2, 3$, Banachräume und gelte*

$$E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow E_3,$$

*wobei beide Einbettungen („$\hookrightarrow$"= Einbettung) stetig sind und $E_1 \hookrightarrow E_2$ kompakt ist. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$, so dass*

$$\|u\|_2 \le \varepsilon \cdot \|u\|_1 + c_\varepsilon \cdot \|u\|_3$$

*für alle $u \in E_1$ gilt.*

*Beweis.* Wir unterdrücken in der Notation die Einbettungsabbildungen.

Falls die Behauptung nicht richtig ist, finden wir zu einem $\varepsilon > 0$ eine Folge $u_k \in E_1$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|u_k\|_2 > \varepsilon \cdot \|u_k\|_1 + k \cdot \|u_k\|_3$$

gilt. Ohne Einschränkung können wir die $u_k$ so normieren, dass $\|u_k\|_2 = 1$ gilt. Es folgt

$$u_k \to 0 \text{ in } E_3$$

und

$$\|u_k\|_1 \le \varepsilon^{-1}.$$

Nutze nun die Kompaktheit der ersten Einbettung. Nach Wahl einer Teilfolge dürfen wir daher (ohne Einschänkung) annehmen, dass

$$u_k \to u \text{ in } E_2$$

konvergiert für ein geeignetes Element $u \in E_2$. Hieraus folgt insbesondere $\|u\|_2 = 1$. Aufgrund der Stetigkeit der Einbettung $E_2 \hookrightarrow E_3$ erhalten wir auch Konvergenz der $u_k$ in $E_3$ gegen $u$. In $E_3$ gilt $u_k \to 0 = u$. Wegen der Injektivität ($E_2 \hookrightarrow E_3$ ist eine Einbettung) folgt damit auch $u = 0$ in $E_2$. Wir erhalten einen Widerspruch. $\square$

**Korollar 2.18.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Konstante $c_\varepsilon > 0$, so dass*

$$\|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} \le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + c_\varepsilon \cdot \|u\|_{C^0(\Omega)}$$

*für alle $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt.*

**Bemerkung 2.19.** Hieraus erhalten wir auch leicht eine multiplikative Form. Angenommen, es ist $c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon}$, so folgt mit $\varepsilon = \sqrt{\frac{\|u\|_{C^0}}{\|u\|_{C^{2,\alpha}}}}$

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^2} &\le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \frac{c}{\varepsilon} \cdot \|u\|_{C^0} \\ &= (1+c)\sqrt{\|u\|_{C^0}} \cdot \sqrt{\|u\|_{C^{2,\alpha}}}\end{aligned}$$

und daraus

$$\|u\|^2_{C^2} \le c \cdot \|u\|_{C^0} \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}}.$$

Die Umkehrung ist einfach.

2.5. **Schaudersche a priori-Schranken.** In den nächsten beiden Kapiteln soll $L$ stets die folgenden Eigenschaften haben.

**Definition 2.20** (Generalvoraussetzung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $0 < \alpha < 1$. Die Differentialgleichung $Lu = f$ habe die Form

$$Lu(x) = a^{ij}(x)u_{ij}(x) + b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x) = f(x).$$

Wir wollen die folgenden beiden Bedingungen annehmen.

(i) Elliptizität: Es gibt eine Konstante $\lambda > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung
$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$
gilt. Sei darüber hinaus $a^{ij}$ auch symmetrisch, d. h. gelte für alle $i$, $j$ und $x \in \Omega$
$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x).$$

(ii) Hölderstetigkeit der Koeffizienten: Es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass
$$\left\|a^{ij}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \left\|b^i\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|d\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq K$$
gilt.

**Theorem 2.21.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Sei $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = a^{ij}D_iD_ju + b^iD_iu + du = f & \textit{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

*mit $d \leq 0$. Hier seien $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $a^{ij}$, $b^i$, $d \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\left(a^{ij}\right)$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch sowie $0 < \alpha < 1$. Dann gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c \cdot \left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}\right\},$$

*wobei $c$ nur von $n$, $\Omega$, $\alpha$, den angegebenen Normen der Koeffizienten und der Elliptizitätskonstanten abhängt.*

**Bemerkung 2.22.** Das folgende Beispiel zeigt, dass die Einschränkung $0 < \alpha < 1$ wesentlich ist. Betrachte nämlich in einer Umgebung des Ursprungs die Funktionen $u_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, definiert durch

$$u_\varepsilon\left(x^1, x^2\right) = x^1 \cdot x^2 \cdot \log\left(\sqrt{\varepsilon + (x^1)^2} + \sqrt{\varepsilon + (x^2)^2}\right).$$

Sie erfüllen in einer kleinen Umgebung des Ursprungs

$$|u_\varepsilon| + |\Delta u_\varepsilon| \leq c$$

gleichmäßig in $\varepsilon$, aber die gemischten zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^1 \partial x^2}$ verhalten sich dort für $\varepsilon \searrow 0$ wie

$$\log\left(\left|x^1\right| + \left|x^2\right|\right).$$

Daher kann die $C^{1,1}$-Norm nicht durch Supremumsschranken an $u_\varepsilon$ und $\Delta u_\varepsilon =: f$ beschränkt werden.

Dies zeigt, dass eine Abschätzung wie in Theorem 2.21 für $\alpha = 0$ nicht richtig sein kann. Durch Integrieren bekommt man die entsprechende Aussage für $\alpha = 1$.

*Beweis.* Übung. $\square$

*Beweis von Theorem 2.21.* Wir setzen zunächst $\varphi$ nach $\overline{\Omega}$ fort, so dass $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt mit der Abschätzung

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c(\Omega,\alpha)\cdot\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}.$$

Ohne Einschänkung dürfen wir annehmen, dass $\varphi = 0$ gilt, denn sonst betrachten wir $\tilde{u} = u - \varphi$. $\tilde{u}$ erüllt dann $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$ und

$$L\tilde{u} = Lu - L\varphi = f - L\varphi \equiv \tilde{f}.$$

Wir erhalten, wenn wir das Theorem für Randwerte Null gezeigt haben,

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} - \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} &\le \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\\ &\le c\cdot\left\|\tilde{f}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\\ &\le c\cdot\left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right\}.\end{aligned}$$

Somit genügt es, den Fall $\varphi = 0$ zu betrachten.

Wir überdecken nun $\overline{\Omega}$ mit genügend kleinen offenen Mengen $U_k$, $1 \le k \le N$. Im Beweis werden wir genauer spezifizieren, was "genügend klein" heisst. Weiterhin nehmen wir an, dass im Falle $U_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ eine entsprechende Umgebung des Randes aufgebogen werden kann.

Sei $\zeta_k$, $1 \le k \le N$, eine den $U_k$'s untergeordnete $C^\infty$-Zerlegung der Eins und definiere $u_k = u\cdot\zeta_k$. Es folgt

$$u = u\cdot\sum_{k=1}^N \zeta_k = \sum_{k=1}^N u_k.$$

Wir multiplizieren nun die Differentialgleichung $Lu = f$ mit $\zeta_k$ und erhalten

$$a^{ij}D_iD_ju_k \equiv F_k = f\cdot\zeta_k + a^{ij}[2D_iu\cdot D_j\zeta_k + uD_iD_j\zeta_k] - b^iD_iu\cdot\zeta_k - d\cdot u\cdot\zeta_k. \tag{2.6}$$

Ist $U_k \subset \Omega$, so gilt $\operatorname{supp} u_k$, $\operatorname{supp} F_k \Subset \Omega$ und wir können (2.6) durch 0 in den $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Ist $U_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, so biegen wir dieses Randstück auf und erhalten mit $y = y(x) : \Omega \cap U_k \to B_1^+(0)$ dort eine Differentialgleichung der Form

$$\tilde{a}^{ij}(y)D_{y^i}D_{y^j}\tilde{u}_k = \tilde{F}_k$$

mit $\tilde{u}(\hat{y},0) = 0$. Es ist wie üblich $\tilde{u}_k = u_k\circ y^{-1}, \ldots$ und $\tilde{F}_k = F_k\circ y^{-1}+$ Terme, die höchstens eine Ableitung von $u$ enthalten. Wir dürfen weiterhin annehmen, dass $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\tilde{u}_k, \partial B_1) > 0$ ist. Auch hier setzen wir $\tilde{u}_k$ und $\tilde{F}_k$ durch 0 in den $\mathbb{R}^n_+$ fort.

Wir fixieren nun (für jede Umgebung $U_k$) Punkte $y_0 \in U_k$ bzw. in $y_0 \in y(U_k \cap \Omega)$. Um nicht zwei Gleichungen schreiben zu müssen, benutzen wir auch im Falle $U_k \subset \Omega$ Tilden, transformieren also mit der Identität. Unsere Gleichung hat nun in jedem Fall die Gestalt

$$\tilde{a}^{ij}(y_0)D_{y^i}D_{y^j}\tilde{u}_k(y) = \tilde{F}_k + \left[\tilde{a}^{ij}(y_0) - \tilde{a}^{ij}(y)\right]D_{y^i}D_{y^j}\tilde{u}_k(y).$$

Wir transformieren schließlich noch so, dass in dem speziellen Punkt $y_0$ die Matrix $\left(a^{ij}(y_0)\right)$ zu $\left(\delta^{ij}\right)$ wird. Wir erhalten Differentialgleichungen der Form

$$\overline{a}^{ij}(z_0)D_{z^i}D_{z^j}\overline{u}_k(z) \equiv \Delta_z\overline{u}_k(z) = \overline{F}_k + \left[\overline{a}^{ij}(z_0) - \overline{a}^{ij}(z)\right]\cdot D_{z^i}D_{z^j}\overline{u}_k(z).$$

Im zweiten Fall bleiben die Randwerte Null erhalten.

Wir bemerken, dass, je nach Fall, $\overline{u}_k \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ oder $\overline{u}_k \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ ist.

Aufgrund der Abschätzungen der Theoreme 2.11 und 2.14 bzw. von Lemma 2.16, in dem die entsprechenden Aussagen bereits kombiniert sind, erhalten wir nun mit Lemma 2.13

$$\begin{aligned}\left[D^2\overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le{}& c \cdot \sup_{z\in z(U_k)} \left|\overline{a}^{ij}(z) - \overline{a}^{ij}(z_0)\right| \cdot \left[D^2\overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}\\ &+ c\cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c\cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\left[D^2\overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \le{}& c \cdot \sup_{z\in z(U_k\cap\Omega)} \left|\overline{a}^{ij}(z) - \overline{a}^{ij}(z_0)\right| \cdot \left[D^2\overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}\\ &+ c\cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c\cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dies benutzt die Hölderstetigkeit der Koeffizienten $a^{ij}$. Indem wir nun $\operatorname{diam}(U_k)$ jeweils klein genug wählen, können wir erreichen, dass

$$\sup_{z\in z(U_k)} \left|\overline{a}^{ij}(z) - \overline{a}^{ij}(z_0)\right| \le \frac{1}{2c}$$

ist. Für diesen Schritt ist es wichtig, dass der Stetigkeitsmodul von $a^{ij}$ kontrolliert ist. Damit können wir den ersten Term auf der rechten Seite in die linke Seite absorbieren und erhalten (hier nur noch für die inneren Abschätzungen aufgeschrieben)

$$\left[D^2\overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c\cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c\cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Wir addieren auf beiden Seiten die $C^2$-Norm

$$\|\overline{u}_k\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c\cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c\cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Nach Rücktransformation nach $\Omega$ und Summieren über $k$ erhalten wir

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le \sum_k \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c\cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c\cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Aufgrund des Kompaktheitslemmas können wir

$$\|u\|_{C^{2,0}} \le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}} + c_\varepsilon \cdot \|u\|_{C^0}$$

abschätzen und damit die Norm der zweiten Ableitungen auf der rechten Seite absorbieren

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c\cdot \left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|u\|_{C^0}\right\}.$$

Schließlich ist wegen $d \le 0$ das Maximumprinzip in der Form von [4, Theorem 3.7] anwendbar

$$\|u\|_{C^0} \le c\cdot \|f\|_{C^0}.$$

Wir erhalten

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c\cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}}$$

und das Theorem folgt. □

Zum gerade verwendeten Maximumprinzip.

**Lemma 2.23.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ in $\Omega$ eine Lösung der elliptischen Differentialungleichung*

$$Lu \equiv a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \geq f$$

*mit gleichmäßig elliptischem $a^{ij}$, $d \leq 0$ und $a^{ij}, b^i, d, f \in L^\infty$. Dann gilt*

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + c(L, \Omega) \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Beweis.* Wegen

$$L\left(u - \sup_{\partial\Omega} u^+\right) = Lu - d \sup_{\partial\Omega} u^+ \geq f$$

dürfen wir ohne Einschränkung $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ annehmen. Gelte weiterhinn ohne Einschränkung $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 < 0\}$.

Setze $w := 1 - e^{\alpha x^1}$ für ein noch zu fixierendes $\alpha > 0$. Dann gelten

$$\begin{aligned} 0 < w <&\, 1, \\ w_i =& -e^{\alpha x_1} \alpha \delta_{1i}, \\ w_{ij} =& -e^{\alpha x_1} \alpha^2 \delta_{1i}\delta_{1j}, \\ Lw =& -e^{\alpha x^1}\left(\alpha^2 a^{11} + \alpha b^1 + d\right) + d \cdot 1 < -\varepsilon, \end{aligned}$$

für ein $\varepsilon > 0$, falls wir $\alpha = \alpha(L) > 0$ groß genug fixieren. Somit gilt für $W := w \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f\|_{L^\infty}$ die Differentialungleichung

$$LW < f.$$

Es gilt $u - W \leq -W < 0$ auf $\partial\Omega$. In einem positiven lokalen (inneren) Maximum von $u - W$ erhalten wir somit

$$0 < L(u - W) = a^{ij} \underbrace{(u - W)_{ij}}_{\preccurlyeq 0} + b^i \underbrace{(u - W)_i}_{=0} + \underbrace{d(u - W)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Widerspruch. Somit gilt $u - W \leq 0$ auch in $\Omega$ und die Behauptung folgt. $\square$

Die oben behauptete Aussage folgt nun durch Anwendung dieses Lemmas auf $u$ und $-u$.

**Bemerkung 2.24.** Beachte, dass die in der Abschätzung des letzten Theorems auftretende Konstante nur von der speziellen Überdeckung, der Zerlegung der Eins, der $C^{2,\alpha}$-Norm der Aufbiegetransformationen für $\partial\Omega$, von $|\Omega|$, den $C^{0,\alpha}$-Normen der Koeffizienten, der Elliptizitätskonstanten und von $\alpha$ sowie $n$ abhängt.

Analoge Abschätzungen bekommt man auch für schwache Lösungen. Auf der rechten Seite kann man dann die $\|u\|_{C^0}$-Norm durch die $\|u\|_{L^2}$-Norm oder eine ander $L^p$-Norm ersetzen, siehe [6].

### 2.6. **Höhere Regularität.**

**Theorem 2.25.** *Seien* $\partial\Omega \in C^{l,\alpha}$, $f \in C^{l-2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C^{l,\alpha}(\partial\Omega)$, $a^{ij}$, $b^i$, $d \in C^{l-2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $l \ge 2$, $0 < \alpha < 1$, *wobei* $a^{ij}$ *elliptisch ist und* $d \le 0$, *so gilt für eine Lösung* $u \in C^{l,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

*die Abschätzung*

$$\|u\|_{C^{l,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-2,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{l,\alpha}(\partial\Omega)} \right\}.$$

*Beweis.* Es genügt, den Induktionsschritt $l \to l+1$ zu zeigen. Sei wieder ohne Einschränkung $\varphi = 0$ und seien $U_k$ und $\zeta_k$ wie im Beweis von Theorem 2.21 gewählt.

Ist $U_k \subset \Omega$, so definieren wir für $1 \le i \le n$

$$v_k := D_i u_k$$

und wenden auf $v_k$ und die entsprechende Differentialgleichung die Induktionsvoraussetzung an

$$\|v_k\|_{C^{l,\alpha}(U_k)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{l+1,0}(\Omega)} \right\}.$$

Dabei haben wir die $C^{l,\alpha}$-Norm von $u$ durch die $C^{l+1,0}$-Norm abgeschätzt.

Ist $U_k \cap \partial\Omega \ne \emptyset$, so setzen wir für $1 \le i \le n-1$

$$v_k = D_i u_k.$$

Es gilt für eine geeignet definierte rechte Seite $f_k$ in $\mathbb{R}^n_+$ die Gleichheit $Lv_k = f_k$. Da $v_k(\hat{y}, 0) = 0$ gilt, erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung (verstehe dies nach Anwendung einer Aufbiegetransformation)

$$\|v_k\|_{C^{l,\alpha}(U_k\cap\Omega)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{l+1,0}(\Omega)} \right\}.$$

Für die Abschätzung von $D_n u_k$ benutzen wir die Differentialgleichung

$$Lu_k = f_k \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+$$

für geeignetes $f_k$ und erhalten

$$\begin{aligned} a^{nn} D_n D_n u_k = {} & f_k - b^i D_i u_k - d \cdot u_k \\ & - \sum_{i+j<2n} a^{ij} D_i D_j u_k. \end{aligned}$$

Diese Gleichung dividieren wir durch $a^{nn}$ und differenzieren sie nochmals nach $x^n$. Auf der linken Seite erhalten wir $D_n D_n D_n u_k$ und auf der rechten Seite erhalten wir bis zu dritte Ableitungen von $u_k$, jedoch ohne eine dreimalige Ableitung nach $x^n$. Somit haben wir die rechte Seite in $C^{l-2,\alpha}$ bereits beschränkt und es folgt

$$\|D_n D_n D_n u_k\|_{C^{l-2,\alpha}} \le c \cdot \{ \|f\|_{C^{l-1,\alpha}} + \|u\|_{C^{l+1,0}} \}.$$

Wir erhalten also

$$\|Du_k\|_{C^{l,\alpha}} \le c \cdot \{ \|f\|_{C^{l-1,\alpha}} + \|u\|_{C^{l+1,0}} \}.$$

Das Theorem folgt. □

**Theorem 2.26.** *Erfüllt der lineare Operator $L$ die Voraussetzungen von Theorem 2.25 nur lokal, so genügt eine Lösung $u \in C^{l,\alpha}(\Omega)$ der Gleichung $Lu = f$ den Abschätzungen*

$$\|u\|_{C^{l,\alpha}(\Omega')} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-2,\alpha}(\Omega'')} + \|u\|_{C^0(\Omega'')} \right\}$$

*für alle $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ und die Konstante hängt nun noch zusätzlich von $\Omega'$ und $\Omega''$ ab.*

*Beweis.* Übung, siehe auch [4]. □

2.7. **Stetigkeitsmethode.** Hier betrachtet man eine Familie von Randwertproblemen für einen Parameter $t \in [0,1]$. Die Familie ist dabei so gewählt, dass man das Randwertproblem für $t = 0$ bekanntermaßen eindeutig lösen kann und dass man für $t = 1$ das Randwertproblem bekommt, das man eigentlich lösen möchte. Dann zeigt man, dass die Menge der Parameter $t \in [0,1]$, für die man das entsprechende Randwertproblem eindeutig lösen kann, offen und abgeschlossen ist. Da diese Menge auch nichtleer ist, ist sie gleich dem gesamten Interval $[0,1]$ und man erhält insbesondere auch eine Lösung für $t = 1$.

Wir interessieren uns hier für das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei $L$ wie oben mit $d(x) \le 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit $C^{2,\alpha}$-Rand. Sei $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

**Bemerkung 2.27.** Wie man sich am Beispiel $x \mapsto |x|^\alpha$ überzeugt, approximieren Glättungen eine $C^{0,\alpha}$-Funktion im allgemeinen nicht in $C^{0,\alpha}$. (Die Glättungen approximieren aber in $C^{0,\beta}$ für $0 < \beta < \alpha$.) Daher werden wir nun $f$ und $g$ nur in $C^0$ bzw. $C^2$ approximieren. Beachte aber, dass die $C^{2,\alpha}$-Normen der approximierenden Funktionen trotzdem (bis auf eine feste Konstante) gleichmäßig durch die $C^{2,\alpha}$-Norm der ursprünglichen Funktion beschränkt sind.

Betrachte dazu

$$\begin{aligned} &\frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\le \int \underbrace{|f(x+z) - f(y+z)|}_{\le [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot |x-y|^\alpha} \eta_\varepsilon(z)\, dz \cdot \frac{1}{|x-y|^\alpha} \\ &\le [f]_{C^{0,\alpha}}. \end{aligned}$$

Wir benötigen zunächst

**Theorem 2.28** (Kellogg)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$. Sei $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Dann besitzt das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

*eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Die Lösung ist in $C^2\left(\Omega\right) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip.

Zunächst wollen wir $f$ und $g$ durch glatte Funktionen approximieren. Nach Fortsetzung und Glättung erhalten wir

$$\begin{aligned} C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \ni f_k \to f \quad &\text{in } C^0\left(\overline{\Omega}\right),\\ C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \ni g_k \to g \quad &\text{in } C^2\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

Die Probleme

$$\begin{cases} \Delta u_k = f_k & \text{in } \Omega,\\ u_k = g_k & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

betrachtet man nun als Randwertprobleme für (nach Abziehen der Randwerte) $w_k := u_k - g_k \in H_0^1(\Omega)$. Sie besitzen glatte Lösungen $w_k$ bzw. $u_k$ ($L^2$-Theorie). Aufgrund von Theorem 2.21 gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le\, & c(n,\alpha,\Omega)\cdot\left\{\|f_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right\}\\ \le\, & c(n,\alpha,\Omega)\cdot\left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right\}. \end{aligned}$$

Nach Arzelà-Ascoli konvergiert (ohne Einschränkung) $u_k \to u$ in $C^2$ für ein $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Insbesondere folgt also in $\Omega$ die Konvergenz $\Delta u_k \to \Delta u$ in $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, als kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Delta u_k \arrow[r, equal] \arrow[d] & f_k \arrow[d] \\ \Delta u \arrow[r, equal] & f. \end{tikzcd}$$

Ebenso konvergieren die Randwerte. Die Funktion $u$ ist damit die gesuchte Lösung. Sie erfüllt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c(n,\alpha,\Omega)\cdot\left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right\}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes konvergiert sogar die gesamte Folge. □

**Bemerkung 2.29.** Anhand des Beweises von Theorem 2.21 überzeugt man sich leicht, dass die Konstante in der Normabschätzung für eine Folge von $C^\infty$-Gebieten, die ein $C^{2,\alpha}$-Gebiet in $C^2$ mit beschränkter $C^{2,\alpha}$-Norm approximieren, d. h. wenn lokal die den Rand als Graphen darstellenden Funktionen in $C^2$ konvergieren, gleichmäßig gewählt werden kann.

Wir erhalten damit Kelloggs Theorem auch für $C^{2,\alpha}$-Gebiete: Wir setzen zunächst $g$ als $C^{2,\alpha}$-Funktion mit entsprechend kontrollierter Norm nach $\mathbb{R}^n$ fort und approximieren dann das Gebiet $\Omega$ durch glatte Gebiete $\Omega_k$, auf die die obige Version von Kelloggs Theorem anwendbar ist. Der Einfachheit halber wollen wir die Gebiete $\Omega_k$ stets so wählen, dass $\Omega \subset \Omega_k$ gilt. Dies erreicht man beispielsweise, indem man Abstandsniveauflächen zu $\partial\Omega$ glättet. Wir erhalten somit Lösungen $u_k$ mit gleichmäßigen $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega_k}\right)$-Abschätzungen. Somit sind auch die Funktionen $u_k|_\Omega$ in $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ gleichmäßig beschränkt. Eine Teilfolge davon (und wie man sich leicht überlegt, sogar die gesamte Folge, da der Grenzwert eindeutig bestimmt ist) konvergiert dann gegen die gewünschte Lösung.

Wir wollen das folgende Existenzresultat beweisen

**Theorem 2.30.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Sei $L$ wie in den Generalvoraussetzungen, Definition 2.20, mit*

$$d \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

*Dann gibt es zu jedem $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und jedem $g \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ des Dirichletproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Diese Lösung ist im Raum $C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Indem wir $u - g$ statt $u$ betrachten und $f$ entsprechend abändern, dürfen wir annehmen, dass $g \equiv 0$ gilt.

Wir definieren für $t \in [0,1]$ Differentialoperatoren $L_t$ durch

$$L_t = (1-t)\Delta + tL.$$

Beachte, dass alle Operatoren $L_t$ die Generalvoraussetzungen 2.20 mit von $t$ unabhängigen Konstanten $\lambda > 0$ und $K$ erfüllen. Weiterhin bleibt die Eigenschaft „$d(x) \leq 0$ in $\Omega$“ auch für $L_t$ erhalten. Für $t = 0$ liefert Kelloggs Theorem die Lösung. Für $t = 1$ behaupten wir, dass es eine Lösung gibt.

Wir kürzen Banachräume wie folgt ab

$$\begin{aligned} B_1 &:= C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : u|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \\ B_2 &:= C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

$B_1$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Als Norm können wir daher die $C^{2,\alpha}$-Norm verwenden.

Der Operator

$$L_t : B_1 \to B_2$$

ist ein beschränkter linearer Operator. Sei $u_t$ die Lösung von

$$\begin{cases} L_t u_t = f & \text{in } \Omega, \\ u_t = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

mit einer von $t$ unabhängigen Konstanten.

Wir haben also die folgenden Eigenschaften:

- $L_t \colon B_1 \to B_2$ ist ein beschränkter linearer Operator.
- $L_0 = \Delta$ ist nach Kellogg surjektiv.
- Die letzte a priori Schranke können wir auch als

  $$\|u\|_{B_1} \leq c \cdot \|L_t u\|_{B_2}$$

  für alle $u \in B_1$ schreiben.

Das Theorem folgt, wenn wir zeigen können, dass auch $L_1$ surjektiv ist. Dies erhalten wir aus dem folgenden Theorem. □

**Theorem 2.31.** *Seien $L_0$, $L_1 : B_1 \to B_2$ beschränkte lineare Operatoren zwischen Banachräumen $B_1$ und $B_2$. Wir definieren*

$$L_t := (1-t)L_0 + tL_1 \quad \text{für } 0 \le t \le 1.$$

*Gibt es eine von $t$ unabhängige Konstante $c$ mit*

$$\|u\|_{B_1} \le c\|L_t u\|_{B_2}$$

*für alle $u \in B_1$ und ist $L_0$ surjektiv, so ist auch $L_1$ surjektiv.*

*Beweis.* Beachte zunächst, dass die beiden Definitionen für $L_t$ insbesondere für $t = 0$ und $t = 1$ übereinstimmen.

Nehme an, dass $L_\tau$ für ein $\tau \in [0,1]$ surjektiv ist. Nach der Abschätzung für die Normen ist $L_\tau$ auch injektiv. Somit ist $L_\tau$ ein bijektiver Operator mit entsprechenden Normabschätzungen. (Aufgrund der Neumannschen Reihe bilden die invertierbaren (und damit auch die bijektiven) in beide Richtungen stetigen Operatoren eine offene Teilmenge von $L(\cdot,\cdot)$. Wir wollen jedoch eine quantitative Variante davon verwenden.) Die Inverse

$$L_\tau^{-1} : B_2 \to B_1$$

ist aufgrund der Bijektivität auch ein beschränkter linearer Operator. Sei $t \in [0,1]$ beliebig, $f \in B_2$. Wir schreiben die Gleichung $L_t u = f$ als

$$L_\tau u = f + (L_\tau - L_t)u = f + (t-\tau)(L_0 u - L_1 u)$$

um und weiter als Fixpunktgleichung in der Form

$$u = L_\tau^{-1} f + (t-\tau)L_\tau^{-1}(L_0 - L_1)u =: \Lambda u.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz finden wir einen solchen Fixpunkt, falls es ein $q < 1$ gibt, so dass für alle $u$, $v \in B_1$

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{B_1} \le q \cdot \|u - v\|_{B_1}$$

gilt. Es gilt

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{B_1} \le \underbrace{\left\|L_\tau^{-1}\right\|_{L(B_2,B_1)} \cdot \left(\|L_0\|_{L(B_1,B_2)} + \|L_1\|_{L(B_1,B_2)}\right) \cdot |t-\tau|}_{=:q} \cdot \|u-v\|_{B_1}.$$

Somit können wir $q < 1$ unabhängig von $\tau$ erreichen, wenn nur $|t-\tau|$ klein genug ist. In dieser Umgebung von $\tau$ ist $L_\tau u = f$ lösbar, d. h. $L_\tau$ ist dort surjektiv und damit auch bijektiv. Da die entsprechenden Umgebungen von $\tau$ unabhängig gewählt werden können, haben wir nach endlich vielen Schritten von $t = 0$ ausgehend auch die Bijektivität (und damit die Surjektivität) von $L_1$ bewiesen. Das Theorem folgt. □

**Bemerkung 2.32.** In unserem Spezialfall kann man auch die Menge aller $t \in [0,1]$ betrachten, für die $L_t$ surjektiv (und damit bijektiv) ist. Aufgrund der Neumannschen Reihe (Verallgemeinerung der geometrischen Reihe auf Operatoren) ist diese Menge offen. Die Schauderabschätzungen liefern (mit Arzelà-Ascoli) die Abgeschlossenheit. Nach Kellogg ist diese Menge nichtleer. Auch so folgt Theorem 2.30.

Führe die Details dazu als Übung aus.

## 3. A priori Abschätzungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Die nächsten Kapitel beschäftigen sich mit Anwendungen des parabolischen Maximumprinzips.

3.1. **Globale Abschätzungen.** Mit Hilfe der Darstellungsformel können wir eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung explizit hinschreiben. Daraus folgen auch Darstellungsformeln für Ableitungen, die es erlauben, Schranken für die Ableitung herzuleiten. Eleganter und auch leichter auf andere Gleichungen übertragbar ist jedoch die folgende Methode, solche Abschätzungen herzuleiten.

**Theorem 3.1.** *Sei $u : C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot{u} = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

*mit $u(x+p,t) = u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und alle $p \in \mathbb{Z}^n$, also eine periodische Lösung. Dann gilt*

$$|Du(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{t}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

*für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.*

Die Periodizität haben wir nur angenommen, um das Maximumprinzip anwenden zu können.

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren

$$w_\varepsilon(x,t) := u^2(x,t) + (t-\varepsilon)|Du(x,t)|^2$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [\varepsilon,\infty)$. Die Konstante $\varepsilon$ benötigen wir nur, da $t \cdot |Du(x,t)|^2$ für $t$ nahe 0 unbeschränkt werden könnte.

Wir behaupten, dass

$$w_\varepsilon(x,t) \le \max_{\mathbb{R}^n \times \{\varepsilon\}} w_\varepsilon \le \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))} \le \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})} \tag{3.1}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [\varepsilon,\infty)$ gilt. Die zweite Ungleichung ist offensichtlich, die dritte eine direkte Folgerung aus dem Maximumprinzip. Hieraus folgt:

$$(t-\varepsilon)|Du(x,t)|^2 \le u^2(x,t) + (t-\varepsilon)|Du(x,t)|^2 \le \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

und somit

$$|Du(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{t-\varepsilon}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (\varepsilon,\infty)$. (Man sieht, dass wir für $u^2(x,t)$ nahe bei $\|u\|^2_{L^\infty}$ eine bessere Abschätzung bekommen könnten.) Mit $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir hieraus die Behauptung des Theorems.

Wir beweisen nun Behauptung (3.1): Dazu berechnen wir $\dot{w}_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon(x,t) &= u^2(x,t) + (t-\varepsilon)\,|Du(x,t)|^2, \\
\dot{w}_\varepsilon &= 2u\,\dot{u} + |Du|^2 + 2(t-\varepsilon)u^k\,\dot{u}_k, \\
w_{\varepsilon i} &= 2u\,u_i + 2(t-\varepsilon)u^k\,u_{ki},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon ij} &= 2u\, u_{ij} + 2u_i\, u_j + 2(t-\varepsilon)u^k u_{kij} + 2(t-\varepsilon)u^k_j u_{ki}, \\ \dot{w}_\varepsilon - \Delta\, w_\varepsilon &= 2\, u(\dot{u} - \Delta u) + |Du|^2 - 2\,|Du|^2 + 2(t-\varepsilon)\, u^k(\dot{u} - \Delta u)_k \\ &\quad - 2(t-\varepsilon)\left|D^2 u\right|^2 \\ &\le 0. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Maximumprinzip. □

**Theorem 3.2.** *Sei $u$ eine periodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ wie in Theorem 3.1. Sei $t_0 \ge 0$. Dann gilt*

$$\left|D^2 u(x,t)\right| \le \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{t_0\})}$$

*für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t_0, \infty)$.*

*Beweis.* Betrachte

$$w(x,t) := |Du(x,t)|^2 + (t-t_0) \cdot \left|D^2 u(x,t)\right|^2$$

und argumentiere analog zum Beweis von Theorem 3.1. Die Details dazu lassen wir als einfache Übung.

Alternativ kann man benutzen, dass jede der Funktionen $u_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, Theorem 3.1 anwenden und die resultierenden Abschätzungen aufsummieren. □

Entsprechende Verallgemeinerungen gelten auch für höhere Ableitungen. Kombiniert man mehrere solche Abschätzungen, so folgt für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\tau := t/m$

$$\begin{aligned} |D^m u(x,t)| &= |D^m u(x, m\tau)| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left\|D^{m-1} u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{(m-1)\tau\})} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\tau}^2} \left\|D^{m-2} u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{(m-2)\tau\})} \\ &\le \ldots \le \frac{1}{\tau^{m/2}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})} = \frac{m^{m/2}}{t^{m/2}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \{0\})}. \end{aligned}$$

3.2. **Lokale Abschätzungen.** Als Vorbereitung für die lokalen Abschätzungen benötigen wir

**Lemma 3.3.** *Sei $\varphi \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \ge 0$. Dann gilt in allen Punkten mit $\varphi > 0$*

$$\frac{|D\varphi|^2}{\varphi} \le 2\|D^2\varphi\|_{L^\infty}.$$

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Wir möchten $\frac{|D\varphi|^2}{\varphi+\varepsilon}$ beschränken. Durch Einschränken auf eine Gerade können wir ohne Einschränkung $n = 1$ annehmen. Sei

$$w = \frac{\varphi'^2}{\varphi + \varepsilon}.$$

In einem Punkt, in dem $w$ maximal ist, gilt

$$0 = w' = \frac{2\varphi'\varphi''(\varphi+\varepsilon) - \varphi'^2\varphi'}{(\varphi+\varepsilon)^2}$$

und daher

$$2\varphi'' = \frac{\varphi'^2}{\varphi+\varepsilon}$$

und somit $w \le 2\left\|D^2\varphi\right\|_{L^\infty}$. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung. □

**Theorem 3.4** (Innere Abschätzungen). *Sei*

$$u \in C^3(B_R \times (0,T)) \cap C^0\left(\overline{B}_R \times [0,T]\right),$$

*mit $R, T > 0$, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $B_R \times (0,T)$. Sei $\varphi \in C^2_c(B_R \times [0,T])$ mit $\varphi \ge 0$. Definiere für $\lambda > 0$*

$$w := t\varphi|Du|^2 + \lambda u^2.$$

*Dann existiert $\lambda_0 = \lambda_0(T, \|\varphi\|_{C^2})$, so dass für $\lambda \ge \lambda_0$*

$$\sup_{B_R\times[0,T]} w \le \sup_{\mathcal{P}(B_R\times(0,T))} w$$

*gilt. Insbesondere gilt also*

$$t\varphi|Du|^2 \le \lambda \cdot \|u\|^2_{L^\infty(\mathcal{P}(B_R\times(0,T)))}$$

*in $B_R \times [0,T]$.*

*Beweis.* Wir lassen es wieder als Übung,

$$(t-\varepsilon)\varphi|Du|^2 + \lambda u^2$$

und später den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ zu betrachten und arbeiten wieder direkt mit $w$. Es gilt in Punkten mit $\varphi > 0$

$$\begin{aligned}
w &= t\varphi|Du|^2 + \lambda u^2,\\
\dot w &= \varphi|Du|^2 + t\dot\varphi|Du|^2 + 2t\varphi u^k \dot u_k + 2\lambda u\dot u,\\
w_i &= t\varphi_i|Du|^2 + 2t\varphi u^k u_{ki} + 2\lambda u u_i,\\
w_{ij} &= t\varphi_{ij}|Du|^2 + 2t\varphi_i u^k u_{kj} + 2t\varphi_j u^k u_{ki}\\
&\quad + 2t\varphi u^k_j u_{ki} + 2t\varphi u^k u_{kij} + 2\lambda u_i u_j + 2\lambda u u_{ij},\\
\dot w - \Delta w &= \varphi|Du|^2 + t(\dot\varphi - \Delta\varphi)|Du|^2\\
&\quad + 2t\varphi u^k(\dot u - \Delta u)_k - 4t\varphi^i u^j u_{ij}\\
&\quad - 2t\varphi\left|D^2u\right|^2 - 2\lambda|Du|^2 + 2\lambda u(\dot u - \Delta u)\\
&\le \varphi|Du|^2 + tc(\varphi)|Du|^2\\
&\quad + 2t\varphi\left|D^2u\right|^2 + 2t\frac{|D\varphi|^2}{\varphi}|Du|^2\\
&\quad - 2t\varphi\left|D^2u\right|^2 - 2\lambda|Du|^2
\end{aligned}$$

$$\leq (\varphi + tc(\varphi) - 2\lambda)|Du|^2 \leq 0,$$

wobei wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt und $\lambda \geq \lambda_0(T, \|\varphi\|_{C^2})$ angenommen haben. In Punkten mit $\varphi = 0$ gilt wegen $D\varphi = 0$ ebenfalls

$$\dot{w} - \Delta w \leq tc(\varphi)|Du|^2 - 2\lambda|Du|^2 + 2\lambda u(\dot{u} - \Delta u) \leq 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Maximumprinzip. □

**Bemerkung 3.5.**

(i) Eine Zeitabhängigkeit von $\varphi$ ist häufig nicht nötig, insbesondere, solange man mit dem Faktor $t$ arbeitet.

(ii) Eine schönere Abschätzung erhält man auf einem Zylinder der Form $B_R \times \left(0, cR^2\right)$, indem man $\varphi$ durch eine Funktion $\varphi_R(x) := \varphi\left(\frac{x}{R}\right)$ mit $\varphi \in C^2_c(B_1)$ mit $\varphi \geq 0$ ersetzt. Dann kann man $\lambda = \lambda(c, \|\varphi\|_{C^2})$ unabhängig von $R$ wählen. Details: Übung.

Entsprechende Abschätzungen gelten auch für höhere Ableitungen von $u$.

3.3. **Skalierte innere Abschätzungen.** Mit $(R, T) = (2, 1)$ erhalten wir

**Korollar 3.6** (Innere Abschätzungen)**.** *Sei*

$$u \in C^3(B_2 \times (0, 1)) \cap C^0\left(\overline{B}_2 \times [0, 1]\right)$$

*eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in* $B_2 \times (0, 1)$*. Dann gibt es ein* $C = C(n) > 0$*, so dass*

$$t|Du|^2 \leq C \cdot \|u\|^2_{L^\infty(\mathcal{P}(B_2 \times (0,1)))}$$

*in* $B_1(0) \times [0, 1]$ *gilt.*

Durch parabolische Skalierung ergibt sich daraus

**Korollar 3.7** (Skalierte innere Abschätzungen)**.** *Sei* $R > 0$ *und sei*

$$u \in C^3\left(B_{2R} \times \left(0, R^2\right)\right) \cap C^0\left(\overline{B}_{2R} \times \left[0, R^2\right]\right)$$

*eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in* $B_{2R} \times \left(0, R^2\right)$*. Dann gibt es ein* $C = C(n) > 0$*, so dass*

$$t|Du|^2 \leq C \cdot \|u\|^2_{L^\infty(\mathcal{P}(B_{2R} \times (0,R^2)))}$$

*in* $B_R \times \left[0, R^2\right]$ *gilt.*

*Insbesondere gilt für eine Lösung*

$$u \in C^3(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C^0\left(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)\right)$$

*der Wärmeleitungsgleichung in* $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ *die Abschätzung*

$$t|Du|^2 \leq C(n) \cdot \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))}$$

*in ganz* $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$*.*

Wir können dabei wieder $C$ aus Korollar 3.6 verwenden.

*Beweis.* Durch sogenanntes parabolisches Skalieren erhalten wir eine Funktion $w$ mit

$$\begin{aligned} w\colon B_2 \times [0,1] &\to \mathbb{R}, \\ w(x,t) &:= u\left(Rx, R^2t\right). \end{aligned}$$

Sofort einzusehen ist, dass auch $w$ die Wärmeleitungsgleichung löst. Wir wenden nun Korollar 3.6 auf $w$ an und erhalten aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned} tR^2 \left|Du\left(Rx, R^2t\right)\right|^2 &= t|Dw(x,t)|^2 \\ &\le C \cdot \|w\|_{L^\infty(\mathcal{P}(B_2\times(0,1)))} \\ &= C \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathcal{P}(B_{2R}\times(0,R^2)))} \end{aligned}$$

für $(x,t) \in B_1 \times [0,1]$. Mit Variablen $(y,\tau) := \left(Rx, R^2t\right)$ erkennt man nun direkt, dass dies die behauptete Abschätzung ist. □

Alternativ hätte man bereits bei den ersten inneren Abschätzungen eine Testfunktion verwenden können, die genau zur Skalierung der Wärmeleitungsgleichung passt.

## 4. Eigenwerte des Laplaceoperators

4.1. **Existenz und Basiseigenschaften.** Wir folgen [6, S. 231 ff.]. Sei hier stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $\partial\Omega \in C^\infty$. Bezeichne hier $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$.

**Theorem 4.1.** *Der kleinste Eigenwert des Laplaceoperators bei Dirichletrandwerten ist gegeben durch*

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u\in H^1_0(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\int\limits_\Omega |Du|^2}{\int\limits_\Omega u^2} \equiv \inf_{\substack{u\in H^1_0(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u,u\rangle} > 0.$$

*Es gibt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $u > 0$ in $\Omega$, so dass*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

*$\lambda_1$ ist ein Eigenwert der Vielfachheit eins.*

*Beweis.* Es gilt

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in H^1_0(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u,u\rangle} = \inf_{\substack{u\in H^1_0(\Omega)\\ \|u\|_{L^2}=1}} \langle Du, Du\rangle.$$

Das Infimum ist nichtnegativ. Somit gibt es eine Minimalfolge

$$u_i \in H^1_0$$

mit $\|u_i\|_{L^2} = 1$, d. h. es gilt

$$\langle Du_i, Du_i\rangle \to \lambda_1.$$

Da somit $\|u_i\|_{H_0^1}$ gleichmäßig beschränkt ist, gibt es eine (nicht umbenannte) Teilfolge mit $u_i \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Nach dem Rellichschen Kompaktheitssatz konvergiert diese Teilfolge in $L^2$: Es gilt
$$u_i \to u \text{ in } L^2$$
mit $\|u\|_{L^2} = 1$.

Da $\lambda_1$ das Infimum des Raleigh Quotienten ist, folgt
$$\|D(u_k + u_l)\|_{L^2}^2 \geq \lambda_1 \|u_k + u_l\|_{L^2}^2.$$

Es gilt die Parallelogrammgleichung
$$\|D(u_k - u_l)\|_{L^2}^2 + \|D(u_k + u_l)\|_{L^2}^2 = 2\|Du_k\|_{L^2}^2 + 2\|Du_l\|_{L^2}^2.$$

Kombination der beiden letzten Formeln liefert, da $u_k + u_l \to 2u$ für $k, l \to \infty$,
$$\begin{aligned}\|Du_k - Du_l\|_{L^2}^2 \leq & 2\|Du_k\|_{L^2}^2 + 2\|Du_l\|_{L^2}^2 - \lambda_1 \|u_k + u_l\|_{L^2}^2 \\ \to \quad & 2\lambda_1 + 2\lambda_1 - \lambda_1 \cdot 4\|u\|_{L^2}^2 \\ = & 0.\end{aligned}$$

Damit ist $u_k$ auch eine Cauchyfolge in $H_0^1(\Omega)$ und wir erhalten
$$\frac{\langle Du, Du\rangle}{\langle u, u\rangle} = \lambda_1.$$
Aufgrund der Poincaréschen Ungleichung gilt $\lambda_1 > 0$.

Sei nun $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Ist $|t|$ so klein, dass der Nenner im folgenden Bruch nicht verschwindet, so gilt
$$\frac{\langle D(u + t\varphi), D(u + t\varphi)\rangle}{\langle u + t\varphi, u + t\varphi\rangle} \geq \lambda_1$$
oder
$$\begin{aligned}0 \leq & \langle D(u + t\varphi), D(u + t\varphi)\rangle - \lambda_1 \langle u + t\varphi, u + t\varphi\rangle \\ = & \int\limits_\Omega |Du|^2 + 2t \int\limits_\Omega \langle Du, D\varphi\rangle + t^2 \int\limits_\Omega |D\varphi|^2 \\ & - \lambda_1 \int\limits_\Omega u^2 - \lambda_1 2t \int\limits_\Omega u\varphi - \lambda_1 t^2 \int\limits_\Omega \varphi^2.\end{aligned}$$
mit Gleichheit für $t = 0$. Aufgrund der Minimalität der rechten Seite für $t = 0$ verschwindet also ihre Ableitung an der Stelle $t = 0$
$$0 = \int\limits_\Omega \langle Du, D\varphi\rangle - \lambda_1 \int\limits_\Omega u\varphi.$$
Somit ist $u$ eine schwache Lösung von
$$\begin{cases}\Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$
Aufgrund der $L^2$-Regularitätstheorie für schwache Lösungen aus Kapitel 1.2 erhalten wir daher $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

• $u>0$: Definiere $u^+ := \max\{u,0\}$ und $u^- := \min\{u,0\}$. Es gilt (nicht vollkommen trivial)

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{f. ü. in } \{u\ge 0\},\\ 0 & \text{f. ü. in } \{u\le 0\}.\end{cases}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\lambda_1 =& \langle Du,Du\rangle = \langle Du^+,Du^+\rangle + \langle Du^-,Du^-\rangle\\ \ge& \lambda_1\langle u^+,u^+\rangle + \lambda_1\langle u^-,u^-\rangle \text{ nach Definition von } \lambda_1\\ =& \lambda_1\langle u,u\rangle = \lambda_1.\end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit, also

$$\langle Du^\pm, Du^\pm\rangle = \lambda_1\langle u^\pm,u^\pm\rangle$$

und $u^\pm$ minimiert das Funktional und ist deshalb eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u^\pm = \lambda_1 u^\pm & \text{in } \Omega,\\ u^\pm = 0 & \text{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$

Aufgrund der $L^2$-Regularitätstheorie ist $u^+$ eine klassische glatte Lösung. Wir erhalten $-\Delta u^+ \ge 0$ in $\Omega$. Aufgrund des Maximumprinzips gilt daher $u^+>0$ oder $u^+\equiv 0$ in $\Omega$. Analog schließt man für $u^-$ und erhält (ggf. nach Multiplikation mit $-1$) $u>0$.

• Vielfachheit$=1$: Sind $u$ und $v$ linear unabhängige Eigenvektoren (=Eigenfunktionen) zum Eigenwert $\lambda_1$, so wechselt eine geeignete Linearkombination davon in $\Omega$ das Vorzeichen und bleibt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$ im Widerspruch zur oben bewiesenen Positivität der ersten Eigenfunktion. □

**Theorem 4.2.** *Seien $(\lambda_i,\,u_i)$, $1\le i\le k$, die ersten $k$ Eigenwerte mit $\lambda_1\le\ldots\le\lambda_n$ und Eigenfunktionen (mit Vielfachheit). (Diese sind wie üblich bei Eigenwerten mit Vielfachheit nicht eindeutig bestimmt.) Dann ist der nächste Eigenwert*

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\substack{0\not\equiv u\in H^1_0(\Omega)\\ \langle u,u_i\rangle=0,\,1\le i\le k}} \frac{\langle Du,Du\rangle}{\langle u,u\rangle}.$$

*Es gibt $u_{k+1}\in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, so dass*

$$\begin{cases} \Delta u_{k+1} + \lambda_{k+1}u_{k+1} = 0 & \textit{in } \Omega,\\ u_{k+1} = 0 & \textit{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$

*gilt.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. Beachte, dass die Eigenschaft, schwache Lösung zu sein, zum Teil schon aus der Orthogonalitätsbedingung folgt. □

**Theorem 4.3.** *Es gibt abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_k$ des Laplaceoperators mit Dirichletrandwerten und es gilt*

$$\lambda_k\to\infty \textit{ für } k\to\infty.$$

*Die Eigenfunktionen $u_k$ bilden (bei Konstruktion wie oben und nach Normierung) eine Orthonormalbasis in $L^2(\Omega)$ und es gilt*

$$\begin{aligned} v = & \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle u_i \text{ für alle } v \in L^2, \\ \langle v, v \rangle = & \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in L^2, \\ \langle Dv, Dv \rangle = & \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in H_0^1. \end{aligned}$$

*Ist $v \in H_0^1(\Omega)$, so gilt*

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle u_i$$

*auch in $H_0^1(\Omega)$.*

*Beweis.* Falls $\lambda_k \le c$ für unendlich viele $k$ gilt, so folgt

$$\|Du_k\|_{L^2} \le c.$$

Nach Rellich konvergiert daher eine Teilfolge in $L^2$. Dies ist aber nicht möglich, da nach Konstruktion $\langle u_k, u_l \rangle = 0$ für $k \neq l$ gilt und somit

$$\|u_k - u_l\|_{L^2} = \sqrt{2} \not\to 0.$$

Definiere

$$H_m := \left\{ v \in H_0^1 : \langle v, u_i \rangle = 0 \text{ für } i \le m - 1 \right\}.$$

Sei zunächst $v \in L^2 \cap H_0^1 = H_0^1$. Definiere

$$\begin{aligned} \beta_i := & \langle v, u_i \rangle, \\ v_m := & \sum_{i \le m} \beta_i u_i, \\ w_m := & v - v_m. \end{aligned}$$

Dann ist $w_m$ die $L^2$-Orthogonalprojektion von $v$ auf $H_{m+1}$, $v_m$ ist orthogonal zu $H_{m+1}$. Also gilt für $i \le m$

$$\begin{aligned} \langle w_m, u_i \rangle = & 0, \\ \langle Dw_m, Dw_m \rangle \ge & \lambda_{m+1} \langle w_m, w_m \rangle. \end{aligned}$$

Sei $u_i$, $i \le m$, ein Eigenvektor. Dann folgt mit partieller Integration

$$\langle Dw_m, Du_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, w_m \rangle = 0, \tag{4.1}$$

also sind auch die Ableitungen orthogonal zueinander. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle w_m, w_m \rangle = & \langle v, v \rangle - 2\langle v, v_m \rangle + \langle v_m, v_m \rangle \\ = & \langle v, v \rangle - 2\langle w_m + v_m, v_m \rangle + \langle v_m, v_m \rangle \\ = & \langle v, v \rangle - \langle v_m, v_m \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle Dw_m, Dw_m\rangle = \langle Dv, Dv\rangle - \langle Dv_m, Dv_m\rangle \tag{4.2}$$

und

$$\begin{aligned}\langle w_m, w_m\rangle &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\langle Dw_m, Dw_m\rangle\\ &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\langle Dv, Dv\rangle \le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \to 0.\end{aligned}$$

Somit gilt $w_m \to 0$ in $L^2$ und wir erhalten die folgende in $L^2$ konvergente Summe

$$v = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, u_i\rangle u_i.$$

Für allgemeines $v \in L^2$ erhalten wir nun diese Formel durch Approximation in $L^2$ durch $H^1_0$-Funktionen. Als Vorbereitung zeigen wir: Gilt $v^k \to v$ in $L^2$ mit $v^k \in H^1_0$, so folgt gleichmäßig für alle $N$ aufgrund der Besselschen Ungleichung

$$\left\|v_N - v_N^k\right\|^2_{L^2} \equiv \left\|\sum_{i=1}^{N}\left\langle v - v^k, u_i\right\rangle u_i\right\|^2_{L^2} = \sum_{i=1}^{N}\left|\left\langle v - v^k, u_i\right\rangle\right|^2 \le \left\|v - v^k\right\|^2_{L^2},$$

da die Eigenfunktionen $u_i$ orthonormal zueinander sind. Damit erhalten wir

$$\|v - v_N\|_{L^2} \le \left\|v - v^k\right\|_{L^2} + \left\|v^k - v^k_N\right\|_{L^2} + \underbrace{\left\|v^k_N - v_N\right\|_{L^2}}_{\le\|v - v^k\|_{L^2}}$$

Nun fixieren wir zunächst $k$ groß, so dass der erste Term klein wird. Damit ist auch der dritte Term abgeschätzt. Da $v^k \in H^1_0$ ist und wir $k$ fixiert haben, wird der zweite Term aufgrund der obigen Rechnungen für $N \to \infty$ klein. Somit approximiert die Summe auch beliebige $v \in L^2$ bezüglich der $L^2$-Norm. Die $u_i$ sind also eine Orthonormalbasis für $L^2$.

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle u_i - v\right\|^2_{L^2}\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle^2 - 2\sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle^2 + \langle v, v\rangle\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\langle v, v\rangle - \sum_{i=1}^{N}\langle v, u_i\rangle^2\right).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle v, u_i\rangle^2.$$

Für $v \in H^1_0$ gilt

$$Dv_m = \sum_{i\le m}\beta_i Du_i.$$

Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung der $Du_i$ in $L^2$, d. h. $\langle Du_i, Du_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ (Rechnung dazu wie in (4.1)), folgt

$$\langle Dv, Dv\rangle \overset{(4.2)}{\geq} \langle Dv_m, Dv_m\rangle = \sum_{i\leq m} \beta_i^2 \langle Du_i, Du_i\rangle = \sum_{i\leq m} \beta_i^2 \lambda_i.$$

Da alle $\lambda_i$ positiv sind, ist der letzte Ausdruck, als Folge in $m$ aufgefasst, absolut konvergent. Somit gilt für $m < n$ wegen $Dw_m - Dw_n = Dv_n - Dv_m$

$$\|Dw_m - Dw_n\|_{L^2}^2 = \|Dv_n - Dv_m\|_{L^2}^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \beta_i^2 \to 0$$

für $m$, $n \to \infty$. Somit sind $Dw_m$ und $Dv_m$ Cauchyfolgen in $L^2$. Also konvergieren $w_m$ und $v_m$ in $H_0^1$. Die Grenzwerte stimmen mit den $L^2$-Grenzwerten überein und ist somit Null bzw. $v$. Somit folgt analog zu oben

$$\langle Dv, Dv\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i^2$$

für alle $v \in H_0^1$. □

4.2. **Separation der Variablen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ sei glatt. Seien $u_0$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Wir wollen die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

und

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (-\infty, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

lösen. Dabei beschreibt die Wärmeleitungsgleichung (4.3) die Wärmeverteilung in einem Körper $\Omega$ als Funktion der Zeit, wenn die Außenflächen eine konstante Temperatur haben. Die Wellengleichung beschreibt die Auslenkung der Membran einer wenig ausgelenkten Trommel.

**Wärmeleitungsgleichung.** Um die Gleichung (4.3) zu lösen, machen wir den Ansatz $u(x, t) := f(t)v(x)$, nehmen an, dass wir durch $u$ and $f$ in der Herleitung (formale Rechnung) teilen dürfen, und erhalten

$$\frac{1}{u}\left(\dot{u} - \Delta u\right) = \frac{v}{vf} \cdot \frac{d}{dt} f - \frac{f}{vf} \Delta v = \frac{1}{f} \cdot \frac{d}{dt} f - \frac{1}{v} \Delta v.$$

Wir haben also die Abhängigkeit von den beiden Variablen separiert. Gleichheit gilt somit, wenn $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt} f$ und $\frac{-\Delta v}{v}$ beide mit einer gegebenen Konstanten $\lambda$ übereinstimmen.

Eigenfunktionen $u$ des Laplaceoperators auf $\Omega$ mit Randwerten Null zu einem Eigenwert $\lambda$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gibt es nur für eine diskrete Menge von positiven Konstanten $\lambda$. Sei $(u_i, \lambda_i)$ ein solches Tupel.

Die Differentialgleichung $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt}f = \lambda$ besitzt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung $f(t) = f(0)e^{-\lambda t}$.

Nun löst $w(x,t) := \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dot{w} - \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Linearkombinationen von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind wieder Lösungen. Somit ist auch

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (4.3).

Ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ beliebig, so gibt es nach Theorem 4.3 Konstanten $\beta_i := \langle u_0, u_i \rangle$ für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so dass

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i.$$

Mit zusätzlicher Arbeit kann man nachweisen, dass nun

$$u(x,t) := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x) \tag{4.5}$$

in einem geeigneten Sinne das Anfangswertproblem (4.3) für positive Zeiten löst. Für positive Zeiten ist die Lösung glatt. Für $t = 0$ erhält man jedoch i. a. nur eine $L^2$-Funktion.

Diese Probleme bei $t = 0$ wollen wir für den Rest der Betrachtungen von (4.3) und (4.4) nicht weiter verfolgen.

Wir beobachten, dass hohe Frequenzen (große Eigenwerte) in (4.5) schneller abklingen als tiefe. Weiterhin kann man einen gemeinsamen Faktor $e^{-\lambda_1 t}$ ausklammern und sieht, dass $u(x,t)$ mindestens mit dieser Rate gegen Null konvergiert. Im generischen Fall, wenn $\beta_1 = \int_\Omega u_0 u_1 \neq 0$ ist, kann man die Lösung reskalieren. Es gilt dann

$$\frac{1}{\beta_1} e^{\lambda_1 t} u(x,t) \to u_1(x) \text{ für } t \to \infty.$$

Somit geht die Temperatur für große Zeiten gleichmäßig gegen Null und nach Reskalieren approximiert das Profil der Temperaturverteilung generisch die erste Eigenfunktion. Ist $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$, so approximiert man entsprechend die $k$-te Eigenfunktion.

**Wellengleichung.** Hier führt ein Ansatz $u(x,t) = f(t)v(x)$ zu
$$\frac{1}{u}(u_{tt} - \Delta u) = \frac{1}{f} f_{tt} - \frac{\Delta v}{v}$$
zum Gleichungssystem
$$-\frac{1}{f} f_{tt} = \lambda = -\frac{\Delta v}{v}.$$
Lösungen $u_i$ des rechten Teiles kennen wir bereits. Lösungen des ersten Teiles sind gegeben durch
$$f(t) = \alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right).$$
Der formale Ansatz
$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right)\right) u_i(x)$$
führt also zu
$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x), \\ u_t(x,0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i(x). \end{aligned}$$
Da die $u_i$ eine Orthonormalbasis von $L^2$ bilden, können wir damit das Anfangswertproblem (4.4) zumindest formal lösen. Im Unterschied zu (4.3) existiert solch eine Lösung für alle Zeiten, während im parabolischen Fall eine Lösung für negative Zeiten im allgemeinen nicht existiert, da die Exponentialfaktoren sofort die Konvergenz der Reihe zerstören; die rückwärtige Wärmeleitungsgleichung ist im Allgemeinen nicht lösbar.

Anschaulich bedeutet die angegebene Lösung, dass die betrachtete Membran eine Überlagerung von Eigenschwingungen ausführt. In der Musik bezeichnet man $\lambda_1$ als Grundton und $\lambda_i$, $i > 1$, als Obertöne. Diese sind von der Geometrie des Instrumentes abhängig.

Im Falle endlicher Summen liegt eine klassische Lösung vor und die formalen Rechnungen werden sofort rigoros.

## 5. Maximumprinzipien für parabolische Gleichungen

Wir folgen [7, 9].

### 5.1. **Schwaches Maximumprinzip.** In diesem Kapitel verallgemeinern wir Resultate, die wir bereits auf zylinderförmigen Gebieten kennen.

**Definition 5.1.**

(i) Sei $(x_0, t_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Sei $r > 0$. Dann definieren wir den parabolischen Zylinder $Q_r(x_0, t_0)$ durch
$$Q_r(x_0, t_0) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon |x - x_0| < r \text{ und } t_0 - r^2 < t < t_0\}.$$

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine beliebige offene Menge. Dann definieren wir den parabolischen Rand $\mathcal{P}\Omega$ durch

$$\mathcal{P}\Omega := \{(x,t) \in \partial\Omega \colon Q_r(x,t) \not\subset \Omega \text{ für alle } r > 0\}.$$

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Dann besteht das parabolische Einflussgebiet des Punktes $(x_0, t_0) \in \Omega$ aus allen Punkten $(x_1, t_1)$, so dass ein stetiger Weg $\gamma \colon [0,1] \to \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ mit $\gamma(0) = (x_0, t_0)$ und $\gamma(1) = (x_1, t_1)$ existert, so dass $t \mapsto \gamma^{n+1}(t)$ monoton fallend (= nichtwachsend) ist, d. h. die Zeit $t$ ist entlang von $\gamma$ monoton fallend: $\gamma^{n+1}(t_2) \le \gamma^{n+1}(t_1)$ für alle $0 \le t_1 < t_2 \le 1$.

**Theorem 5.2** (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt. Definiere den parabolischen Operator $L$ durch*

$$Lu := -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + du$$

*mit $a^{ij}, b^i, d \in L^\infty$, $1 \le i,j \le n$. Sei $a^{ij}$ gleichmäßig elliptisch, d. h. es gebe ein $\vartheta > 0$ mit*

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2 \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Gelte ohne Einschränkung $a^{ij} = a^{ji}$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ eine Lösung von $Lu \ge 0$ in $\Omega$.*

*(a) Ist $d \equiv 0$, so gilt*

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\mathcal{P}\Omega} u.$$

*(b) Falls $d \le 0$ in $\{(x,t) \in \Omega \colon u(x,t) > 0\}$ gilt, erhalten wir*

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\mathcal{P}\Omega} \max\{u, 0\}.$$

*(c) Ist $d \in L^\infty$ beliebig und $\sup\limits_{\mathcal{P}\Omega} u \le 0$, so folgt*

$$\sup_\Omega u \le 0.$$

Das Resultat gilt auch, wenn $t$ in $\Omega$ nicht nach oben beschränkt ist: Man approximiert in diesem Fall $\Omega$ durch Gebiete $\Omega \cap \{(x,t) \colon t < T\}$ und lässt am Ende $T \to \infty$.

*Beweis.*

(i) Gelte zunächst $d \equiv 0$ und $Lu > 0$ in $\Omega$. Wäre die Behauptung (a) verletzt, so gäbe es $\varepsilon > 0$ und $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ mit $u(x_0, t_0) = \sup\limits_{\mathcal{P}\Omega} u + \varepsilon$ und $u(x,t) \le u(x_0, t_0)$ für alle $(x,t) \in \Omega$ mit $t \le t_0$. Zusätzlich dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u(x,t) < u(x_0,t_0)$ für $(x,t) \in \Omega$ mit $t < t_0$ gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(I) Ist $(x_0, t_0) \in \Omega$, so gilt dort $\dot{u} \ge 0$, $u_{ij} \preccurlyeq 0$ und $u_i = 0$. Somit erhalten wir dort $Lu \le 0$. Widerspruch.

(II) Da dieser Beweisteil zwar kompliziert aussieht, aber auf einer einfachen Idee beruht, beschreiben wir unser Vorgehen zunächst einmal in Worten: Wir wollen wie in (iI) einen Widerspruch zeigen. Dazu betrachten wir vor $t_0$ in der Zeit abgeschnittene Gebiete $\left\{t < t_0 - \frac{1}{i}\right\}$ und erhalten für diese Gebiete Maximalpunkte $(x_i, t_i)$. Für $i \to \infty$ erhalten wir eine konvergente Teilfolge mit Limes $(x^*, t^*) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}\Omega$ und $t^* = t_0$. Ein kleiner parabolischer Zylinder um den Limespunkt liegt in $\Omega$. Die Maximalpunkte $(x_i, t_i)$ liegen auch in diesem Zylinder und somit können wir wie in (iI) vorgehen und erhalten ebenfalls einen Widerspruch.

Ist $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, so erhalten wir mit Hilfe von $\varepsilon$ sogar $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}\Omega$. Somit gibt es $r > 0$ mit $Q_r(x_0, t_0) \subset \Omega$. Definiere $T_i := t_0 - \frac{1}{i}$ und $\Omega_i := \{(x, t) \in \Omega \colon t < T_i\}$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $i$ so groß ist, dass $\Omega_i \neq \emptyset$ gilt. Wähle $(x_i, t_i) \in \overline{\Omega_i}$ mit $u(x_i, t_i) = \sup\limits_{\Omega_i} u$ und $u(x, t) \le u(x_i, t_i)$ für alle $(x, t) \in \Omega_i$ mit $t < t_i$. Aufgrund der obigen Überlegungen gilt dann $(x_i, t_i) \in \partial\Omega_i$. Da $u$ in $\overline{\Omega}$ stetig ist und $Q_r(x_0, t_0) \subset \Omega$ gilt, folgt $\lim\limits_{i\to\infty} u(x_i, t_i) = u(x_0, t_0)$. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von $((x_i, t_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Ohne Einschränkung gelte für die gesamte Folge $(x_i, t_i) \to (x^*, t^*)$. Wir erhalten $u(x^*, t^*) = u(x_0, t_0)$ und $u(x, t) \le u(x^*, t^*)$ für alle $(x, t) \in \Omega$ mit $t < t^*$. Aufgrund der obigen Überlegungen gilt $(x^*, t^*) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}\Omega$ („$\notin \Omega$“haben wir oben bereits gezeigt und nach Wahl von $\varepsilon$ folgt auch „$\notin \mathcal{P}\Omega$“). Somit gibt es ein $\delta > 0$ mit $Q_\delta(x^*, t^*) \subset \Omega$. Wir bemerken, dass $t_i < t_0$ nach Konstruktion gilt, also auch $t^* \le t_0$, und wegen $u(x^*, t^*) = u(x_0, t_0)$ und der Wahl von $(x_0, t_0)$ mit $u(x, t) < u(x_0, t_0)$ für $t < t_0$ folgt $t_0 = t^*$. Damit ist aber aufgrund der Konvergenz $(x_i, t_i) \to (x^*, t^*)$ und $t_i < t^* = t_0$ auch $(x_i, t_i) \in \Omega$, falls $i$ groß genug ist. In $(x_i, t_i)$ gilt jedoch $\dot{u} \ge 0$, $u_{ij} \preccurlyeq 0$, $u_i = 0$ im Widerspruch zu $Lu > 0$.

(ii) Sei nun $d \equiv 0$ und $Lu \ge 0$. Dann erfüllt $u - t\varepsilon$ für beliebige $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $L(u - t\varepsilon) > 0$ in $\Omega$. Mit (i) erhalten wir

$$\sup_{\Omega}(u - t\varepsilon) \le \sup_{\mathcal{P}\Omega}(u - t\varepsilon).$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Behauptung (a).

(iii) Gelte nun $d \le 0$ in $\{(x, t) \in \Omega \colon u(x, t) > 0\}$. Wir definieren

$$\tilde{\Omega} := \{(x, t) \in \Omega \colon u(x, t) > 0\}$$

und $L_0 w := -\dot{w} + a^{ij} w_{ij} + b^i w_i$. Ist $\tilde{\Omega} = \emptyset$, so ist die Behauptung (b) klar. Sei also $\tilde{\Omega} \neq \emptyset$. Dann gilt in $\tilde{\Omega}$ nach Voraussetzung $0 \le Lu = L_0 u + du \le L_0 u$. Wir wenden nun (ii) mit $\tilde{\Omega}$ und $L_0$ an und erhalten wegen $\mathcal{P}\tilde{\Omega} \subset \mathcal{P}\Omega \cup \{(x, t) \colon u(x, t) = 0\}$ (benutze eine Fallunterscheidung $u > 0$ und $u = 0$) die Behauptung (b):

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\tilde{\Omega}} u \le \sup_{\mathcal{P}\tilde{\Omega}} u = \sup_{\mathcal{P}\Omega} \max\{u, 0\}.$$

(iv) Für den Beweis von (c) wählen wir $k \ge 0$ mit $|d| \le k$ und definieren $w(x,t) := u(x,t) \cdot e^{-kt}$. Mit $\dot w = \dot u e^{-kt} - kue^{-kt} = \dot u e^{-kt} - kw$ folgt
$$\begin{aligned} 0 \le & (Lu) \cdot e^{-kt} \\ = & \left(-\dot u + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + du\right) \cdot e^{-kt} \\ = & -\dot w + a^{ij} w_{ij} + b^i w_i + dw - kw \\ = & \tilde L w, \end{aligned}$$
wozu wir
$$\tilde L v := -\dot v + a^{ij} v_{ij} + b^i v_i + (d-k)v$$
definieren. Wegen $d-k \le 0$ können wir (b) auf $\tilde L w \ge 0$ anwenden und erhalten
$$\sup_{\Omega} u(\cdot,t)e^{-kt} \le \sup_{\mathcal{P}\Omega} u(\cdot,t)e^{-kt} \le 0.$$
Die Behauptung folgt. $\square$

## 5.2. **Hopfsches Randpunktlemma.**

**Theorem 5.3** (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $t_0 - r_0 < t_1 < t_0 + r_0$. Definiere $\Omega := \{(x,t) \in B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0) \colon t < t_1\}$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*
$$Lu := -\dot u + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + du \ge 0 \quad \text{in } \Omega$$
*mit $a^{ij}, b^i, d \in L^\infty$, symmetrischem $a^{ij}$ und einem $\vartheta > 0$, so dass $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ überall in $\Omega$ gilt. Gelte $u < M$ in $\Omega \cup \{(x,t_1) \colon |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$ und $u(x_1,t_1) = M$ für ein $x_1$ mit $(x_1,t_1) \in \partial B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0)$. (Somit gilt $x_0 \ne x_1$.)*

*(i) Sei $d \equiv 0$. Falls $u$ in $(x_1,t_1)$ differenzierbar ist, ist jede nach außen weisende Richtungsableitung von $u$ positiv, d. h. für die zugehörige Richtung $\xi$ gilt $\langle \xi, (x_1 - x_0, t_1 - t_0)\rangle > 0$ und $\xi^{n+1} \ge 0$, insbesondere gilt also*
$$\langle Du(x_1,t_1), x_1 - x_0\rangle > 0.$$
*Allgemein gilt für jedes $\delta > 0$*
$$\liminf_{\substack{\overline{\Omega}\setminus\{(x_1,t_1)\} \ni (x,t) \to (x_1,t_1) \\ \left\langle \frac{(x,t)-(x_1,t_1)}{|(x,t)-(x_1,t_1)|}, \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \frac{u(x_1,t_1) - u(x,t)}{|(x_1,t_1) - (x,t)|} > 0.$$

*(ii) Ist $d \le 0$, so gilt dieselbe Aussage falls $u(x_1,t_1) \ge 0$ ist.*

*(iii) Ist $u(x_1,t_1) = 0$, so gilt dieselbe Aussage auch ohne eine Vorzeichenbedingung an $d$.*

*Beweis.* Indem wir statt $B_{r_0}(x_0,t_0)$ einen etwas kleineren Ball betrachten, der in $(x_1,t_1)$ dieselbe Tangentialebene hat, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u < M$ in $\overline{\Omega} \setminus \{(x_1,t_1)\}$ gilt. Sei $r > 0$ mit $|x_0 - x_1| > 2r$. Definiere
$$D := B^{n+1}_r(x_1,t_1) \cap \Omega$$
sowie den Abschluss des Teils des parabolischen Randes von $D$ in $\Omega$
$$\partial_i D := \overline{\partial D \cap \Omega}$$

und den Teil des parabolischen Randes von $D$ außerhalb von $\Omega$

$$\partial_a D := \partial D \cap \partial B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0).$$

Es gilt $\mathcal{P}D = \partial_i D \cup \partial_a D$. Da wir $B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0)$ anfangs gegebenenfalls verkleinert haben folgt $u < M$ auf $\partial_i D$. Somit gibt es $\eta > 0$ mit $u < M - \eta$ auf $\partial_i D$. Weiterhin gilt $u \le M$ auf $\partial_a D$.

Definiere für $\alpha > 0$ die Hilfsfunktion

$$v(x,t) := e^{-\alpha\left(|x-x_0|^2+(t-t_0)^2\right)} - e^{-\alpha r_0^2}.$$

Dann gilt $v = 0$ unabhängig von der Wahl von $\alpha$ auf $\partial B^{n+1}_{r_0}(x_0,t_0) \supset \partial_a D$. Die Funktion $v$ erfüllt die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} Lv = & 2\alpha e^{-\alpha\left(|x-x_0|^2+(t-t_0)^2\right)} \cdot \\ & \qquad \cdot \left((t-t_0) + 2\alpha a^{ij}(x-x_0)_i(x-x_0)_j - a^{ij}\delta_{ij} - b^i(x-x_0)_i + \frac{1}{2\alpha}d\right) \\ & + \underbrace{d}_{\le 0} \cdot \underbrace{\left(-e^{-\alpha r_0^2}\right)}_{\le 0} \\ > & 0 \end{aligned}$$

für $\alpha \gg 1$ in $\overline{D}$, falls $d \le 0$ (oder $d \equiv 0$) gilt. Fixiere $\alpha \gg 1$ entsprechend.

Gelte also zunächst $d \le 0$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $w := u + \varepsilon v - M$ die Ungleichung $w \le 0$ auf $\partial_a D$ (da dort $v$ verschwindet) und auf $\partial_i D$ (falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist) erfüllt. Weiterhin gilt

$$Lw = Lu + \varepsilon Lv - dM > 0 + \varepsilon \cdot 0 - du(x_1,t_1) \ge 0.$$

Somit folgt aufgrund des schwachen Maximumprinzips $w \le 0$ in $D$. Mit $w(x_1,t_1) = 0$ erhalten wir

$$\liminf_{\substack{\overline{\Omega}\setminus\{(x_1,t_1)\}\ni(x,t)\to(x_1,t_1)\\ \left\langle \frac{(x,t)-(x_1,t_1)}{|(x,t)-(x_1,t_1)|}, \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \frac{w(x_1,t_1)-w(x,t)}{|(x_1,t_1)-(x,t)|} \ge 0.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} & \limsup_{\substack{\overline{\Omega}\setminus\{(x_1,t_1)\}\ni(x,t)\to(x_1,t_1)\\ \left\langle \frac{(x,t)-(x_1,t_1)}{|(x,t)-(x_1,t_1)|}, \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \frac{v(x_1,t_1)-v(x,t)}{|(x_1,t_1)-(x,t)|} \\ \le & \sup_{\substack{(\xi,\tau)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\cap\mathbb{S}^n\\ \left\langle (\xi,\tau), \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \langle -(Dv,\dot v)(x_1,t_1), (\xi,\tau)\rangle \end{aligned}$$

(man könnte auch noch $\tau \ge 0$ fordern)

$$\begin{aligned} = & -2\alpha e^{-\alpha\left(|x_1-x_0|^2+(t_1-t_0)^2\right)} \cdot \underbrace{\inf_{\substack{(\xi,\tau)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\cap\mathbb{S}^n\\ \left\langle (\xi,\tau), \frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}\right\rangle > \delta}} \langle -(x_1-x_0, t_1-t_0), (\xi,\tau)\rangle}_{>0} \\ < & 0. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung im Falle $d \equiv 0$ oder $d \le 0$.

Ist $M = 0$ und $d$ beliebig, so definieren wir für ein $k$ mit $k \ge \sup\limits_\Omega |d|$ den Differentialoperator $\tilde L$ durch

$$\tilde L u := -\dot u + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + (d-k)u.$$

Es gilt

$$\tilde L u = \underbrace{Lu}_{\ge 0} - \underbrace{k}_{\ge 0}\underbrace{u}_{\le 0} \ge 0.$$

Wegen $d - k \le 0$ folgt die Behauptung damit aus dem Fall „$d \le 0$“. □

Das folgende Korollar heißt ebenfalls Hopfsches Randpunktlemma.

**Korollar 5.4** (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$ ($C^{1,1}$ genügt auch). Sei $T > 0$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^0\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu := -\dot u + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \ge 0 \quad \text{in } \Omega$$

*mit $a^{ij}$, $b^i$, $d \in L^\infty$, symmetrischem $a^{ij}$ und einem $\vartheta > 0$, so dass $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ überall in $\Omega$ gilt. Gelte $u < M$ in $\Omega \times (0,T)$ und $u(x_1,t_1) = M$ für ein $(x_1,t_1) \in \partial\Omega \times (0,T]$. Dann gelten die Folgerungen wie im Hopfschen Randpunktlemma 5.3, wobei $x_0$ der Mittelpunkt einer inneren Kugel zu $\Omega$ ist, d. h. es gelte $B_r(x_0) \subset \Omega$, $\partial B_r(x_0) \cap \partial\Omega = \{x_1\}$ für ein $r > 0$, und $\Omega$ dort in der Folgerung durch $\Omega \times (0,t_1)$ und $\frac{(x_0,t_0)-(x_1,t_1)}{|(x_0,t_0)-(x_1,t_1)|}$ durch $-\nu$ ($\nu$ = äußere Normale) zu ersetzen sind.*

*Beweis.* Benutze das Hopfsche Randpunktlemma, Theorem 5.3. □

5.3. **Harnackungleichung.** Für Operatoren, die nicht in Divergenzform sind, erhalten wir die folgende Harnackungleichung.

**Theorem 5.5** (Harnackungleichung)**.** *Seien $R, T > 0$. Definiere*

$$Q := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x| < R,\ -T < t < 0\right\}.$$

*Sei $u \in C^{2;1}(Q) \cap C^0\left(\overline{Q}\right)$ mit $u \ge 0$ in $Q$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu \equiv -\dot u + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \le 0$$

*in $Q$ mit $a^{ij}$, $b^i, d \in L^\infty$ und $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ überall in $Q$ für ein $\lambda > 0$. Seien $h > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac12$ mit*

$$u \ge h \quad \text{in } B_{\varepsilon R}(0) \times \{-T\}.$$

*Dann gibt es $\kappa = \kappa\left(R, T, \lambda, \left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty}, \left\|b^i\right\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty}\right) > 0$, so dass*

$$u \ge \varepsilon^\kappa \frac{h}{2} \quad \text{in } B_{R/2}(0) \times \{0\}$$

*gilt.*

*Beweis.* Definiere

$$\psi_0 := R^2 + (1-\varepsilon^2)\cdot R^2 \cdot \frac{t}{T}$$

und

$$\psi_1 := \psi_0 - |x|^2.$$

Definiere für ein noch zu wählendes $q \geq 2$ die Funktion $\psi := \psi_1^2\psi_0^{-q}$. Setze

$$\tilde{Q} := \{(x,t) \in Q \colon \psi_0 > |x|^2\}.$$

Dann ist $\psi \in C^{2;1}\big(\tilde{Q}\big)$.

Wir möchten nun zeigen, dass es $q = q\left(R, T, \lambda, \left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty}, \left\|b^i\right\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty}\right) \gg 1$ gibt, so dass die Ungleichung $L\psi \geq 0$ in $\tilde{Q}$ gilt. Dort erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_1^2\psi_0^{-q},\\
\dot{\psi} &= 2\psi_1\psi_0^{-q}(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T} - q\psi_1^2\psi_0^{-q-1}(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T},\\
\psi_i &= 2\psi_1\psi_0^{-q}(-2x_i),\\
\psi_{ij} &= 2\psi_0^{-q}(-2x_i)(-2x_j) + 2\psi_1\psi_0^{-q}(-2\delta_{ij}),\\
L\psi &= \psi_0^{-q}\Bigg(q(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\frac{\psi_1^2}{\psi_0} - 2(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\psi_1\\
&\qquad\qquad + 8a^{ij}x_ix_j - 4a^{ij}\delta_{ij}\psi_1 - 4b^ix_i\psi_1 + d\psi_1^2\Bigg)
\end{aligned}$$

und mit $\xi := \frac{\psi_1}{\psi_0}$

$$\begin{aligned}
&\geq \psi_0^{1-q}\Bigg(q(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\xi^2 - 2(1-\varepsilon^2)\frac{R^2}{T}\xi\\
&\qquad\qquad - 4a^{ij}\delta_{ij}\xi - 4b^ix_i\xi + d\frac{\psi_1^2}{\psi_0} + 8\lambda\frac{|x|^2}{\psi_0}\Bigg).
\end{aligned}$$

Wegen $|\psi_1| \leq |\psi_0| \leq R^2$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ erhalten wir mit der Konstanten

$$c = c\left(R, T, \left\|a^{ij}\right\|_{L^\infty}, \left\|b^i\right\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty}\right)$$

die Abschätzung

$$L\psi \geq \psi_0^{1-q}\left(\frac{q}{2}\frac{R^2}{T}\xi^2 - c\xi + 8\lambda\frac{|x|^2}{\psi_0}\right).$$

Wir unterscheiden nun die Fälle $\xi \geq \frac{1}{2}$ und $\xi \leq \frac{1}{2}$: Ist $1 \geq \xi \geq \frac{1}{2}$, so sind die beiden ersten Terme auf der rechten Seite für $q \geq \frac{4cT}{R^2}$ nichtnegativ und wir erhalten $L\psi \geq 0$ in $\tilde{Q}$. Ist $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$, so folgt aus $\frac{1}{2} \geq \xi = \frac{\psi_1}{\psi_0} = \frac{\psi_0 - |x|^2}{\psi_0}$ die Ungleichung $\frac{1}{2}\psi_0 \leq |x|^2$ oder $\frac{|x|^2}{\psi_0} \geq \frac{1}{2}$. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}
L\psi &\geq \psi_0^{1-q}\left(\frac{q}{2}\frac{R^2}{T}\xi^2 - c\frac{\sqrt{4\lambda}}{\sqrt{4\lambda}}\xi + 4\lambda\right)\\
&\geq \psi_0^{1-q}\left(\frac{q}{2}\frac{R^2}{T}\xi^2 - \frac{c^2\xi^2}{4\lambda}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

falls $q \geq \frac{c^2T}{2\lambda R^2}$ gilt. Wir dürfen ohne Einschränkung $\lambda \leq 1$ und $c \geq 1$ annehmen und erhalten für $q \geq \frac{4c^2T}{\lambda R^2}$ die Ungleichung $L\psi \geq 0$ in $\tilde{Q}$.

Auf $\mathcal{P}\tilde{Q} \cap \{t > -T\}$ gilt $\psi = \psi_1 = 0$. Auf $\mathcal{P}\tilde{Q} \cap \{t = -T\}$ gelten $\psi_0 = \varepsilon^2R^2$, $\psi_1 = \varepsilon^2R^2 - |x|^2$ und somit $|x| \leq \varepsilon R$. Definiere $\tilde{\psi} := h(\varepsilon R)^{2q-4}\psi$. Dann gilt auf

$\mathcal{P}\tilde{Q} \cap \{t = -T\}$ die Ungleichung

$$\tilde{\psi} = h \cdot (\varepsilon R)^{2q-4} \cdot \left(\varepsilon^2 R^2 - |x|^2\right)^2 \cdot \left(\varepsilon^2 R^2\right)^{-q} \le h \le u.$$

Auf dem Rest von $\mathcal{P}\tilde{Q}$ gilt $0 = \tilde{\psi} \le u$ ebenfalls. Somit folgt

$$\begin{cases} L\left(\tilde{\psi} - u\right) \ge 0 & \text{in } \tilde{Q}, \\ \tilde{\psi} - u \le 0 & \text{auf } \mathcal{P}\tilde{Q}. \end{cases}$$

Aufgrund des schwachen Maximumprinzips erhalten wir $\tilde{\psi} - u \le 0$ in $\tilde{Q}$. Für $t = 0$ und $|x| < \frac{R}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} u \ge \tilde{\psi} &= h(\varepsilon R)^{2q-4}\psi = h(\varepsilon R)^{2q-4}\psi_1^2\psi_0^{-q} \\ &= h(\varepsilon R)^{2q-4}\left(R^2 - |x|^2\right)^2 R^{-2q} \\ &\ge h\varepsilon^{2q-4}R^{-4}\frac{9}{16}R^4 \ge \frac{1}{2}h\varepsilon^{2q-4}. \end{aligned}$$

Mit $\kappa = 2q - 4$ erhalten wir somit die Behauptung. $\square$

5.4. **Striktes Maximumprinzip.** Als Vorbereitung zeigen wir zunächst eine Version des strikten Maximumprinzips für zylinderförmige Gebiete.

**Lemma 5.6.** *Seien $R, T > 0$. Sei $\Omega = B_{3R}(0) \times (-T, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu = -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \le 0 \quad \text{in } \Omega$$

*mit $a^{ij}$, $b^i$, $d \in L^\infty$ und $a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ überall in $\Omega$ für ein $\vartheta > 0$. Gelte $u \ge 0$ in $\Omega$ und $u(0,0) = 0$. Dann gilt $u \equiv 0$ in $B_R(0) \times [-T, 0]$.*

*Beweis.* Falls nicht, so existiert $(x_0, t_0) \in B_R(0) \times (-T, 0)$ mit $u(x_0, t_0) > 0$. Da $u$ stetig ist brauchen wir den Fall $t_0 \in \{-T, 0\}$ nicht zu betrachten. Aufgrund der Stetigkeit von $u$ existieren $h > 0$ und $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ mit $u \ge h$ in $B_{2\varepsilon R}(x_0) \times \{t_0\}$. Nach Lemma 5.5, angewandt auf $Q = B_{2R}(x_0) \times [t_0, 0]$, gibt es $\kappa > 0$, so dass

$$u \ge \varepsilon^\kappa \frac{h}{2} \quad \text{in } B_R(x_0) \times \{0\}$$

gilt. Wegen $0 \in B_R(x_0)$ und

$$0 = u(0,0) \ge \varepsilon^\kappa \frac{h}{2} > 0$$

erhalten wir einen Widerspruch. Somit folgt $u \equiv 0$ in $B_R(0) \times [0, T]$. $\square$

Das Argument lässt sich induktiv anwenden und liefert $u \equiv 0$ in der Menge $B_{3R}(0) \times (-T, 0)$.

Damit erhalten wir das strikte parabolische Maximumprinzip für allgemeine beschränkte Gebiete.

**Theorem 5.7** (Striktes parabolisches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung der Differentialungleichung*

$$Lu = -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \ge 0 \quad \text{in } \Omega$$

*mit $a^{ij}$, $b^i$, $d \in L^\infty$ und gelte für ein $\vartheta > 0$ überall in $\Omega$ die Elliptizitätsbedingung $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \vartheta|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

*Sei $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ mit*

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}} u =: M.$$

*(i) Ist $d \equiv 0$ oder*

*(ii) $d \leq 0$ und $u(x_0, t_0) \geq 0$ oder*

*(iii) $d$ beliebig und $u(x_0, t_0) = 0$ oder*

*(iv) $Lu \geq d \cdot M$, aber nicht notwendigerweise $Lu \geq 0$,*

*so ist $u$ im parabolischen Einflussgebiet von $(x_0, t_0)$ konstant.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage nur letzten Fall. In allen anderen Fällen folgt die Behauptung direkt daraus.

Definiere $w := M - u$. Dann gilt mit $Lw \equiv L_0 w + dw$

$$Lw = dM - Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Es gilt $w \geq 0$ mit Gleichheit in $(x_0, t_0)$.

Sei $\gamma\colon [0, 1] \to \Omega$ eine Kurve wie in der Definition des parabolischen Einflussgebietes eines Punktes mit $\gamma(0) = (x_0, t_0)$. Schreibe $\gamma(a) = (x_a, t_a)$. Wir behaupten, dass $w(\gamma(t)) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Da $w \circ \gamma$ stetig ist, gilt $w(\gamma(t)) = 0$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge von $[0, 1]$. Sei $a \in [0, 1]$ maximal, so dass $w(\gamma(t)) = 0$ auf $I := [0, a]$ gilt. Wir behaupten, dass $a = 1$ ist. Benutze, dass

$$\begin{cases} Lw \leq 0 & \text{in } \Omega, \\ w \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{in } (x_a, t_a) \end{cases}$$

gelten. Wegen $(x_a, t_a) \in \overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\Omega$ gibt es $R > 0$ und $T > 0$ mit $B_{3R}(x_a) \times (t_a - T, t_a) \subset \Omega$. Dort gilt insbesondere $Lw \leq 0$. Nach Lemma 5.6 folgt $w \equiv 0$ in $B_R(x_a) \times (t_a - T, t_a)$. Da die Zeitkomponente $\gamma^{n+1}(t)$ in $t$ nichtwachsend ist, widerspricht dies der Maximalität von $a$. □

**Theorem 5.8** (Maximumprinzip auf $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $0 < T < \infty$ und*

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T]).$$

*Löst $u$ das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

*und gibt es Konstanten $a$, $A > 0$, so dass*

$$u(x, t) \leq A \cdot e^{a|x|^2}$$

*ist, so gilt*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

*Beweis.* Es genügt, $u \le \sup g$ auf einem kleinen Zeitintervall $(0,T)$ zu zeigen, so dass $4aT < 1$ gilt. Wir nehmen daher ohne Einschränkung $4aT < 1$ an. Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $4a(T+\varepsilon) < 1$ gilt und definiere $\gamma > 0$ durch $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu > 0$ definieren wir

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right).$$

**Behauptung:** Es gilt $\dot v = \Delta v$.

Dafür genügt es, nachzuweisen, dass

$$w = (T-t)^{-n/2} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. (Man könnte auch $y = 0$ annehmen.) Wir bemerken, dass dies (bis auf unwichtige Konstanten) gerade die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot w &= \frac{n}{2}(T-t)^{-n/2-1} \cdot \exp(\ldots) + (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{|x-y|^2}{4(T-t)^2},\\
w_i &= (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2(x-y)_i}{4(T-t)},\\
w_{ij} &= (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2(x-y)_i}{4(T-t)} \cdot \frac{2(x-y)_j}{4(T-t)}\\
&\quad + (T-t)^{-n/2} \cdot \exp(\ldots) \cdot \frac{2\delta_{ij}}{4(T-t)},\\
\dot w - \Delta w &= \exp(\ldots) \cdot (T-t)^{-n/2-1} \cdot \left\{\frac{n}{2} + \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} - \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} - \frac{1}{2}\delta^{ij}\delta_{ij}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Setze $r := |x-y|$ und betrachte $v$ für große Werte von $r$. Es gilt

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}}\\
&\le Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} \cdot e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung an $u$ und da beide Faktoren einzeln durch Weglassen von $t$ kleiner werden

$$\le A \cdot e^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} \cdot e^{(a+\gamma)\cdot r^2}$$

aufgrund der Dreiecksungleichung und nach Definition von $\gamma$. Für $r \gg 1$ wird dies beliebig klein, insbesondere kleiner als $\sup g$. Somit ist $v \le \sup g$ auf $\partial B_R(y) \times (0,T)$, falls $R \gg 1$ groß genug ist. Weiterhin gilt aber $v \le \sup g$ in $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Aufgrund des parabolischen Maximumprinzips folgt also

$$v \le \sup g \quad \text{in } B_R(y) \times (0,T).$$

Wie wir oben gesehen haben gilt diese Ungleichung aber auch außerhalb von $B_R(y)$. Also erhalten wir überall

$$v \le \sup g.$$

$R$ hängt zwar von $\mu$ ab, aber die obige Abschätzung ist von $R$ unabhängig. Lasse also $\mu \searrow 0$. Es folgt

$$u \le \sup g. \qquad \square$$

**Bemerkung 5.9.** Die Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ mit

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

ist eine nichttriviale Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(\cdot,0) = 0$.

*Beweis.* Übung. □

Da die Wärmeleitungsgleichung die Entwicklung der Temperaturverteilung unter idealisierten Bedingungen beschreibt, besagt das folgende Theorem, dass die gleiche Temperaturverteilung am Ende nur entstehen kann, wenn diese Verteilung auch schon am Anfang gleich war.

**Theorem 5.10** (Rückwärtige Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $0 < T < \infty$. Seien $u$ und $\tilde{u}$ glatte Lösungen von*

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u, \quad \dot{\tilde{u}} = \Delta \tilde{u} & \textit{in } \Omega \times (0,T), \\ u = g, \quad \tilde{u} = g & \textit{auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

*(Die Randbedingung wird also nur an den „seitlichen“ Rand gestellt.)*

*Gilt $u(x,T) = \tilde{u}(x,T)$ für $x \in \Omega$, so folgt $u \equiv \tilde{u}$ in $\Omega \times (0,T)$.*

*Beweis.* Setze $w := u - \tilde{u}$ und

$$e(t) := \int_\Omega w^2(x,t).$$

Es folgt

$$\dot{e}(t) = -2\int_\Omega w\dot{w} = -2\int_\Omega w\Delta w = \int_\Omega |Dw|^2$$

und daraus ergibt sich

$$\ddot{e}(t) = -4\int_\Omega \langle Dw, D\dot{w}\rangle = 4\int_\Omega \Delta w \cdot \dot{w} = 4\int_\Omega (\Delta w)^2,$$

denn aufgrund der Randbedingung ist $\dot{w} = 0$ auf $\partial\Omega$ und wir dürfen ohnen Randterm integrieren. Wegen $w = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ erhalten wir

$$\int_\Omega |Dw|^2 = -\int_\Omega w \cdot \Delta w \le \left(\int_\Omega w^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega (\Delta w)^2\right)^{1/2}$$

und somit

$$(\dot{e}(t))^2 = 4\left(\int_\Omega |Dw|^2\right)^2 \le 4\int_\Omega w^2 \cdot \int_\Omega (\Delta w)^2 = e(t)\cdot\ddot{e}(t).$$

Falls die Behauptung nicht gilt, gibt es $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ mit

$$e(t) > 0 \quad \text{für } t_1 \le t < t_2 \quad \text{und } e(t_2) = 0.$$

Definiere

$$f(t) := \log e(t) \quad \text{für } t_1 \le t < t_2.$$

Wir erhalten

$$\dot f = \frac{\dot e}{e} \quad \text{und} \quad \ddot f = \frac{e\ddot e - (\dot e)^2}{e^2} \ge 0$$

aufgrund der obigen Rechnung. Dies bedeutet, dass $f$ im Intervall $(t_1, t_2)$ konvex ist. Somit gilt insbesondere

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \le (1-\tau) f(t_1) + \tau f(t)$$

für $t_1 < t < t_2$ und $0 \le \tau \le 1$. Wir wenden die Exponentialfunktion auf diese Ungleichung an und erhalten nach Definition von $f$

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \le e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t)^\tau.$$

Da die Funktion $e$ samt ihren Ableitungen für glatte Lösungen in $t$ stetig ist, erhalten wir

$$0 \le e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t_2)^\tau.$$

Da aber $e(t_2) = 0$ ist, folgt $e = 0$ in ganz $(t_1, t_2)$. Widerspruch. □

## 6. Die Matrixharnackungleichung

### 6.1. **Maximumprinzip für Tensoren.**

**Definition 6.1.** Sei $N = (N_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $N_{ij} = N_{ij}(M_{kl}) \equiv N_{ij}((M_{kl})_{1 \le k,l \le n})$ für symmetrische Matrizen $M = (M_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ symmetrisch. Dann erfüllt $N$ die Null-Eigenvektor-Bedingung, falls aus $M_{ij}\xi^j = 0$ für $1 \le i \le n$ auch $N_{ij}\xi^i\xi^j \ge 0$ folgt.

Ist $N$ zusätzlich orts- und zeitabhängig, so erfüllt $N$ die Null-Eigenvektor-Bedingung, falls $N(\cdot, x, t)$ sie für alle $(x, t)$ erfüllt.

**Theorem 6.2** (Maximumprinzip für Tensoren)**.** *Sei $T > 0$. Sei $M = (M_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $M_{ij} \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T)) \cap C^{2;1}(\mathbb{R}^n \times (0, T))$, $1 \le i, j \le n$, symmetrisch und periodisch mit $M_{ij}(x) = M_{ij}(y)$ für $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Sei $u = \left(u^k\right)_{1 \le k \le n}$ mit $u^k \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T))$. Sei $N = (N_{ij}(M_{kl}, x, t))_{1 \le i,j \le n}$ mit*

$$N_{ij} \in C^1\left(\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \times [0, T)\right)$$

*symmetrisch, in $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion und erfülle die Null-Eigenvektor-Bedingung. Gelte*

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ij} \succcurlyeq \Delta M_{ij} + u^k \frac{\partial}{\partial x^k} M_{ij} + N_{ij}(M_{kl}, \cdot) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

*Gilt $M_{ij}(\cdot, 0) \succcurlyeq 0$, so folgt $M_{ij}(\cdot, t) \succcurlyeq 0$ für $0 \le t < T$.*

*Beweis.* Seien $\varepsilon, \delta > 0$. Wir wählen diese Konstanten später noch geeignet. Definiere

$$\tilde M_{ij} := M_{ij} + \varepsilon \cdot (\delta + t)\delta_{ij}.$$

Wir betrachten die Differentialgleichung auf einem Zeitintervall $[0, \tau]$ für ein beliebiges $0 < \tau < T$. Es genügt, das Theorem für beliebige $\tau < T$ zu zeigen. Wir schreiben nun wieder $[0,T]$ statt $[0,\tau]$. Aufgrund der Periodizität in $x$ und der Kompaktheit von $[0,T]$ gelten $|M_{ij}(x,t)| \le c$ und $|N_{ij}(M_{kl}(x,t),x,t)| \le c$. Wir wollen zeigen, dass $\tilde{M}_{ij} \succcurlyeq 0$ gilt und lassen dann $\varepsilon \searrow 0$.

Als Differentialgleichung für $\tilde{M}_{ij}$ erhalten wir in $\mathbb{R}^n \times [0,T]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{M}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}M_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}\\ &\succcurlyeq \Delta M_{ij} + u^k\frac{\partial}{\partial x^k}M_{ij} + N_{ij}(M_{kl},\cdot) + \varepsilon\delta_{ij}\\ &= \Delta\tilde{M}_{ij} + u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{M}_{ij} + N_{ij}\left(\tilde{M}_{ij},\cdot\right) + \left(N_{ij}(M_{kl},\cdot) - N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\right) + \varepsilon\delta_{ij}.\end{aligned}$$

$N_{ij}\big(\tilde{M}_{kl},\cdot\big)$ erfüllt die Null-Eigenvektor-Bedingung, aber für die zusätzliche Differenz benötigen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left|N_{ij}(M_{kl},\cdot) - N_{ij}\left(\tilde{M}_{ij},\cdot\right)\right|\\ =&\left|\int\limits_0^1 \frac{d}{d\sigma}N_{ij}\left(\sigma M_{kl} + (1-\sigma)\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\,d\sigma\right|\\ =&\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial N_{ij}}{\partial r_{kl}}\left(\sigma M_{kl} + (1-\sigma)\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\,d\sigma\cdot\left(M_{kl} - \tilde{M}_{kl}\right)\right|\\ \le&\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial N_{ij}}{\partial r_{kl}}(\ldots)\,d\sigma\right|\cdot c(n)\cdot\varepsilon\cdot(\delta+t)\\ \le& \, c\cdot\varepsilon\cdot(\delta+t).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{M}_{ij} \succcurlyeq \Delta\tilde{M}_{ij} + u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{M}_{ij} + N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right) + \varepsilon\delta_{ij} - c\cdot\varepsilon\cdot(\delta+t)\delta_{ij}.$$

Wir nehmen nun an, dass $0 \le t \le \delta$ gilt und fixieren $\delta > 0$ mit $c\cdot 2\delta \le \frac{1}{2}$. Somit gilt $\varepsilon\delta_{ij} - c\varepsilon(\delta+t)\delta_{ij} \succcurlyeq \frac{1}{2}\varepsilon\delta_{ij}$. Wir zeigen anschließend dass $\tilde{M}_{ij} \succcurlyeq 0$ für $0 \le t \le \delta$ gilt. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt dann auch $M_{ij} \succcurlyeq 0$ für $0 \le t \le \delta$. Dies wenden wir endlich oft an und erhalten $M_{ij} \succcurlyeq 0$ für $0 \le t \le T$.

Da $\tilde{M}_{ij}(x,0)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ strikt positiv ist $\big(\tilde{M}_{ij} \succ 0\big)$, gilt entweder $\tilde{M}_{ij} \succ 0$ in $\mathbb{R}^n \times [0,\delta]$ oder es gibt (aufgrund der Periodizität) $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]$ mit $\tilde{M}_{ij}(x,t) \succ 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,t_0)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$ und $\tilde{M}_{ij}(x_0,t_0)\xi^j = 0$ für alle $1 \le i \le n$. Fixiere dieses $\xi$ und definiere $f(x,t) := \tilde{M}_{ij}(x,t)\xi^i\xi^j$. Dann erfüllt $f$ die Differentialungleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f &= \frac{\partial}{\partial t}\tilde{M}_{ij}\xi^i\xi^j\\ &\ge \left(\Delta\tilde{M}_{ij} + u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{M}_{ij} + N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\delta_{ij}\right)\xi^i\xi^j\\ &= \Delta f + u^k\frac{\partial}{\partial x^k}f + N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl},\cdot\right)\xi^i\xi^j + \frac{1}{2}\varepsilon.\end{aligned}$$

Mit der Null-Eigenvektor-Bedingung und da $(x_0, t_0)$ der erste Punkt mit einem Null-Eigenvektor ist, folgt in $(x_0, t_0)$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} f}_{\le 0} \ge \underbrace{\Delta f}_{\ge 0} + u^k \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k} f}_{=0} + \underbrace{N_{ij}\left(\tilde{M}_{kl}, \cdot\right) \xi^i \xi^j}_{\ge 0} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Widerspruch. □

### 6.2. **Matrixharnackungleichung.**

**Theorem 6.3** (Harnackungleichung mit Matrizen)**.** *Sei $T > 0$. Sei*

$$u \in C^{4;2}\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C^{2;1}\left(\mathbb{R}^n \times [0,T)\right)$$

*eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot{u} = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)$$

*mit $u(\cdot, 0) \ge 0$, $u(\cdot, 0) \not\equiv 0$ und*

$$u(x,t) = u(y,t) \quad \text{für } x - y \in \mathbb{Z}^n \text{ und } t \ge 0.$$

*Dann gilt*

$$u_{ij} - \frac{1}{u} u_i u_j + \frac{u}{t}\delta_{ij} \succcurlyeq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

*Beweis.* Definiere

$$M_{ij} := u_{ij} - \frac{1}{u} u_i u_j + \frac{u}{t}\delta_{ij}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Aufgrund des strikten Maximumprinzips gilt $u(x,t) > 0$ für $t > 0$, $M_{ij}$ ist also wohldefiniert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann erfüllt auch $u + \varepsilon$ die Voraussetzungen. Definieren wir $M^\varepsilon_{ij}$ mit $u + \varepsilon$ statt $u$, so ist $\frac{u+\varepsilon}{t}\delta_{ij}$ aufgrund der vorausgesetzten Regularität und $\frac{|Du|^2}{u} \le c \cdot \left\|D^2 u\right\|_{L^\infty}$ für $0 < t \approx 0$ der dominante Term in $M^\varepsilon_{ij}$ und es folgt $M^\varepsilon_{ij} \succcurlyeq 0$, falls $t > 0$ klein genug ist. Es genügt nun zu zeigen, dass $M^\varepsilon_{ij}(x,t) \succcurlyeq 0$ für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ gilt. Mit $\varepsilon \searrow 0$ für festes $(x,t,\xi)$ folgt dann die Behauptung. Aus Bequemlichkeit schreiben wir ab jetzt wieder $u$ statt $u + \varepsilon$.

Wir wollen das Maximumprinzip für Tensoren anwenden und berechnen dazu die Evolutionsgleichung von $M_{ij}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{ij} &= \dot{u}_{ij} + \frac{1}{u^2}\dot{u} u_i u_j - \frac{1}{u}\dot{u}_i u_j - \frac{1}{u} u_i \dot{u}_j + \frac{\dot{u}}{t}\delta_{ij} - \frac{u}{t^2}\delta_{ij}, \\
M_{ij,k} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^k} M_{ij} \\
&= u_{ijk} + \frac{1}{u^2} u_k u_i u_j - \frac{1}{u} u_{ik} u_j - \frac{1}{u} u_i u_{jk} + \frac{u_k}{t}\delta_{ij}, \\
M_{ij,kl} &= u_{ijkl} + \frac{1}{u^2} u_{kl} u_i u_j - \frac{1}{u} u_{ikl} u_j - \frac{1}{u} u_i u_{jkl} + \frac{u_{kl}}{t}\delta_{ij} \\
&\quad - 2\frac{1}{u^3} u_i u_j u_k u_l + \frac{1}{u^2} u_k u_{il} u_j + \frac{1}{u^2} u_k u_i u_{jl} + \frac{1}{u^2} u_{ik} u_j u_l \\
&\quad - \frac{1}{u} u_{ik} u_{jl} + \frac{1}{u^2} u_i u_{jk} u_l - \frac{1}{u} u_{il} u_{jk}, \\
\dot{M}_{ij} - \Delta M_{ij} &= -\frac{u}{t^2}\delta_{ij} + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2 u_i u_j - \frac{2}{u^2} u^k u_{ki} u_j - \frac{2}{u^2} u^k u_{kj} u_i + \frac{2}{u} u_{ik}\delta^{kl} u_{lj}
\end{aligned}$$

$$\equiv N_{ij}.$$

Wir möchten nun nachweisen, dass $N_{ij}$ die Null-Eigenvektor-Bedingung erfüllt. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$ und $M_{ij}\xi^j = 0$ für $1 \le i \le n$, also

$$0 = M_{ij}\xi^j = u_{ij}\xi^j - \frac{1}{u}u_i u_j \xi^j + \frac{u}{t}\delta_{ij}\xi^j$$

oder

$$u_{ij}\xi^j = \frac{1}{u}u_i u_j \xi^j - \frac{u}{t}\delta_{ij}\xi^j.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
N_{ij}\xi^i\xi^j = & -\frac{u}{t^2} + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2\langle\nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{4}{u^2}u^k u_{kj}\xi^j\langle\nabla u, \xi\rangle + \frac{2}{u}\xi^i u_{ik}\delta^{kl}u_{lj}\xi^j \\
= & -\frac{u}{t^2} + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2\langle\nabla u, \xi\rangle^2 \\
& -\frac{4}{u^2}u^k\left(\frac{1}{u}u_k\langle\nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{u}{t}\delta_{kj}\xi^j\langle\nabla u, \xi\rangle\right) \\
& + \frac{2}{u}\left(\frac{1}{u}u_k\langle\nabla u, \xi\rangle - \frac{u}{t}\delta_{kj}\xi^j\right)\delta^{kl}\left(\frac{1}{u}u_l\langle\nabla u, \xi\rangle - \frac{u}{t}\delta_{li}\xi^i\right) \\
= & -\frac{u}{t^2} + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2\langle\nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{4}{u^3}|\nabla u|^2\langle\nabla u, \xi\rangle^2 + \frac{4}{ut}\langle\nabla u, \xi\rangle^2 \\
& + \frac{2}{u^3}|\nabla u|^2\langle\nabla u, \xi\rangle^2 - \frac{4}{ut}\langle\nabla u, \xi\rangle^2 + \frac{2u}{t^2} \\
= & \frac{u}{t^2} > 0.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung aus dem Maximumprinzip für Tensoren. □

**Theorem 6.4** (Differentielle Harnackungleichung)**.** *Sei $T > 0$. Sei*

$$u \in C^{4;2}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^{2;1}(\mathbb{R}^n \times [0, T))$$

*eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot{u} = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

*mit $u(\cdot, 0) \ge 0$, $u(\cdot, 0) \not\equiv 0$ und*

$$u(x, t) = u(y, t) \quad \text{für } x - y \in \mathbb{Z}^n \text{ und } t \ge 0.$$

*Dann gilt*

$$\dot{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u} + \frac{n \cdot u}{t} \ge 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

*Beweis.* Bilde die Spur in der Harnackungleichung für Matrizen, Theorem 6.3, und benutze $\dot{u} = \Delta u$. □

Damit können wir die Abfallrate von $u$ in einem festen Punkt beschränken.

**Korollar 6.5.** *Sei $T > 0$. Sei*

$$u \in C^{4;2}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^{2;1}(\mathbb{R}^n \times [0, T))$$

*eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot{u} = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

*mit* $u(\cdot, 0) \geq 0$, $u(\cdot, 0) \not\equiv 0$ *und*

$$u(x,t) = u(y,t) \quad \textit{für } x - y \in \mathbb{Z}^n \textit{ und } t \geq 0.$$

*Seien* $0 < t_1 \leq t_2 < T$. *Dann gilt für alle* $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x, t_2) \geq u(x, t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n.$$

*Beweis.* Wir verwenden die Abschätzung aus Theorem 6.4 und erhalten für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Differentialungleichung $\dot{u} + \frac{nu}{t} \geq 0$. Eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist durch $c \cdot t^{-n}$ gegeben, insbesondere löst also $t \mapsto u(x, t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t}\right)^n$ die Differentialgleichung. Da eine Lösung der Gleichung bei gleichem Anfangswert zur Zeit $t_1$ für $t > t_1$ unterhalb einer Lösung der Ungleichung liegt, folgt die Behauptung. □

Wir können auch die Funktionswerte in verschiedenen Punkten miteinander vergleichen:

**Korollar 6.6.** *Sei* $T > 0$. *Sei*

$$u \in C^{4;2}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C^{2;1}(\mathbb{R}^n \times [0,T))$$

*eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot{u} = \Delta u \quad \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)$$

*mit* $u(\cdot, 0) \geq 0$, $u(\cdot, 0) \not\equiv 0$ *und*

$$u(x,0) = u(y,0) \quad \textit{für } x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

*Seien* $0 < t_1 \leq t_2 < T$. *Dann gilt für alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$u(x_2, t_2) \geq u(x_1, t_1) \cdot \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n \cdot e^{-\frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1}}.$$

*Beweis.* Wir definieren

$$f(s) := u((1-s)x_1 + sx_2, (1-s)t_1 + st_2)$$

für $s \in [0,1]$ und erhalten mit Theorem 6.4

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} f(s) &= \langle \nabla u(\ldots), x_2 - x_1 \rangle + \dot{u}(\ldots) \cdot (t_2 - t_1) \\
&\geq \langle \nabla u, x_2 - x_1 \rangle + (t_2 - t_1) \cdot \left( \frac{|\nabla u|^2}{u} - \frac{n \cdot u}{t} \right), \quad t = (1-s)t_1 + st_2, \\
&\geq -\frac{|\nabla u|^2}{u} \cdot (t_2 - t_1) - \frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1} \cdot u + (t_2 - t_1) \cdot \frac{|\nabla u|^2}{u} - \frac{n \cdot u}{t} \cdot (t_2 - t_1) \\
&= -\frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1} \cdot f(s) - \frac{n \cdot f(s)}{(1-s)t_1 + st_2} \cdot (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Man rechnet direkt nach, dass (die mit Hilfe von SAGE gefundene Funktion)

$$s \mapsto \text{konst.} \cdot \frac{e^{-\frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1} \cdot s}}{(t_1 + s(t_2 - t_1))^n} \equiv g(s)$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung ist. Wir wählen die Konstante als $u(x_1,t_1)\cdot t_1^n$, so dass $g(0)=u(x_1,t_1)$ gilt. Aufgrund der Differentialungleichung gilt $f(s)\ge g(s)$ für alle $s\in[0,1]$. Mit $u(x_2,t_2)=f(1)\ge g(1)$ folgt daraus

$$u(x_2,t_2)\ge u(x_1,t_1)\cdot\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n\cdot e^{-\frac{|x_2-x_1|^2}{t_2-t_1}}$$

wie behauptet. □

6.3. **Lokalisierte Harnackungleichung.** Es gilt die folgende lokalisierte Variante einer Harnackungleichung, vergleiche [8, Theorem 1.2].

**Theorem 6.7.** *Sei $u: B_{2R}(0)\times[0,T]\to\mathbb{R}$ mit $u>0$ eine bis zum Rand glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\dot u=\Delta u.$$

*Dann gilt für beliebige $\alpha>1$ die Abschätzung*

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\alpha\frac{\dot u}{u}\le c(n)\alpha^2\left(1+\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\right)\frac{1}{R^2}+\frac{n}{2}\alpha^2\frac{1}{t}$$

*bzw.*

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}-\alpha\frac{\dot u}{u}\le c(n,\alpha)\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{t}\right)$$

*in $B_R(0)\times[0,T]$.*

*Beweis.*

(i) Wir definieren $f=\log u$ und

$$F(x,t):=t\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right).$$

Zunächst leiten wir eine Differentialungleichung für $F$ her: Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot f&=\frac{1}{u}\dot u,\\
f_i&=\frac{1}{u}u_i,\\
f_{ij}&=\frac{1}{u}u_{ij}-\frac{1}{u^2}u_iu_j,\\
\dot f-\Delta f&=\frac{1}{u}(\dot u-\Delta u)+\frac{1}{u^2}|\nabla u|^2\\
&=|\nabla f|^2,\\
\dot F&=\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right)+2tf^i\dot f_i-t\alpha\ddot f,\\
F_k&=t\left(2f^if_{ik}-\alpha\dot f_k\right),\\
F_{kl}&=t\left(2f^if_{ikl}+2f^i_lf_{ik}-\alpha\dot f_{kl}\right),\\
\dot F-\Delta F&=\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right)+2tf^i\left(\dot f_i-\delta^{kl}f_{ikl}\right)-2tf^i_jf^j_i-t\alpha\left(\ddot f-\Delta\dot f\right)\\
&=\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right)+4tf^if^jf_{ij}-2tf^i_jf^j_i-2t\alpha f^i\dot f_i,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Differentialgleichung für $f$ benutzt haben.

Wegen
$$2\langle\nabla f,\nabla F\rangle = 4tf^if^jf_{ij}-2\alpha tf^i\dot f_i$$
erhalten wir
$$\dot F-\Delta F=\frac{F}{t}+2\langle\nabla f,\nabla F\rangle-2\,tf^i_jf^j_i.$$
Den letzten Term wollen wir mit $\Delta f$ vergleichen. Es gilt:
$$(\Delta f)^2=\sum_{i,j}f_{ii}f_{jj}\le\sum_{i,j}\left(\frac12 f_{ii}^2+\frac12 f_{jj}^2\right)=n\sum_i f_{ii}^2=n\sum_{i=j}f_{ij}f_{ij}\le n\sum_{i,j}f_{ij}f_{ij}.$$
Somit erhalten wir
$$\dot F-\Delta F\le\frac{F}{t}+2\langle\nabla f,\nabla F\rangle-\frac{2t}{n}(\Delta f)^2=\frac{F}{t}+2\langle\nabla f,\nabla F\rangle-\frac{2t}{n}\left(|\nabla f|^2-\dot f\right)^2.$$

(ii) Sei $\psi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine fixierte $C^2$-Funktion mit $0\le\psi\le1$ und
$$\psi(r)=\begin{cases}1, & r\in[0,1],\\ 0, & r\in[2,\infty).\end{cases}$$
Definiere $\varphi$ durch $\varphi(x)=\psi\left(\frac{|x|}{R}\right)$. Dann ist $\varphi\in C^2$ und es gilt
$$\begin{aligned}\varphi_i(x)&=\psi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\frac1R\frac{x_i}{|x|},\\ \varphi_{ij}(x)&=\psi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\frac1R\frac1{|x|}\left(\delta_{ij}-\frac{x_ix_j}{|x|^2}\right)+\psi''\left(\frac{|x|}{R}\right)\frac1{R^2}\frac{x_ix_j}{|x|^2},\\ |\nabla\varphi|&\le\frac{C}{R},\\ |\nabla^2\varphi|&\le\frac{C}{R^2},\end{aligned}$$
da $\psi'\left(\frac{|x|}{R}\right)\ne0$ nur für $R\le|x|\le2R$ gelten kann.

Aus
$$\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\le c$$
erhalten wir außerdem
$$\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\le\frac{c}{R^2},$$
wobei hier und nachfolgend stets $c=c(n)$ ist.

(iii) Wir wollen nun das Maximumprinzip auf $\varphi F$ in $B_{2R}(0)\times[0,T]$ anwenden. Sei $(x_0,t_0)$ ein (zeitlich erster) Punkt, in dem $\varphi F$ ein positives Maximum annimmt. Ist überall $\varphi F \le 0$, so ist die Behauptung klar. Die Positivität von $(\varphi F)(t_0, x_0)$ liefert $t_0 > 0$ und $|x_0| < 2R$. Wir erhalten somit in $(x_0, t_0)$

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(\varphi F), \\ 0 &\le \frac{d}{dt}(\varphi F) - \Delta(\varphi F) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\varphi - \Delta\varphi\right) F + \varphi \left(\frac{d}{dt} F - \Delta F\right) - 2\langle\nabla\varphi, \nabla F\rangle \\ &\le \frac{cF}{R^2} + \frac{\varphi F}{t_0} + 2\varphi\langle\nabla f, \nabla F\rangle - \frac{2t_0}{n}\varphi\left(|\nabla f|^2 - \dot{f}\right)^2 - 2\langle\nabla\varphi, \nabla F\rangle. \end{aligned}$$

Dies multiplizieren wir nun mit $\varphi t_0$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 \le{} & \frac{c\varphi F\, t_0}{R^2} + \varphi^2 F + 2\, t_0\varphi^2\langle\nabla f, \nabla F\rangle - \frac{2t_0^2}{n}\left(\varphi|\nabla f|^2 - \varphi\dot{f}\right)^2 \\ & - 2t_0\varphi\langle\nabla\varphi, \nabla F\rangle \\ ={} & \frac{c\varphi F t_0}{R^2} + \varphi^2 F + 2\, t_0\varphi\langle\nabla f, \underbrace{\nabla(\varphi F)}_{=0}\rangle - 2t_0\varphi F\langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle \\ & - \frac{2t_0^2}{n}\left(\varphi|\nabla f|^2 - \varphi\dot{f}\right)^2 - 2t_0\langle\nabla\varphi, \underbrace{\nabla(\varphi F)}_{=0}\rangle + 2t_0 F|\nabla\varphi|^2. \end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \varphi^2 F &\le \varphi F, \\ -2\, t_0\varphi F\langle\nabla f, \nabla\varphi\rangle &\le 2t_0\varphi F|\nabla f|\frac{|\nabla\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\varphi^{\frac{1}{2}} \\ &\le ct_0\varphi F|\nabla f|\frac{1}{R}\varphi^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und

$$2t_0 F|\nabla\varphi|^2 \le \frac{c\,\varphi F t_0}{R^2}.$$

Somit gilt

$$0 \le \frac{c\,\varphi F t_0}{R^2} + \varphi F + c\, t_0\varphi F|\nabla f|\frac{1}{R}\varphi^{\frac{1}{2}} - \frac{2t_0^2}{n}\left(\varphi|\nabla f|^2 - \varphi\dot{f}\right)^2.$$

Wir führen nun die Bezeichnungen $y = \varphi|\nabla f|^2$ und $z = \varphi\dot{f}$ ein. Damit ergibt sich

$$0 \le \frac{c\,\varphi F t_0}{R^2} + \varphi F + \frac{c\,\varphi F t_0}{R}y^{\frac{1}{2}} - \frac{2t_0^2}{n}(y-z)^2.$$

(iv) Wir untersuchen nun den Ausdruck

$$-\frac{2t_0^2}{n}(y-z)^2 + \frac{c\,\varphi F t_0}{R}y^{\frac{1}{2}} = \frac{2t_0^2}{n}\left[-(y-z)^2 + \frac{c_1}{R}y^{\frac{1}{2}}(y - \alpha z)\right]$$

mit $c_1 = c_1(n)$ genauer. Dabei haben wir

$$\varphi F = t\left(\varphi|\nabla f|^2 - \alpha\,\varphi\dot{f}\right) = t(y - \alpha z)$$

benutzt. Wir wollen nun $-(y-z)^2$ durch $-\frac{1}{\alpha^2}(y - \alpha\, z)^2$ ersetzen.

In der Originalarbeit werden hier noch diverse Konstanten eingeführt, so dass sich der Vorfaktor $\frac{1}{\alpha^2}$ vor $(y-\alpha z)^2$, der hier etwas willkürlich erscheint, ergibt.

Dies erfordert jedoch längere Rechnungen.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&-(y-z)^2+\frac{c_1}{R}y^{\frac12}(y-\alpha z)\\
=&-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2+\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2-(y-z)^2+\frac{c_1}{R}y^{\frac12}(y-\alpha z)\\
=&-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2+\frac{1}{\alpha^2}y^2-\frac{2}{\alpha}yz+z^2-y^2+2yz-z^2+\frac{c_1}{R}y^{\frac12}(y-\alpha z)\\
=&-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2-\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)y^2+2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)yz+\frac{c_1}{R}y^{\frac12}(y-\alpha z).
\end{aligned}$$

Wegen $(y-\alpha z)=\frac{\varphi F}{t}>0$ und da wir das Vorzeichen von $yz$ nicht kennen, müssen wir den Term mit $y^{\frac12}$ so abschätzen, dass der Term mit $yz$ gerade wegfällt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{R}y^{\frac12}&=2\cdot\frac{c_1}{2R}\frac{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}(\alpha-1)y}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}(\alpha-1)}}\\
&\le\frac{2}{\alpha^2}(\alpha-1)y+\frac{c_1^2}{4R^2}\frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{\alpha-1}\\
&=\frac{2}{\alpha^2}(\alpha-1)y+\frac{c_1^2}{8R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Damit folgt also

$$\begin{aligned}
&-(y-z)^2+\frac{c_1}{R}y^{\frac12}(y-\alpha z)\\
\le&-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2-\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)y^2+2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)yz\\
&+\frac{2}{\alpha^2}(\alpha-1)y(y-\alpha z)+\frac{c_1^2}{8R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}(y-\alpha z)\\
=&-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2-\left(1-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)y^2+0\cdot yz+\frac{c_1^2}{8R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}(y-\alpha z)\\
=&-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^2y^2+\frac{c_1^2}{8R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}(y-\alpha z).
\end{aligned}$$

(v) Aus den letzten beiden Abschnitten erhalten wir

$$\begin{aligned}
0\le&\frac{c\varphi Ft_0}{R^2}+\varphi F\\
&+\frac{2t_0^2}{n}\left(-\frac{1}{\alpha^2}(y-\alpha z)^2-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^2y^2+\frac{c_1^2}{8R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}(y-\alpha z)\right)\\
\le&\frac{c\varphi Ft_0}{R^2}+\varphi F-\frac{2}{n\alpha^2}(\varphi F)^2+0+\frac{c\varphi Ft_0}{R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Also gilt
$$(\varphi F)(x_0,t_0) \le \frac{n\alpha^2}{2}\left(\frac{ct_0}{R^2}+1+\frac{ct_0}{R^2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\right).$$
Daraus erhalten wir für $(x,t) \in B_R(0)\times[0,T]$ wegen $\varphi(x)=1$.
$$\begin{aligned} t\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right)(x,t) &= \varphi(x)\cdot t\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right)(x,t)\\ &\le \varphi(x_0)\cdot t_0\left(|\nabla f|^2-\alpha\dot f\right)(x_0,t_0)\\ &\le \frac{n\alpha^2}{2}c\left(1+\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\right)\frac{t_0}{R^2}+\frac{n\alpha^2}{2}. \end{aligned}$$
Ist $t \ge t_0$, so gilt $\frac{t_0}{tR^2} \le \frac{1}{R^2}$ und die Behauptung folgt nach Division durch $t$. Sonst wenden wir die obigen Überlegungen mit $T=t$ an. Dann erfüllt die Maximalstelle $(x_0,t_0)$ automatisch $t_0 \le t = T$. Daher folgt auch in diesem Fall die Behauptung, da die Konstanten auf der rechten Seite der Ungleichung nicht von $T$ abhängen.

Alternativ könnte man auch am Anfang des Beweises $T=t$ annehmen. □

## Anhang A. Ergänzung: Analytizität harmonischer Funktionen

**Theorem A.1** (Analytizität)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und $u:\Omega\to\mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist $u$ in $\Omega$ analytisch.*

*Beweis.* Sei $x_0\in\Omega$. Wir werden nachweisen, dass die Taylorreihe von $u$ in $x_0$ in einer Kugel um $x_0$ konvergiert. Definiere
$$r := \frac14 \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$$
bzw. $r:=1$ falls $\Omega=\mathbb{R}^n$ und
$$M := \frac{1}{\omega_n r^n}\|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))}.$$
Da $u\in C^\infty(\Omega)$ ist, erhalten wir $M<\infty$.

**Abschätzungen für Ableitungen:** Wir kombinieren
$$|D^\alpha u(x)| \le \frac{\left(2^{n+1}n|\alpha|\right)^{|\alpha|}}{\omega_n}\frac{1}{r^{n+|\alpha|}}\|u\|_{L^1(B_r(x))}$$
und $B_r(x)\subset B_{2r}(x_0)\subset\Omega$ für $x\in B_r(x_0)$ und erhalten
$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \le M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}\cdot|\alpha|^{|\alpha|}.$$
Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{k!}k^k\le e^k$ oder äquivalent dazu $k^k\le e^k k!$. Also ist $|\alpha|^{|\alpha|}\le e^{|\alpha|}|\alpha|!$. Das Multinomialtheorem liefert für $|\alpha|=k$
$$n^k=(1+\ldots+1)^k=\sum_{|\beta|=k}\frac{|\beta|!}{\beta!}\ge\frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

Also ist $|\alpha|! \le n^{|\alpha|}\alpha!$. Wir erhalten

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \le M\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!.$$

**Potenzreihe:** Wir behaupten, dass (zumindest) für $|x-x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3e}$ die Taylorreihe

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

gegen $u$ konvergiert. Dazu betrachten wir die Restglieddarstellung

$$\begin{aligned} R_N(x) :=&\, u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ =&\sum_{|\alpha|=N}\frac{D^\alpha(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \end{aligned}$$

für ein $t\in[0,1]$. Dies erhält man durch Betrachtung der Funktion $g(t) := u(x+t(x-x_0))$, Entwicklung für $t=0$ und Auswertung bei $t=1$. Die obigen Abschätzungen für die Ableitungen von $u$ liefern

$$\begin{aligned} |R_N(x)| \le&\, M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r}\right)^N\left(\frac{r}{2^{n+2}n^3e}\right)^N \\ =&\, M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{1}{2n}\right)^N \le Mn^N\left(\frac{1}{2n}\right)^N = \frac{M}{2^N} \\ \to&\, 0 \quad \text{für } N\to\infty. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Abschätzung $\sum\limits_{|\alpha|=N} 1 \le n^N$ erhält man wie folgt; Analogie: $N$ Kugeln sind auf $n$ Körbe zu verteilen; für jede Kugel hat man $n$ Möglichkeiten, also insgesamt höchstens $n\cdots n = n^N$ Möglichkeiten. □

## Anhang B. Hölderräume

Die im folgenden definierten Räume $C^\cdot\left(\overline{\Omega}\right)$ und $C^{\cdot,\cdot}\left(\overline{\Omega}\right)$ sind Banachräume.

**Definition B.1** (Hölderräume)**.** Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, $u:\Omega\to\mathbb{R}$. Es ist

(i) $u\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, falls $u$ sich stetig bis zum Rand fortsetzen läßt und
$$\|u\|_{C^0(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega}|u| < \infty.$$

(ii) $u\in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, falls $D^\alpha u\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ für alle $|\alpha|\le k$ und
$$\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u| < \infty.$$

(iii) $u\in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0\le\alpha\le 1$, falls $u\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und
$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^0(\Omega)} + \sup_{x\ne y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \equiv \|u\|_{C^0(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(iv) $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ und

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(v) $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega'}\right)$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist kein Banachraum.

Für $0 < \alpha < 1$ heißen die Räume $C^{k,\alpha}$ Hölderräume. $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$ heißt Höldernorm, $[\cdot]_{C^{0,\alpha}}$ heißt Hölderhalbnorm.

**Beispiel B.2.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega = (-1, 1)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist $u(x) := |x|^\alpha$ hölderstetig. Es ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

## Anhang C. Differenzenquotienten

**Definition C.1.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega' \Subset \Omega$, $1 \le i \le n$ und $h \ne 0$. Sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Definiere den $i$-ten Differenzenquotienten der Göße $h$ durch

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$
$$D^h u := \left(D_1^h u, \ldots, D_n^h u\right).$$

**Theorem C.2** (Differenzenquotienten und schwache Ableitungen)**.**

*(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\Omega' \Subset \Omega$ gibt es ein $c = c(\Omega, \Omega', n, p) > 0$, so dass*

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

*für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.*

*(ii) Sei $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gibt es $c > 0$ und $\Omega' \Subset \Omega$ mit*

$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$$

*für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, so gilt $u \in W^{1,p}(\Omega')$ und*

$$\|Du\|_{L^p(\Omega')} \le c.$$

*Beweis.*

(i) Sei $1 \le p < \infty$ und sei $u$ glatt. Sei $x \in \Omega'$, $1 \le i \le n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Es gilt

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^1 u_i(x + the_i) h \, dt$$

$$|u(x + he_i) - u(x)| \le |h| \cdot \int_0^1 |Du(x + the_i)| \, dt$$

und aufgrund der Hölderschen Ungleichung

$$\int\limits_{\Omega'} \left|D^h u\right|^p \le c \sum_i \int\limits_{\Omega'} \int\limits_0^1 |Du(x+the_i)|^p \, dt \, dx$$

$$= c \sum_i \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |Du(x+the_i)|^p \, dx \, dt \le c \int\limits_{\Omega} |Du|^p.$$

Da $\Omega'$ von $\partial\Omega$ mindestens Abstand $2|h|$ hat, folgt die Behauptung durch Approximation.

(ii) Gelte $\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$ eine Testfunktion. Dann gilt die folgende "partielle Integrationsformel", falls $|h| \le c(\varphi)$ klein genug ist

$$\int\limits_{\Omega'} u(x) \frac{\varphi(x+he_i) - \varphi(x)}{h} dx = -\int\limits_{\Omega'} \frac{u(x) - u(x-he_i)}{h} \varphi(x) \, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega'} u \left(D_i^h \varphi\right) = -\int\limits_{\Omega} \left(D_i^{-h} u\right) \varphi.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\sup_h \left\|D_i^{-h} u\right\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$

Daher existiert $v_i \in L^p(\Omega')$ und eine Folge $h_k \to 0$, so dass

$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \quad \text{in } L^p(\Omega').$$

Es folgt

$$\int\limits_{\Omega'} u\varphi_i = \int\limits_{\Omega} u\varphi_i = \lim_{h_k \to 0} \int\limits_{\Omega} u \cdot D_i^{h_k} \varphi = \lim_{h_k \to 0} - \int\limits_{\Omega} D_i^{-h_k} u\varphi$$

$$= \lim_{h_k \to 0} - \int\limits_{\Omega'} D_i^{-h_k} u\varphi = -\int\limits_{\Omega'} v_i \varphi.$$

Somit gilt $v_i = u_i$ im schwachen Sinne. Wegen der schwachen Konvergenz ist $v_i \in L^p(\Omega')$ und wir erhalten $Du \in L^p(\Omega')$. Da auch $u \in L^p(\Omega')$ ist, folgt $u \in W^{1,p}(\Omega')$. Die Normabschätzung folgt aus der Unterhalbstetigkeit der Norm. □

## Literatur


1. Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
2. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
3. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, Vorlesungsmitschrift.
4. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
6. Jürgen Jost, *Partial differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 214, Springer-Verlag, New York, 2002.

7. Gary M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
8. Peter Li and Shing-Tung Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), no. 3-4, 153–201.
9. Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984, Corrected reprint of the 1967 original.

Oliver C. Schnürer, Mathematik, Universität Konstanz