PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN II

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu Partielle Differentialgleichungen II. Benützt

- an der Freien Universität Berlin im Sommersemester 2006.
- an der FU Berlin im Wintersemester 2009/10 (nur Schaudertheorie).
- Wintersemester 2011/12 und 2013/14 in Konstanz.

Vielen Dank an Anja Grabow, Felix Jachan, Thilo Notz und weiteren Hörern der Vorlesung für zahlreiche Korrekturen.

Inhaltsverzeichnis

Einordnung

Einige wichtige Theorieblöcke im Bereich der linearen elliptischen und parabolischen partiellen Differentialgleichungen sind

- L^2- und L^p-Theorie,
- Schaudertheorie (auch für Operatoren in Divergenzform),
- De Giorgi-Nash-Moser (Moser Iteration und Regularitätstheorie von Ennio De Giorgi und John F. Nash Jr.) und
- Krylov-Safonov Abschätzungen.

Wir werden hier die elliptische Schaudertheorie und die parabolischen Krylov-Safonov Abschätzungen kennen lernen.

Die zugehörigen Abschätzungen besagen üblicherweise, dass Lösungen der Differentialgleichungen zweimal mehr differenzierbar sind als die rechte Seite, falls dies auch für die Randwerte gilt. Es hängt von der betrachteten Gleichung ab, welche Theorie anwendbar ist. Häufiger sind mehrere davon nacheinander anzuwenden. Mit Hilfe dieser Theorien kann man Existenzresultate beweisen.

1. Potentialtheorie

Wir orientieren uns an [3], [4] und für die Stetigkeitsmethode an [6, Kapitel 10].

Juliusz Schauder (1899-1943) war polnischer Mathematiker.

Die hier hergeleiteten Potentialabschätzungen werden wir für die Schaudertheorie benötigen.

Date: 6. April 2017.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25.

Key words and phrases. Schaudertheorie, Krylov-Safonov, Harnackungleichung.

1.1. **Grundlagen.** Wir benutzen wieder Hölderräume.

Definition 1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, $x_0 \in \Omega$ und $0 < \alpha < 1$. Die Funktion f heisst im Punkt x_0 hölderstetig mit Exponent α, falls

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{x_0 \neq x \in \Omega \cap B_\varepsilon(x_0)} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty$$

gilt. f heisst in Ω hölderstetig, falls f für alle $x \in \Omega$ hölderstetig ist, jeweils zum Exponenten α. Wir schreiben $f \in C^\alpha(\Omega)$. Gilt die obige Abschätzung für $\alpha = 1$, so heisst f lipschitzstetig in x_0. Wir definieren $C^{k,\alpha}(\Omega)$ als den Raum der Funktionen $f \in C^k(\Omega)$, deren k-te partielle Ableitungen hölderstetig zum Exponenten α sind.

Ist

$$\sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty,$$

so ist $f \in C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$. Wir definieren auf diesem Raum eine Halbnorm durch

$$[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Eine Norm erhalten wir durch

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}.$$

Sind die k-ten Ableitungen einer $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$-Funktion sogar in $C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right)$, so definieren wir auf diesem Raum eine Norm durch

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta f\right]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}.$$

Es gilt $C^{0,\alpha} = C^\alpha$.

Bemerkung 1.2. Ist $\partial\Omega$ lipschitz, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, so gibt es für alle $x, y \in \Omega$ einen C^1-Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und Länge $L(\gamma) = \int\limits_0^1 |\gamma'(t)|\, dt \le c(\Omega) \cdot |x - y|$ (Übung). In diesem Falle (außer für $C^1 \hookrightarrow C^{0,1}$ gilt dies auch für allgemeine beschränkte offene Mengen Ω) sind die folgenden Einbettungen stetig

$$C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^1\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right) \hookrightarrow C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Daher sind die folgenden beiden Normen auf $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ äquivalent

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta f\right]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

und

$$\begin{aligned} &\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|\le k} \left[D^\beta f\right]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \\ = &\sum_{|\beta|\le k} \|D^\beta f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Wir erhalten das folgende Resultat

Lemma 1.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f_1, f_2 \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, so ist $f_1 \cdot f_2 \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gilt*

$$[f_1 f_2]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le [f_1]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \sup_\Omega |f_2| + [f_2]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \sup_\Omega |f_1|.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der folgenden Ungleichung

$$\frac{|f_1(x)f_2(x) - f_1(y)f_2(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^\alpha}|f_2(x)| + \frac{|f_2(x) - f_2(y)|}{|x-y|^\alpha}|f_1(y)|.$$

□

Definition 1.4. Sei $\omega_n = |B_1|$ in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Fundamentallösung für die Laplacegleichung als

$$\Gamma(x,y) \equiv \Gamma(x-y) \equiv \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2, \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n>2. \end{cases}$$

Weiterhin benötigen wir noch das folgende einfache Lemma.

Lemma 1.5. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar und sei $|E|$ das Maß dieser Menge. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$ und $n \geq 2$*

$$\int\limits_E \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \leq \frac{\omega_n}{\alpha}n\left(\frac{|E|}{\omega_n}\right)^{\alpha/n},$$

wobei $\omega_n = |B_1(0)|$ ist.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $|E| < \infty$ und sei $B = B_R(x)$ eine Kugel mit gleichem Maß, $|E| = |B|$, d. h. sei $R = \left(\frac{|E|}{\omega_n}\right)^{1/n}$. Definiere $\tilde{B} := E \cap B$. Setze $r := |x-y|$ für fixiertes $x \in \mathbb{R}^n$. Wir erhalten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\int\limits_E \frac{1}{r^{n-\alpha}} &= \int\limits_{\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \int\limits_{E\setminus\tilde{B}=E\setminus B} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\
&\leq \int\limits_{\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \frac{1}{R^{n-\alpha}}\left[|E| - \left|\tilde{B}\right|\right] \\
&\leq \int\limits_{\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \int\limits_{B\setminus\tilde{B}} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\
&= \int\limits_B \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\
&= \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_0^R \underbrace{\frac{1}{r^{n-\alpha}}r^{n-1}}_{=r^{\alpha-1}}\,dr\,d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \frac{1}{\alpha}r^\alpha\Big|_0^R \cdot \left|\mathbb{S}^{n-1}\right| = \frac{1}{\alpha}R^\alpha n\omega_n,
\end{aligned}$$

da

$$\omega_n = |B_1(0)| = \int\limits_{B_1} 1 = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_0^1 r^{n-1}\,dr\,d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|$$

gilt. Nun ist $R = \left(\frac{|E|}{\omega_n}\right)^{1/n}$ und die Behauptung folgt. □

Lemma 1.6. *Sei $0 < \alpha < n$. Es gilt für kleine $\delta > 0$*

$$\int\limits_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \leq n\frac{\omega_n}{\alpha}\delta^\alpha = O\left(\delta^\alpha\right)$$

für beliebige $x,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$*, falls* $n \geq 2$ *ist. Weiterhin gilt in zwei Dimensionen,* $n = 2$,

$$\int\limits_{B_\delta(x_0)} |\log|x-y||\,dy = o(\delta),$$

ebenfalls für beliebige $x,\ x_0 \in \mathbb{R}^2$ *mit* $|x - x_0| \leq c$.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.5.

Wir dürfen annehmen, dass $\delta < \frac{1}{4}$ ist. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $|x-x_0| \leq \frac{1}{2}$ gilt. Sonst ist nach Dreiecksungleichung stets $|x-y| \geq \frac{1}{4}$, der Integrand also beschränkt und die Behauptung klar. Aus den obigen Annahmen ergibt sich $|x-y| \leq \frac{3}{4}$, $\log|x-y|$ ist daher stets negativ. Somit dürfen wir wie in Lemma 1.5 argumentieren, da der Integrand auch hier monoton in $|y-x|$ ist. Daher genügt es, das Integral im Falle $x = x_0$ abzuschätzen. Es gilt

$$\int\limits_{B_\delta(x)} |\log|x-y||\,dy = \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_0^\delta |\log|x-y||\cdot r$$

mit $r = |y-x|$. Die Funktion $f(t) = \frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{4}t^2$ ist eine Stammfunktion zu $t\log t$. Die Behauptung folgt. □

1.2. **Innere Hölderabschätzungen.** Die nachfolgenden Integrale sind absolut konvergent. Wir werden sie ausrechnen indem wir zunächst bei der Integration ε-Kugeln um die Singularitäten auslässt und dann $\varepsilon \searrow 0$ lässt. Dabei erhält man die üblichen Werte. Die so erhaltenen Ergebnisse bezeichnet man auch als Cauchyschen Hauptwerte. Sie können auch für nicht absolut konvergente Integrale existieren.

Theorem 1.7 (Gauß)**.** *Sei* $E \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $n \geq 2$ *und* $f \in L^\infty(E)$. *Dann sind die Integrale*

$$U(x) = \int\limits_E \Gamma(r)f(y)\,dy, \quad r = |x-y|,$$
$$U_i(x) = \int\limits_E \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)f(y)\,dy$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ *absolut konvergent, es ist* $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *und für die Ableitungen gilt* $\frac{\partial}{\partial x^i}U = U_i$ *für alle* $1 \leq i \leq n$*. Es gelten die Abschätzungen*

$$\|U\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} \leq c(E,n)\cdot\|f\|_{L^\infty(E)} \quad \text{für } n \geq 3$$

und

$$\|DU\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} + \|U\|_{C^0(B_R(0))} \leq c(E,n,R)\cdot\|f\|_{L^\infty(E)} \quad \text{für } n = 2.$$

Beweis. Wir schreiben die Integrale als

$$U(x) = \lim_{\delta\searrow 0}\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \Gamma(r)f(y)\,dy$$

und

$$U_i(x) = \lim_{\delta\searrow 0}\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)f(y)\,dy.$$

Beachte zunächst, dass in allen Dimensionen $n \geq 2$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right| \leq c\cdot r^{1-n}$$

gilt. Absolute Konvergenz folgt nun aus

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} |\Gamma(r)||f(y)| \le \|f\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{E\setminus B_\delta} |\Gamma(r)| \\
\le \begin{cases} c(E,n,R)\cdot \|f\|_{L^\infty}, & n=2, \quad x\in B_R(0),\\ c(E,n)\cdot \|f\|_{L^\infty}, & n\ge 3,\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right| |f(y)| \le \|f\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} \left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right| \le c(E,n)\cdot \|f\|_{L^\infty},
$$

da die angegebenen Abschätzungen unabhängig von δ sind, wobei wir die Lemma 1.5 und 1.6 verwendet haben. Aus diesen Abschätzungen folgt auch (falls wir nachweisen können, dass U_i die Ableitungen von U sind) die behauptete Normabschätzung.

Wir haben noch die Ableitungen von U mit U_i zu vergleichen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Definiere $r_\varepsilon := (r^2+\varepsilon)^{1/2}$ und

$$
U_\varepsilon(x) = \int\limits_E \Gamma(r_\varepsilon) f(y)\, dy.
$$

Es gilt $U_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (was man wie beim Beweis der Glättung von Funktionen einsieht) und wir behaupten, dass $U_\varepsilon - U \rightrightarrows 0$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert. Es gilt nämlich (nehme im Falle $n=2$ ohne Einschränkung an, dass $\delta \le \frac{1}{2}$ und $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ gelten)

$$
\begin{aligned}
|U(x) - U_\varepsilon(x)| &\le \int\limits_E |\Gamma(r) - \Gamma(r_\varepsilon)| \cdot |f| \\
&\le \|f\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_E |\Gamma(r) - \Gamma(r_\varepsilon)|
\end{aligned}
$$

und weiterhin gilt

$$
\int\limits_E |\Gamma(r) - \Gamma(r_\varepsilon)| \le \int\limits_{E\setminus B_\delta(x)} |\Gamma(r) - \Gamma(r_\varepsilon)| + 2\int\limits_{B_\delta(x)} |\Gamma(r)|.
$$

Für den zweiten Term haben wir $|r_\varepsilon| > |r|$ und die Monotonie von Γ benutzt. Aufgrund der Integrierbarkeit können wir zunächst δ so klein machen, dass das zweite Integral kleiner als ein $\varepsilon' > 0$ wird. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes schätzen wir das Argument im ersten Integral durch $c(\delta)\cdot\varepsilon$ ab. Hier hängt $c(\delta)$ insbesondere von $D\Gamma$ ab und dies wird im Unendlichen klein, verursacht also keine Probleme. Schließlich wählen wir nun $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ klein und können auch das erste Integral durch ε' beschränken. Die behauptete gleichmäßige Konvergenz folgt.

Beim Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz haben wir insbesondere die Integrierbarkeit von Γ benutzt. Dies funktioniert für $\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma$ ganz analog. Die Details sind eine Übung. Wir erhalten also auch

$$
\frac{\partial}{\partial x^i} U_\varepsilon \rightrightarrows U_i,
$$

also gleichmäßige Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz sind U und U_i stetig.

Da wir bei gleichmäßiger Konvergenz Differentiation und Grenzwertbildung in der Folge vertauschen dürfen, folgt also $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $U_i = \frac{\partial}{\partial x^i} U$. $\square$

Theorem 1.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \alpha \le 1$. Dann ist*

$$w(x) := \int\limits_{\Omega} \Gamma(r) f(y)\, dy \quad \text{(wobei wiederum } r = |x-y| \text{ ist)}$$

in $C^2(\Omega)$ und in Ω gilt

$$\Delta w(x) = f(x).$$

Sei $\Omega \subset \Omega_0 \Subset \mathbb{R}^n$, Ω_0 offen, und sei $\partial\Omega_0 \in C^1$ (ggf. ist auch $\Omega = \Omega_0$ zulässig; es genügt, Ω_0 so zu wählen, dass der Divergenzsatz gilt). Setze f durch 0 nach Ω_0 fort. Dann gilt für $x \in \Omega$ die sogenannte Dinische Formel

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r) \cdot [f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

ν bezeichnet hier die äußere Normale an Ω_0.

Schließlich gilt auf kompakten Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$

$$\left\|D^2 w\right\|_{L^\infty(\Omega')} \le c\left(\Omega', \alpha, n, \Omega\right) \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

Beweis.

- Definiere

$$u(x) := \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r) \cdot [f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dieser Ausdruck ist für $x \in \Omega$ wohldefiniert, denn es gilt

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r)\right| \cdot |f(y) - f(x)| \le c \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \cdot \frac{r^\alpha}{r^n}.$$

Benutze nun Lemma 1.5. Das Randintegral ist unproblematisch, denn für alle $x \in \Omega$ ist der Abstand zu $\partial\Omega_0$ (nicht gleichmäßig) nach unten beschränkt. Somit tritt keine Singularität auf.

Sei $1 \le i \le n$ fixiert und setze $v := w_i$. Beachte, dass nach Theorem 1.7 $w \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ ist. Fixiere eine glatte Abschneidefunktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \eta \le 1$ und

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ 1, & t \ge 2, \end{cases}$$

so dass $|\dot{\eta}| \le 2$ gilt. Definiere

$$\eta_\varepsilon(t) := \eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

und

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &:= \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \eta_\varepsilon(r) \cdot f(y)\, dy \\ &= \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \eta_\varepsilon(r) \cdot f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Aufgrund der eingefügten Abschneidefunktion ist wieder klar, dass $v_\varepsilon \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ ist.

Wir behaupten, dass auf kompakten Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon \rightrightarrows u$$

für $\varepsilon \searrow 0$ gilt, also gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Es gilt (alle Integrationen sind bezüglich y)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^j}v_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\right][f(y)-f(x)] + f(x)\cdot\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\eta_\varepsilon(r)\right]\\ &= \int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\right][f(y)-f(x)] - f(x)\cdot\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial y^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\eta_\varepsilon(r)\right]\\ &= \int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\right][f(y)-f(x)] - f(x)\cdot\int\limits_{\partial\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\cdot\eta_\varepsilon(r)\cdot\nu_j.\end{aligned}$$

Die Differenz zu u schätzen wir für $x \in \Omega'$ wie folgt ab

$$\begin{aligned}\left|u(x)-\frac{\partial}{\partial x^j}v_\varepsilon(x)\right| &\le \int\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\Gamma(r)\right|\cdot|1-\eta_\varepsilon(r)|\cdot|f(y)-f(x)|\,dy\\ &\quad+\int\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right|\cdot\left|\frac{\partial}{\partial x^j}\eta_\varepsilon(r)\right|\cdot|f(y)-f(x)|\,dy\\ &\quad+|f(x)|\cdot\int\limits_{\partial\Omega_0}\left|\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(r)\right|\cdot|1-\eta_\varepsilon(r)|\,dy\\ &\equiv I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

Da $x \in \Omega' \Subset \Omega$ ist und nach Wahl der Abschneidefunktion erhalten wir mit Hilfe von Lemma 1.5 für $0 < \varepsilon \le \varepsilon(\Omega, \Omega')$

$$\begin{aligned}I_1 &\le c\cdot\int\limits_{|y-x|\le 2\varepsilon}\frac{1}{|x-y|^n}\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot|x-y|^\alpha\,dy\\ &\le c(n,\alpha)\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot\varepsilon^\alpha.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ klein ist, durften wir insbesondere annehmen, dass $\Omega' + B_{2\varepsilon}(0) \subset \Omega$ gilt, was die Abschätzung von $|f(y) - f(x)|$ mit Hilfe der Höldernorm rechtfertigt. Hier haben wir die Norm mit $\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ statt $\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ bezeichnet. Der Raum $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist kein Banachraum. Wenn wir aber diesen Index nur zur Bezeichnung der Norm verwenden, ist klar, dass es die Norm auf $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ sein soll, auch wenn wir den Abschluss weglassen. Dies wollen wir auch in Zukunft so handhaben.

Die Differentiation von η_ε liefert einen zusätzlichen Faktor ε^{-1}. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}I_2 &\le c\cdot\int\limits_{\varepsilon\le|y-x|\le 2\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|y-x|^{n-1}}\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot|x-y|^\alpha\,dy\\ &\le c\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\underbrace{\int\limits_{|y-x|\le 2\varepsilon}\frac{1}{|y-x|^{n-1-\alpha}}\,dy}_{\le c\cdot\varepsilon^{1+\alpha}}\\ &\le c\cdot\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\cdot\varepsilon^\alpha.\end{aligned}$$

Das Integral I_3 verschwindet sogar, wenn ε klein genug ist. Dann folgt aus

$$\varepsilon < \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \le \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega_0) \le \tfrac{1}{2}|x-y|$$

für $x \in \partial\Omega_0$ und $x \in \Omega'$ nämlich schon $\eta_\varepsilon(r) = 1$.

Wir erhalten somit

$$\left|u(x) - \frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon(x)\right| \le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \varepsilon^\alpha \to 0 \text{ für } x \in \Omega', \text{ falls } \varepsilon \to 0.$$

Als lokal gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen ist daher auch u stetig, $u \in C^0(\Omega)$.

Wir behaupten, dass die v_ε gleichmäßig in ganz Ω gegen eine (gleich noch definierte) Funktion v konvergieren. Wir bilden für $x \in \mathbb{R}^n$ die Differenz von

$$v(x) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot f(y)\, dy$$

und (der bereits oben definierten Funktion)

$$v_\varepsilon(x) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \eta_\varepsilon(r) \cdot f(y)\, dy$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
|v(x) - v_\varepsilon(x)| &\le \int\limits_{\Omega_0} \left|\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r)\right| \cdot |1 - \eta_\varepsilon(r)| \cdot |f(y)|\, dy \\
&\le c \cdot \|f\|_{C^0(\Omega)} \cdot \int\limits_{|x-y| \le 2\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\, dy \\
&\le c \cdot \|f\|_{C^0(\Omega)} \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir haben also nun in $\Omega' \Subset \Omega$

$$v_\varepsilon \rightrightarrows v$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x^j} v_\varepsilon \rightrightarrows u$$

nachgewiesen. Wir dürfen also die Grenzwertbildung $\varepsilon \searrow 0$ und die Differentiation vertauschen. Da $v = \frac{\partial w}{\partial x^i}$ gilt, folgt also $w \in C^2(\Omega)$ und die zweiten Ableitungen sehen so wie in der Dinischen Formel behauptet aus.

• Sei nun $x \in \Omega$. Wir wählen $\Omega_0 = B_R(x)$ für ein $R > 0$, so dass $\Omega \Subset B_R(x)$ gilt. Aufgrund der Dinischen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta w(x) &= \int\limits_{B_R} \Delta\Gamma(r)[f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial B_R(x)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu^i \\
&= -f(x) \cdot \begin{cases} \int\limits_{\partial B_R} \frac{1}{2\pi} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} \frac{y^i - x^i}{|x-y|}\, dy, & n = 2, \\ \int\limits_{\partial B_R} \frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \frac{y^i - x^i}{|x-y|}\, dy, & n \ge 3. \end{cases} \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

da $|\partial B_R| = n\omega_n R^{n-1}$ ist. Im ersten Schritt haben wir benutzt, dass Γ eine Fundamentallösung der Laplacegleichung ist, dass also für $r \neq 0$ die Gleichheit $\Delta\Gamma = 0$ gilt. Eine einfache Abschätzung, als Übungsaufgabe überlassen, zeigt, dass auch die Singularität bei $x = y$ keinen Beitrag zu diesem Integral liefert.

• Für die Normabschätzung verwenden wir nochmals die Dinische Formel. Sei also $x \in \Omega'$. Schreibe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x) &= \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r) \cdot [f(y) - f(x)]\, dy - f(x) \cdot \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\equiv I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Wir erhalten (da sich für $x \in \Omega'$ und $y \in \Omega_0$ der Hölderquotient abschätzen lässt, denn dann ist $|x-y| \ge \varepsilon$ und wir benutzen nur die C^0-Schranke)

$$\begin{aligned}|I_1| &\le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \int\limits_{\Omega_0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \\ &\le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)},\end{aligned}$$

und

$$|I_2| \le c \cdot \|f\|_{C^0(\Omega)}.$$

Das Theorem folgt. □

Für die zweiten Ableitungen wollen wir bei hölderstetiger rechter Seite noch die Hölderstetigkeit nachweisen.

Wir definieren zunächst Normen, die sich unter Homothetien des Gebietes nicht ändern.

Definition 1.9 (Dimensionsunabhängige Normen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $d := \operatorname{diam} \Omega$. Dann definieren wir auf $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ bzw. $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ dimensionsunabhängige Normen durch

$$\|u\|'_{C^k(\Omega)} := \sum_{i=0}^{k} d^i \cdot \sum_{|\beta|=i} \|D^\beta u\|_{C^0(\Omega)}$$

und

$$\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|'_{C^k(\Omega)} + d^{k+\alpha} \cdot \left[D^k u\right]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Bemerkung 1.10. Sei $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $v \in C^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Dann ist $u \cdot v \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ und es gilt

$$\|u \cdot v\|'_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \le \|u\|'_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \cdot \|v\|'_{C^{0,\beta}(\Omega)}.$$

Beweis. Übung. □

Beim nachfolgenden Theorem mache man sich als Übung klar, dass gerade bei der angegebenen Ungleichung für die Normen das Skalierungsverhalten so ist, dass keine Abhängigkeit der Konstanten von R auftritt.

Theorem 1.11. *Sei $R > 0$, $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{3R}(x_0)$. Sei $0 < \alpha < 1$, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{B_2}\right)$ und sei*

$$w(x) := \int\limits_{B_2} \Gamma(r) \cdot f(y)\, dy, \quad r = |x-y|.$$

Dann ist $w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{B_1}\right)$ und es gilt

$$\|D^2 w\|'_{C^{0,\alpha}(B_1)} \le c(n,\alpha) \cdot \|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)},$$

d. h.

$$\left\|D^2 w\right\|_{C^0(B_R)} + R^\alpha \cdot \left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}(B_R)} \le c(n,\alpha) \cdot \left\{\|f\|_{C^0(B_{3R})} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}\right\}.$$

Beweis. Wir verwenden wiederum die Dinische Formel, diesmal mit $\Omega = \Omega_0 = B_2$,
$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x) = \int\limits_{B_2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma(r)[f(y) - f(x)]\,dy - f(x) \int\limits_{\partial B_2} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma(r) \cdot \nu_j\,dy.$$
Hieraus folgt für $x \in B_1$ direkt (da $r \approx R$ auf ∂B_2)
$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} w(x)\right| &\le c \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_2)} \cdot \int\limits_{B_2} \frac{1}{r^{n-\alpha}} + \|f\|_{C^0(B_2)} \cdot \int\limits_{\partial B_2} |D\Gamma(r)| \\ &\le c \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_2)} \cdot R^\alpha + c \cdot \|f\|_{C^0(B_2)} \qquad (1.1) \\ &\le c \cdot \|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)}.\end{aligned}$$
Seien nun $x, \overline{x} \in B_1$, $0 < \delta := |x - \overline{x}|$, $\xi := \frac{x+\overline{x}}{2}$, $r = |x - y|$, $\overline{r} = |\overline{x} - y|$. Beachte, dass $B_\delta(\xi) \subset B_2$ ist. Es gilt
$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} w(\overline{x}) = \int\limits_{B_2} \frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} \Gamma(\overline{r})[f(y) - f(\overline{x})]\,dy - f(\overline{x}) \int\limits_{\partial B_2} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i} \Gamma(\overline{r}) \cdot \nu_j\,dy.$$
Wir schreiben
$$\begin{aligned}D_i D_j w(\overline{x}) - D_i D_j w(x) = {}& f(x) I_1 + [f(x) - f(\overline{x})] I_2 \\ &+ I_3 + I_4 + [f(x) - f(\overline{x})] I_5 + I_6\end{aligned}$$
mit
$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\partial B_2} \{D_i\Gamma(r) - D_i\Gamma(\overline{r})\} \cdot \nu_j, \\ I_2 &= \int\limits_{\partial B_2} D_i\Gamma(\overline{r}) \cdot \nu_j, \\ I_3 &= \int\limits_{B_\delta(\xi)} D_i D_j \Gamma(r)[f(x) - f(y)], \\ I_4 &= \int\limits_{B_\delta(\xi)} D_i D_j \Gamma(\overline{r})[f(y) - f(\overline{x})], \\ I_5 &= \int\limits_{B_2 \setminus B_\delta(\xi)} D_i D_j \Gamma(r), \\ I_6 &= \int\limits_{B_2 \setminus B_\delta(\xi)} \{D_i D_j \Gamma(r) - D_i D_j \Gamma(\overline{r})\}[f(\overline{x}) - f(y)]. \end{aligned}$$
Dies rechnet man unmittelbar nach, da alle Integrale – wie wir uns anhand der folgenden Rechnungen überzeugen – absolut konvergieren. Wir betrachten die auftetenden Integrale einzeln. Es genügt, jedes einzelne Integral (mit den entsprechenden Vorfaktoren) betragsmäßig nach oben durch
$$c(n,\alpha) \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^\alpha \cdot \left\{\|f\|_{C^0(B_{3R})} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}\right\}$$
abzuschätzen.

(i) Wir definieren $r_t = |tx + (1-t)\overline{x} - y|$. Dann ist
$$D_i\Gamma(r) - D_i\Gamma(\overline{r}) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} D_i\Gamma(r_t)\,dt$$

$$= \int_0^1 D_i D_k \Gamma(r_t) \left(x^k - \overline{x}^k\right).$$

Somit erhalten wir

$$|I_1| \le c \cdot \int_0^1 \int_{\partial B_2} \frac{1}{r_t^n} \delta \le c \cdot \frac{\delta}{R} \le c(n,\alpha) \cdot \left(\frac{\delta}{R}\right)^{\alpha},$$

denn es gilt $\frac{\delta}{2R} \le 1$ und $r_t|_{\partial B_2} \ge R$.

(ii) Es gilt

$$|I_2| \le \int_{\partial B_2} |D\Gamma(\overline{r})| \le c(n).$$

Weiterhin gilt

$$|f(x) - f(\overline{x})| \le [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot \delta^{\alpha}.$$

(iii) Wir erhalten nach Lemma 1.5

$$|I_3| \le \int_{B_\delta(\xi)} \left|D^2\Gamma(r)\right| \cdot |x-y|^{\alpha} \cdot [f]_{C^{0,\alpha}} \le c(n,\alpha) \cdot \delta^{\alpha} \cdot [f]_{C^{0,\alpha}}.$$

(iv) I_4 behandelt man analog zu I_3.

(v) Wir integrieren partiell

$$|I_5| \le \left| \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(r) \cdot \nu_j \right| + \left| \int_{\partial B_\delta(\xi)} D_i\Gamma(r) \cdot \nu_j \right| \le c,$$

denn das erste Integral ist beschränkt und im zweiten Integral gilt $|x-y| \ge |y-\xi| - |x-\xi| = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\delta$. Wir können die Beträge ins Integral hineinziehen. Der Rest funktioniert dann wie bei I_2. Hier ist die absolute Konvergenz ohnehin klar, da keine Singularität auftritt.

(vi) Es gilt mit r_t wie oben

$$D_iD_j\Gamma(r) - D_iD_j\Gamma(\overline{r}) = \int_0^1 D_iD_jD_k\Gamma(r_t)\left(x^k - \overline{x}^k\right).$$

Somit folgt mit $|x - \overline{x}| = \delta$

$$|I_6| \le c \cdot \int_0^1 \delta \int_{|y-\xi|\ge\delta} \frac{|y-\overline{x}|^{\alpha}}{r_t^{n+1}} \cdot [f]_{C^{0,\alpha}}.$$

Da $|y - \xi| \ge \delta$ ist, folgt

$$|y-\overline{x}| \le |y-\xi| + \underbrace{|\overline{x}-\xi|}_{=\frac{1}{2}\delta} \le 2|y-\xi|$$

und

$$r_t = |tx + (1-t)\overline{x} - y| \equiv |x_t - y| \ge |y-\xi| - \underbrace{|x_t - \xi|}_{\le\frac{1}{2}\delta} \ge \tfrac{1}{2}|y-\xi|.$$

Als Abschätzung für I_6 erhalten wir daher

$$|I_6| \le c(n,\alpha) \cdot [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot \delta \cdot \int_{|y-\xi|>\delta} \frac{1}{|y-\xi|^{n+1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned} &\le c(n,\alpha)\cdot [f]_{C^{0,\alpha}}\cdot \delta\cdot n\cdot \omega_n\cdot \int\limits_\delta^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+1-\alpha}}\,dr\\ &= \frac{c}{1-\alpha}\cdot n\cdot\omega_n\cdot\delta^\alpha\cdot [f]_{C^{0,\alpha}}. \end{aligned}$$

Damit sind alle Integrale wie gewünscht abgeschätzt und das Theorem folgt.

Wir halten noch einmal fest, dass für alle $x, \overline{x} \in B_1$ die folgende Abschätzung gilt. Dabei genügt, wie man sich anhand der obigen Abschätzungen leicht überzeugen kann, in der ersten Norm sogar die Norm über die kleinere Kugel.

$$|D_iD_jw(x)-D_iD_jw(\overline{x})| \le c(n,\alpha)\cdot\left\{R^{-\alpha}\cdot\|f\|_{C^0(B_1)}+[f]_{C^{0,\alpha}(B_2)}\right\}\cdot|x-\overline{x}|^\alpha. \tag{1.2}$$

□

Bemerkung 1.12. Sei $f\in C_c^{0,\alpha}(B_R(0))$ und sei in der bisherigen Notation

$$w := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(r)\cdot f(y)\,dy.$$

Dann ist $w\in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\left[D^2w\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c(n,\alpha)\cdot [f]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.3}$$

$$\left\|D^2w\right\|'_{C^{0,\alpha}(B_R)} \le c(n,\alpha)\cdot \|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}, \tag{1.4}$$

$$\|w\|'_{C^1(B_R)} \le c(n,\alpha)\cdot R^2\cdot\|f\|_{C^0(B_{3R})}, \qquad \text{falls } n\ge 3 \text{ ist.} \tag{1.5}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst (1.4). Nach (1.1) gilt

$$\left\|D^2w\right\|_{C^0(B_R)} \le c\cdot\left\{R^\alpha\cdot [f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}+\|f\|_{C^0(B_{3R})}\right\}.$$

Nach (1.2) gilt

$$\left[D^2w\right]_{C^{0,\alpha}(B_R)} \le c\cdot\left\{R^{-\alpha}\cdot\|f\|_{C^0(B_{3R})}+[f]_{C^{0,\alpha}(B_{3R})}\right\}.$$

Die zweite Ungleichung hier mit R^α multipliziert und zur ersten addiert ergibt (wie in Theorem 1.11) gerade (1.4).

Lassen wir in (1.2) $R\to\infty$, so folgt (1.3).

Für den Beweis von (1.5) haben wir

$$\|w\|'_{C^1(B_R)} \equiv \|w\|_{C^0(B_R)} + R\cdot\|Dw\|_{C^0(B_R)}$$

abzuschätzen. Zunächst einmal erhalten wir für alle x

$$|w(x)| \le \int\limits_{B_R}|\Gamma(r)|\cdot|f(y)|\,dy \le c(n)\cdot R^2\cdot\|f\|_{C^0(B_R)}$$

nach Lemma 1.5 in Dimension $n\ge 3$. Analog folgt

$$|Dw(x)| \le \int\limits_{B_R}|D\Gamma(r)|\cdot|f(y)|\,dy \le c(n)\cdot R\cdot\|f\|_{C^0(B_R)}.$$

Wir addieren die letzte Ungleichung (mit R multipliziert) zur vorletzten Ungleichung und erhalten (1.5). □

Aus Theorem 1.11 erhalten wir

Theorem 1.13. *Seien $f\in C_c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und $u\in C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Gelte $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$, so ist*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y)\cdot f(y)\,dy.$$

Beweis. Nach Theorem 1.8 erfüllt

$$w(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y)\, dy$$

die Differentialgleichung $\Delta w = f$ in $\mathbb{R}^n$ und es gilt $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Betrachte $v := w - u$. v ist harmonisch. Daher genügt es aufgrund des Maximumprinzips, nachzuweisen, dass $v(x) \to 0$ konvergiert für $|x| \to \infty$. Da u kompakten Träger hat, brauchen wir nur noch nachzuweisen, dass w im Unendlichen verschwindet. (Dies folgt direkt aus Integralabschätzungen in Dimension $n \geq 3$. Übung.) Allgemein folgt dies aus der folgenden Anwendung des Divergenztheorems

$$\begin{aligned} w(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \cdot \Delta u(y)\, dy \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y^i} \Gamma(x-y) \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} u(y)\, dy. \end{aligned}$$

Da $|D\Gamma(r)| \leq \frac{c}{r^{n-1}}$ ist, folgt die Behauptung. □

1.3. **Hölderabschätzungen bis zum Rand.**

Theorem 1.14. *Sei $\mathbb{R}^n_+ = \{x^n > 0\}$, $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$, $R > 0$, $B_1^+ = B_R^+(x_0) = B_R(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+$, $B_2^+ = B_{3R}^+(x_0)$ und sei $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{B_2^+}\right)$ für ein $0 < \alpha < 1$. Dann gilt für das Volumenpotential (wieder mit $r = |x-y|$)*

$$w(x) = \int\limits_{B_2^+} \Gamma(r) f(y)\, dy$$

$w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{B_1^+}\right)$ mit der Abschätzung

$$\left\|D^2 w\right\|_{C^0\left(B_1^+\right)} + R^\alpha \cdot \left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}\left(B_1^+\right)} \leq c(n,\alpha) \cdot \left\{\|f\|_{C^0\left(B_2^+\right)} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(B_2^+\right)}\right\}.$$

Beweis. Nach Theorem 1.11 ist $w \in C^{2,\alpha}\left(B_2^+\right)$ und es gilt $\Delta w = f$ in B_2^+. Es genügt, die Ableitungen $D_i D_j w$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, abzuschätzen, denn dann folgt aufgrund der Gleichung auch eine entsprechende Schranke für

$$D_n D_n w = f - \sum_{i=1}^{n-1} D_i D_i w.$$

Nehme also $j < n$ an. Da ∂B_2^+ stückweise glatt ist, gilt das Divergenztheorem auf B_2^+ und wir können die Dinische Formel anwenden.

$$D_i D_j w(x) = \int\limits_{B_2^+} D_i D_j \Gamma(r)[f(y) - f(x)] - f(x) \cdot \int\limits_{\partial B_2^+} D_i \Gamma(r) \cdot \nu_j.$$

Beachte, dass wir im zweiten Term nur über den sphärischen Teil des Randes zu integrieren brauchen, da nach Wahl von j auf dem flachen Teil des Randes $\nu_j = 0$ gilt. Für $\overline{x} \in B_1^+$ bekommen wir mit $\overline{r} = |\overline{x} - y|$

$$D_i D_j w(\overline{x}) = \int\limits_{B_2^+} D_i D_j \Gamma(\overline{r})[f(y) - f(\overline{x})] - f(\overline{x}) \cdot \int\limits_{\partial B_2^+} D_i \Gamma(\overline{r}) \cdot \nu_j.$$

Wir bilden nun für $x \in B_1^+$

$$D_i D_j w(\overline{x}) - D_i D_j w(x) = \ldots$$

und fahren ganz analog zum Beweis von Theorem 1.11 fort. Die Details hierzu sind als Übung empfohlen. (Beachte insbesondere, dass der gerade Teil des Randes keinen Beitrag zum Randintegral liefert. Daher tritt auch keine Singularität auf, wenn man sich ihm nähert.) □

Der Bemerkung 1.12 entsprechend erhalten wir

Korollar 1.15. *Sei $f \in C_c^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}_+^n}\right)$, $0 < \alpha < 1$, und sei (in der üblichen Bezeichnung)*

$$w = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma(r) f(y).$$

Dann ist $w \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}_+^n}\right)$ und es gilt die Abschätzung

$$\left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \le c(n,\alpha) \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}.$$

Beweis. Wähle $R > 0$, so dass $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ ist. Nach Theorem 1.14 folgt

$$R^\alpha \left[D^2 w\right]_{C^{0,\alpha}\left(B_R^+\right)} \le c(n,\alpha) \left\{ \|f\|_{C^0\left(B_R^+\right)} + R^\alpha \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(B_R^+\right)} \right\}.$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir durch R^α dividieren und $R \to \infty$ lassen. □

Für Lösungen von $\Delta u = f$ erhalten wir noch die folgende Randabschätzung.

Lemma 1.16. *Sei $u \in C_c^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}_+^n}\right)$, $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}_+^n}\right)$ und gelte $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}_+^n$ und $u(\hat{x}, 0) = 0$ für $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann gilt*

$$\left[D^2 u\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \le c(n,\alpha) \cdot [f]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}.$$

Beweis. Da $\Delta u = f$ ist, hat f kompakten Träger. Wir spiegeln f gerade

$$\tilde{f}\left(\hat{x}, x^n\right) = \begin{cases} f(x), & x^n \ge 0, \\ f\left(\hat{x}, -x^n\right), & x^n < 0. \end{cases}$$

Auch $\tilde{f}$ hat kompakten Träger und es gilt (sogar mit Gleichheit)

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{f}\right\|_{C^{0,\alpha}} &\le \|f\|_{C^{0,\alpha}}, \\ \left[\tilde{f}\right]_{C^{0,\alpha}} &\le [f]_{C^{0,\alpha}}. \end{aligned}$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n$ den Punkt $\tilde{x} = (\hat{x}, -x^n)$. Definiere weiterhin für $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned} w(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left[\Gamma(|x-y|) - \Gamma(|\tilde{x}-y|)\right] \cdot f(y)\, dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left[\Gamma(|x-y|) - \Gamma(|x-\tilde{y}|)\right] \cdot f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie in der Definition ist $w(\hat{x}, 0) = 0$ und nach Gauß gilt $w \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, denn

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma(|x-\tilde{y}|) \cdot f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}_-^n} \Gamma(|x-y|) \cdot \underbrace{f(\tilde{y})}_{=\tilde{f}(y)}.$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} w(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma(|x-y|)\cdot \tilde f(y) - \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \Gamma(|x-y|)\cdot \tilde f(y) \\ &= 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Gamma(|x-y|)\cdot \tilde f(y) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(|x-y|)\cdot \tilde f(y) \\ &\equiv w_1 + w_2. \end{aligned}$$

Es ist daher $w \in C^{2,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ und $\Delta w = f$ in $\mathbb{R}^n_+$. Weiterhin gilt sogar $w_1 \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ und nach Korollar 1.15

$$\left[D^2 w_1\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \le c(n,\alpha)\cdot\left[\tilde f\right]_{C^{0,\alpha}}$$

sowie $w_2 \in C^{2,\alpha}\left(\mathbb{R}^n\right)$ mit (vgl. Bemerkung 1.12)

$$\left[D^2 w_2\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c(n,\alpha)\cdot\left[\tilde f\right]_{C^{0,\alpha}}.$$

Es genügt nun, nachzuweisen, dass in $\mathbb{R}^n_+$ die Gleichung $w = u$ gilt. Zum Beweis bemerken wir zunächst, dass nach Gauß die Abschätzung $|w| \le \text{const.}$ für $n \ge 3$ gilt.

In allen Dimensionen $n \ge 2$ erhält man dies wie folgt: Sei $\operatorname{supp} f \subset B_R(0)$ und daher ohne Einschränkung $y \in B_R(0)$. Dann gelten $|x-y| \ge |x| - R$, $|x-\tilde y| \ge |x| - R$ (ebenso für alle Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen y und $\tilde y$) und $||x-y| - |x-\tilde y|| \le 2R$. Wir erhalten

$$|\Gamma(x-y) - \Gamma(x-\tilde y)| \le \sup_{|z|\ge|x|-R} |D\Gamma(z)|\cdot 2R \to 0 \quad \text{für} \quad |x|\to\infty.$$

Schreiben wir w in der Gestalt

$$w(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x-\tilde y)]\cdot f(y)\,dy,$$

so folgt aus der obigen Abschätzung und der Stetigkeit auf einem Ball um den Ursprung die globale Beschränktheit. Aus diesen Argumenten folgt sogar $w(x)\to 0$ für $|x|\to\infty$. Weiterhin gilt $u = w$ auf ∂R^n_+. Da u kompakten Träger besitzt folgt somit aufgrund des Maximumprinzips $u = w$. □

2. Schaudertheorie

2.1. **Kompaktheitssätze.** Wir wollen das folgende Kompaktheitslemma verwenden.

Lemma 2.1 (Kompaktheitslemma, Ehrlings Lemma)**.** *Seien E_i, $i = 1,2,3$, Banachräume und gelte*

$$E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow E_3,$$

wobei beide Einbettungen („$\hookrightarrow$"= Einbettung) stetig sind und $E_1 \hookrightarrow E_2$ kompakt ist. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$, so dass

$$\|u\|_2 \le \varepsilon\cdot\|u\|_1 + c_\varepsilon\cdot\|u\|_3$$

für alle $u \in E_1$ gilt.

Beweis. Wir unterdrücken in der Notation die Einbettungsabbildungen.

Falls die Behauptung nicht richtig ist, finden wir zu einem $\varepsilon > 0$ eine Folge $u_k \in E_1$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|u_k\|_2 > \varepsilon\cdot\|u_k\|_1 + k\cdot\|u_k\|_3$$

gilt. Ohne Einschränkung können wir die u_k so normieren, dass $\|u_k\|_2 = 1$ gilt. Es folgt
$$u_k \to 0 \text{ in } E_3$$
und
$$\|u_k\|_1 \le \varepsilon^{-1}.$$
Nutze nun die Kompaktheit der ersten Einbettung. Nach Wahl einer Teilfolge dürfen wir daher (ohne Einschänkung) annehmen, dass
$$u_k \to u \text{ in } E_2$$
konvergiert für ein geeignetes Element $u \in E_2$. Hieraus folgt insbesondere $\|u\|_2 = 1$. Aufgrund der Stetigkeit der Einbettung $E_2 \hookrightarrow E_3$ erhalten wir auch Konvergenz der u_k in E_3 gegen u. In E_3 gilt $u_k \to 0 = u$. Wegen der Injektivität ($E_2 \hookrightarrow E_3$ ist eine Einbettung) folgt damit auch $u = 0$ in E_2. Wir erhalten einen Widerspruch. □

Korollar 2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Konstante $c_\varepsilon > 0$, so dass*
$$\|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} \le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + c_\varepsilon \cdot \|u\|_{C^0(\Omega)}$$
für alle $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt.

Bemerkung 2.3. Hieraus erhalten wir auch leicht eine multiplikative Form. Angenommen, es ist $c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon}$, so folgt mit $\varepsilon = \sqrt{\frac{\|u\|_{C^0}}{\|u\|_{C^{2,\alpha}}}}$
$$\begin{aligned}\|u\|_{C^2} &\le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \frac{c}{\varepsilon} \cdot \|u\|_{C^0}\\ &= (1+c)\sqrt{\|u\|_{C^0}} \cdot \sqrt{\|u\|_{C^{2,\alpha}}}\end{aligned}$$
und daraus
$$\|u\|^2_{C^2} \le c \cdot \|u\|_{C^0} \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}}.$$
Die Umkehrung ist einfach.

2.2. **Schaudersche a priori-Schranken.** In den nächsten beiden Kapiteln soll L stets die folgenden Eigenschaften haben.

Definition 2.4 (Generalvoraussetzung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $0 < \alpha < 1$. Die Differentialgleichung $Lu = f$ habe die Form
$$Lu(x) = a^{ij}(x)u_{ij}(x) + b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x) = f(x).$$
Wir wollen die folgenden beiden Bedingungen annehmen.

(i) Elliptizität: Es gibt eine Konstante $\lambda > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung
$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2$$
gilt. Sei darüber hinaus a^{ij} auch symmetrisch, d. h. gelte für alle i, j und $x \in \Omega$
$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x).$$
(ii) Hölderstetigkeit der Koeffizienten: Es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass
$$\left\|a^{ij}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \left\|b^i\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|d\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \le K$$
gilt.

Theorem 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Sei $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = a^{ij} D_i D_j u + b^i D_i u + du = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit $d \leq 0$. Hier seien $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, a^{ij}, b^i, $d \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\left(a^{ij}\right)$ symmetrisch und gleichmäßig elliptisch sowie $0 < \alpha < 1$. Dann gilt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c \cdot \left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}\right\},$$

wobei c nur von n, Ω, α, den angegebenen Normen der Koeffizienten und der Elliptizitätskonstanten abhängt.

Bemerkung 2.6. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Einschränkung $0 < \alpha < 1$ wesentlich ist. Betrachte nämlich in einer Umgebung des Ursprungs die Funktionen $u_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, definiert durch

$$u_\varepsilon\left(x^1, x^2\right) = x^1 \cdot x^2 \cdot \log\left(\sqrt{\varepsilon + (x^1)^2} + \sqrt{\varepsilon + (x^2)^2}\right).$$

Sie erfüllen in einer kleinen Umgebung des Ursprungs

$$|u_\varepsilon| + |\Delta u_\varepsilon| \leq c$$

gleichmäßig in ε, aber die gemischten zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^1 \partial x^2}$ verhalten sich dort für $\varepsilon \searrow 0$ wie

$$\log\left(\left|x^1\right| + \left|x^2\right|\right).$$

Daher kann die $C^{1,1}$-Norm nicht durch Supremumsschranken an u_ε und $\Delta u_\varepsilon =: f$ beschränkt werden.

Dies zeigt, dass eine Abschätzung wie in Theorem 2.5 für $\alpha = 0$ nicht richtig sein kann. Durch Integrieren bekommt man die entsprechende Aussage für $\alpha = 1$.

Beweis. Übung. □

Beweis von Theorem 2.5. Wir setzen zunächst φ nach $\overline{\Omega}$ fort, so dass $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt mit der Abschätzung

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c(\Omega, \alpha) \cdot \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}.$$

Ohne Einschänkung dürfen wir annehmen, dass $\varphi = 0$ gilt, denn sonst betrachten wir $\tilde{u} = u - \varphi$. $\tilde{u}$ erüllt dann $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$ und

$$L\tilde{u} = Lu - L\varphi = f - L\varphi \equiv \tilde{f}.$$

Wir erhalten, wenn wir das Theorem für Randwerte Null gezeigt haben,

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} - \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} &\leq \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \\ &\leq c \cdot \left\|\tilde{f}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\ &\leq c \cdot \left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right\}. \end{aligned}$$

Somit genügt es, den Fall $\varphi = 0$ zu betrachten.

Wir überdecken nun $\overline{\Omega}$ mit genügend kleinen offenen Mengen U_k, $1 \leq k \leq N$. Im Beweis werden wir genauer spezifizieren, was "genügend klein" heisst. Weiterhin nehmen wir an, dass im Falle $U_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ eine entsprechende Umgebung des Randes aufgebogen werden kann.

Sei ζ_k, $1 \leq k \leq N$, eine den U_k's untergeordnete C^∞-Zerlegung der Eins und definiere $u_k = u \cdot \zeta_k$. Es folgt

$$u = u \cdot \sum_{k=1}^N \zeta_k = \sum_{k=1}^N u_k.$$

Wir multiplizieren nun die Differentialgleichung $Lu = f$ mit ζ_k und erhalten

$$a^{ij} D_i D_j u_k \equiv F_k = f \cdot \zeta_k + a^{ij} [2 D_i u \cdot D_j \zeta_k + u D_i D_j \zeta_k] - b^i D_i u \cdot \zeta_k - d \cdot u \cdot \zeta_k. \tag{2.1}$$

Ist $U_k \subset \Omega$, so gilt $\operatorname{supp} u_k$, $\operatorname{supp} F_k \Subset \Omega$ und wir können (2.1) durch 0 in den $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Ist $U_k \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, so biegen wir dieses Randstück auf und erhalten mit $y = y(x) : \Omega \cap U_k \to B_1^+(0)$ dort eine Differentialgleichung der Form

$$\tilde{a}^{ij}(y) D_{y^i} D_{y^j} \tilde{u}_k = \tilde{F}_k$$

mit $\tilde{u}(\hat{y}, 0) = 0$. Es ist wie üblich $\tilde{u}_k = u_k \circ y^{-1}, \ldots$ und $\tilde{F}_k = F_k \circ y^{-1} +$ Terme, die höchstens eine Ableitung von u enthalten. Wir dürfen weiterhin annehmen, dass $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \tilde{u}_k, \partial B_1) > 0$ ist. Auch hier setzen wir $\tilde{u}_k$ und $\tilde{F}_k$ durch 0 in den $\mathbb{R}^n_+$ fort.

Wir fixieren nun (für jede Umgebung U_k) Punkte $y_0 \in U_k$ bzw. in $y_0 \in y(U_k \cap \Omega)$. Um nicht zwei Gleichungen schreiben zu müssen, benutzen wir auch im Falle $U_k \subset \Omega$ Tilden, transformieren also mit der Identität. Unsere Gleichung hat nun in jedem Fall die Gestalt

$$\tilde{a}^{ij}(y_0) D_{y^i} D_{y^j} \tilde{u}_k(y) = \tilde{F}_k + \left[\tilde{a}^{ij}(y_0) - \tilde{a}^{ij}(y)\right] D_{y^i} D_{y^j} \tilde{u}_k(y).$$

Wir transformieren schließlich noch so, dass in dem speziellen Punkt y_0 die Matrix $\left(a^{ij}(y_0)\right)$ zu $\left(\delta^{ij}\right)$ wird. Wir erhalten Differentialgleichungen der Form

$$\overline{a}^{ij}(z_0) D_{z^i} D_{z^j} \overline{u}_k(z) \equiv \Delta_z \overline{u}_k = \overline{F}_k + \left[\overline{a}^{ij}(z_0) - \overline{a}^{ij}(z)\right] \cdot D_{z^i} D_{z^j} \overline{u}_k(z).$$

Im zweiten Fall bleiben die Randwerte Null erhalten.

Wir bemerken, dass, je nach Fall, $\overline{u}_k \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ oder $\overline{u}_k \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ ist.

Aufgrund der Abschätzungen der Theoreme 1.11 und 1.14 bzw. von Lemma 1.16, in dem die entsprechenden Aussagen bereits kombiniert sind, erhalten wir nun mit Lemma 1.13

$$\begin{aligned}\left[D^2 \overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le{}& c \cdot \sup_{z \in z(U_k)} \left|\overline{a}^{ij}(z) - \overline{a}^{ij}(z_0)\right| \cdot \left[D^2 \overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \\ &+ c \cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\left[D^2 \overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \le{}& c \cdot \sup_{z \in z(U_k \cap \Omega)} \left|\overline{a}^{ij}(z) - \overline{a}^{ij}(z_0)\right| \cdot \left[D^2 \overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \\ &+ c \cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dies benutzt die Hölderstetigkeit der Koeffizienten a^{ij}. Indem wir nun $\operatorname{diam}(U_k)$ jeweils klein genug wählen, können wir erreichen, dass

$$\sup_{z \in z(U_k)} \left|\overline{a}^{ij}(z) - \overline{a}^{ij}(z_0)\right| \le \frac{1}{2c}$$

ist. Für diesen Schritt ist es wichtig, dass der Stetigkeitsmodul von a^{ij} kontrolliert ist. Damit können wir den ersten Term auf der rechten Seite in die linke Seite absorbieren und erhalten (hier nur noch für die inneren Abschätzungen aufgeschrieben)

$$\left[D^2 \overline{u}_k\right]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Wir addieren auf beiden Seiten die C^2-Norm

$$\|\overline{u}_k\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Nach Rücktransformation nach Ω und Summieren über k erhalten wir

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le \sum_k \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{C^{2,0}(\Omega)} + c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Aufgrund des Kompaktheitslemmas können wir

$$\|u\|_{C^{2,0}} \le \varepsilon \cdot \|u\|_{C^{2,\alpha}} + c_\varepsilon \cdot \|u\|_{C^0}$$

abschätzen und damit die Norm der zweiten Ableitungen auf der rechten Seite absorbieren

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \{\|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|u\|_{C^0}\}\,.$$

Schließlich ist wegen $d \le 0$ das Maximumprinzip in der Form von [4, Theorem 3.7] anwendbar

$$\|u\|_{C^0} \le c \cdot \|f\|_{C^0}.$$

Wir erhalten

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}}$$

und das Theorem folgt. □

Zum gerade verwendeten Maximumprinzip.

Lemma 2.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ in Ω eine Lösung der elliptischen Differentialungleichung*

$$Lu \equiv a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du \ge f$$

mit gleichmäßig elliptischem a^{ij} und $a^{ij}, b^i, d, f \in L^\infty$. Dann gilt

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + c(L,\Omega) \cdot \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis. Wegen

$$L\left(u - \sup_{\partial\Omega} u^+\right) = Lu - d\sup_{\partial\Omega} u^+ \ge f$$

dürfen wir ohne Einschränkung $u \le 0$ auf $\partial\Omega$ annehmen. Gelte weiterhinn ohne Einschränkung $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 < 0\}$.

Setze $w := 1 - e^{\alpha x^1}$ für ein noch zu fixierendes $\alpha > 0$. Dann gelten

$$\begin{aligned} 0 < w &< 1, \\ w_i &= -\,e^{\alpha x_1}\alpha\delta_{1i}, \\ w_{ij} &= -\,e^{\alpha x_1}\alpha^2\delta_{1i}\delta_{1j}, \\ Lw &= -\,e^{\alpha x^1}\left(\alpha^2 a^{11} + \alpha b^1 + d\right) < -\varepsilon, \end{aligned}$$

für ein $\varepsilon > 0$, falls wir $\alpha = \alpha(L) > 0$ groß genug fixieren. Somit gilt für $W := w \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|f\|_{L^\infty}$ die Differentialungleichung

$$LW < f.$$

Es gilt $u - W \le -W < 0$ auf $\partial\Omega$. In einem positiven lokalen (inneren) Maximum von $u - W$ erhalten wir somit

$$0 < L(u-W) = a^{ij}\underbrace{(u-W)_{ij}}_{\preccurlyeq 0} + b^i\underbrace{(u-W)_i}_{=0} + \underbrace{d(u-W)}_{\le 0} \le 0.$$

Widerspruch. Somit gilt $u - W \le 0$ auch in Ω und die Behauptung folgt. □

Die oben behauptete Aussage folgt nun durch Anwendung dieses Lemmas auf u und $-u$.

Bemerkung 2.8. Beachte, dass die in der Abschätzung des letzten Theorems auftretende Konstante nur von der speziellen Überdeckung, der Zerlegung der Eins, der $C^{2,\alpha}$-Norm der Aufbiegetransformationen für $\partial\Omega$, von $|\Omega|$, den $C^{0,\alpha}$-Normen der Koeffizienten, der Elliptizitätskonstanten und von α sowie n abhängt.

Analoge Abschätzungen bekommt man auch für schwache Lösungen. Auf der rechten Seite kann man dann die $\|u\|_{C^0}$-Norm durch die $\|u\|_{L^2}$-Norm oder eine ander L^p-Norm ersetzen, siehe [6].

2.3. **Höhere Regularität.**

Theorem 2.9. *Seien* $\partial\Omega \in C^{l,\alpha}$*,* $f \in C^{l-2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$*,* $\varphi \in C^{l,\alpha}(\partial\Omega)$*,* a^{ij}*,* b^i*,* $d \in C^{l-2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$*,* $l \ge 2$*,* $0 < \alpha < 1$*, wobei* a^{ij} *elliptisch ist und* $d \le 0$*, so gilt für eine Lösung* $u \in C^{l,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *des Randwertproblems*
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$
die Abschätzung
$$\|u\|_{C^{l,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-2,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{l,\alpha}(\partial\Omega)} \right\}.$$

Beweis. Es genügt, den Induktionsschritt $l \to l+1$ zu zeigen. Sei wieder ohne Einschränkung $\varphi = 0$ und seien U_k und ζ_k wie im Beweis von Theorem 2.5 gewählt.

Ist $U_k \subset \Omega$, so definieren wir für $1 \le i \le n$
$$v_k := D_i u_k$$
und wenden auf v_k und die entsprechende Differentialgleichung die Induktionsvoraussetzung an
$$\|v_k\|_{C^{l,\alpha}(U_k)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{l+1,0}(\Omega)} \right\}.$$
Dabei haben wir die $C^{l,\alpha}$-Norm von u durch die $C^{l+1,0}$-Norm abgeschätzt.

Ist $U_k \cap \partial\Omega \ne \emptyset$, so setzen wir für $1 \le i \le n-1$
$$v_k = D_i u_k.$$
Es gilt für eine geeignet definierte rechte Seite f_k in $\mathbb{R}^n_+$ die Gleichheit $Lv_k = f_k$. Da $v_k(\hat{y}, 0) = 0$ gilt, erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung (verstehe dies nach Anwendung einer Aufbiegetransformation)
$$\|v_k\|_{C^{l,\alpha}(U_k \cap \Omega)} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{l+1,0}(\Omega)} \right\}.$$
Für die Abschätzung von $D_n u_k$ benutzen wir die Differentialgleichung
$$Lu_k = f_k \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+$$
für geeignetes f_k und erhalten
$$\begin{aligned} a^{nn} D_n D_n u_k = {} & f_k - b^i D_i u_k - d \cdot u_k \\ & - \sum_{i+j<2n} a^{ij} D_i D_j u_k. \end{aligned}$$
Diese Gleichung dividieren wir durch a^{nn} und differenzieren sie nochmals nach x^n. Auf der linken Seite erhalten wir $D_n D_n D_n u_k$ und auf der rechten Seite erhalten wir bis zu dritte Ableitungen von u_k, jedoch ohne eine dreimalige Ableitung nach x^n. Somit haben wir die rechte Seite in $C^{l-2,\alpha}$ bereits beschränkt und es folgt
$$\|D_n D_n D_n u_k\|_{C^{l-2,\alpha}} \le c \cdot \{\|f\|_{C^{l-1,\alpha}} + \|u\|_{C^{l+1,0}}\}.$$
Wir erhalten also
$$\|Du_k\|_{C^{l,\alpha}} \le c \cdot \{\|f\|_{C^{l-1,\alpha}} + \|u\|_{C^{l+1,0}}\}.$$
Das Theorem folgt. □

Theorem 2.10. *Erfüllt der lineare Operator* L *die Voraussetzungen von Theorem 2.9 nur lokal, so genügt eine Lösung* $u \in C^{l,\alpha}(\Omega)$ *der Gleichung* $Lu = f$ *den Abschätzungen*
$$\|u\|_{C^{l,\alpha}(\Omega')} \le c \cdot \left\{ \|f\|_{C^{l-2,\alpha}(\Omega'')} + \|u\|_{C^0(\Omega'')} \right\}$$
für alle $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ *und die Konstante hängt nun noch zusätzlich von* Ω' *und* Ω'' *ab.*

Beweis. Übung, siehe auch [4]. □

2.4. **Stetigkeitsmethode.** Hier betrachtet man eine Familie von Randwertproblemen für einen Parameter $t \in [0,1]$. Die Familie ist dabei so gewählt, dass man das Randwertproblem für $t = 0$ bekanntermaßen eindeutig lösen kann und dass man für $t = 1$ das Randwertproblem bekommt, das man eigentlich lösen möchte. Dann zeigt man, dass die Menge der Parameter $t \in [0,1]$, für die man das entsprechende Randwertproblem eindeutig lösen kann, offen und abgeschlossen ist. Da diese Menge auch nichtleer ist, ist sie gleich dem gesamten Interval $[0,1]$ und man erhält insbesondere auch eine Lösung für $t = 1$.

Wir interessieren uns hier für das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei L wie oben mit $d(x) \le 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit $C^{2,\alpha}$-Rand. Sei $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Bemerkung 2.11. Wie man sich am Beispiel $x \mapsto |x|^\alpha$ überzeugt, approximieren Glättungen eine $C^{0,\alpha}$-Funktion im allgemeinen nicht in $C^{0,\alpha}$. (Die Glättungen approximieren aber in $C^{0,\beta}$ für $0 < \beta < \alpha$.) Daher werden wir nun f und g nur in C^2 approximieren. Beachte aber, dass die $C^{2,\alpha}$-Normen der approximierenden Funktionen trotzdem (bis auf eine feste Konstante) gleichmäßig durch die $C^{2,\alpha}$-Norm der ursprünglichen Funktion beschränkt sind.

Betrachte dazu

$$\begin{aligned} &\frac{|(f(x) - f_\varepsilon(x)) - (f(y) - f_\varepsilon(y))|}{|x-y|^\alpha} \\ \le &\int (\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\le [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot |x-y|^\alpha} + \underbrace{|f(x+z) + f(y+z)|}_{\le [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot |x-y|^\alpha}) \eta_\varepsilon(z)\, dz \cdot \frac{1}{|x-y|^\alpha} \\ \le &\, 2 \cdot [f]_{C^{0,\alpha}} \cdot |x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

Wir benötigen zunächst

Theorem 2.12 (Kellogg)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$. Sei $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Dann besitzt das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

genau eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip.

Zunächst wollen wir f und g durch glatte Funktionen approximieren. Nach Fortsetzung und Glättung erhalten wir

$$\begin{aligned} C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \ni f_k \to f \quad \text{in } C^0\left(\overline{\Omega}\right), \\ C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \ni g_k \to g \quad \text{in } C^2\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

Die Probleme

$$\begin{cases} \Delta u_k = f_k & \text{in } \Omega, \\ u_k = g_k & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

betrachtet man nun als Randwertprobleme für (nach Abziehen der Randwerte) $w_k := u_k - g_k \in H_0^1(\Omega)$. Sie besitzen glatte Lösungen w_k bzw. u_k (L^2-Theorie). Aufgrund von Theorem 2.5 gelten die Abschätzungen

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c(n,\alpha,\Omega) \cdot \left\{\|f_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right\}$$

$$\leq c(n, \alpha, \Omega) \cdot \left\{ \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \right\}.$$

Nach Arzelà-Ascoli konvergiert (ohne Einschränkung) $u_k \to u$ in C^2 für ein $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Insbesondere folgt also in Ω die Konvergenz $\Delta u_k \to \Delta u$ in $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, als kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Delta u_k \arrow[r, equal] \arrow[d] & f_k \arrow[d] \\ \Delta u \arrow[r, equal] & f. \end{tikzcd}$$

Ebenso konvergieren die Randwerte. Die Funktion u ist damit die gesuchte Lösung. Sie erfüllt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c(n, \alpha, \Omega) \cdot \left\{ \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \right\}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes konvergiert sogar die gesamte Folge. □

Bemerkung 2.13. Anhand des Beweises von Theorem 2.5 überzeugt man sich leicht, dass die Konstante in der Normabschätzung für eine Folge von C^∞-Gebieten, die ein $C^{2,\alpha}$-Gebiet in C^2 mit beschränkter $C^{2,\alpha}$-Norm approximieren, d. h. wenn lokal die den Rand als Graphen darstellenden Funktionen in C^2 konvergieren, gleichmäßig gewählt werden kann.

Wir erhalten damit Kelloggs Theorem auch für $C^{2,\alpha}$-Gebiete: Wir setzen zunächst g als $C^{2,\alpha}$-Funktion mit entsprechend kontrollierter Norm nach $\mathbb{R}^n$ fort und approximieren dann das Gebiet Ω durch glatte Gebiete Ω_k, auf die die obige Version von Kelloggs Theorem anwendbar ist. Der Einfachheit halber wollen wir die Gebiete Ω_k stets so wählen, dass $\Omega \subset \Omega_k$ gilt. Dies erreicht man beispielsweise, indem man Abstandsniveauflächen zu $\partial\Omega$ glättet. Wir erhalten somit Lösungen u_k mit gleichmäßigen $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega_k}\right)$-Abschätzungen. Somit sind auch die Funktionen $u_k|_\Omega$ in $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ gleichmäßig beschränkt. Eine Teilfolge davon (und wie man sich leicht überlegt, sogar die gesamte Folge, da der Grenzwert eindeutig bestimmt ist) konvergiert dann gegen die gewünschte Lösung.

Wir wollen das folgende Existenzresultat beweisen

Theorem 2.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Sei L wie in den Generalvoraussetzungen, Definition 2.4, mit*

$$d \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Dann gibt es zu jedem $f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ und jedem $g \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ des Dirichletproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Indem wir $u - g$ statt u betrachten und f entsprechend abändern, dürfen wir annehmen, dass $g \equiv 0$ gilt.

Wir definieren für $t \in [0, 1]$ Differentialoperatoren L_t durch

$$L_t = (1 - t)\Delta + tL.$$

Beachte, dass alle Operatoren L_t die Generalvoraussetzungen 2.4 mit von t unabhängigen Konstanten $\lambda > 0$ und K erfüllen. Weiterhin bleibt die Eigenschaft "$d(x) \leq 0$ in Ω" auch für L_t erhalten. Für $t = 0$ liefert Kelloggs Theorem die Lösung. Für $t = 1$ behaupten wir, dass es eine Lösung gibt.

Wir kürzen Banachräume wie folgt ab

$$\begin{aligned} B_1 &:= C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : u|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \\ B_2 &:= C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

B_1 ist ein abgeschlossener Unterraum von $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Als Norm können wir daher die $C^{2,\alpha}$-Norm verwenden.

Der Operator

$$L_t : B_1 \to B_2$$

ist ein beschränkter linearer Operator. Sei u_t die Lösung von

$$\begin{cases} L_t u_t = f & \text{in } \Omega, \\ u_t = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

mit einer von t unabhängigen Konstanten.

Diese a priori Schranke können wir auch als

$$\|u\|_{B_1} \le c \cdot \|L_t u\|_{B_2}$$

für alle $u \in B_1$ schreiben.

Das Theorem folgt, wenn wir zeigen können, dass L_1 surjektiv ist. Dies erhalten wir aus dem folgenden Theorem. □

Theorem 2.15. *Seien L_0, $L_1 : B_1 \to B_2$ beschränkte lineare Operatoren zwischen Banachräumen B_1 und B_2. Wir definieren*

$$L_t := (1-t)L_0 + tL_1 \qquad \text{für } 0 \le t \le 1.$$

Gibt es eine von t unabhängige Konstante c mit

$$\|u\|_{B_1} \le c\|L_t u\|_{B_2}$$

für alle $u \in B_1$ und ist L_0 surjektiv, so ist auch L_1 surjektiv.

Beweis. Beachte zunächst, dass die beiden Definitionen für L_t insbesondere für $t = 0$ und $t = 1$ übereinstimmen.

Nehme an, dass L_τ für ein $\tau \in [0,1]$ surjektiv ist. Nach der Abschätzung für die Normen ist L_τ auch injektiv. Somit ist L_τ ein bijektiver Operator mit entsprechenden Normabschätzungen. (Aufgrund der Neumannschen Reihe bilden die invertierbaren (und damit auch die bijektiven) in beide Richtungen stetigen Operatoren eine offene Teilmenge von $L(\cdot,\cdot)$. Wir wollen jedoch eine quantitative Variante davon verwenden.) Die Inverse

$$L_\tau^{-1} : B_2 \to B_1$$

ist aufgrund der Bijektivität auch ein beschränkter linearer Operator. Sei $t \in [0,1]$ beliebig, $f \in B_2$. Wir schreiben die Gleichung $L_t u = f$ als

$$L_\tau u = f + (L_\tau - L_t)u = f + (t-\tau)(L_0 u - L_1 u)$$

um und weiter als Fixpunktgleichung in der Form

$$u = L_\tau^{-1} f + (t-\tau) L_\tau^{-1}(L_0 - L_1)u =: \Lambda u.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz finden wir einen solchen Fixpunkt, falls es ein $q < 1$ gibt, so dass für alle u, $v \in B_1$

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{B_1} \le q \cdot \|u - v\|_{B_1}$$

gilt. Es gilt

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{B_1} \le \underbrace{\left\|L_\tau^{-1}\right\|_{L(B_2,B_1)} \cdot \left(\|L_0\|_{L(B_1,B_2)} + \|L_1\|_{L(B_1,B_2)}\right) \cdot |t-\tau|}_{=:q} \cdot \|u-v\|_{B_1}.$$

Somit können wir $q < 1$ unabhängig von τ erreichen, wenn nur $|t-\tau|$ klein genug ist. In dieser Umgebung von τ ist $L_\tau u = f$ lösbar, d. h. L_τ ist dort surjektiv und damit auch bijektiv. Da die entsprechenden Umgebungen von τ unabhängig gewählt werden können, haben wir nach endlich vielen Schritten von $t = 0$ ausgehend auch die Bijektivität (und damit die Surjektivität) von L_1 bewiesen. Das Theorem folgt. □

Bemerkung 2.16. In unserem Spezialfall kann man auch die Menge aller $t \in [0,1]$ betrachten, für die L_t surjektiv (und damit bijektiv) ist. Aufgrund der Neumannschen Reihe (Verallgemeinerung der geometrischen Reihe auf Operatoren) ist diese Menge offen. Die Schauderabschätzungen liefern (mit Arzelà-Ascoli) die Abgeschlossenheit. Nach Kellogg ist diese Menge nichtleer. Auch so folgt Theorem 2.14.

Führe die Details dazu als Übung aus.

3. Parabolische Krylov-Safonov Abschätzungen

Ich orientiere mich in diesem Kapitel über Krylov-Safonov Abschätzungen an [7, Kapitel 7 und 14]. Hierin sind aber sehr viele Dinge zu korrigieren.

Für einige Resultate zeige ich, dass die Aussagen über Zylinder auch Entsprechungen für Quader haben. Dies sind einfache ad hoc Beweise oder einfache Übungsaufgaben, die später helfen, den häufigen Übergang von Quadern zu Zylindern und zurück zu vermeiden. Man kann sie auch komplett vermeiden.

3.1. ABP-Abschätzung.

Da wir a priori Abschätzungen beweisen wollen, dürfen wir annehmen, dass alle auftretenden Funktionen glatt sind.

Ich benutze für die Alexandroff-Bakelman-Pucci Abschätzung (ABP-Abschätzung) [7, Kapitel 7.1]. Elliptische Versionen zu diesem Thema finden sich in [4, Kapitel 9.1] oder [1, Kapitel 3].

Definition 3.1. Der parabolische Differentialoperator L sei definiert durch

$$Lu := -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + du.$$

Setze $\mathcal{D} := \det\left(a^{ij}\right)$ und $\mathcal{D}^* := \mathcal{D}^{1/(n+1)}$. Es gilt also $a^{ij} > 0$ im Sinne von Matrizen. Wir wollen auch annehmen, dass a^{ij} symmetrisch ist, $a^{ij} = a^{ji}$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $0 < T < \infty$. Der parabolische Rand von $\Omega \times (0,T)$ ist definiert als

$$\mathcal{P}(\Omega \times (0,T)) := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).$$

Für eine gegebene Funktion $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ ist die Menge der oberen Kontaktpunkte, $E(u)$, definiert als die Menge aller Punkte $(x,t) \in \Omega \times (0,T] \equiv \left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right) \setminus \mathcal{P}(\Omega \times (0,T))$, für die es ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$u(x,t) + \langle \xi, y-x\rangle \ge u(y,s)$$

für alle $(y,s) \in \Omega \times (0,t]$ gilt. Es gibt also eine $\operatorname{graph} u$ dort berührende, zeitunabhängige Hyperebene, unter der $\operatorname{graph} u$ zu allen früheren Zeiten liegt.

Gelte nun $\Omega \subset B_R$. Definiere $E^+(u)$ als die Teilmenge von $E(u)$, in der zusätzlich noch $u > 0$ und

$$R|\xi| < u(x,t) - \langle \xi, x\rangle < \tfrac{1}{2}\sup u^+ \tag{3.1}$$

gelten, wobei $u^+ := \max\{u, 0\}$.

Für eine beliebige Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ definieren wir den parabolischen Rand $\mathcal{P}D$ als die Menge aller Punkte (x,t) in ∂D, für die $B_r(x) \times (t-r^2, t)$ für beliebiges (insbesondere kleines) $r > 0$ nicht in D enthalten ist. Die Kontaktmenge wird in diesem Fall analog zu oben definiert.

Der Beweis der Alexandroff-Bakelman-Pucci Abschätzung setzt sich aus mehreren Lemmata zusammen. Vergleiche das nächste Lemma mit [7, Lemma 7.2].

Lemma 3.2. *Sei $\Omega \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < T < \infty$. Sei u glatt, d. h. $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times [0,T]\right)$, und gelte $u \le 0$ auf dem parabolischen Rand $\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))$. Dann folgt*

$$\sup_{\Omega\times(0,T)} u \le c(n) \cdot R^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_{E^+(u)} \left|\dot{u} \det D^2 u\right| \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Bemerkung 3.3. Dieses Lemma bleibt auch gültig, wenn man $\Omega \times (0,T)$ durch eine offene Teilmenge hiervon ersetzt.

Beweis von Lemma 3.2. Definiere $\Phi : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch

$$\Phi(x,t) := (Du(x,t), u(x,t) - x^k u_k(x,t))^T.$$

Wir berechnen $\det\left(D\Phi, \frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)$. Hierzu addieren wir das x^j-fache der j-ten Zeilen zur letzten Zeile

$$\det\left(D_i\Phi^j, \frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) = \det\begin{pmatrix} (u_{ij}) & (\dot{u}_j) \\ (-x^k u_{ik}) & \dot{u} - x^k \dot{u}_k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} (u_{ij}) & (\dot{u}_j) \\ (0) & \dot{u} \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsformel für Integrale lautet für einen Diffeomorphismus φ, $y = \varphi(x)$,

$$\int_\Omega f(\varphi(x))|\det D\varphi|\, dx = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, dy.$$

Da Φ nicht injektiv zu sein braucht, folgt hier nur

$$\int_{E^+(u)} \left|\dot{u} \det D^2 u\right| \ge \int_{\Phi(E^+(u))} 1 = \left|\Phi(E^+(u))\right|. \tag{3.2}$$

(Es handelt sich hier um Integration bezüglich des Lebesguemaßes, der „parabolische Abstand“ wird nicht benutzt. Genauer ist diese Ungleichung eine Folgerung der Koflächenformel, siehe [2, Theorem 3.2.3]. In einer nachfolgenden Bemerkung werden wir die Ungleichung noch mit Hilfe des Sardschen Satzes herleiten.)

Sei nun $M := \sup u$. Nehme an, dass $M > 0$ gilt und dass $u(x_0,t_0) = M$ ist. Definiere den abgeschnittenen Kegel Σ als die Menge aller $(\xi,h) \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass

$$R|\xi| < h < M/2 \tag{3.3}$$

ist. Definiere weiterhin für ein festes Tupel $(\xi,h) \in \Sigma$ die Funktion

$$p(y,s) := \langle \xi, y\rangle + h.$$

Nach Definition der Menge Σ gilt in $\overline{\Omega} \times [0,T]$ die Ungleichung $p > 0$. Somit gilt insbesondere $p > 0 \ge u$ auf dem parabolischen Rand $\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))$. Die Definition von Σ liefert weiterhin, dass

$$p(x_0,t_0) < M = u(x_0,t_0)$$

gilt. Somit finden wir einen Punkt $(y_1,s_1) \in \overline{\Omega} \times [0,t_0]$, so dass dort u und p übereinstimmen, $p(y_1,s_1) = u(y_1,s_1)$, und dass für alle früheren Zeiten p über u liegt, $p(y,s) \ge u(y,s)$ für alle $s \le s_1$ und für alle $y \in \overline{\Omega}$.

Der Punkt (y_1,s_1) liegt nicht auf dem parabolischen Rand $\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))$ liegt, da dort $p > 0 \ge u$ gilt.

Sei also $(y,s)\in\Omega\times(0,s_1]$. Dann gilt

$$u(y,s)\le p(y,s)=\langle\xi,y\rangle+h=\langle\xi,y-y_1\rangle+p(y_1,s_1)=\langle\xi,y-y_1\rangle+u(y_1,s_1)$$

nach Wahl von (y_1,s_1) und der Definition von p. Es folgt $(y_1,s_1)\in E(u)$. Da u und p im Punkt (y_1,s_1) übereinstimmen, gilt $u(y_1,s_1)>0$. Schließlich folgt die Bedingung (3.1) nach Definition von Σ und p,

$$R|\xi|<h=p(y_1,s_1)-\langle\xi,y_1\rangle=u(y_1,s_1)-\langle\xi,y_1\rangle=h<\tfrac{1}{2}M,$$

und somit gilt $(y_1,s_1)\in E^+(u)$.

Da u und p in (y_1,s_1) übereinstimmen und da $p(y,s)\ge u(y,s)$ für alle $s\le s_1$ gilt, folgt $Du(y_1,s_1)=\xi$.

Wir benutzen nochmals, dass u und p in (y_1,s_1) übereinstimmen und erhalten

$$\Phi(y_1,s_1)=(\xi,p(y_1,s_1)-\langle y_1,\xi\rangle)=(\xi,h).$$

Da wir für festes $(\xi,h)\in\Sigma$ einen Punkt $(y_1,s_1)\in E^+(u)$ gefunden haben mit $\Phi(y_1,s_1)=(\xi,h)$, folgt $\Sigma\subset\Phi\left(E^+(u)\right)$. Nun ist Σ ein Kegel der Höhe $M/2$ mit einer n-dimensionalen Kugel vom Radius $M/(2R)$ als Grundfläche. Wir erhalten also die Abschätzung

$$\left|\Phi\left(E^+(u)\right)\right|\ge|\Sigma|=c(n)\frac{M^{n+1}}{R^n}$$

mit einer Konstanten $c(n)>0$ und zusammen mit (3.2) ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung 3.4. Benutzt man im obigen Beweis die Integraltransformationsformel mit einer Funktion $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, so ergibt sich

$$\int\limits_{E^+(u)}\left|g(Du)\dot u\det D^2u\right|\ge\int\limits_{(\xi,h)\in\Phi(E^+(u))}g(\xi)\ge\int\limits_{(\xi,h)\in\Sigma}g(\xi).$$

Bemerkung 3.5. Beweis von (3.2) mit Hilfe des Sardschen Satzes: Aufgrund des Sardschen Satzes gibt es $A\subset\Phi(E^+(u))$ mit $|\Phi(E^+(u))\setminus A|=0$, so dass $\det(D\Phi(y))\neq0$ für alle $y\in\Phi^{-1}(A)\cap E^+(u)$ gilt. Wir zerlegen $\Phi^{-1}(A)\cap E^+(u)$ in höchstens abzählbar viele disjunkte messbare Mengen B_i, die man induktiv wählen kann (indem man die kompakte Menge mit $|\det(D\Phi)|\ge\varepsilon$ durch endlich viele Mengen überdeckt auf denen $D\Phi$ mindestens auf einem Ball vom Radius δ ein Diffeomorphismus mit $|D\Phi(x,t)-D\Phi(y,s)|\ge\delta\cdot|(x,t)-(y,s)|$ ist, dann zunächst $\delta\searrow0$ und später $\varepsilon\searrow0$ läßt, die Mengen induktiv verkleinert um die Disjunktheit zu erhalten und am Ende jeweils mit $\Phi^{-1}(A)\cap E^+(u)$ schneidet), so dass

$$\Phi\colon B_i\to\Phi(B_i)$$

für alle i Diffeomorphismen sind. Dann gilt aufgrund der Integraltransformationsformel

$$\int\limits_{B_i}\left|\dot u\det D^2u\right|=\int\limits_{\Phi(B_i)}1=|\Phi(B_i)|$$

für alle i. Aufsummieren liefert, da die Mengen $\Phi(B_i)$ nicht notwendigerweise paarweise disjunkt sind

$$\begin{aligned}\int\limits_{E^+(u)}\left|\dot u\det D^2u\right|&\ge\int\limits_{\Phi^{-1}(A)\cap E^+(u)}\left|\dot u\det D^2u\right|=\sum_i\int\limits_{B_i}\left|\dot u\det D^2u\right|\\&=\sum_i|\Phi(B_i)|\ge\left|\bigcup_i\Phi(B_i)\right|=\left|\Phi\left(\bigcup_iB_i\right)\right|\end{aligned}$$

$$= \left|\Phi\left(\Phi^{-1}(A)\cap E^+(u)\right)\right| = |A| = \left|\Phi\left(E^+(u)\right)\right|,$$

wobei wir bei der vorletzten Gleichheit $A \subset \Phi\left(E^+(u)\right)$ verwendet haben. Es gilt nämlich ganz allgemein: Aus $A \subset f(B)$ folgt $f\left(f^{-1}(A)\cap B\right) = A$ (einfache Übung).

Diese Überlegungen funktionieren auch mit einer zusätzlichen nichtnegativen Funktion g wie in Bemerkung 3.4.

Im folgenden wollen wir $c(n)$ oder c für positive Konstanten schreiben, die ihren Wert noch von Zeile zu Zeile ändern dürfen.

Wir wollen nun g geeignet wählen und mit Hilfe von Bemerkung 3.4 das folgende Theorem beweisen. Vergleiche dies mit [7, Theorem 7.1]. Auch hier gilt die Aussage ebenso für beliebige offene Teilmengen von $B_R \times (0,T)$.

Theorem 3.6. *Sei $\Omega \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < T < \infty$. Gelte*

$$Lu \ge f \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

und erfülle der konstante Koeffizient d im Differentialoperator L die Ungleichung $d \le k$ für ein $k \ge 0$. Dann gilt

$$\sup_{\Omega\times(0,T)} u \le e^{kT}\left(\sup_{\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} u^+ + c(n)\left\|\frac{f^-}{\mathcal{D}^*}\right\|_{L^{n+1}(\Omega\times(0,T))}\cdot B_0^{\frac{n}{n+1}}\right),$$

wobei

$$B_0 = \left\|\frac{b}{\mathcal{D}^*}\right\|^{n+1}_{L^{n+1}(\Omega\times(0,T))} + R$$

ist.

Beachte für den Anwendung dieses Theorems Bemerkung 3.7 und verfolge im nun folgenden Beweis, dass diese Bemerkung gilt.

Beweis. Definiere

$$w(x,t) := e^{-kt}u(x,t) - \sup_{(y,s)\in\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))} e^{-ks}u^+(y,s).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} -\dot{w} + a^{ij}w_{ij} &= e^{-kt}\left(-\dot{u} + a^{ij}u_{ij}\right) + ke^{-kt}u \\ &= e^{-kt}\left(Lu - b^iu_i - du\right) + ke^{-kt}u \\ &\ge e^{-kt}\left(f - b^iu_i\right) + e^{-kt}(k-d)u \\ &\ge -f^- - |b||Dw| \end{aligned}$$

in $E^+(w)$, da dort $0 < e^{-kt} \le 1$ und $(k-d)u \ge 0$ gelten, wobei $f = f^+ - f^-$. Weiterhin gilt nach Definition von w die Ungleichung $w \le 0$ auf $\mathcal{P}(\Omega\times(0,T))$. Sei $\mu > 0$ eine noch zu fixierende Konstante. Definiere

$$g(p) := \left(|p|^{\frac{n+1}{n}} + \mu^{\frac{n+1}{n}}\right)^{-n}.$$

Aufgrund der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \dot{w} - a^{ij}w_{ij} &\le f^- + |b||Dw| \\ &\le \left(\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\mu^{\frac{n+1}{n}} + |Dw|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{\left(\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{g(Dw)^{\frac{1}{n+1}}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

in $E^+(w)$. Nach Definition von $E^+(w)$ gilt insbesondere $w(x,t) \geq w(x,s)$ für $(x,t) \in E^+(w)$ und $s \leq t$. Damit folgt, dass $\dot{w} \geq 0$ in $E^+(w)$ gilt. Die Definiton von $E^+(w)$ liefert weiterhin für $(x,t) \in E^+(w)$ und einen Einheitsvektor e ein ξ mit

$$w(x,t) + \langle \xi, \eta e \rangle \geq w(x + \eta e, t)$$

und

$$w(x,t) - \langle \xi, \eta e \rangle \geq w(x - \eta e, t),$$

falls $|\eta|$ so klein ist, dass w an den entsprechenden Stellen definiert ist. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert für $\eta \neq 0$

$$\frac{w(x+\eta e,t) + w(x-\eta e,t) - 2w(x,t)}{\eta^2} \leq 0.$$

Im Limes $\eta \to 0$ erhalten wir $w_{ij}e^ie^j \leq 0$. Somit ist $-D^2w$ positiv semidefinit. Für positiv semidefinite (symmetrische) $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen A und B gilt die geometrisch-arithmetische Ungleichung für Matrizen

$$(\det AB)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{\operatorname{tr} AB}{n+1}.$$

Wir erhalten also wegen $\dot{w} \geq 0$

$$\begin{aligned} \dot{w} - a^{ij}w_{ij} &= \operatorname{tr}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & (a^{ij}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w} & (0) \\ (0) & (-w_{ij}) \end{pmatrix} \right\} \\ &\geq (n+1)\left(\det a^{ij}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left|\dot{w} \det D^2 w\right|^{\frac{1}{n+1}} \\ &= (n+1)\mathcal{D}^* \left|\dot{w} \det D^2 w\right|^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned}$$

Kombiniert mit Bemerkung 3.4 und (3.4) erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} \int\limits_{(\xi,h)\in\Sigma} g(\xi) &\leq \int\limits_{E^+(w)} \left|g(Dw)\dot{w}\det D^2 w\right| \\ &\leq \int\limits_{E^+(w)} |g(Dw)| \left(\frac{\dot{w} - a^{ij}w_{ij}}{(n+1)\mathcal{D}^*}\right)^{n+1} \\ &\leq \int\limits_{E^+(w)} \frac{\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}}{((n+1)\mathcal{D}^*)^{n+1}}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei Σ wie in (3.3) definiert ist. Es gilt

$$g(p) = \left(|p|^{\frac{n+1}{n}} + \mu^{\frac{n+1}{n}}\right)^{-n} \geq c(n)\left(|p|^n + \mu^n\right)^{-\frac{n+1}{n}}$$

und wir erhalten nach Definition von Σ (falls $M = \sup w^+ > 0$; der Fall $M \leq 0$ wird weiter unten betrachtet) und g in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Sigma} g(\xi) &\geq c(n) \int\limits_0^{M/2} \int\limits_0^{h/R} \frac{r^{n-1}}{(r^n+\mu^n)^{\frac{n+1}{n}}}\,dr\,dh \\ &= c(n) \int\limits_0^{M/2} \left(-\left(r^n+\mu^n\right)^{-1/n}\Big|_0^{h/R} \right) dh \\ &= c(n) \int\limits_0^{M/2} \frac{1}{\mu} - \left(\left(\frac{h}{R}\right)^n + \mu^n\right)^{-1/n} dh \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq c(n) \int_{\mu R}^{M/2} \frac{1}{\mu} - \left(\left(\frac{h}{R} \right)^n + \mu^n \right)^{-1/n} dh \\
&\geq c(n) \int_{\mu R}^{M/2} \frac{1}{\mu} - 2^{-1/n} \frac{1}{\mu} \, dh \\
&\geq c(n) \frac{M/2 - \mu R}{\mu} \\
&= c(n) \left(\frac{M}{2\mu} - R \right),
\end{aligned}
$$

falls $M \geq 2\mu R$. Zusammen mit (3.5) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
M &\leq 2\mu R + c(n)\mu \int_{E^+(w)} \frac{\mu^{-(n+1)}(f^-)^{n+1} + |b|^{n+1}}{\mathcal{D^*}^{n+1}} \\
&\leq 2\mu R + c(n) \frac{1}{\mu^n} \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))}^{n+1} + c(n)\mu \left\| \frac{b}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))}^{n+1} .
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Falls $\left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} = 0$ gilt, erhalten wir mit $\mu \searrow 0$, dass $M \leq 0$. Sonst fixieren wir

$$
\begin{aligned}
\mu &= \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} \cdot \left(\left\| \frac{b}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))}^{n+1} + R \right)^{-\frac{1}{n+1}} \\
&\equiv \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} \cdot B_0^{-\frac{1}{n+1}}
\end{aligned}
$$

und erhalten in beiden Fällen nach Definition von B_0

$$
\begin{aligned}
M \leq{} & \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} \cdot \\
& \cdot \left(2RB_0^{-\frac{1}{n+1}} + c(n) B_0^{\frac{n}{n+1}} + c(n) \left\| \frac{b}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))}^{n+1} \cdot B_0^{-\frac{1}{n+1}} \right) \\
\leq{} & c(n) \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}} .
\end{aligned}
$$

Umordnen der Terme ergibt

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &\leq e^{kt} \left(\sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))} e^{-ks} u^+ + c(n) \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}} \right) \\
&\leq e^{kt} \left(\sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))} u^+ + c(n) \left\| \frac{f^-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^{n+1}(\Omega \times (0,T))} \cdot B_0^{\frac{n}{n+1}} \right)
\end{aligned}
$$

und das Theorem folgt. □

Bemerkung 3.7. Wir werden im folgenden Theorem 3.8 dieses Theorem benutzen. Wie man an Gleichung (3.6) abliest, genügt es dabei, die entsprechenden $L^{n+1}(E^+(w))$-Normen statt der $L^{n+1}(\Omega \times (0,T))$-Normen zu benutzen. Gilt $d \leq 0$ in $\Omega \times (0,T)$ und $u \leq 0$ auf $\mathcal{P}(\Omega \times (0,T))$, so ist $u = w$ und wir können auch die $L^{n+1}(E^+(u))$-Normen verwenden.

3.2. **Ein lokales Maximumprinzip.** Nehme an, dass L gleichmäßig parabolisch ist, d. h. dass

$$\lambda\delta^{ij} \le a^{ij} \le \Lambda\delta^{ij}$$

für Konstanten $0 < \lambda \le \Lambda < \infty$ gilt. Definiere den parabolischen Zylinder $Q(R)$ durch

$$\begin{aligned} Q(R) &= Q((x,t),R) \\ &:= \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \max\left\{|x-y|, |s-t|^{1/2}\right\} < R, s < t\right\} \\ &= B_R(x) \times (t-R^2, t). \end{aligned}$$

Im folgenden Theorem sind die parabolischen Zylinder alle bezüglich eines gemeinsamen festen Punktes definiert. Wir wollen annehmen, dass dies der Ursprung ist.

Vergleiche das nachfolgende Resultat mit [7, Theorem 7.21]. Beachte, dass das hier auftretende Integral durch den Faktor $R^{-(n+2)}$ gemittelt ist. Es gilt das folgende lokale Maximumprinzip

Theorem 3.8. *Gelte $Lu \ge f$ in $Q(R)$. Seien $p > 0$, $\rho \in (0,1)$. Dann gibt es*

$$c = c\left(n, p, \rho, \lambda, \Lambda, \sup\left(R|b| + R^2 d^+\right)\right),$$

so dass

$$\sup_{Q(\rho R)} u \le c\left[\left(R^{-(n+2)} \int\limits_{Q(R)} \left(u^+\right)^p\right)^{1/p} + R^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}(Q(R))}\right]$$

gilt.

Bemerkung 3.9.

(i) Wir fordern nicht $p \ge 1$.
(ii) Mit Bemerkung 3.7 sehen wir durch Inspektion des folgenden Beweises, dass es hier genügt, über $E^+(u)$ statt über $Q(R)$ zu integrieren.
(iii) Der Beweis von Theorem 3.29 ergibt sich aus dem Beweis von Theorem 3.8, da die Randwerte dort $u \le 0$ erfüllen. Dies beim Lesen des Beweises von Theorem 3.8 zu berücksichtigen ist daher für später hilfreich.

Bemerkung 3.10. Ein analoges Resultat gilt auch, wenn wir $Q(R)$ bzw. $Q(\rho R)$ überall durch

$$\begin{aligned} K((x,t),R) &:= \left\{(y, s \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \max_i \left|x^i - y^i\right| < R \text{ und } t - R^2 < s < t\right\} \\ &= \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \max\left\{\max_i \left|x^i - y^i\right|, |s-t|^{1/2}\right\} < R \text{ und } s < t\right\} \end{aligned}$$

bzw. $K(\rho R)$ ersetzen. Dieses Resultat nennen wir die Quadervariante von Theorem 3.8. Wiederum werden wir alle Quader bezüglich eines gemeinsamen Punktes, der ohne Einschränkung der Ursprung ist, mit $K(R) \equiv K((0,0),R)$ ohne explizite Angabe eines Referenzpunktes bezeichnen.

Beweis. Übung. □

Beweis von Theorem 3.8. Definiere

$$\zeta := \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)\left(1 + \frac{t}{R^2}\right).$$

Beachte, dass $\zeta \geq 0$ in $Q(R)$ mit Gleichheit auf $\mathcal{P}(Q(R))$ gilt. Weiterhin gilt dort $\zeta \leq 1$. Für ein noch zu fixierendes $q \geq 2$, nämlich für

$$\begin{cases} q = \frac{2(n+1)}{p} & \text{falls } p \leq n+1, \\ q = 2 & \text{falls } p \geq n+1, \end{cases}$$

definieren wir $\eta := \zeta^q$. Definiere weiterhin den Differentialoperator P durch

$$Pv := -\dot{v} + a^{ij} v_{ij}$$

und $v := \eta u$. Es gilt

$$\begin{aligned} Pv = & -\dot{\eta} u - \eta \dot{u} + a^{ij} (\eta_{ij} u + 2 u_i \eta_j + \eta u_{ij}) \\ = & \, \eta P u + u P \eta + 2 a^{ij} u_i \eta_j \\ = & \, \eta \left(L u - b^i u_i - d u \right) + u P \eta + 2 a^{ij} u_i \eta_j \\ \geq & \, \eta f - \eta \left(b^i u_i + d u \right) + u P \eta + 2 a^{ij} u_i \eta_j. \end{aligned}$$

Für die weiteren Abschätzungen für Pv benötigen wir einige vorbereitende Rechnungen. Differenzieren liefert $Dv = u D\eta + \eta D u$, also

$$|Du| \leq \frac{|Dv|}{\eta} + |u| \frac{|D\eta|}{\eta}.$$

Für $(x,t) \in E^+(v)$ existiert $\xi = Dv$ mit $R|\xi| < v(x,t) + |\xi||x|$ und somit folgt

$$|Dv| = |\xi| < \frac{v}{R - |x|}.$$

In $E^+(v)$ gilt $|u| = u$ und somit schließen wir dort

$$\begin{aligned} |Du| \leq & \frac{|Dv|}{\eta} + \frac{u|D\eta|}{\eta} \\ \leq & \frac{v}{\eta(R - |x|)} + \frac{u q \eta \zeta^{-1} \left| \frac{2x}{R^2} \right| \left(1 + \frac{t}{R^2} \right)}{\eta} \\ = & \frac{v}{\eta \zeta} \left(\frac{\zeta}{R - |x|} + q \left| \frac{2x}{R^2} \right| \left(1 + \frac{t}{R^2} \right) \right) \\ = & \frac{v}{\eta \zeta} \left(\frac{(R - |x|)(R + |x|)}{R^2 (R - |x|)} + q \left| \frac{2x}{R^2} \right| \right) \left(1 + \frac{t}{R^2} \right) \\ \leq & \frac{v}{\eta \zeta} \left(\frac{2R}{R^2} + q \frac{2}{R} \right) \\ = & \frac{2v(1+q)}{\eta \zeta R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\eta} = & \, q \zeta^{q-1} \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2} \right) = q \frac{\eta}{\zeta} \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2} \right), \\ \eta_i = & \, q \zeta^{q-1} \left(-\frac{2x_i}{R^2} \right) \left(1 + \frac{t}{R^2} \right), \\ \eta_{ij} = & \, q(q-1) \zeta^{q-2} \frac{4 x_i x_j}{R^4} \left(1 + \frac{t}{R^2} \right)^2 - q \zeta^{q-1} \frac{2 \delta_{ij}}{R^2} \left(1 + \frac{t}{R^2} \right) \\ = & \, q(q-1) \frac{\eta}{\zeta^2} \frac{4 x_i x_j}{R^4} \left(1 + \frac{t}{R^2} \right)^2 - q \frac{\eta}{\zeta} \frac{2 \delta_{ij}}{R^2} \left(1 + \frac{t}{R^2} \right). \end{aligned}$$

Da in $E^+(v)$ auch $u > 0$ gilt, folgt dort

$$\begin{aligned} uP\eta &= \frac{u\eta}{\zeta^2 R^2}\left(-q\zeta\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)+4q(q-1)\frac{1}{R^2}a^{ij}x_ix_j\left(1+\frac{t}{R^2}\right)^2\right. \\ &\qquad\left.-2q\zeta a^{ij}\delta_{ij}\left(1+\frac{t}{R^2}\right)\right) \\ &\geq \frac{v}{\zeta^2R^2}\left(-q-2qn\Lambda\right), \end{aligned}$$

wobei wir den mittleren Term weglassen durften. Das ζ^2 im Nenner dürfte man sogar durch ein ζ ersetzen. Dies kann man aber in der nächsten Rechnung nicht mehr ausnutzen. Als Abschätzung für Pv ergibt sich also in $E^+(v)$ aufgrund der obigen Rechnungen

$$\begin{aligned} Pv \geq& -|f|-\eta|b||Du|-dv+\frac{v}{\zeta^2R^2}(-q-2qn\Lambda)-2\Lambda|Du||D\eta| \\ \geq& -|f|-\eta|b|\frac{2v(1+q)}{\eta\zeta R}-dv+\frac{v}{\zeta^2R^2}(-q-2qn\Lambda) \\ &-2\Lambda\frac{2v(1+q)}{\eta\zeta R}q\zeta^{q-1}\frac{2|x|}{R^2}\left(1+\frac{t}{R^2}\right) \\ \geq& -|f|-\frac{v}{\zeta^2R^2}\left(2(1+q)\zeta|b|R+d\zeta^2R^2+q+2qn\Lambda+8q(1+q)\Lambda\right), \end{aligned}$$

da $\frac{\zeta^q}{\eta}=1$ gilt,

$$\geq -|f|-\frac{v}{\zeta^2R^2}c\left(q,\sup|b|R+d^+R^2,n,\Lambda\right).$$

Wir wenden nun Theorem 3.6 auf Pv an. Beachte, dass $v=0$ auf $\mathcal{P}(Q(R))$ und dass $(\mathcal{D}^*)^{-1}$ abgeschätzt ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \sup_{Q(R)} v \leq& c\cdot\left(R^{\frac{n}{n+1}}\|f\|_{L^{n+1}(Q(R))}+R^{\frac{n}{n+1}-2}\left\|\frac{v^+}{\zeta^2}\right\|_{L^{n+1}(Q(R))}\right) \\ =& c\left(R^{\frac{n}{n+1}}\|f\|_{L^{n+1}(Q(R))}+R^{-\frac{n+2}{n+1}}\left\|(u^+)^{2/q}(v^+)^{1-2/q}\right\|_{L^{n+1}(Q(R))}\right) \\ \leq& c\left(R^{\frac{n}{n+1}}\|f\|_{L^{n+1}(Q(R))}+(\sup v)^{1-2/q}R^{-\frac{n+2}{n+1}}\left(\int\limits_{Q(R)}(u^+)^{\frac{2(n+1)}{q}}\right)^{1/(n+1)}\right) \end{aligned}$$

nach Definition von v und da $\sup v \geq 0$.

Betrachte nun zunächst den Fall $p \leq n+1$ und wähle $q = \frac{2(n+1)}{p} \geq 2$. Wir benutzen die Youngsche Ungleichung mit

$$\frac{p}{n+1}+\frac{n+1-p}{n+1}=1$$

und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &(\sup v)^{1-\frac{p}{n+1}}\left(R^{-(n+2)}\int\limits_{Q(R)}(u^+)^p\right)^{1/(n+1)} \\ &\leq \varepsilon \sup_{Q(R)} v + c(\varepsilon,p,q)\left(R^{-(n+2)}\int\limits_{Q(R)}(u^+)^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug, folgt die Behauptung, da

$$\sup_{Q(\rho R)} u \le c \sup_{Q(R)} v$$

wegen $1 \ge \eta \ge c(\rho) > 0$ auf $Q(\rho R)$.

Sei schließlich $p > n+1$. Wähle $q = 2$. Damit gilt $(\sup v)^{1-2/q} = 1$. Aufgrund der Hölderschen Ungleichung mit

$$\frac{n+1}{p} + \frac{p-(n+1)}{p} = 1$$

und $|Q(R)| = c(n) \cdot R^{n+2}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left(R^{-(n+2)} \int\limits_{Q(R)} (u^+)^{n+1} \right)^{1/(n+1)} \\
&\le R^{-\frac{n+2}{n+1}} \cdot \left(\int\limits_{Q(R)} (u^+)^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_{Q(R)} 1 \right)^{\left(1-\frac{n+1}{p}\right)\frac{1}{n+1}} \\
&= c(n) R^{\frac{n+2}{n+1}\left(-1+1-\frac{n+1}{p}\right)} \cdot \left(\int\limits_{Q(R)} (u^+)^p \right)^{1/p} \\
&= c(n) \cdot \left(R^{-(n+2)} \int\limits_{Q(R)} (u^+)^p \right)^{1/p} .
\end{aligned}$$

Das Theorem folgt. □

Bemerkung 3.11. Wir wollen am Beispiel von Theorem 3.8 zeigen, wie man solch ein Resultat durch Skalieren aus dem entsprechenden Resultat für $R = 1$ bekommen kann. Dieses Vorgehen funktioniert auch sonst und liefert neben einem Beweis für alle Radien $R > 0$ auch eine Methode, das richtige Skalierungsverhalten in den Abschätzungen zu finden.

Beweis. Übung. □

3.3. **Schwache Harnackungleichung.** Der Beweis der schwachen Harnackungleichung besteht aus mehreren Teilen. Vergleiche das folgende Lemma mit [7, Lemma 7.23]. Es zeigt, dass u in einem kleinen Zylinder groß ist, wenn es in einem größeren Zylinder keine Menge von großem Maß gibt, in der u klein ist.

Lemma 3.12. *Sei $u \ge 0$ in $Q(r)$ und gelte dort $Lu \le f$. Definiere*

$$k := r^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}(Q(r))}$$

und

$$\overline{u} := u + k.$$

Dann gibt es $\zeta = \zeta(n, \lambda, \Lambda) > 0$, so dass

$$|\{(x,t) \in Q(r) : \overline{u}(x,t) < h\}| \le \zeta |Q(r)|$$

oder die dazu äquivalente Bedingung

$$|\{(x,t) \in Q(r) : \overline{u}(x,t) \ge h\}| > (1-\zeta)|Q(r)|$$

für festes $h \ge k$ impliziert, dass

$$\inf_{Q(r/2)} \overline{u} \ge c(n, \lambda) \cdot h$$

gilt, falls

$$0 < r \le r_0(\lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}, \|d\|_{L^\infty})$$

ist. Im Falle $b = 0$ und $d = 0$ gilt diese Aussage für beliebige Radien $r > 0$.

Bemerkung 3.13. Die Quadervariante von Lemma 3.12 gilt ebenfalls.

Beweis. Übung. □

Beweis von Lemma 3.12. Definiere

$$v := h\left(1 - \frac{|x-x_0|^2 - t}{r^2}\right) - \overline{u}$$

und

$$Q^* = \{(x,t) \in Q(r) : \overline{u} < h\}.$$

Es folgt (wobei $(x-x_0)_i$ keine Ableitung bezeichnet)

$$\begin{aligned}
\dot{v} =& \frac{h}{r^2} - \dot{u},\\
v_i =& -2\frac{h}{r^2}(x-x_0)_i - u_i,\\
v_{ij} =& -2\frac{h}{r^2}\delta_{ij} - u_{ij},\\
Lv =& -Lu - \frac{h}{r^2}\left(1 + 2a^{ij}\delta_{ij} + 2b^i(x-x_0)_i\right) + dh\left(1 - \frac{|x-x_0|^2 - t}{r^2}\right) - dk\\
\ge& -f - \frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|) - |d|h - |d|k,
\end{aligned}$$

da $0 \le |x-x_0|^2 - t \le 2r^2$ in $Q(r)$. In $Q(r)$ gilt $|t| \le r^2$ und auf $\mathcal{P}(Q(r))$ gilt

$$v \le -\overline{u} = -u - k \le 0,$$

da dort $-t = r^2$ oder ($|x-x_0| = r$ und $-t \ge 0$) gelten. Nach Definition von Q^* und wegen

$$1 - \frac{|x-x_0|^2 - t}{r^2} \le 1 \quad \text{in } Q(r)$$

gilt somit auch $v \le 0$ auf $\mathcal{P}(Q^*)$. Nach Theorem 3.6 folgt daher

$$\begin{aligned}
\sup_{Q^*} v \le c(n,\lambda) \cdot e^{\sup d^+ \cdot r^2} \cdot \left(c(\lambda)\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*)} + r\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot&\\
\cdot \Bigg(\|f\|_{L^{n+1}(Q^*)} + \left\|\frac{h}{r^2}(1 + 2n\Lambda + 2|b||x-x_0|)\right\|_{L^{n+1}(Q^*)}&\\
+ \||d|(h+k)\|_{L^{n+1}(Q^*)}\Bigg).&
\end{aligned}$$

Nimm nun an, dass $r_0 > 0$ so klein ist, dass

$$\|d^+\|_{L^\infty} \cdot r^2 \le \|d^+\|_{L^\infty} \cdot r_0^2$$

gleichmäßig (z. B. durch 1) beschränkt ist. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*)} \le& \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot |Q(r)|\\
\le& c(n) \cdot \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot r^{n+2}\\
=& c(n) \cdot \|b\|^{n+1}_{L^\infty} \cdot r^{n+1} \cdot r.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\left(c(\lambda)\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q^*)} + r\right)^{\frac{n}{n+1}} \le c(n,\lambda) r^{\frac{n}{n+1}},$$

falls $r \le r_0$ für ein geeignetes kleines r_0 gilt oder $b = 0$ ist. Schreibe $\|f\|_{L^{n+1}} \equiv \|f\|_{L^{n+1}(Q(r))}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{Q^*} v \le\, & c(n,\lambda) r^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}} + c(n,\lambda,\Lambda) h r^{\frac{n}{n+1}-2} \|1 + |b|r\|_{L^{n+1}(Q^*)} \\
& + c(n,\lambda) h r^{\frac{n}{n+1}} \|d\|_{L^{n+1}(Q^*)} \\
\le\, & c(n,\lambda) r^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}} + c(n,\lambda,\Lambda) h r^{\frac{-n-2}{n+1}} |Q^*|^{\frac{1}{n+1}} (1 + r\|b\|_{L^\infty}) \\
& + c(n,\lambda) h r^{\frac{n}{n+1}} \|d\|_{L^\infty} |Q(r)|^{\frac{1}{n+1}} \\
\le\, & c(n,\lambda) k + c(n,\lambda,\Lambda) h r^{\frac{-n-2}{n+1}} r^{\frac{n+2}{n+1}} \zeta^{\frac{1}{n+1}} (1 + r\|b\|_{L^\infty}) + c(n,\lambda) h \|d\|_{L^\infty} r^2 \\
\le\, & c(n,\lambda) k + c(n,\lambda,\Lambda) h \zeta^{\frac{1}{n+1}} (1 + r\|b\|_{L^\infty}) + c(n,\lambda) h \|d\|_{L^\infty} \cdot r^2 \\
\le\, & c(n,\lambda) k + c(n,\lambda,\Lambda) h \zeta^{\frac{1}{n+1}} + \tfrac{1}{8} h,
\end{aligned}$$

falls $r \le r_0$ oder alternativ $b = 0$ und $d = 0$ gelten. Fixiere nun $\zeta > 0$, so dass

$$c(n,\lambda,\Lambda)\zeta^{\frac{1}{n+1}} \le \tfrac{1}{8}$$

ist. In $Q(r/2)$ gilt $0 \le |x - x_0|^2 \le \left(\frac{r}{2}\right)^2$ und $0 \le -t \le \left(\frac{r}{2}\right)^2$. Somit erhalten wir dort

$$1 - \frac{|x - x_0|^2 - t}{r^2} \ge 1 - \frac{\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}}{r^2} = \frac{1}{2}.$$

Es folgt daher in $Q(r/2) \cap Q^*$

$$\tfrac{1}{2} h - \overline{u} \le v \le c(n,\lambda) k + \tfrac{1}{4} h.$$

Wir erhalten dort

$$\overline{u} \ge \tfrac{1}{4} h - c(n,\lambda) k.$$

Sei ohne Einschränkung $h > 0$. Die Behauptung folgt damit, wenn k/h klein genug ist. Sonst ist aber die Ungleichung

$$\inf_{Q(r/2)} \overline{u} \ge k \ge c(n,\lambda) \cdot h$$

bei geeigneter Wahl von $c(n,\lambda)$ trivialerweise erfüllt.

Somit folgt das Lemma für alle $h \ge k$. □

3.4. **Nicht-Abfallen.** Vergleiche das folgende Lemma mit [7, Lemma 7.24]. Es besagt, dass eine untere Schranke auf einem Ball zu einer festen Zeit später eine untere Schranke auf einem dazu konzentrischen Ball impliziert. Am Beweis erkennt man, dass die Funktion u nur auf $B_r \times (-r^2, (-1+\alpha)r^2)$ definiert zu sein braucht.

Im Falle $f \equiv 0$ kann man solch ein Resultat mit dem üblichen Maximumprinzip zeigen, siehe [8].

Lemma 3.14. *Gelte $u \ge 0$ und $Lu \le f$ in $Q(R)$, wobei*

$$L_0 u = -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i$$

ist. Seien $0 < \varepsilon_0 < 1$, $0 < \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$ und $r \le R$. Dann gibt es für jedes $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ positive Konstanten $1 > \delta(n,\lambda) > 0$ und $\kappa(n,\lambda,\Lambda,\alpha_0,\alpha_1,\varepsilon_0) \ge 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Gilt

$$\overline{u} \ge A \quad \textit{auf } \left\{(x,t)\colon |x| < \varepsilon r,\ t = -r^2\right\}$$

für eine positive Konstante A, wobei wiederum

$$\overline{u} = u + k \equiv u + r^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}}$$

ist, so folgt

$$\overline{u} \ge \delta \varepsilon^\kappa A \quad \textit{auf } \left\{(x,t)\colon |x| < \tfrac{r}{2},\ t = (-1+\alpha)r^2\right\}$$

für beliebiges $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$*, falls*

$$r \le r_0\left(n, \lambda, \Lambda, \alpha_0, \alpha_1, \|b\|_{L^\infty}, \varepsilon, \varepsilon_0\right)$$

ist. Ist $b \equiv 0$*, so gilt die Aussage für alle Radien* $r \le R$*. Genauer ist die Abhängigkeit von* b *wie folgt: Es genügt, dass* $\|b\|_{L^\infty} \cdot \left(r + r^{\frac{n}{n+1}}\right)$ *klein ist.*

Bemerkung 3.15. Am Beweis von Lemma 3.14, genauer an Gleichung 3.7 und deren späterer Anwendung, erkennt man, dass auch

$$\overline{u} \ge \delta(n, \lambda, \tilde{\varepsilon})\varepsilon^\kappa A \quad \text{auf } \{(x,t)\colon |x| < (1-\tilde{\varepsilon})r,\, t = (-1+\alpha)r^2\}$$

folgt.

Alternativ folgt dies auch aus dem Lemma ohne weitere Inspektion des Beweises mit einem Zylinderkettenargument mit

$$\overline{u} \ge \delta(n, \lambda, \tilde{\varepsilon})\varepsilon^{\kappa(\ldots,\tilde{\varepsilon})} A, \quad \text{auf } \{(x,t)\colon |x| < (1-\tilde{\varepsilon})r,\, t = (-1+\alpha)r^2\}$$

d. h. hier hängt κ zusätzlich noch von $\tilde{\varepsilon}$ ab.

Auch hier gilt wieder eine Quadervariante.

Bemerkung 3.16. Lemma 3.14 gilt auch in der Quadervariante, wobei auch hier zeitliche und räumliche Ausdehnung unabhängig voneinander sein dürfen.

Beweis. Übung. □

Im nachfolgenden Beweis werden wir dieses elementare Lemma (für Teilmengen von $\mathbb{R}^{n+1}$) benutzen.

Lemma 3.17. *Sei* $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *glatt. Dann ist* $u_+^\beta = \max\{u, 0\}^\beta \in C^k$*, falls* $\beta > k \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Beweis. Wir zeigen, dass u_+^β in Punkten mit $u(x) = 0$ mindestens k-mal differenzierbar ist. Sei x_0 mit $u(x_0) = 0$, ohne Einschränkung gelte $x_0 = 0$. Da u glatt ist, gibt es c mit $|u(x)| = |u(x) - u(0)| \le c \cdot |x - 0|$ für alle x nahe 0. Es folgt

$$|u_+(x)|^\beta \le |u(x)|^\beta \le |x|^\beta = o\left(x^k\right).$$

Somit ist u in 0 mindestens k-mal differenzierbar mit $u_+^\beta(0) = 0$, $Du_+^\beta(0) = 0$, ... und $D^k u_+^\beta(0) = 0$. Die Stetigkeit von u_+^β und ihrer bis zu k-ten Ableitungen ist leicht zu sehen. □

Beweis von Lemma 3.14. Fixiere α mit $\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$ und definiere

$$\psi_0 := \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)\left(t+r^2\right)}{\alpha} + \varepsilon^2 r^2$$

und

$$\psi_1 := \left(\psi_0 - |x|^2\right)^+.$$

Betrachte für noch zu fixierende $q > 2$ die Funktion

$$\psi := \psi_1^3 \psi_0^{-q}.$$

Wir wollen die Funktion ψ nur für $-r^2 \le t \le 0$ betrachten. Dort gilt $\psi_0 \ge \varepsilon^2 r^2$. Somit ist dort ψ wohldefiniert. Der Exponent „> 2“ von ψ_1 dient lediglich dazu, $\psi \in C^{2;1}$ zu sichern.

Dort, wo $\psi_0 \le |x|^2$ ist, gilt $L_0\psi = 0$. Auf der Menge mit $\psi_0 > |x|^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \left(3\psi_1^2\psi_0^{-q} - q\psi_1^3\psi_0^{-q-1}\right)\dot{\psi}_0\\
&= \psi_0^{-q}\left(3\psi_1^2 - q\frac{\psi_1^3}{\psi_0}\right)\frac{1-\varepsilon^2}{\alpha},\\
\psi_i &= -6\psi_1^2\psi_0^{-q}x_i,
\end{aligned}$$

$$\psi_{ij} = -6\psi_1^2\psi_0^{-q}\delta_{ij} + 24\psi_1\psi_0^{-q}x_ix_j$$

und somit für

$$\mathcal{L}w := -\dot{w} + a^{ij}w_{ij}$$

die Differentialungleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\psi &= \psi_0^{-q}\left(24\psi_1 a^{ij}x_ix_j - 6\psi_1^2 \operatorname{tr} a^{ij} + \frac{1-\varepsilon^2}{\alpha}q\frac{\psi_1^3}{\psi_0} - 3\frac{1-\varepsilon^2}{\alpha}\psi_1^2\right)\\ &\geq \frac{\psi_0^{-q}\psi_0\psi_1}{\alpha}\left(24\lambda\alpha_0\frac{|x|^2}{\psi_0} - 6\alpha_1\frac{\psi_1}{\psi_0}n\Lambda - 3\left(1-\varepsilon^2\right)\frac{\psi_1}{\psi_0} + \left(1-\varepsilon^2\right)\frac{\psi_1^2}{\psi_0^2}q\right).\end{aligned}$$

Wir wollen nachweisen, dass $\mathcal{L}\psi \geq 0$ gilt. Dazu betrachten wir zunächst den Fall, dass $0 \leq \frac{|x|^2}{\psi_0} \leq \frac{1}{2}$ ist. Dann folgt

$$1 \geq \frac{\psi_1}{\psi_0} = \frac{\psi_0 - |x|^2}{\psi_0} \geq \frac{1}{2}$$

und wir erhalten die gewünschte Ungleichung, indem wir $q = q(\Lambda, \alpha_1, n, \varepsilon_0)$ groß genug wählen

$$\mathcal{L}\psi \geq \frac{\psi_0^{-q}\psi_0\psi_1}{\alpha}\left(0 - c(\alpha_1, n, \Lambda) + \left(1-\varepsilon^2\right)\frac{1}{4}q\right).$$

Im Falle $\frac{|x|^2}{\psi_0} \geq \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\mathcal{L}\psi \geq \frac{\psi_0^{-q+1}\psi_1}{\alpha}\left(24\lambda\alpha_0\frac{1}{2} - c(\alpha_1, n, \Lambda)\frac{\psi_1}{\psi_0} + \left(1-\varepsilon^2\right)\frac{\psi_1^2}{\psi_0^2}q\right).$$

Wählen wir nun $q = q(\lambda, \Lambda, \alpha_0, \alpha_1, n, \varepsilon_0)$ groß genug, so ergibt sich in diesem Falle die Ungleichung $\mathcal{L}\psi \geq 0$ aufgrund der Cauchyschen Ungleichung.

Somit erhalten wir in $\{\psi_0 > |x|^2\}$

$$\begin{aligned}L_0\psi &\geq b^i\psi_i\\ &= -6\psi_1^2\psi_0^{-q}b^ix_i\\ &\geq -6\psi_0^{2-q}|b||x|\\ &\geq -6|b||x|(\varepsilon r)^{4-2q},\end{aligned}$$

da $\psi_0 \geq \varepsilon^2 r^2$ und ohne Einschränkung $2 - q < 0$ gelten.

Wir betrachten nun die Funktion ψ zu verschiedenen Zeitpunkten. Sei zunächst $t = -r^2$. Dann gilt $\psi_0 = \varepsilon^2 r^2$ und wir erhalten für $|x| < \varepsilon r$

$$\begin{aligned}\psi\left(x, -r^2\right) &= \left(\varepsilon^2 r^2 - |x|^2\right)^3\left(\varepsilon^2 r^2\right)^{-q}\\ &\leq (\varepsilon r)^{6-2q}.\end{aligned}$$

Für $|x| \geq \varepsilon r$ ist $\psi\left(x, -r^2\right) = 0$.

Sei nun $t = (-1+\alpha)r^2$. Dann ist $\psi_0 = r^2$ und wir erhalten für $|x| < \frac{r}{2}$

$$\begin{aligned}\psi\left(x, (-1+\alpha)r^2\right) &= \left(r^2 - |x|^2\right)^3 r^{-2q}\\ &\geq \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 r^{6-2q}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Definiere nun die Testfunktion

$$v := \overline{u} - A(\varepsilon r)^{2q-6}\psi$$

und den Zylinder

$$Q := B_r(0) \times \left(-r^2, (-1+\alpha)r^2\right).$$

Wir wollen Theorem 3.6 auf v anwenden. Betrachte zunächst v auf dem parabolischen Rand. Für $|x| = r$ und $t < (-1+\alpha)r^2$ gilt

$$\begin{aligned}\psi_0 &< \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)\alpha r^2}{\alpha} + \varepsilon^2 r^2 = r^2,\\ \psi_1 &= 0,\\ \psi &= 0.\end{aligned}$$

Für $t = -r^2$ gilt

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \varepsilon^2 r^2,\\ \psi &\le \left(\varepsilon^2 r^2 - |x|^2\right)^3 \left(\varepsilon^2 r^2\right)^{-q}\\ &\le (\varepsilon r)^{-2q+6} \quad \text{für } |x| \le \varepsilon r,\\ \overline{u} &\ge A \quad \text{für } |x| \le \varepsilon r \text{ (nach Voraussetzung)},\\ \psi &= 0 \quad \text{für } |x| > \varepsilon r.\end{aligned}$$

$\overline{u} \ge u \ge 0$ gilt überall. Somit folgt $v \ge 0$ auf ganz $\mathcal{P}Q$. Es gilt

$$\begin{aligned}L_0 v &\le f + 6A(\varepsilon r)^{2q-6}|b||x|(\varepsilon r)^{4-2q}\\ &\le f + 6A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}|x|.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Theorem 3.6 erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\inf_Q v \ge &- c(n,\lambda) \cdot \left(\|f\|_{L^{n+1}(Q)} + 6A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\|x\|_{L^{n+1}(Q)}\right) \cdot\\ &\cdot \left(c(n,\lambda)\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q)} + r\right)^{\frac{n}{n+1}}.\end{aligned}$$

Wir schätzen wie folgt ab

$$\left(c(n,\lambda)\|b\|^{n+1}_{L^{n+1}(Q)} + r\right)^{\frac{n}{n+1}} \le \left(c(n,\lambda)\cdot\|b\|^{n+1}_{L^\infty}\cdot r^n\alpha r^2 + r\right)^{\frac{n}{n+1}} \le 2r^{\frac{n}{n+1}},$$

falls $r \le r_0(c(n,\lambda), \|b\|_{L^\infty}, \alpha_1)$ ist und die Abschätzung gilt für alle Radien $r \le R$, falls $b \equiv 0$ gilt.

Wir verwenden Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned}&6A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\|x\|_{L^{n+1}(Q)}\\ \le\,&6A\|b\|_{L^\infty}(\varepsilon r)^{-2}\left(\alpha r^2 c(n)\int\limits_0^r \rho^{n+1}\rho^{n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{n+1}}\\ \le\,&6A\|b\|_{L^\infty}\varepsilon^{-2}r^{-2}\alpha_1^{\frac{1}{n+1}}c(n)r^{\frac{2n+3}{n+1}}\\ =\,&6Ac(n)\varepsilon^{-2}\alpha_1^{\frac{1}{n+1}}\|b\|_{L^\infty}r^{\frac{1}{n+1}}\\ \le\,&c(n)A\varepsilon^{-2},\end{aligned}$$

falls $r \le r_0(\|b\|_{L^\infty}, \alpha_1, n)$. Auch hier gilt die Ungleichung wieder für alle Radien $0 < r \le R$, falls $b \equiv 0$ ist. In diesem Fall genügt dann sogar $c(n) = 0$. Man überprüft direkt, dass in diesem Falle auch die weiteren Einschränkungen an r überflüssig werden (Der zweite Term in der Klammer mit A in der übernächsten Ungleichung „$\bar{u} \ge \ldots$“ wird überflüssig.).

Somit folgt

$$v \ge -c(n,\lambda)k - c(n,\lambda)A\varepsilon^{-2}r^{\frac{n}{n+1}} \quad \text{in } Q.$$

Wir spezialisieren nun auf $|x| < \frac{r}{2}$ und $t = -(1-\alpha)r^2$ und erhalten dort

$$\begin{aligned}\overline{u} &= v + A(\varepsilon r)^{2q-6}\psi\\ &\ge A\left((\varepsilon r)^{2q-6}\psi - c(n,\lambda)\varepsilon^{-2}r^{\frac{n}{n+1}}\right) - c(n,\lambda)k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq A\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 \varepsilon^{2q-6} - c(n,\lambda)\varepsilon^{-2} r^{\frac{n}{n+1}}\right) - c(n,\lambda)k \quad (\text{mit } (3.7))\\ &\geq \tfrac{1}{3} A\varepsilon^{2q-6} - c(n,\lambda)k,\end{aligned}$$

falls $r \leq r_0(\varepsilon, n, \lambda, q)$. Setze nun $\kappa = 2q-6$. Da $u \geq 0$ ist, folgt durch Addition von $c(n,\lambda)u$ die Ungleichung

$$(c(n,\lambda)+1)\cdot \overline{u} \geq \tfrac{1}{3} A\varepsilon^{\kappa}.$$

Somit folgt das Lemma mit

$$\delta = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+c(n,\lambda)}. \qquad \square$$

3.5. **Calderón-Zygmund Zerlegung.** Für den Beweis von Lemma 3.20 benötigen wir eine parabolische Version der Calderón-Zygmund Zerlegung. Wir folgen direkt der Darstellung in [7, Kapitel 7.2].

Seien $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, R, $T > 0$. Definiere den Quader

$$\begin{aligned}K_0 &:= \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \max_i \left|x^i - x_0^i\right| < R,\ t_0 - T < t < t_0\right\}\\ &= \prod_{i=1}^n \left(x_0^i - R, x_0^i + R\right) \times (t_0 - T, t_0).\end{aligned}$$

Bei einem Quader dieser Form nennen wir (x_0, t_0) den Referenzpunkt oder Deckelmittelpunkt.

Sei $f \in L^1(K_0)$ eine nichtnegative Funktion. Für uns würde es genügen, hier charakteristische Funktionen zu betrachten. Sei $\tau > 0$ eine Konstante, so dass

$$\tau \geq \frac{1}{|K_0|}\int\limits_{K_0} f.$$

Zerlege K_0 (bis auf eine Nullmenge) in 2^{n+2} disjunkte offene Teilquader

$$K_{1,1},\ \ldots,\ K_{1,2^{n+2}}$$

von der Form

$$K_{1,j} := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon \max_i \left|x^i - x_{1,j}^i\right| < R/2,\ t_{1,j} - T/4 < t < t_{1,j}\right\}$$

für geeignete $(x_{1,j}, t_{1,j})$.

Unterteile jeden Teilquader K mit

$$\frac{1}{|K|}\int\limits_K f \leq \tau$$

wie oben nochmals. Setze diesen Prozess beliebig lange fort. So erhalten wir im m-ten Schritt eine endliche Menge von Quadern $K_{m,1},\ \ldots,\ K_{m,k(m)}$. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller so entstandenen Quader (die nicht mehr weiter unterteilt werden), so dass

$$\frac{1}{|K|}\int\limits_K f > \tau.$$

Bezeichne für $K \in \mathcal{S}$ den „Vorgängerquader“, aus dem K durch Zerlegen entstanden ist, mit $\tilde{K}$. Da die Zerlegung bei K abbricht, erhalten wir

$$\tau \geq \frac{1}{\left|\tilde{K}\right|}\int\limits_{\tilde{K}} f = \frac{1}{2^{n+2}|K|}\int\limits_{\tilde{K}} f \geq \frac{1}{2^{n+2}|K|}\int\limits_K f$$

und somit

$$\tau < \frac{1}{|K|}\int\limits_K f \leq 2^{n+2}\tau$$

für alle $K \in \mathcal{S}$. Definiere nun

$$B := \bigcup_{K \in \mathcal{S}} K$$

und $G := K_0 \setminus B$.

Wir benötigen die folgende Variante des Lebesguetheorems.

Lemma 3.18. *Sei $0 \leq f \in L^1(K_0)$ und bezeichne für festes $(x,t) \in K_0$ mit $K_m(x,t)$ den Quader aus dem m-ten Schritt der Calderón-Zygmund Zerlegung (die man nicht vorzeitig abbricht), so dass $(x,t) \in K_m(x,t)$ gilt. Solch ein Quader ist für fast alle $(x,t) \in K_0$ eindeutig bestimmt. Definiere*

$$f_m(x,t) := \frac{1}{|K_m(x,t)|} \int\limits_{K_m(x,t)} f.$$

Dann gilt $f_m \to f$ in $L^1(K_0)$.

Beweis. Bezeichne mit $\rho_m(x,t)$ den Deckelmittelpunkt des Quaders $K_m(x,t)$. Sei K_m der um $-\rho_m(x,t)$ verschobene Quader $K_m(x,t)$, der also seinen Deckelmittelpunkt im Ursprung hat.

Es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{K_0} |f - f_m| &= \int\limits_{K_0} \left| f(x,t) - \frac{1}{|K_m|} \int\limits_{K_m} f(\rho_m(x,t) + (y,s))\, dy\, ds \right| dx\, dt \\ &\leq \frac{1}{|K_m|} \int\limits_{K_m} \int\limits_{K_0} |f(x,t) - f(\rho_m(x,t) + (y,s))|\, dx\, dt\, dy\, ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für eine stetige Funktion f folgt hieraus die Behauptung. Ist f nicht stetig, so approximieren wir f in L^1 bis auf $\varepsilon/3$ durch eine stetige Funktion g. Es gilt die Ungleichung $\|f_m - g_m\|_{L^1} \leq \|f - g\|_{L^1}$:

$$\begin{aligned} &\|f_m - g_m\|_{L^1(K_0)} \\ = &\int\limits_{K_0} |f_m(x,t) - g_m(x,t)|\, dx\, dt \\ = &\int\limits_{K_0} \left| \frac{1}{|K_m|} \int\limits_{K_m} f(\rho_m(x,t) + (y,s)) - g(\rho_m(x,t) + (y,x))\, dy\, ds \right| dx\, dt \\ \leq &\int\limits_{K_0} \frac{1}{|K_m|} \|f - g\|_{L^1(K_m(x,t))}\, dx\, dt \\ = &\sum_i \|f - g\|_{L^1(K_m^i)} = \|f - g\|_{L^1(K_0)}. \end{aligned}$$

Hier haben wir für einen Moment die Quader des m-ten Schrittes mit K_m^i bezeichnet.

Wir wenden die obige Abschätzung (3.8) auf g an. Dabei wählen wir m, das nur vom Stetigkeitsmodul der approximierenden Funktion g abhängt, so groß, dass $\|g - g_m\|_{L^1} \leq \varepsilon/3$ gilt. Die Behauptung folgt nun mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_{L^1} &\leq \|f - g\|_{L^1} + \|g - g_m\|_{L^1} + \|g_m - f_m\|_{L^1} \\ &\leq 2 \underbrace{\|f - g\|_{L^1}}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|g - g_m\|_{L^1}}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Aufgrund dieses Lemmas konvergiert f_m fast überall (zumindest nach Auswahl einer Teilfolge) gegen f. Damit ist fast überall dort, wo $f > \tau$ gilt, irgendein $f_m > \tau$ und die entsprechende Zerlegung bricht nach Definition ab. Somit gilt $f \le \tau$ fast überall in G.

Definiere nun mit Hilfe der „Vorgängerquader“ $\tilde{K}$

$$\tilde{B} := \bigcup_{K \in \mathcal{S}} \tilde{K}.$$

Es folgt

$$\int\limits_{\tilde{B}} f \le \tau \left|\tilde{B}\right|,$$

da dies nach Definition von $\tilde{K}$ für jeden dieser Quader gilt und $\tilde{B}$ als disjunkte Vereinigung (modulo Nullmengen) solcher Mengen $\tilde{K}$ dargestellt werden kann.

Sei nun $f = \chi_\Gamma$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $\Gamma \subset K_0$ mit $|\Gamma| < \tau|K_0|$ und gelte $0 < \tau < 1$. Nun konvergiert f_m (oder eine Teilfolge davon) fast überall gegen f. Also konvergiert f_m fast überall gegen 0 oder 1. Die Konvergenz $f_m \to 1$ ist nur möglich, falls es für beliebiges $\varepsilon > 0$ einen entsprechenden Quader K_m mit $\frac{|K_m \cap \Gamma|}{|K_m|} \ge 1 - \varepsilon$ gibt. Im Komplement der Vereinigung solcher Quader gilt also fast überall $\chi_\Gamma = 0$. Somit folgt aber insbesondere

$$|\Gamma| = \left|\Gamma \cap \tilde{B}\right| \le \tau \left|\tilde{B}\right|. \tag{3.9}$$

3.6. **Maßtheoretisches Lemma von Krylov und Safonov.** Im folgenden Abschnitt beweisen wir ein rein maßtheoretisches Lemma von Nicolai Krylov und Mikhail V. Safonov. Wir folgen der Darstellung in [7, Lemma 7.25].

Definition 3.19. Sei $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Für $R > 0$ definieren wir den Quader

$$K_0 \equiv K((x_0, t_0), R) = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \max_i \left|x^i - x_0^i\right| < R,\, t_0 - R^2 < t < t_0\right\}.$$

Für ein noch zu wählendes $\eta \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ (es funktioniert aber auch noch bis 4/3) und einen Quader $K((x_1, t_1), r) \subset K_0$ definieren wir

$$\begin{aligned} K_1((x_1, t_1), r) := K_0 \cap \big\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ & \max_i \left|x^i - x_1^i\right| < 3r, \\ & t_1 - 4r^2 < t < t_1 + 3r^2\big\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K_2((x_1, t_1), r) := \Bigg\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ & \max_i \left|x^i - x_1^i\right| < 3r, \\ & \max_i \left|x^i - x_0^i\right| < R, \\ & t_1 < t < t_1 + \frac{4}{\eta} r^2\Bigg\}. \end{aligned}$$

Sei $\xi \in (0, 1)$, $\Gamma \subset K_0$ eine messbare Teilmenge. Sei $G^* = G^*(\Gamma, \xi)$ die Familie aller Teilquader $K = K((x, t), r)$ von K_0, definiert wie oben, für die $|K \cap \Gamma| \ge \xi |K|$ gilt und setze

$$Y_i := \bigcup_{K \in G^*} K_i, \quad i = 1,\, 2,$$

wobei die K_i bezüglich K und K_0 so wie oben die K_i bezüglich $K((x_1, t_1), r)$ und K_0 definiert sind.

Lemma 3.20. *Sei $\Gamma \subset K_0$ messbar. Dann gelten*

(i) $$|\Gamma \setminus Y_1| = 0,$$

(ii) $$|\Gamma| \le \xi |K_0| \Longrightarrow |\Gamma| \le \xi |Y_1|,$$

(iii) $$|Y_1| \le (1+\eta)|Y_2|.$$

Beweis. **Fall a:** Falls $|\Gamma| > \xi|K_0|$ gilt, so ist das zu $K = K_0$ gehörige $K_1 = K_0$ und somit gilt $Y_1 = K_0$. In diesem Falle folgt also (i). In diesem Falle ist die Voraussetzung zu (ii) nicht erfüllt, es ist also also nichts zu zeigen.

Fall b: Gilt $|\Gamma| \le \xi|K_0|$, so benutzen wir die Calderón-Zygmund Zerlegung von Abschnitt 3.5 mit $\tau = \xi$. Gilt $K((x_1, t_1), r) \in \mathcal{S}$, so folgt $\tilde{K} \subset K_1((x_1, t_1), r)$, da $K_1((x_1, t_1), r)$ gerade als groß genug definiert ist. Somit folgt nach Definition von $\tilde{B}$ und Y_1 auch $\tilde{B} \subset Y_1$. Nun liefert die Gleichheit in (3.9) die Behauptung (i) und der Rest davon und $\left|\tilde{B}\right| \le |Y_1|$ impliziert (ii).

Für den **Beweis von** (iii) fixieren wir ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$I(x) := \{t : (x,t) \in Y_2\} \ne \emptyset.$$

Da Y_2 Vereinigung von offenen Mengen ist, ist auch $I(x)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Stelle nun $I(x)$ als disjunkte Vereinigung offener Intervalle $I_m = (t_m, \tau_m)$ dar. Nach Definition von Y_2 ist jedes dieser Intervalle I_m (nicht notwendigerweise disjunkte) Vereinigung von offenen Intervallen

$$I_{m,k} = \left(t_{m,k}, t_{m,k} + \frac{4}{\eta} r_{m,k}^2\right),$$

die jeweils einer Menge K_2 entsprechen.

Der Definition von K_1 entsprechend (aber möglicherweise „größer“, da wir nicht mit $\left(t_0 - R^2, t_0\right)$ schneiden) definieren wir

$$J_{m,k}^* = \left(t_{m,k} - 4r_{m,k}^2, t_{m,k} + 3r_{m,k}^2\right)$$

und

$$I_m^* = \bigcup_k J_{m,k}^*,$$

wobei wir die Vereinigung jeweils bis zu einem von m abhängigen Wert für k bilden.

Nach Definition der Intervalle und Quader gilt also

$$\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in Y_1 \cup Y_2\} \subset \bigcup_m (I_m^* \cup I_m)\,. \tag{3.10}$$

Da I_m die Vereinigung von Intervallen $I_{m,k}$ ist, gilt aufgrund der Inklusion

$$t_m \le t_{m,k} \le t_{m,k} + \frac{4}{\eta} r_{m,k}^2 \le \tau_m. \tag{3.11}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass

$$J_{m,k}^* \subset (t_m - \eta(\tau_m - t_m), \tau_m)$$

gilt. Für die rechte Grenze benutzen wir $\frac{4}{3} \ge \eta$ und erhalten mit (3.11)

$$\tau_m \ge t_{m,k} + \frac{4}{\eta} r_{m,k}^2 \ge t_{m,k} + 3r_{m,k}^2.$$

Die entsprechende Ungleichung für die linke Intervallgrenze ist etwas komplizierter. Wir addieren zunächst die beiden äußeren Ungleichungen in (3.11) und multiplizieren mit $\eta > 0$

$$\eta \left(t_m + t_{m,k} + \frac{4}{\eta} r_{m,k}^2\right) \le \eta \left(t_{m,k} + \tau_m\right).$$

Wir ordnen die Terme geeignet um und erhalten

$$4r_{m,k}^2 \le \eta(\tau_m - t_m).$$

Wir benutzen nun diese Ungleichung und zum Schluß nochmals die erste Ungleichung aus (3.11). Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} t_{m,k} - 4r_{m,k}^2 &\geq t_{m,k} - \eta(\tau_m - t_m) \\ &\geq t_m - \eta(\tau_m - t_m). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die behauptete Intervallinklusion.

Es ergibt sich, da offensichtlicherweise I_m auch in diesem Intervall enthalten ist und da $I_m^* = \bigcup\limits_k J_{m,k}^*$ nach Definition gilt, auch

$$I_m \cup I_m^* \subset (t_m - \eta(\tau_m - t_m), \tau_m).$$

Das Intervall auf der rechten Seite hat die Länge $(1+\eta)(\tau_m - t_m)$.

Zusammen mit (3.10) und da $I(x)$ die Vereinigung der Intervalle I_m ist, ergibt sich

$$|\{t : (x,t) \in Y_1 \cup Y_2\}| \leq \sum_m (1+\eta)(\tau_m - t_m) = (1+\eta)|I(x)|.$$

Bezeichne nun mit χ_1 und χ_2 die charakteristischen Funktionen der Mengen Y_1 und Y_2. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_1(x,t)dt \leq (1+\eta) \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_2(x,t)dt \tag{3.12}$$

für beliebiges x.

Für Punkte x mit $I(x) \neq \emptyset$ folgt dies aus der obigen Rechnung, da wir auf der linken Seite mit Hilfe von $Y_1 \subset Y_1 \cup Y_2$ abschätzen können. Gilt $I(x) = \emptyset$, so folgt die Ungleichung ebenfalls, da dann nach Definition der Quader K_1 und K_2 sowie der Mengen Y_1 und Y_2 auch die linke Seite der Ungleichung verschwindet. Also gilt (3.12) für alle x.

Wir integrieren nun (3.12) bezüglich x und benutzen Fubini. Es folgt die Behauptung (iii). □

3.7. **Schwache Harnackungleichung.** Wir kommen nun zum Beweis der schwachen Harnackungleichung. Vergleiche dies mit [7, Theorem 7.22]. Im elliptischen Fall findet sich die analoge Ungleichung in [4, Theorem 9.22].

Wir definieren zunächst für $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $R > 0$ die Menge

$$\Theta((y,s),R) := K\left(\left(y, s-4R^2\right), R\right) \equiv \prod_{i=1}^n \left(y^i - R, y^i + R\right) \times \left(s - 5R^2, s - 4R^2\right).$$

Theorem 3.21. *Sei $u \geq 0$ in $K(5R)$ und erfülle u dort die Differentialungleichung*

$$L_0 u \equiv -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \leq f.$$

Dann gibt es positive Konstanten $p(n,\lambda,\Lambda)$ und $C(n,\lambda,\Lambda,\|b\|_{L^\infty})$, so dass

$$\left(R^{-n-2} \int\limits_{\Theta(R)} u^p\right)^{1/p} \leq C\left(\inf_{K(R)} u + R^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}(K(5R))}\right)$$

gilt.

Wir fordern nicht $p \geq 1$.

Bemerkung 3.22. Es gilt die Zylinderversion von Theorem 3.21. Dabei fordern wir, dass u in $Q(5\sqrt{n}R)$ definiert ist und verwenden auf der rechten Seite der Ungleichung die $\|\cdot\|_{L^{n+1}(Q(5\sqrt{n}R))}$-Norm.

Mit einem Quaderkettenargument ähnlich wie im Beweis der Quaderversion von Lemma 3.14 oder am Ende des Beweises von Theorem 3.21 kann man die Gebiete $Q(5\sqrt{n}R)$ zumindest auf $Q(5R)$ verkleinern.

Beweis. Übung. □

Beweis von Theorem 3.21. Wir nehmen zunächst an, dass $R > 0$ so klein ist, dass die Schranken an den Radius aus den Lemmata 3.12 und 3.14 (und ihren Quadervarianten) erfüllt sind, dass also

$$R \le R_0(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})$$

gilt. Die allgemeine Aussage erhalten wir dann ganz am Schluß mit Hilfe eines modifizierten „Quaderkettenargumentes“.

Sei $\zeta > 0$ wie in Lemma 3.12 (inclusive Quadervariante) und setze $\xi := 1 - \zeta$. Definiere

$$\eta := \tfrac{1}{2} \min \left\{ \tfrac{3}{4}, \xi^{-1/2} - 1 \right\}.$$

Wir definieren weiterhin den Quader

$$K_0 := (-R, R)^n \times \left(-5R^2, -4R^2\right) = K\left(\left(0, -4R^2\right), R\right) = \Theta(R)$$

in der Notation von Definition 3.19.

Sei wiederum $h > k = R^{n/(n+1)} \|f\|_{L^{n+1}(K(5R))}$. Definiere $\overline{u} := u + k$ und

$$\Gamma(h) := \{(x, t) \in K_0 : \overline{u} > h\}.$$

Bezeichne $G^*(\Gamma(h), \xi)$ wiederum die Menge aller Teilquader K von K_0 mit $|K \cap \Gamma(h)| \ge \xi |K|$.

Fixiere nun (x_1, t_1) und $r > 0$, so dass $K((x_1, t_1), r) \in G^*(\Gamma(h), \xi)$ gilt. Aufgrund der Quadervariante von Lemma 3.12 erhalten wir nun für ein $C_1 = C_1(n, \lambda)$ eine untere Schranke zu einem späteren Zeitpunkt in einem kleineren Gebiet, nämlich

$$\inf_{Q_1} \overline{u} \ge C_1 h,$$

wobei

$$Q_1 := K((x_1, t_1), r/2) = \left\{ (x, t) \colon \max_i \left| x^i - x_1^i \right| < \tfrac{r}{2},\, t_1 - \tfrac{r^2}{4} < t < t_1 \right\}$$

ist.

Eine untere Schranke dieser Form wollen wir nun auch auf der Menge K_2 beweisen. Hierzu müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Im ersten Fall ist r so klein, dass der Quader

$$Q_2 := \prod_{i=1}^n \left(x_1^i - 4r, x_1^i + 4r\right) \times \left(t_1 - \tfrac{1}{8} r^2, t_1 + \tfrac{4}{\eta} r^2\right),$$

der die Menge K_2 enthält, auch in $K(4R)$ enthalten ist. Somit gibt es nach Lemma 3.14 eine positive Konstante $C_2 = C_2(C_1, n, \lambda, \Lambda, \eta) = C_2(n, \lambda, \Lambda, \xi) = C_2(n, \lambda, \Lambda)$, so dass

$$\overline{u} \ge C_2 \cdot h \quad \text{in } \prod_{i=1}^n \left(x_1^i - 3r, x_1^i + 3r\right) \times \left(t_1, t_1 + \tfrac{4}{\eta} r^2\right) \supset K_2$$

gilt. Ist Q_2 im Verhältnis zur Breite zu hoch, so ist das Lemma mehrfach anzuwenden. Beachte, dass α_0 mit $0 < \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$ von Null weg beschränkt ist, da $\eta = \eta(\xi) = \eta(n, \Lambda)$ und somit $\frac{4}{\eta} \le c(n, \Lambda)$ gilt. Hierbei darf r nicht zu groß sein, damit die Abschätzung

$$\overline{u} \ge \tfrac{1}{2} A \varepsilon^{2q-4} - c(n, \lambda) k$$

im Beweis dieses Lemmas gilt. Da aber α_0, α_1, ε, ε_0, n, λ, Λ dort als feste, nur von η abhängige Konstanten gewählt werden können, genügt es, R in Abhängigkeit davon als klein genug vorauszusetzen, wie wir dies oben angenommen haben.

Ist r so groß, dass der Quader Q_2 nicht in $K(4R)$ enthalten ist, so verkleinert man Q_2 und benutzt die Variante von Lemma 3.14 aus Bemerkung 3.16, vergleiche auch den Anfang von Kapitel 3.4. Wir erhalten

$$\overline{u} \geq C_2 \cdot h \quad \text{in } K_2 \cap \{t < 0\}.$$

Wir setzen nun $\gamma := \frac{1}{2}C_2$ und dürfen ohne Einschränkung $0 < \gamma < 1$ annehmen. Es gilt $\gamma = \gamma(n, \lambda, \Lambda)$.

Unterscheide nun weiterhin zwei Fälle, je nachdem, ob es einen Quader

$$K((x_1, t_1), r) \in G^*(\Gamma(h), \xi)$$

gibt, so dass der zugehörige Quader K_2 über $t = 0$ nach oben hinausreicht oder ob alle entsprechenden Quader K_2 in $t \leq 0$ und damit auch in $K(4R)$ enthalten sind.

Betrachte zunächst die (einfachere) Situation, wenn der zu einem Quader

$$K((x_1, t_1), r) \in G^*(\Gamma(h), \xi)$$

gehörige Quader K_2 (nicht Zylinder Q_2!) nach oben über $K(4R)$ hinausreicht. Zunächst wollen wir in diesem Fall r nach unten abschätzen. Da noch $K \subset K_0$ gilt, folgt $t_1 \leq -4R^2$ und ein Hinausstehen ist nach Definition 3.19 nur möglich, wenn

$$\frac{4}{\eta} r^2 \geq 4R^2 \quad \text{ist, also} \quad r \geq \sqrt{\eta} R$$

gilt. Wir wissen also insbesondere, dass

$$\overline{u} \geq C_2 \cdot h \quad \text{in } \prod_{i=1}^{n} \left(x_1^i - \sqrt{\eta}R, x_1^i + \sqrt{\eta}R\right) \times \left\{t = -4R^2\right\}.$$

Nun wenden wir nochmals Lemma 3.14 mit $K((x_1, 0), 2R) \supset K((0,0), R) = K(R)$ an und erhalten

$$\overline{u} \geq C_3 \cdot h \quad \text{in } K(R),$$

wobei $C_3 = C_3(C_2, n, \lambda, \Lambda, \eta) = C_3(n, \lambda, \Lambda)$ ist. Wir schätzen nun $|\Gamma(h)| \leq |K_0|$ ab und erhalten für jedes feste $q > 0$ eine Konstante $c = c(C_3, q)$, so dass

$$|\Gamma(h)| \leq c \cdot \left(\frac{\inf\limits_{K(R)} \overline{u}}{h} \right)^q \cdot R^{n+2}$$

gilt.

Im zweiten Fall wollen wir solch eine Ungleichung ebenfalls beweisen. Dabei wird dann auch q fixiert, so dass $0 < q < \frac{2}{\kappa}$ und $\gamma^q \geq \xi^{1/4}$ gelten, wobei κ eine Konstante ist, die sich aufgrund nochmaliger Anwendung (im Folgenden) von Lemma 3.14 ergibt.

Wir kommen nun zum zweiten Fall, nämlich dem, dass r so klein ist, dass alle von $K((x_1, t_1), r) \in G^*(\Gamma(h), \xi)$ ausgehend definierten Quader K_2 noch ganz in $K(4R)$ enthalten sind. In diesem Fall wollen wir noch zwei Zusatzannahmen machen:

$$|\Gamma(h)| \leq \xi |K_0|$$

und

$$|\Gamma(\gamma h)| \leq \xi^{-1/4} |\Gamma(h)|.$$

Die damit ausgeschlossenen Fälle werden wir später noch betrachten. Nach Lemma 3.20 (ii) erhalten wir

$$|Y_1| \geq \frac{1}{\xi} |\Gamma(h)|.$$

Aus den obigen Betrachtungen folgt

$$\overline{u} \geq 2\gamma h \quad \text{in } Y_2 \cap \{t < 0\}.$$

Hier sind Y_1 und Y_2 wie in Definition 3.19 mit $\Gamma = \Gamma(h)$ definiert. Aufgrund der zweiten Zusatzannahme erhalten wir nun

$$|Y_2 \cap K_0| \leq |\{\overline{u} > \gamma h\} \cap K_0| = |\Gamma(\gamma h)| \leq \xi^{-1/4}|\Gamma(h)|.$$

Weiterhin ergibt sich

$$|Y_2| \geq \frac{1}{1+\eta}|Y_1|$$

nach Lemma 3.20 (iii) und

$$|Y_2| \geq \frac{1}{1+\eta}\frac{1}{\xi}|\Gamma(h)|$$

gemäß der Folgerung aus Lemma 3.20 (ii).

Somit folgt

$$\begin{aligned}|Y_2 \setminus K_0| &= |Y_2| - |Y_2 \cap K_0| \\ &\geq \frac{1}{1+\eta}\frac{1}{\xi}|\Gamma(h)| - \xi^{-1/4}|\Gamma(h)| \\ &\overset{\text{s. u.}}{\geq} \xi^{1/2}\frac{1}{\xi}|\Gamma(h)| - \xi^{-1/4}|\Gamma(h)| \\ &= \left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}|\Gamma(h)|.\end{aligned}$$

Dabei haben haben wir die Definition von η am Anfang des Beweises benutzt.

Hieraus wollen wir nun eine untere Abschätzung für das zu dem Quader K_2, der am weitesten über K_0 hinausreicht, gehörige r herleiten. Aufgrund der unteren Schranke an $|Y_2 \setminus K_0|$ gibt es Teile von $Y_2 \setminus K_0$, die nach oben mindestens $\frac{|Y_2 \setminus K_0|}{(2R)^n}$, $(2R)^n$=Querschnittsfläche von K_0, über die Höhe der Oberkante von $\Theta(R) = K_0$, nämlich $-4R^2$, hinausreichen. Somit gilt für das zum am weitesten nach oben reichenden Quader K_2 gehörige r

$$t_1 + \frac{4}{\eta}r^2 \geq \left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}|\Gamma(h)|(2R)^{-n} - 4R^2.$$

Der entsprechende Quader $K((x_1,t_1),r) \in G^*(\Gamma(h),\xi)$ liegt aber noch in K_0 und somit gilt $t_1 \leq -4R^2$ und wir erhalten

$$r^2 \geq \frac{\eta}{4}\left(1-\xi^{1/4}\right)\xi^{-1/2}2^{-n}R^{-n}|\Gamma(h)|. \tag{3.13}$$

Es gilt $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x_1^i - r, x_1^i + r\right) \times \left\{t = -4R^2\right\} \subset K_2$ und somit ist dort auch $\overline{u} \geq 2\gamma h$. Nach Lemma 3.14 gewinnen wir damit eine untere Schranke in $K(R)$, nämlich

$$\inf_{K(R)} \overline{u} \geq c(n,\lambda,\Lambda)\left(\frac{r}{R}\right)^{\kappa}\gamma h, \quad \kappa = \kappa(n,\lambda,\Lambda).$$

Die Abhängigkeit von ε_0 tritt nicht auf, da $r \leq R$ gilt und wir Lemma 3.14 auf $K(2R)$ anwenden.

Da r aufgrund von (3.13) nach unten abgeschätzt ist, folgt

$$\inf_{K(R)} \overline{u} \geq c(n,\lambda,\Lambda,\gamma,\eta,\xi)\cdot\left(\frac{|\Gamma(h)|}{R^{n+2}}\right)^{\kappa/2}\cdot h.$$

Da $\Gamma(h) \subset K_0$ ist, folgt

$$|\Gamma(h)| \leq R^2 \cdot (2R)^n,$$

wir erhalten also

$$\inf_{K(R)} \overline{u} \geq c(n,\lambda,\Lambda,\gamma,\eta,\xi)\cdot\left(\frac{|\Gamma(h)|}{R^{n+2}}\right)^{1/q}\cdot h,$$

auch mit $c = c(n, \lambda, \Lambda, \xi) = c(n, \lambda, \Lambda)$, wenn wir $0 < q = q(\kappa, \gamma, \xi) = q(n, \lambda, \Lambda) \leq \frac{2}{\kappa}$ so fixieren, dass

$$\gamma^q \geq \xi^{1/4}$$

gilt. Diese zweite Bedingung wird erst später wichtig werden. Die Konstante q fixieren wir dabei möglichst groß unter den angegebenen Nebenbedingungen. Da $0 < \gamma < 1$ und $0 < \xi < 1$ gelten, finden wir eine solche Konstante q.

Zum Beweis der unteren Abschätzung an $\overline{u}$ auf $K(R)$ hatten wir die beiden obigen Zusatzannahmen benutzt. Für jedes $h > k$ gilt also mindestens eine der folgenden Ungleichungen

$$\text{(i)} \qquad |\Gamma(h)| \leq \xi^{1/4} |\Gamma(\gamma h)|,$$

$$\text{(ii)} \qquad |\Gamma(h)| \leq c(n, \lambda, \Lambda) \cdot \left(\frac{\inf\limits_{K(R)} \overline{u}}{h} \right)^q \cdot R^{n+2},$$

$$\text{(iii)} \qquad |\Gamma(h)| > \xi \cdot |K_0|.$$

(Damit sind die beiden Fälle wieder zusammengeführt.)

Hieraus wollen wir eine generelle Abschätzung, d. h. eine Abschätzung ohne Fallunterscheidungen, an $|\Gamma(h)|$ herleiten. Wähle dazu zunächst $h_0 \geq k$, so dass

$$|\Gamma(h_0)| \geq \xi |K_0| \quad \text{und} \quad \left| \Gamma\left(\frac{h_0}{\gamma} \right) \right| < \xi |K_0|$$

gelten. Die Existenz folgt aus der Monotonie von $h \mapsto |\Gamma(h)|$. Nach Lemma 3.12 und Lemma 3.14 folgt daher

$$\inf_{K(R)} \overline{u} \geq c_0 h_0$$

für eine Konstante $0 < c_0 = c_0(n, \lambda, \Lambda) < 1$. Definiere

$$h_1 := \frac{\inf\limits_{K(R)} \overline{u}}{c_0}.$$

Wir wollen per Induktion nachweisen, dass

$$\left| \Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^m} \right) \right| \leq c(n, \lambda, \Lambda) \cdot \gamma^{mq} \cdot R^{n+2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Für $m = 0$ folgt die Behauptung bei geeigneter Wahl der Konstanten $c(n, \lambda, \Lambda)$, da $\Gamma(h_1) \subset K_0$ mit $|K_0| = c(n) \cdot R^{n+2}$.

Beim Induktionsschritt treten nur die Fälle (i) oder (ii) in der obigen Fallunterscheidung auf, da $h_1 \geq h_0$ ist und somit für $m \geq 1$ die Abschätzung

$$\left| \Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^m} \right) \right| \leq \left| \Gamma\left(\frac{h_0}{\gamma^m} \right) \right| \leq \left| \Gamma\left(\frac{h_0}{\gamma} \right) \right| < \xi |K_0|$$

folgt. Tritt Fall (i) auf, so ist der Induktionsschritt offensichtlich

$$\begin{aligned} \left| \Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^{m+1}} \right) \right| &\leq \xi^{1/4} \left| \Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^m} \right) \right| \\ &\leq c(n, \lambda, \Lambda) \cdot \xi^{1/4} \gamma^{mq} R^{n+2} \\ &\leq c(n, \lambda, \Lambda) \cdot \gamma^{(m+1)q} R^{n+2}. \end{aligned}$$

Tritt Fall (ii) auf, so erhalten wir ohne Verwendung der Induktionsannahme direkt

$$\begin{aligned} \left| \Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^{m+1}} \right) \right| &\leq c(n, \lambda, \Lambda) \cdot \left(\frac{\inf\limits_{K(R)} \overline{u}}{h_1} \right)^q \gamma^{(m+1)q} R^{n+2} \\ &= c \cdot c_0^q \cdot \gamma^{(m+1)q} \cdot R^{n+2} \end{aligned}$$

$$\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\gamma^{(m+1)q}\cdot R^{n+2},\quad \text{da } c_0^q\le 1.$$

Somit folgt die Behauptung in jedem Fall. Sei nun $h > h_1$ beliebig. Fixiere $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so dass

$$\frac{h_1}{\gamma^m}\ge h > \frac{h_1}{\gamma^{m-1}}$$

gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}|\Gamma(h)| &\le \left|\Gamma\left(\frac{h_1}{\gamma^{m-1}}\right)\right|\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\gamma^{(m-1)q}\cdot R^{n+2}\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\gamma^{mq}\cdot R^{n+2}\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\left(\frac{h_1}{h}\right)^q\cdot R^{n+2}.\end{aligned}$$

Für beliebiges $p > 0$ gilt

$$\int\limits_{h_1}^{\infty} h^{p-1}\chi_{\{\overline{u}>h\}}dh = \int\limits_{h_1}^{\overline{u}} h^{p-1}dh = \frac{1}{p}h^p\Big|_{h_1}^{\overline{u}} = \frac{1}{p}\left(\overline{u}^p - h_1^p\right).$$

Somit erhalten wir aufgrund der obigen Abschätzung an $|\Gamma(h)|$ für alle $0<p<q$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\int\limits_{\Theta(R)}\left(\overline{u}^p - h_1^p\right) &= \int\limits_{h_1}^{\infty} h^{p-1}|\Gamma(h)|dh\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot R^{n+2}\cdot h_1^q\cdot\int\limits_{h_1}^{\infty} h^{p-1-q}dh\\ &= c(n,\lambda,\Lambda)\cdot R^{n+2}\cdot h_1^q\cdot\frac{1}{q-p}\cdot h_1^{p-q}\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda,p,q)\cdot R^{n+2}\cdot h_1^p.\end{aligned}$$

Es folgt daher

$$\int\limits_{\Theta(R)}\overline{u}^p \le c(n,\lambda,\Lambda,p,q)\cdot R^{n+2}\cdot h_1^p.$$

Nach Definition von h_1 erhalten wir also für fixiertes $p = p(n,\lambda,\Lambda)$

$$\begin{aligned}\left(R^{-(n+2)}\int\limits_{\Theta(R)} u^p\right)^{1/p} &\le \left(R^{-(n+2)}\int\limits_{\Theta(R)}\overline{u}^p\right)^{1/p}\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot h_1\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\inf_{K(R)}\overline{u}\\ &\le c(n,\lambda,\Lambda)\cdot\left(\inf_{K(R)} u + R^{\frac{n}{n+1}}\|f\|_{L^{n+1}(K(5R))}\right).\end{aligned}$$

Genau dies war die behauptete Ungleichung.

In dieser Ungleichung können wir auf der rechten Seite auch

$$k = R^{\frac{n}{n+1}}\cdot\|f\|_{L^{n+1}(K(5R))}$$

mit dem ursprünglichen R (und damit vom kleinen Quader unabhängigen k) schreiben. Auf der linken Seite dürfen wir ebenfalls dieses k einführen, also $\overline{u} = u + k$

statt u schreiben, denn es gilt

$$\left(\fint_{\Theta(R)} \overline{u}^p\right)^{1/p} \leq c(p)\cdot\left(\fint_{\Theta(R)} u^p + \fint_{\Theta(R)} k^p\right)^{1/k}$$
$$\leq c(p)\cdot\left\{\left(\fint_{\Theta(R)} u^p\right)^{1/p} + \left(\fint_{\Theta(R)} k^p\right)^{1/p}\right\}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite können wir mit der hergeleiteten Ungleichung abschätzen; das zweite Integral hat den Wert k, wir können es auf der rechten Seite absorbieren.

Anfangs hatten wir jedoch angenommen, dass $R \leq R_0\left(n,\lambda,\Lambda,\|b\|_{L^\infty}\right)$ klein genug ist, so dass die Lemmata 3.12 und 3.14 anwendbar sind. Für alle Werte von R folgt die Behauptung nun aber durch Induktion. Der bisherige Beweis ist dabei der Induktionsanfang. Für den (deutlich einfacheren) Induktionsschritt benutzen wir ein „Quaderkettenargument“. Nehme also an, dass

$$\left(\left(\frac{R}{2}\right)^{-(n+2)} \int_{K\left(\left(0,-4\left(\frac{R}{2}\right)^2\right),\frac{R}{2}\right)} \overline{u}^p\right)^{1/p} \leq c_1\cdot \inf_{K\left((0,0),\frac{R}{2}\right)} \overline{u}$$

bereits gezeigt sei. Aufgrund der obigen Rechnungen genügt der Nachweis, dass dann auch

$$\left(R^{-(n+2)} \int_{K((0,-4R^2),R)} \overline{u}^p\right)^{1/p} \leq c(c_1,n,p)\cdot \inf_{K((0,0),R)} \overline{u}$$

gilt, wobei sich die neue Konstante um einen von n und p abhängigen Faktor von der alten unterscheiden darf.

Wir unterteilen nun den großen Quader $K(R) = K((0,0),R)$ wie in der Calderón-Zygmund-Zerlegung in $2^2\cdot 2^n$ kleinere Quader. Sei $K\left(X,\frac{R}{2}\right)$ ein solcher. Wähle $\Delta_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ so, dass

$$\left|K\left(X,\frac{R}{2}\right)\cap K\left(X+\Delta_i,\frac{R}{2}\right)\right| \geq \delta \left|K\left(X,\frac{R}{2}\right)\right|$$

gilt, der verschobene Quader also immer noch einen festen Volumenanteil des ersten Quaders überdeckt. Beachte schließlich noch, dass

$$|K(X,R)| = c(n)\cdot R^{n+2}$$

gilt. Wir erhalten nun die Abschätzung

$$\inf_{K\left(X,\frac{R}{2}\right)} \overline{u} \geq \frac{1}{c_2(c_1,n,p)}\left(\frac{1}{\left|K\left(X,\frac{R}{2}\right)\right|}\int_{K\left(X-(0,R^2),\frac{R}{2}\right)} \overline{u}^p\right)^{1/p}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{c_2}\left(\frac{\left|K\left(X-(0,R^2),\frac{R}{2}\right)\cap K\left(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2}\right)\right|}{\left|K\left(X,\frac{R}{2}\right)\right|}\right)^{1/p}\cdot\\
&\quad\cdot\left(\frac{1}{\left|K\left(0,\frac{R}{2}\right)\cap K\left(\Delta_1,\frac{R}{2}\right)\right|}\int\limits_{K\left(X-(0,R^2),\frac{R}{2}\right)\cap K\left(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}^p\right)^{1/p}\\
&\geq \frac{1}{c_2}\delta^{1/p}\cdot\inf_{K\left(X-(0,R^2),\frac{R}{2}\right)\cap K\left(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}\\
&\geq \frac{1}{c_2}\delta^{1/p}\cdot\inf_{K\left(X-(0,R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}\\
&\geq \frac{1}{c_2^2}\delta^{1/p}\left(\frac{1}{\left|K\left(\frac{R}{2}\right)\right|}\int\limits_{K\left(X-(0,2R^2)+\Delta_1,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}^p\right)^{1/p}\\
&\geq \frac{1}{c_2^3}\delta^{2/p}\left(\frac{1}{\left|K\left(\frac{R}{2}\right)\right|}\int\limits_{K\left(X-(0,3R^2)+\Delta_1+\Delta_2,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}^p\right)^{1/p}\\
&\geq \frac{1}{c_2^4}\delta^{3/p}\left(\frac{1}{\left|K\left(\frac{R}{2}\right)\right|}\int\limits_{K\left(X-(0,4R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}^p\right)^{1/p}\\
&\geq \frac{1}{c_2^5}\delta^{4/p}\left(\frac{1}{\left|K\left(\frac{R}{2}\right)\right|}\int\limits_{K\left(X-(0,5R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Jedes Δ_i erlaubt eine Verschiebung um fast R in horizontaler oder x-Richtung und um fast R^2 in vertikaler oder t-Richtung. Man überlegt sich leicht, dass sich dabei mit $K\left(X-(0,3R^2)+\Delta_1+\Delta_2,\frac{R}{2}\right)$, $K\left(X-(0,4R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,\frac{R}{2}\right)$ oder $K\left(X-(0,5R^2)+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4,\frac{R}{2}\right)$ ein beliebiger Quader aus dem ersten Schritt der Calderón-Zygmund-Zerlegung von $K((0,-4R^2),R)$ von einem beliebigen Quader $K\left(X,\frac{R}{2}\right)$ in der entsprechenden Zerlegung von $K((0,0),R)$ aus erreichen lässt. Wählt man nun $K\left(X,\frac{R}{2}\right)$, so dass

$$\inf_{K((0,0),R)}\overline{u}=\inf_{K\left(X,\frac{R}{2}\right)}\overline{u}$$

gilt und addiert die oben gewonnenen Abschätzungen (oder betrachtet das maximimale auftretende L^p-Integral), so folgt die behauptete Ungleichung für beliebige Radien $R>0$.

Aufgrund des Induktionsteiles hängt C in der Behauptung auch von R_0 ab.

Es folgt die im Theorem angegebene Behauptung. □

3.8. **Hölderabschätzungen.**

Wir wollen Oszillationsabschätzungen und damit auch Hölderabschätzungen für u beweisen. Dazu benötigen wir zunächst das folgende Lemma, vergleiche [7, Lemma 4.6]. Solch ein Resultat findet man beispielsweise auch in [4, Lemma 8.23]. Dies zeigt, dass sich die Voraussetzungen an σ variieren lassen.

Lemma 3.23. *Seien ω und σ auf dem Intervall $(0,R_0]$ wachsende nichtnegative Funktionen. Gibt es positive Konstanten α, δ und τ mit $\tau<1$ und $\delta<\alpha$, so dass*
$$r^{-\delta}\sigma(r)\le s^{-\delta}\sigma(s) \text{ für alle } 0<s\le r\le R_0$$
und
$$\omega(\tau r)\le \tau^\alpha\omega(r)+\sigma(r) \text{ für } 0<r\le R_0$$
gelten, so folgt
$$\omega(r)\le c(\alpha,\delta,\tau)\cdot\left[\left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha\omega(R_0)+\sigma(r)\right].$$

Beweis. Für $r\ge\tau R_0$ ist die Behauptung offensichtlich. Es genügt, $c=\tau^{-\alpha}$ zu wählen.

Sonst wählen wir $k\in\mathbb{N}$, so dass
$$\tau^{k+1}R_0\le r<\tau^k R_0$$
gilt. Für $j=0,\ldots,k-1$ gilt $\tau^jR_0>\tau^kR_0$, wir erhalten also
$$\begin{aligned}\left(\tau^jR_0\right)^{-\delta}\sigma\left(\tau^jR_0\right)&\le\left(\tau^kR_0\right)^{-\delta}\sigma\left(\tau^kR_0\right),\\ \sigma\left(\tau^jR_0\right)&\le\tau^{(j-k)\delta}\sigma\left(\tau^kR_0\right)\end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned}\omega(\tau r)&\le\tau^\alpha\omega(r)+\sigma(r),\\ \omega\left(\tau^2r\right)&\le\tau^\alpha\omega(\tau r)+\sigma(\tau r)\\ &\le\tau^\alpha\left(\tau^\alpha\omega(r)+\sigma(r)\right)+\sigma(\tau r)\\ &=\tau^{2\alpha}\omega(r)+\tau^\alpha\sigma(r)+\sigma(\tau r)\end{aligned}$$
und per Induktion
$$\begin{aligned}\omega\left(\tau^kR_0\right)&\le\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\sum_{j=0}^{k-1}\tau^{\alpha(k-1-j)}\sigma\left(\tau^jR_0\right)\\ &\le\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\sum_{j=0}^{k-1}\tau^{\alpha(k-1-j)+\delta(j-k)}\sigma\left(\tau^kR_0\right)\\ &=\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\sum_{j=0}^{k-1}\tau^{(k-1-j)(\alpha-\delta)}\tau^{-\delta}\sigma\left(\tau^kR_0\right)\\ &=\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\sum_{i=0}^{k-1}\tau^{(\alpha-\delta)i}\tau^{-\delta}\sigma\left(\tau^kR_0\right)\\ &\le\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\sum_{i=0}^{\infty}\tau^{(\alpha-\delta)i}\tau^{-\delta}\sigma\left(\tau^kR_0\right)\\ &=\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\frac{1}{1-\tau^{\alpha-\delta}}\frac{1}{\tau^\delta}\sigma\left(\tau^kR_0\right),\text{ da }\tau^{\alpha-\delta}<1\\ &=\tau^{k\alpha}\omega(R_0)+\frac{\sigma\left(\tau^kR_0\right)}{\tau^\delta-\tau^\alpha}.\end{aligned}$$
Da $\tau^kR_0\le\frac{r}{\tau}$ ist, gilt
$$\sigma\left(\tau^kR_0\right)\le\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right).$$
Außerdem ist $\tau<1$, also folgt
$$\left(\frac{r}{\tau}\right)^{-\delta}\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right)\le r^{-\delta}\sigma(r),$$

$$\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right) \le \tau^{-\delta}\sigma(r).$$

Benutze nun $r < \tau^k R_0$ und nochmals $\tau^k \le \frac{r}{R_0}\frac{1}{\tau}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\omega(r) &\le \omega\left(\tau^k R_0\right)\\
&\le \tau^{k\alpha}\omega(R_0) + \frac{1}{\tau^\delta - \tau^\alpha}\sigma\left(\frac{r}{\tau}\right)\\
&\le \left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\tau}\right)^\alpha \omega(R_0) + \frac{\tau^{-\delta}}{\tau^\delta - \tau^\alpha}\sigma(r)\\
&\le \max\left\{\left(\frac{1}{\tau}\right)^\alpha, \frac{\tau^{-\delta}}{\tau^\delta - \tau^\alpha}\right\}\left[\left(\frac{r}{R_0}\right)^\alpha \omega(R_0) + \sigma(r)\right]
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Um Lemma 3.23 anzuwenden, sind die folgenden beiden Kriterien nützlich.

Bemerkung 3.24.

(i) Seien ω und σ wachsend. Gibt es K und β mit $\beta > \delta$, so dass
$$\omega(\tau r) \le K\tau^\beta\omega(r) + \sigma(r)$$
für kleine $\tau > 0$ gilt, so folgt
$$\omega(\tau r) \le \tau^\alpha\omega(r) + \sigma(r)$$
für $\alpha \in (\delta, \beta)$ und τ so klein, dass $K\tau^\beta \le \tau^\alpha$ und die obige Ungleichung gelten.

(ii) Gibt es τ, $\varepsilon \in (0, 1)$, so dass
$$\omega(\tau r) \le \varepsilon\omega(r) + \sigma(r)$$
gilt, so folgt
$$\omega(\tau r) \le \tau^\alpha\omega(r) + \sigma(r)$$
mit $\alpha = \log_\tau \varepsilon = \frac{\log\varepsilon}{\log\tau}$.

Aus der schwachen Harnackungleichung, Theorem 3.21, erhalten wir eine Oszillationsabschätzung. Vergleiche dies mit [7, Korollar 7.26].

Theorem 3.25. *Sei u in $K(5R)$ eine Lösung von*
$$L_0 u = -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i = f - du.$$
Dann gilt für $0 < r \le R$
$$\begin{aligned}
\operatorname*{osc}_{K(r)} u \le{}& c(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})\cdot\\
&\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{K(R)} u + \|f - du\|_{L^{n+1}(K(5R))}\cdot R^{\frac{n}{n+1}}\right)
\end{aligned}$$
mit $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})$, $0 < \alpha < 1$.

Bemerkung 3.26.

(i) Hier ist keine Vorzeichenbedingung an u nötig.

(ii) Ist $\|u\|_{C^0}$ gleichmäßig beschränkt in $K(6R)$, so ist also
$$r^{-\alpha}\cdot \operatorname*{osc}_{K(X,r)} u$$
für alle Quader $K(X, r)$ mit $K(X, 5R) \subset K(6R)$, also $X \in K(R)$, gleichmäßig beschränkt. Es folgt
$$\sup_{x\ne y\in K(R)} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha_{\text{parab}}} \le c\left(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}, R, \operatorname*{osc}_{K(6R)} u, \|f - du\|_{L^{n+1}(K(6R))}\right),$$

indem wir einen der beiden Punkte, ohne Einschränkung x, als Referenzpunkt nehmen und $r > 0$ minimal wählen, so dass $y \in K(x,r)$ gilt, also $r = |x - y|_{\text{parab}}$. Dabei bezeichnet

$$|x-y|_{\text{parab}} := \max\left\{\max_i \left|x^i - y^i\right|, \left|x^t - y^t\right|\right\}$$

den parabolischen Abstand von $x = \left(\left(x^i\right), x^t\right)$ und $y = \left(\left(y^i\right), y^t\right)$. u ist also in $K(R)$ hölderstetig.

Wegen

$$\frac{1}{|x-y|_{\max}^{1/2}} \le \frac{1}{|x-y|_{\text{parab}}}$$

für $|x-y|_{\text{parab}} \le 1$ folgt daraus die Hölderstetigkeit von u.

(iii) Diese Aussage über die Hölderstetigkeit von Lösungen ist ein häufig benutztes Resultat (Abschätzungen von Krylov und Safonov). Man verwendet es beispielsweise, wenn man das Yamabeproblem mit Hilfe einer Flussgleichung lösen will. In zwei Dimensionen studiert man dazu den konformen Riccifluss:

$$g_{ij} = e^u \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \dot{u} = e^{-u}\Delta u.$$

(iv) Bei voll nichtlinearen Gleichungen, wie etwa

$$\dot{u} = \log\det D^2 u,$$

differenziert man die Gleichung zweimal und benutzt die Konkavität von $D^2u \mapsto \log\det D^2u$. Ähnliche Schritte wie hier erlauben es (mit Zusatzaufwand), aus der schwachen Harnackungleichung Hölderabschätzungen für das Symbol $\left(u^{ij}\right) = \left(D^2u\right)^{-1}$ herzuleiten, wenn man insbesondere $\|u\|_{C^2} + \left\|\left(D^2u\right)^{-1}\right\|_{C^0}$ beschränkt hat. Aufgrund dieser Hölderabschätzungen für D^2u bzw. $\left(D^2u\right)^{-1}$ kann man nun iterativ Schauderabschätzungen auf die durchdifferenzierte Gleichung anwenden und bekommt a priori Abschätzungen in C^k, $k \in \mathbb{N}$.

Beweis von Theorem 3.25. Wir dürfen annehmen, dass $r < \frac{R}{5}$ ist, sonst folgt das Resultat, wenn wir c groß genug wählen. Definiere

$$\begin{aligned} M_1 &= \sup_{K(r)} u,\\ M_5 &= \sup_{K(5r)} u,\\ m_1 &= \inf_{K(r)} u \end{aligned}$$

und

$$m_5 = \inf_{K(5r)} u.$$

Wir erhalten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} L_0(M_5 - u) &= -f + du,\\ L_0(u - m_5) &= f - du \end{aligned}$$

in $K(5r)$. Nach Definition gilt dort $M_5 - u \geq 0$ und $u - m_5 \geq 0$. Die schwache Harnackungleichung, Theorem 3.21, liefert also für $0 < p = p(n, \lambda, \Lambda)$

$$\begin{aligned}\left(r^{-n-2}\int\limits_{\Theta(r)}(M_5-u)^p\right)^{1/p} &\leq c(n,\lambda,\Lambda,\|b\|_{L^\infty})\cdot\\ &\qquad\cdot\left(\inf_{K(r)}(M_5-u)+r^{\frac{n}{n+1}}\|f-du\|_{L^{n+1}(K(5r))}\right)\\ &= c(\ldots)\cdot\left(M_5-M_1+r^{\frac{n}{n+1}}\|f-du\|_{L^{n+1}(K(5r))}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(r^{-n-2}\int\limits_{\Theta(r)}(u-m_5)^p\right)^{1/p} &\leq c(\ldots)\cdot\left(\inf_{K(r)}(u-m_5)+r^{\frac{n}{n+1}}\|f-du\|_{L^{n+1}(\ldots)}\right)\\ &= c(\ldots)\cdot\left(m_1-m_5+r^{\frac{n}{n+1}}\|f-du\|_{L^{n+1}(K(5r))}\right).\end{aligned}$$

Wir addieren diese beiden Ungleichungen und erhalten

$$\begin{aligned}M_5-m_5 \leq\, & c_1(n,\lambda,\Lambda,\|b\|_{L^\infty})\cdot\\ &\cdot\left(M_5-m_5-(M_1-m_1)+r^{\frac{n}{n+1}}\|f-du\|_{L^{n+1}(K(5r))}\right).\end{aligned}$$

Für die linke Seite haben wir hier $|\Theta(r)| = r^{n+2}$ und

$$\begin{aligned}M_5-m_5 &= \left(\frac{1}{|\Theta(r)|}\int\limits_{\Theta(r)}(M_5-m_5)^p\right)^{1/p}\\ &\leq c(p(n,\lambda,\Lambda))\cdot\\ &\quad\cdot\left\{\left(\frac{1}{|\Theta(r)|}\int\limits_{\Theta(r)}(M_5-u)^p\right)^{1/p}+\left(\frac{1}{|\Theta(r)|}\int\limits_{\Theta(r)}(u-m_5)^p\right)^{1/p}\right\}\end{aligned}$$

benutzt. Ist $p \geq 1$, so folgt dies direkt aus der Dreiecksungleichung mit $c(p) = 1$. Ist $0 < p < 1$, so dürfen wir zunächst ohne Einschränkung $m_5 = 0$ annehmen. Wir betrachten dann nämlich $M_5 - m_5$, $u - m_5$ und $m_5 - m_5 = 0$ statt M_5, u und m_5. Durch Skalieren können wir weiterhin $M_5 = 1$ und $|\Theta(r)| = 1$ annehmen. Für $0 \leq u \leq 1$ wollen wir also auf einem Gebiet vom Maß eins nachweisen, dass

$$1 \leq c(p)\left\{\left(\int(1-u)^p\right)^{1/p}+\left(\int(u)^p\right)^{1/p}\right\}$$

gilt. Wegen $(1-u)^p \geq 1-u$ und $u^p \geq u$ genügt sogar der Nachweis von

$$1 \leq c(p)\left\{\left(\int 1-u\right)^{1/p}+\left(\int u\right)^{1/p}\right\}.$$

Nun gilt aber

$$1 = \int 1 = \left(\int 1-u\right)+\left(\int u\right).$$

Also ist $\int 1-u \geq \frac{1}{2}$ oder $\int u \geq \frac{1}{2}$ und die Behauptung folgt mit $c(p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/p} = 2^{1/p}$.

Wir definieren nun für $\rho > 0$

$$\omega(\rho) = \operatorname*{osc}_{K(\rho)} u$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \omega(5r) &\le c_1 \left(\omega(5r) - \omega(r) + r^{\frac{n}{n+1}} \|f - du\|_{L^{n+1}(K(5r))}\right), \\ \omega(r) &\le \left(1 - \frac{1}{c_1}\right) \omega(5r) + r^{\frac{n}{n+1}} \|f - du\|_{L^{n+1}(K(5r))}, \end{aligned}$$

wobei wir ohne Einschränkung $c_1 > 1$ annehmen.

Fixiere nun $0 < \alpha = \alpha(c_1(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})) \ll 1$, so dass $1 - \frac{1}{c_1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\alpha}$ und $\frac{n}{n+1} > \alpha$ gelten und erhalte für $0 < r \le R$

$$\omega\left(\tfrac{1}{5} r\right) \le \left(\tfrac{1}{5}\right)^{2\alpha} \omega(r) + r^\alpha \cdot R^{\frac{n}{n+1} - \alpha} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(K(5R))}.$$

Lemma 3.23 mit $\delta = \alpha$ liefert für alle $0 < r \le R$

$$\omega(r) \le c(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty}) \cdot \left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} \omega(R) + \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha R^{\frac{n}{n+1}} \|f - du\|_{L^{n+1}(K(5R))}\right].$$

Die Behauptung folgt. □

3.9. **Harnackungleichung.** Wir erhalten direkt die folgende parabolische Form der Harnackungleichung, vergleiche [7, Korollar 7.27].

Theorem 3.27. *Sei $u \ge 0$ in $K(5R)$ eine Lösung von*

$$L_0 u = -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i = 0.$$

Dann gilt

$$\sup_{K\left((0, -4R^2), \frac{R}{2}\right)} u \le c(n, \lambda, \Lambda, R, \|b\|_{L^\infty}) \cdot \inf_{K(R)} u.$$

Beweis. Kombiniere Theorem 3.8 und Theorem 3.21 mit dem p aus Theorem 3.21. □

3.10. **Randabschätzungen.** Wir leiten noch entsprechende Resultate für Dirichletrandwerte her. Dabei folgen wir der Bachelorarbeit von Anja Grabow [5], in der die entsprechenden Teile in [7] ausgearbeitet werden.

Definition 3.28. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen. Dann definieren wir $\Omega[R] := \Omega \cap K(R)$ sowie $\mathcal{P}\Omega[R] := (\mathcal{P}\Omega) \cap K(R)$. Ist der Referenzpunkt nicht der Ursprung, so schreiben wir stattdessen $\Omega[(x_0, t_0), R]$ bzw. $\mathcal{P}\Omega[(x_0, t_0), R]$.

Die entsprechende Definition für Zylinder ist naheliegend.

Zunächst zeigen wir eine Randversion von Theorem 3.8.

Das folgende Theorem gilt auch in einer Zylindervariante.

Theorem 3.29. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen. Seien $R > 0$, $p > 0$ und $0 < \rho < 1$. Gelte $Lu \ge f$ in $\Omega[R]$ und $u \le 0$ auf $\mathcal{P}\Omega[R]$. Dann gibt es*

$$c = c(n, p, \rho, \lambda, \Lambda, \sup(R|b| + R^2 d^+)),$$

so dass

$$\sup_{\Omega[\rho R]} u \le c \cdot \left[\left(R^{-(n+2)} \int_{\Omega[R]} (u^+)^p\right)^{1/p} + R^{\frac{n}{n+1}} \|f\|_{L^{n+1}(\Omega[R])}\right]$$

gilt.

Beweis. Setze u^+ außerhalb von $\Omega \cap Q(R)$ durch 0 fort. Diese Fortsetzung ist in $Q(R)$ stetig.

In der Zylindervariante folgen wir dem Beweis von Theorem 3.8 und beachten, dass in der dortigen Notation $v \le 0$ auf $\mathcal{P}\Omega[R]$ gilt. Wir betrachten nun $E^+(v)$ bezüglich der Menge $\Omega[R]$ und erhalten die Zylindervariante.

Wie bei Theorem 3.8 folgt daraus auch die Quadervariante. □

Für eine Randversion der Schwachen Harnackungleichung, Theorem 3.21, benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

Für eine gegebene Funktion $u \in C^2$ möchten wir nun $u_m := \inf\{u, m\}$ für ein $m \in \mathbb{R}$ betrachten. Solch eine Funktion ist i. a. selbst als Sobolevfunktion nicht mehr zweimal differenzierbar. Wir können sie jedoch trotzdem so durch C^2-Funktionen approximieren, dass die Differentialungleichung $Lu \le f$ fast erhalten bleibt. Im Vergleich mit Viskositätslösungen ist dies nicht überraschend.

Lemma 3.30. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Erfülle u in Ω die parabolische Differentialungleichung $L_0 u \equiv -\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^i u_i \le f$. Sei $m \in \mathbb{R}$. Definiere $u_m := \inf\{u, m\}$. Dann gibt es Funktionen $u_m^\varepsilon \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$, mit $\|u_m - u_m^\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0$ und $L_0 u_m^\varepsilon \le |f|$.*

Beweis. Für $0 < \varepsilon < 1$ definieren wir $\rho_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\rho_\varepsilon(z) := \begin{cases} z & \text{für } z \le m - \varepsilon, \\ \left(m - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}(z-m)^3 + \frac{1}{2\varepsilon^3}(z-m)^4 & \text{für } m - \varepsilon \le z \le m, \\ m - \frac{\varepsilon}{2} & \text{für } m \le z. \end{cases}$$

Für $m - \varepsilon \le z \le m$ gilt $-1 < -\varepsilon \le z - m \le 0$ und wir erhalten dort

$$\rho_\varepsilon'(z) = \frac{3}{\varepsilon^2}(z-m)^2 + \frac{2}{\varepsilon^3}(z-m)^3 = \frac{1}{\varepsilon^2}(z-m)^2\left(3 + 2\frac{z-m}{\varepsilon}\right) \ge 0$$

sowie

$$\rho_\varepsilon''(z) = \frac{6}{\varepsilon^2}(z-m) + \frac{6}{\varepsilon^3}(z-m)^2 = \frac{6}{\varepsilon^2}(z-m)\left(1 + \frac{z-m}{\varepsilon}\right) \le 0.$$

Am Rand erhalten wir:

	$z = m - \varepsilon$	$z = m$
$\rho_\varepsilon'(z)$	1	0
$\rho_\varepsilon''(z)$	0	0

Somit ist ρ_ε zweimal stetig differenzierbar. Definiere $u_m^\varepsilon(x,t) := \rho_\varepsilon(u(x,t))$. Somit ist $u_m^\varepsilon \in C^2$ und die Konvergenz von $u_m - u_m^\varepsilon$ ist leicht einzusehen. Aus $\rho'' \le 0$ folgt $0 \le \rho' \le 1$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_m^\varepsilon) &= \rho_\varepsilon'(u)\dot{u}, \\ (u_m^\varepsilon)_i &= \rho_\varepsilon'(u)u_i, \\ (u_m^\varepsilon)_{ij} &= \rho_\varepsilon'(u)u_{ij} + \rho_\varepsilon''(u)u_iu_j, \\ L_0 u_m^\varepsilon &= \rho_\varepsilon'(u)\left(-\dot{u} + a^{ij}u_{ij} + b^iu_i\right) + \underbrace{\rho''(u)}_{\le 0}\underbrace{a^{ij}u_iu_j}_{\ge 0} \\ &\le \underbrace{\rho_\varepsilon'}_{|\cdot| \le 1} \cdot f \\ &\le |f|. \end{aligned}$$

□

Für die Randabschätzungen benötigen wir zwei geometrische Bedingungen an Ω.

Definition 3.31. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Sei $(x_0, t_0) \in \mathcal{P}\Omega$.

(i) Dann erfüllt Ω in (x_0, t_0) die Bedingung (A), falls es $R > 0$ und $1 > A > 0$ mit
$$A \cdot |K(r)| \geq \left|\Omega\left[\left(x_0, t_0 - 4r^2\right), r\right]\right|$$
für alle $0 < r \leq R$ gibt. Können R und A unabhängig von $(x_0, t_0) \in \Gamma \subset \mathcal{P}\Omega$ gewählt werden, so sagen wir, dass Ω in Γ die Bedingung (A) erfüllt.

(ii) Dann heißt Ω in (x_0, t_0) produktartig bezüglich der Kantenlänge R, falls
$$\partial\Omega \cap K((x_0, t_0), R) = \mathcal{P}\Omega \cap K((x_0, t_0), R)$$
gilt. Ω heißt in (x_0, t_0) produktartig, falls es ein solches $R > 0$ gibt.

Bemerkung 3.32.

(i) Die Bedingung (A) taucht in [7, Kap. VI] auf, die Bedingung der Produktartigkeit benötige ich zusätzlich für den Beweis. „Produktartigkeit" ist eine ad hoc Bezeichnung.

(ii) Sind $O \subset \mathbb{R}^n$ und $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ offen, so ist $\Omega = O \times I$ produktartig. Ist ∂O Lipschitz, so erfüllt Ω in ganz $\mathcal{P}\Omega$ für beliebige $\varepsilon > 0$ die Bedingung (A).

Als Randvariante von Theorem 3.21 erhalten wir

Theorem 3.33. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Sei Ω in 0 produktartig bezüglich der Kantenlänge $5R$. Gelte $u \geq 0$ in $\Omega[5R]$ und erfülle u die Differentialungleichung*
$$L_0 u \equiv -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i \leq f \quad \text{in } \Omega.$$
Setze $m := \inf\limits_{\mathcal{P}\Omega[5R]} u$ und definiere
$$u_m := \begin{cases} \inf\{u,\, m\} & \text{in } \Omega[5R], \\ m & \text{in } K[5R] \setminus \Omega[5R]. \end{cases}$$
Dann gibt es positive Konstanten $p = p(n, \lambda, \Lambda)$ und $C = C(n, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\infty})$, so dass
$$\left(R^{-(n+2)} \int\limits_{\Theta(R)} u_m^p\right)^{1/p} \leq C \cdot \left(\inf_{K(R)} u_m + R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f\|_{L^{n+1}(\Omega[5R])}\right)$$
gilt.

Beweis. Setze f außerhalb von Ω durch Null fort. Da Ω in 0 produktartig ist, ist u_m in $K[5R]$ stetig. Nach Lemma 3.30 erfüllt u_m^ε in $K[5R]$ die Ungleichung $Lu_m^\varepsilon \leq |f|$. (Beachte für die $C^{2;1}$-Regularität am Rand, dass in einer Umgebung des Randes $u_m^\varepsilon = m - \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.) Somit liefert Theorem 3.21 die Behauptung mit u_m^ε statt u_m. Da die Funktionen u_m, u_m^ε, $0 < \varepsilon < 1$, stetig und beschränkt sind und $u_m^\varepsilon \rightrightarrows u_m$ für $\varepsilon \searrow 0$ gilt, folgt die Behauptung für $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

Theorem 3.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Sei $0 \in \mathcal{P}\Omega$. Sei $R > 0$. Erfülle Ω im Ursprung die Bedingung (A) und sei produktartig, jeweils bis zum Radius $5R$. Sei u in $\Omega[5R]$ eine Lösung von*
$$L_0 u \equiv -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i = f - du.$$
Dann gibt es $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, A, \|b\|_{L^\infty})$, A aus der Bedingung (A), so dass das Folgende richtig ist: Sei die Funktion $\sigma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wachsend, aber $\tau \mapsto \tau^{-\delta}\sigma(\tau)$ für ein $0 < \delta < \alpha$ fallend und gelte
$$\operatorname*{osc}_{\mathcal{P}\Omega[r]} u \leq \sigma(r) \quad \text{für} \quad 0 < r \leq 5R.$$

Dann gibt es $C = C(n, \lambda, \Lambda, A, \|b\|_{L^\infty})$*, so dass für alle* $0 < r \leq R$

$$\operatorname*{osc}_{\Omega[r]} u \leq C \cdot \left[\left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left\{ \operatorname*{osc}_{\Omega[R]} u + R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5R])} \right\} + \sigma(r) \right]$$

gilt.

Beweis. Gelte ohne Einschränkung $0 < r \leq \frac{R}{5}$. Wir definieren

$$M_5 := \sup_{\Omega[5r]} u, \qquad M_1 := \sup_{\Omega[r]} u,$$
$$m_5 := \inf_{\Omega[5r]} u, \qquad m_1 := \inf_{\Omega[r]} u,$$
$$M := \sup_{\mathcal{P}\Omega[5r]} u, \qquad m := \inf_{\mathcal{P}\Omega[5r]} u.$$

In $\Omega[5r]$ gelten

$$M_5 - u \geq 0 \quad \text{sowie} \quad u - m_5 \geq 0.$$

Wir setzen $\tilde{m} := \inf_{\mathcal{P}\Omega[5r]} M_5 - u = M_5 - M$ und erhalten mit Hilfe der Schwachen Harnackungleichung, Theorem 3.33, für ein $p > 0$ wie dort und mit der Notation $(M_5 - u)_{\tilde{m}}$ aus Lemma 3.30

$$\begin{aligned}
&\left(r^{-(n+2)} \int_{\Theta(r)} (M_5 - u)_{\tilde{m}}^p \right)^{1/p} \\
&\leq C \cdot \left(\inf_{\Omega[r]} (M_5 - u)_{\tilde{m}} + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])} \right) \\
&\leq C \cdot \left(\inf_{K(r)} (M_5 - u) + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])} \right) \\
&\leq C \cdot \left(M_5 - M_1 + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])} \right).
\end{aligned}$$

In $K(5R) \setminus \Omega$ gilt $(M_5 - u)_{\tilde{m}} = M_5 - M$. Weiterhin benutzen wir, dass aus der Bedingung (A)

$$|\Theta(r) \setminus \Omega| = |K(r)| - |\Theta(r) \cap \Omega| \geq (1 - A)|K(r)|$$

folgt und erhalten

$$\begin{aligned}
\left(r^{-(n+2)} \int_{\Theta(r)} (M_5 - u)_{\tilde{m}}^p \right)^{1/p} &\geq \left(r^{-(n+2)} \int_{\Theta(r)\setminus\Omega} (M_5 - M)^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{|\Theta(r) \setminus \Omega|}{|K(r)|} \right)^{1/p} \cdot (M_5 - M) \\
&\geq (1 - A)^{1/p} \cdot (M_5 - M).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$(1 - A)^{1/p} \cdot (M_5 - M) \leq C \cdot \left(M_5 - M_1 + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])} \right).$$

Nun betrachten wir $u - m_5$ und $\overline{m} := \inf_{\mathcal{P}\Omega[5r]} u - m_5 = m - m_5$ und erhalten durch vollständig analoges Vorgehen die Ungleichung

$$(1 - A)^{1/p} \cdot (m - m_5) \leq C \cdot \left(m_1 - m_5 + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])} \right).$$

Addieren wir diese beiden Ungleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}
(1 - A)^{1/p} \cdot (M_5 - M + m - m_5) \leq\, & C \cdot (M_5 - M_1 + m_1 - m_5) \\
&+ C \cdot r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])}.
\end{aligned}$$

Wir ordnen um und erhalten

$$\begin{aligned} M_1 - m_1 \le M_5 - m_5 + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5r])} \\ - \frac{1}{C}(1-A)^{1/p} \cdot (M_5 - m_5) + \underbrace{\frac{1}{C}(1-A)^{1/p}}_{\le 1} \cdot (M - m) \\ \le \underbrace{\left(1 - \frac{1}{C}(1-A)^{1/p}\right)}_{<1!} \cdot (M_5 - m_5) \\ + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5R])} + (M - m). \end{aligned}$$

Nun wählen wir $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, A, \|b\|_{L^\infty})$ mit $0 < \alpha < \frac{n}{n+1} < 1$ wie angegeben mit

$$1 - \frac{1}{C}(1-A)^{1/p} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\alpha}.$$

Definiere $\omega(r) := \operatorname*{osc}_{\Omega[r]} u$. Dann erhalten wir für alle r mit $0 < r \le \frac{R}{5}$ die Abschätzung

$$\omega(r) \le \left(\tfrac{1}{5}\right)^{2\alpha} \omega(5r) + r^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5R])} + \sigma(5r)$$

und daraus für $0 < r \le R$ die Ungleichung

$$\omega\left(\tfrac{1}{5}r\right) \le \left(\tfrac{1}{5}\right)^{2\alpha} \omega(r) + r^\alpha \cdot R^{\frac{n}{n+1} - \alpha} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5R])} + \sigma(r).$$

Da σ wegen $0 < \delta < \alpha$ die Wachstumsvoraussetzung von Lemma 3.23 auch für α statt δ erfüllt, erhalten wir aus diesem Lemma mit $(\alpha, 2\alpha)$ für (δ, α) dort

$$\omega(r) \le C \cdot \left[\left(\tfrac{r}{R}\right)^\alpha \left\{\omega(R) + R^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|f - du\|_{L^{n+1}(\Omega[5R])}\right\} + \sigma(r)\right]. \qquad \square$$

Da im Folgenden wieder Probleme auftreten, wenn wir Gebiete betrachten, die nicht in Produktgestalt sind, beschränken wir uns nun auf diesen Fall.

Theorem 3.35. *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand. Sei $T > 0$ und $\Omega := O \times (0, T)$. Sei u eine Lösung von*

$$\begin{cases} L_0 u \equiv -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \mathcal{P}\Omega. \end{cases}$$

Gelte $\operatorname*{osc}_{\mathcal{P}\Omega[(x_0,t_0),r]} \varphi \le c_\varphi \cdot r^\zeta$ für c_φ, $\zeta > 0$ und beliebige $(x_0, t_0) \in \mathcal{P}\Omega$. Dann gibt es $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, O, T, A, \|b\|_{L^\infty}, \zeta)$ mit $0 < \alpha < 1$, $\alpha < \zeta$ und

$$C = C\left(n, \lambda, \Lambda, O, T, \|b\|_{L^\infty}, \operatorname*{osc}_\Omega u, \|f\|_{L^{n+1}(\Omega)}, c_\varphi, \zeta\right),$$

so dass für alle (x_1, t_1), $(x_2, t_2) \in O \times (T/2, T)$

$$\frac{|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)|}{(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|)^{\alpha/2}} \le C$$

gilt.

Beweis. Wir folgen [4, Theorem 8.29].

Innere Abschätzung: In unserer Situation folgt aus Theorem 3.25 im Fall $K(R) \subset \Omega$ (Mittelpunkt in $O \times (T/2, T)$ in der Notation unterdrückt) für $0 < r \le R$

$$\operatorname*{osc}_{K(r)} u \le C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{K(R)} u + c \cdot R^\alpha\right),$$

da ohne Einschränkung $0 < \alpha < \frac{n}{n+1}$ und $R \le c(\Omega)$ gelten.

Randabschätzung: Aus Theorem 3.34 erhalten wir

$$\operatorname*{osc}_{\Omega[r]} u \le C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{\Omega[R]} u + c \cdot R^\alpha\right),$$

wobei hier der in der Notation unterdrückte Referenzpunkt in $(\partial O)\times(T/2,T)$ liegen muss.

Sei ohne Einschränkung $t_2 > t_1$. Sei $\delta > 0$ maximal, so dass $K((x_2,t_2),5\delta) \subset \Omega$ gilt. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

(i) Gilt $\overline{K((x_2,t_2),5\delta)} \cap (O \times \{t=0\}) \neq \emptyset$, so ist δ nach unten beschränkt, da $t_2 - (5\delta)^2 = 0$ und $t_2 \ge T/2$ implizieren, dass $(5\delta)^2 \ge T/2$ gilt. Die inneren Abschätzungen mit $R = 5\delta \ge c(T) > 0$ liefern nun

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{K((x_2,t_2),r)} u &\le C \cdot \left(\frac{r}{\delta}\right)^\alpha \cdot \left(\operatorname*{osc}_{K((x_2,t_2),R)} u + c \cdot \delta^\alpha\right)\\ &\le c \cdot r^\alpha \cdot \operatorname*{osc}_{\Omega} u + c \cdot r^\alpha.\end{aligned}$$

Ist $(x_1,t_1) \in \overline{K((x_2,t_2),\delta)}$, so folgt die Abschätzung durch Wahl des minimalen $r > 0$ mit $(x_1,t_1) \in \overline{K((x_2,t_2),r)}$.

Ist $(x_1,t_1) \notin K((x_2,t_2),\delta)$, so gelten $|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2| \ge c(n) \cdot \delta^2$ sowie $|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)| \le \operatorname*{osc}_{\Omega} u$. Da δ nach unten beschränkt ist, ist die Behauptung trivial.

(ii) Nehme daher ab jetzt stets an, dass $K((x_2,t_2),5\delta)$ nicht bis $t = 0$ hinunterreicht. Somit gibt es $x_0 \in \partial O$ mit $(x_0,t_2) \in \partial K((x_2,t_2),5\delta)$, d. h. der Quader $K((x_2,t_2),5\delta)$ „stößt seitlich“ an $\mathcal{P}\Omega$ an.

(iii) Gelte zunächst $(x_1,t_1) \in K((x_2,t_2),\delta)$. Dann folgt aus den inneren Abschätzungen mit $R = \delta$ für alle $0 < r \le \delta$

$$\frac{1}{r^\alpha} \cdot \operatorname*{osc}_{K((x_2,t_2),r)} u \le C \cdot \delta^{-\alpha} \cdot \operatorname*{osc}_{K((x_2,t_2),\delta)} u + c$$

und daher insbesondere bei minimalem $r > 0$ mit $(x_1,t_1) \in \overline{K((x_2,t_2),r)}$

$$\frac{|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)|}{(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|)^{\alpha/2}} \le C \cdot \delta^{-\alpha} \cdot \operatorname*{osc}_{K((x_2,t_2),\delta)} u + c.$$

Es gilt $K((x_0,t_2),6\delta) \supset K((x_2,t_2),\delta)$. Sei $R := \operatorname{diam}\Omega$. Dann liefert die Randabschätzung mit Mittelpunkt (x_0,t_2)

$$(6\delta)^{-\alpha} \cdot \operatorname*{osc}_{K((x_2,t_2),\delta)} u \le (6\delta)^{-\alpha} \cdot \operatorname*{osc}_{\Omega[(x_0,t_2),6\delta]} u \le c.$$

Kombinieren wir die letzten beiden Ungleichungen, so erhalten wir gerade die Behauptung.

(iv) Sei nun $(x_1,t_1) \notin K((x_2,t_2),\delta)$ und x_0 wie oben. Wähle $r > 0$ minimal mit $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in \overline{K((x_0,t_2),r)}$. Setze $R := \operatorname{diam}\Omega$. Dann liefert die Randabschätzung

$$r^{-\alpha} \cdot \operatorname*{osc}_{\Omega[(x_0,t_2),r]} u \le c.$$

Daraus folgt die Behauptung, da in dieser Situation r und

$$d_{parab}((x_1,t_1),(x_2,t_2)) \equiv \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|}$$

bis auf eine Konstante vergleichbar sind: Aus $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in K((x_0,t_2),r)$ folgt mit der Dreiecksungleichung

$$d_{parab}((x_1,t_1),(x_2,t_2))$$

$$\le d_{parab}((x_1,t_1),(x_0,t_2)) + d_{parab}((x_0,t_2),(x_2,t_2))$$
$$\le c(n)\cdot r.$$

(Diese Richtung ist einfacher aber auch für den Beweis nicht nötig.)

Für die umgekehrte Ungleichung benötigen wir eine Fallunterscheidung. Sei zunächst $r \le c_1\delta$ für ein festes noch zu fixierendes $c_1(n) > 0$. Da $(x_1,t_1) \notin K((x_2,t_2),\delta)$ gilt, folgt $d_{parab}((x_1,t_1),(x_2,t_2)) \ge \delta$.

Zusammengenommen erhalten wir also

$$d_{parab}((x_1,t_1),(x_2,t_2)) \ge \frac{1}{c_1} r.$$

Gelte nun umgedreht $r \ge c_1 \cdot \delta$. Da r minimal ist, tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:

(a) $d_{parab}((x_0,t_2),(x_1,t_1)) \ge \frac{1}{c_2} r$ für ein $c_2 = c_2(n) > 0$: Nach Wahl von x_0 ist $d_{parab}((x_0,t_2),(x_2,t_2)) \le c\cdot\delta$. Somit folgt für großes c_1

$$\begin{aligned} d_{parab}((x_1,t_1),(x_2,t_2)) \ge & d_{parab}((x_1,t_1),(x_0,t_2)) - d_{parab}((x_0,t_2),(x_2,t_2)) \\ \ge & \frac{1}{c_2} r - c\delta \ge \frac{1}{2c_2} r. \end{aligned}$$

(b) $d_{parab}((x_0,t_2),(x_2,t_2)) \ge \frac{1}{c_2} r$: Dann erhalten wir

$$c(n)\delta \ge d_{parab}((x_2,t_2),(x_0,t_2)) \ge \frac{1}{c_2} r \ge \frac{c_1}{c_2}\delta.$$

Dieser Fall tritt also gar nicht ein, wenn wir c_1 groß genug wählen.

Somit sind r und $d_{parab}((x_1,t_1),(x_2,t_2))$ vergleichbar.

Die Behauptung folgt. □

Literatur

1. Luis A. Caffarelli and Xavier Cabré, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
2. Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag, New York, 1969.
3. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, Vorlesungsmitschrift.
4. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. Anja Grabow, *Schwache Harnackungleichung unter Dirichletrandwerten und messbaren Koeffizienten für parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung,* Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin, 46 S., 2008.
6. Jürgen Jost, *Partial differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 214, Springer-Verlag, New York, 2002.
7. Gary M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
8. Oliver C. Schnürer, *Partielle Differentialgleichungen Ia*, 2013, Skript zur Vorlesung.

Oliver C. Schnürer, Universität Konstanz, Germany
E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`