

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER III

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung Mathematik für Physiker III an der Universität Konstanz im Wintersemester 2011/2012.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Existenzsätze	1
2. Spezielle Rechenmethoden	7
3. Lineare Differentialgleichungen	10
4. Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen	20
5. Stabilität	23
6. Rand- und Eigenwertprobleme	24
Literatur	33

Wir orientieren uns an [1, 2, 4, 7, 8].

1. EXISTENZSÄTZE

1.1. Existenz.

Definition 1.1.1. Eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung k -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F\left(t, x(t), \dot{x}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(k)}(t)\right) = 0.$$

Eine (explizite) gewöhnliche Differentialgleichung k -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$\dot{x}^{(k)}(t) = F\left(t, x(t), \dot{x}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)\right).$$

Gesucht ist jeweils eine k -mal differenzierbare Funktion $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass $F: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mindestens stetig ist.

Bemerkung 1.1.2.

- (i) Wir untersuchen gewöhnliche Differentialgleichungen auf
- (globale) Lösbarkeit,
 - Eindeutigkeit (der Lösung),
 - Abhängigkeit der Lösung von (Anfangs-)daten.

- (ii) Ist F eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^n$, so sprechen wir von einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung k -ter Ordnung lässt sich als System von Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen:

$$\frac{d}{dt}X(t) \equiv \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-2)}(t) \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \\ F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \end{pmatrix} \equiv \tilde{F}(t, X(t)).$$

Daher genügt es häufig, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu untersuchen.

- (iii) Ist F stetig und x eine k -mal differenzierbare Funktion, so ist x auch k -mal stetig differenzierbar.
- (iv) Wir klassifizieren gewöhnliche Differentialgleichungen ein wenig.
- (a) Ein System heißt linear, wenn es sich in der Form $A(t)\dot{x}(t) = 0$ mit einer Matrix $A(t)$ darstellen lässt.
- (b) Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt autonom, falls sie die Form

$$F(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0$$

hat, wenn F also nicht explizit von t abhängt.

- (c) Explizite und implizite gewöhnliche Differentialgleichungen haben wir bereits unterscheiden.
- (d) Man klassifiziert gewöhnliche Differentialgleichungen nach ihrer Ordnung.
- (v) Ist F stetig, so ist die Gleichung $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ in I mit $x(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in I$ äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Erinnerung:

Definition 1.1.3. Sei E ein normierter Raum und sei $M \subset E$. Dann heißt eine Abbildung $\Phi: M \rightarrow M$ kontrahierend, falls es ein c mit $0 \leq c < 1$ und

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$$

für alle $x, y \in M$ gibt.

Erinnerung:

Theorem 1.1.4 (Banachscher Fixpunktsatz). Sei E ein Banachraum und $M \subset E$ abgeschlossen. Sei

$$\Phi: M \rightarrow M$$

eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt, d. h. es gibt genau ein $x \in M$ mit $\Phi(x) = x$.

Definition 1.1.5. Seien E, F normierte Räume.

- (i) Dann heißt $f: E \rightarrow F$ (global) Lipschitzstetig (auch: Lipschitz stetig), falls es ein $L > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq L \cdot \|x - y\|_E$$

für alle $x, y \in E$ gibt. Die kleinste solche Zahl L heißt Lipschitzkonstante der Abbildung f .

- (ii) Sei $f_j: E \rightarrow F$, $j \in J$, eine Familie von Lipschitzstetigen Funktionen mit Lipschitzkonstanten L_j . Dann heißt $(f_j)_{j \in J}$ gleichmäßig Lipschitzstetig, falls die Lipschitzkonstanten L_j , $j \in J$, gleichmäßig beschränkt sind.
- (iii) Eine Funktion $f: E \rightarrow F$ heißt lokal Lipschitzstetig, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in E$ eine Umgebung U mit $x_0 \in U$ und ein $L = L(U)$ mit

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq L(U) \cdot \|x - y\|_E$$

für alle $x, y \in U$ gibt.

- (iv) Eine Familie von Funktionen $f_j: E \rightarrow F$, $j \in J$, heißt gleichmäßig lokal Lipschitzstetig, falls es zu jedem Punkt $x \in E$ eine Umgebung U mit $x \in U$ und ein $L = L(U)$ mit

$$\|f_j(x) - f_j(y)\|_F \leq L(U) \cdot \|x - y\|_E$$

für alle $x, y \in U$ und alle $j \in J$ gibt.

Entsprechende Definitionen verwenden wir für Funktionen $f: \Omega \rightarrow F$, die auf Teilmengen $\Omega \subset E$ von E definiert sind.

Bemerkung 1.1.6. Seien E, F Banchräume. Ist $f \in C^1(E, F)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_F &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx + (1-t)y) dt \right\| \leq \int_0^1 \|Df(tx + (1-t)y)\| \cdot \|x - y\| dt \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|Df(tx + (1-t)y)\| \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Da Df stetig ist, ist f lokal Lipschitzstetig. Ist $\|Df\|$ überall beschränkt, so ist f global Lipschitzstetig.

Wir beweisen den ersten Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen $x: I \rightarrow E$ mit einem beliebigen Banachraum E statt $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, da dies keinen Zusatzaufwand bedeutet.

Theorem 1.1.7 (Picard-Lindelöf). *Sei E ein Banachraum und $x_0 \in E$. Sei $\Omega \subset E$ offen mit $x_0 \in \Omega$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen mit $t_0 \in I$. Sei $f: I \times \Omega \rightarrow E$ stetig und sei die Familie $(f(t, \cdot))_{t \in I}$ lokal gleichmäßig Lipschitzstetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem (AWP)*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $x \in C^1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), E)$ besitzt.

Beweis. Wir wollen die äquivalente Integralgleichung lösen. Setze

$$M := 2\|f(t_0, x_0)\| + 1.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f und der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es ein $r > 0$ und ein $L > 0$ mit

$$\sup_{(t_0-r, t_0+r) \times B_r(x_0)} \|f\| < M$$

und

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

für alle $x, y \in B_r(x_0)$ und alle $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$. Wähle ε mit $0 < \varepsilon < r$, $\varepsilon \cdot M \leq r$ und $\varepsilon \cdot L \leq \frac{1}{2}$. Definiere

$$\mathcal{M} := \{x \in C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E) : x(t) \in \overline{B}_r(x_0) \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\}.$$

$\mathcal{M}$ ist eine bezüglich der C^0 -Norm abgeschlossene Teilmenge von $C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E)$ und daher vollständig. Definiere $T: \mathcal{M} \rightarrow C^0([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], E)$ durch

$$(T(x))(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Wir behaupten, dass $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ gilt. Wir erhalten nämlich für $|t_0 - t| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|(T(x))(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq |t - t_0| \cdot \sup_{(t_0-r, t_0+r) \times B_r(x_0)} \|f\| \\ &\leq \varepsilon \cdot M \leq r. \end{aligned}$$

Wir behaupten weiterhin, dass T sogar eine Kontraktion ist. Es gilt nämlich für $x, y \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \sup_{\tau \in [t_0-r, t_0+r]} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \cdot L}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \sup_{\tau \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} \|x(\tau) - y(\tau)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Somit ist T eine Kontraktion. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert, dass T einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, die gesuchte Lösung. $\square$

Bemerkung 1.1.8. Unter den Voraussetzungen des Theorems von Picard-Lindelöf wollen wir das maximale Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$ finden, in dem das Anfangswertproblem eine Lösung besitzt.

- (i) Sei x_1 in J_1 eine Lösung des Anfangswertproblems und sei x_2 in J_2 ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems. Betrachte

$$G := \{t \in J_1 \cap J_2 : x_1(t) = x_2(t)\}.$$

Diese Menge ist

- (a) nichtleer, da $t_0 \in J_1 \cap J_2$ gilt,
 - (b) abgeschlossen in $J_1 \cap J_2$, da x_i stetige Abbildungen sind,
 - (c) offen. Dies folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, angewandt mit $t_1 \in G$ und Anfangswert $x(t_1) = x_1(t_1) = x_2(t_1)$.
- (ii) Betrachte alle Lösungen (x_i, J_i) des Anfangswertproblems, wobei J_i mit $t_0 \in J_i$ die Definitionsbereiche der Lösungen sind. Setze $J := \bigcup_i J_i$ und $x(t) := x_i(t)$ für $t \in J_i$. Dann ist x auf dem offenen Intervall J definiert. x ist wohldefiniert, da wir gesehen haben, dass $x_i = x_j$ auf $J_i \cap J_j$ gilt. Offenbar löst x das Anfangswertproblem.
- (iii) Nehme an, dass J strikt in I enthalten sei. Dann gibt es $t_1 \in \bar{J}$ mit $t_1 \in I$ aber $t_1 \notin J$, ohne Einschränkung sei $J \subset (-\infty, t_1)$. Wir behaupten, dass $\lim_{t \nearrow t_1} x(t)$ nicht in Ω existiert. (Man kann zeigen, dass x unbeschränkt wird oder $(t, x(t))$ das Definitionsgebiet von f „verlässt“.) Sonst hätte x auf $[t_0, t_1]$ eine stetige Fortsetzung $\bar{x}$ und die Differentialgleichung wäre in Integralform bis t_1 gültig. Nach Picard-Lindelöf existiert aber eine Lösung x_1 des Anfangswertproblems mit Anfangswert $x_1(t_1) = \bar{x}(t_1)$ auf einem offenen Intervall um t_1 . Mit Hilfe der Integralformulierung sehen wir, dass $\bar{x}$, mit Hilfe von x_1 für $t > t_1$ als $\bar{x}$

fortgesetzt, für $t > t_1$ ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems ist: Für $t > t_1$ erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= x_1(t_1) + \int_{t_1}^t f(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau, \quad \text{da } x_1 = \bar{x} \text{ für } t > t_1 \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau + \int_{t_1}^t f(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau, \quad \text{da } x = \bar{x} \text{ auf } [t_0, t_1] \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau.\end{aligned}$$

$\bar{x}$ wäre also eine Lösung auf einem größeren Intervall. Widerspruch zur Maximalität.

- (iv) Variiert man den Anfangswert x_0 , so erhält man zugehörige maximale Existenzintervalle J_{x_0} und Lösungen $x_{x_0}(t)$. Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{D}(f) := \bigcup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\}$$

in $I \times \Omega$ offen ist. Ist darüber hinaus f im Definitionsgebiet von der Klasse C^m , so gilt auch $x, \dot{x} \in C^m(\mathcal{D}(f), E)$. Dies erfordert einen komplizierteren Beweis. Wir werden später nur zeigen, dass Lösungen stetig vom Anfangswert abhängen.

Bemerkung 1.1.9. Obwohl ich zum Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t^2 + x^2(t), \quad x(0) = 1$$

keine explizite Lösung kenne, kann man doch Aussagen über das Existenzintervall machen.

Eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{y}(t) = y^2(t)$ mit $y(0) = 1$ erfüllt $y(t) \leq x(t)$ für alle $t \geq 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Eine Lösung $y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\frac{1}{1-\varepsilon}-t}$ der Differentialgleichung für y mit Anfangswert $1 - \varepsilon$ erfüllt nämlich $y_\varepsilon(0) < x(0)$. Daher gilt aufgrund der Stetigkeit von y_ε und x auch $y_\varepsilon(t) < x(t)$ für kleine Werte von $t > 0$. Angenommen, es gibt ein minimales $t_0 > 0$ im Definitionsbereich von x und y_ε mit $x(t_0) = y_\varepsilon(t_0)$. Dann folgt aus $x(t) \geq y_\varepsilon(t)$ für alle $0 \leq t \leq t_0$, dass $\dot{x}(t_0) \leq \dot{y}_\varepsilon(t_0)$ gilt. Andererseits folgt jedoch aufgrund der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t_0) = t_0^2 + x^2(t_0) > 0 + y_\varepsilon^2(t_0) = \dot{y}_\varepsilon(t_0).$$

Widerspruch. Wir erhalten $x(t) \geq y_\varepsilon(t)$ für alle $t \geq 0$ im gemeinsamen Definitionsgebiet. Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $x(t) \geq y(t)$. Wegen $y(t) = \frac{1}{1-t}$ kann auch $x(t)$ höchstens bis $t = 1$ existieren.

Betrachte also alle $0 \leq t < T \leq 1$, für die eine Lösung $x(t)$ existiert. Dort gilt

$$\dot{x}(t) \leq 1 + x^2(t).$$

Im Falle der Gleichheit löst $\tan(t - t_0)$ diese Differentialgleichung, konkret $x(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$. Somit erhalten wir ähnlich wie oben mit Hilfe von $\tan(t + \frac{\pi}{4} + \varepsilon)$, $\varepsilon \searrow 0$, $\tan(t + \frac{\pi}{4}) \geq x(t)$.

Daher existiert die Lösung $x(t)$ in einem Intervall $[0, T)$ mit $0,785 < \frac{\pi}{4} \leq T \leq 1$.

Bemerkung 1.1.10. Ein analoges Existenzresultat gilt auch für stetige Funktionen f ohne Lipschitzbedingung: Existenzsatz von Peano. Der Beweis benötigt jedoch nicht vorhandene Hilfsmittel (Satz von Arzelà-Ascoli). Die Eindeutigkeitsaussage gilt nicht mehr, da

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, & t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

für jedes $t_0 > 0$ durch

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{1}{4}(t - t_0)^2, & t > t_0 \end{cases}$$

gelöst wird. Für $t < 0$ gibt es analoge Nichteindeutigkeiten mit negativen Lösungen.

Beschreibt man die Wasserhöhe in einem Eimer mit einem Loch durch eine gewöhnliche Differentialgleichung, so sollte diese nicht eindeutig lösbar sein. Zwar ist die Voraussage möglich, wie das Wasser ausströmt. Ist jedoch bereits alles Wasser herausgeflossen, so ist nicht mehr rekonstruierbar, seit wann der Eimer leer ist.

1.2. Vergleichssätze.

Lemma 1.2.1 (Lemma von Gronwall). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $[t_0, t_1)$ oder $[t_0, t_1]$ ($t_1 = \infty$ ist erlaubt), $0 \leq \varphi, \psi \in C^0(I, \mathbb{R})$. Sei $a \geq 0$. Nehme an, dass*

$$\varphi(t) \leq a + \int_{t_0}^t \psi(\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

für alle $t \in I$ gilt. Dann folgt

$$\varphi(t) \leq a \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \right)$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $a > 0$ gilt. Sonst ersetzen wir a durch $\varepsilon > 0$ und lassen am Ende $\varepsilon \searrow 0$. Definiere

$$h(t) := a + \int_{t_0}^t \psi(\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Es folgt $h \in C^1$ und wir erhalten für $t \in (t_0, t_1)$

$$\dot{h}(t) = \psi(t) \varphi(t) \leq \psi(t) h(t)$$

nach Annahme an φ . Da $h \geq a > 0$ gilt, schließen wir, dass

$$\frac{d}{dt} \log h(t) = \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \leq \psi(t)$$

gilt. Somit erhalten wir

$$\log h(t) - \log h(t_0) \leq \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau$$

und hieraus, nochmals nach Annahme an φ ,

$$\varphi(t) \leq h(t) \leq h(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \right) = a \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \right).$$

Das Lemma folgt. □

Hiermit schließen wir, dass Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen stetig vom Anfangswert abhängen. Dies bedeutet physikalisch, dass eine Rechnung mit einem kleinen Messfehler auch nur kleine Abweichungen liefert.

Theorem 1.2.2. Sei I ein offenes Intervall. Sei Ω eine offene Teilmenge eines Banachraumes E . Seien $x_0, y_0 \in \Omega$. Sei $f \in C^0(I \times \Omega, E)$ und sei $(f(t, \cdot))_t$ gleichmäßig Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante L . Sei $J \subset I$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$. Gelte

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & \text{in } J, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & \text{in } J, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \cdot \exp(L \cdot |t - t_0|)$$

für alle $t \in J$.

Beweis. Setze $\varphi(t) := \|x(t) - y(t)\|$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|x(t) - y(t)\| \\ &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t L \cdot \underbrace{\|x(\tau) - y(\tau)\|}_{=\varphi(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus dem Lemma von Gronwall. $\square$

2. SPEZIELLE RECHENMETHODEN

2.1. Separation der Variablen.

Beispiel 2.1.1 (Separation der Variablen). Sei x die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers, auf den Gravitation und Luftwiderstand wirken. Dabei ist die Geschwindigkeitsänderung (= die Beschleunigung) durch den Luftwiderstand proportional zur Kraft und damit zu x^2 . Es gilt

$$\dot{x} = g - lx^2.$$

In den folgenden Rechnungen kümmern wir uns nicht genauer um mögliche Divisionen durch Null. Man überprüft am Ende, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt. Wir formen wie folgt um

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= l \left(\frac{g}{l} - x^2(t) \right), \\ l &= \frac{\dot{x}(t)}{\frac{g}{l} - x^2(t)}, \\ l \cdot t &= \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\frac{g}{l} - x^2(\tau)} d\tau = \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(\sqrt{\frac{g}{l}} - x(\tau))(\sqrt{\frac{g}{l}} + x(\tau))} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\sqrt{\frac{g}{l}} - x(\tau)} d\tau + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)}{\sqrt{\frac{g}{l}} + x(\tau)} d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \log \left(\sqrt{\frac{g}{l}} - x(\tau) \right) \Big|_0^t + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \log \left(\sqrt{\frac{g}{l}} + x(\tau) \right) \Big|_0^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \log \frac{\sqrt{\frac{g}{l}} + x(t)}{\sqrt{\frac{g}{l}} - x(t)} + l \cdot t_0, \quad t_0 \text{ geeignet}, \\
\frac{\sqrt{\frac{g}{l}} + x(t)}{\sqrt{\frac{g}{l}} - x(t)} &= \exp \left(2l \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0) \right), \\
\sqrt{\dots} + x(t) &= \sqrt{\dots} e^{\dots} - x(t) e^{\dots}, \\
x(t) &= \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{e^{2l \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)} - 1}{e^{2l \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)} + 1}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sqrt{\dots} \frac{e^{\dots}(e^{\dots} + 1) - e^{\dots}(e^{\dots} - 1)}{(e^{\dots} + 1)^2} 2l \sqrt{\dots} = 4l \frac{g}{l} \frac{e^{\dots}}{(e^{\dots} + 1)^2}, \\
\frac{g}{l} - x(t)^2 &= \frac{g}{l} - \frac{g}{l} \left(\frac{e^{\dots} - 1}{e^{\dots} + 1} \right)^2 = \frac{g}{l} \frac{(e^{\dots} + 1)^2 - (e^{\dots} - 1)^2}{(e^{\dots} + 1)^2} = \frac{g}{l} \frac{4e^{\dots}}{(e^{\dots} + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir für jedes t_0 eine Lösung gefunden.

Als wir den Logarithmus als Stammfunktion verwendet haben, haben wir ein Vorzeichen fixiert. Somit erhalten wir Lösungen für manche Anfangswerte $x(0)$. Weitere Lösungen erhalten wir durch eine andere Vorzeichenwahl.

Beispiel 2.1.2. Ist $\dot{x}(t) = f(at + bx(t) + c)$, so erfüllt $y(t) := at + bx(t) + c$ die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = a + b\dot{x}(t) = a + bf(y(t)).$$

Dies können wir mit Separation der Variablen lösen.

Zu einem konkreten Beispiel:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (t + x(t))^2, \\
y(t) &:= t + x(t), \\
\dot{y}(t) &= 1 + y^2(t).
\end{aligned}$$

Wir rechnen wieder formal und benötigen zunächst eine Stammfunktion.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \int \frac{1}{(x+i)(x-i)} dx = \frac{1}{2i} \int \frac{-1}{x+i} + \frac{1}{x-i} dx \\
&= \frac{1}{2i} (-\log(x+i) + \log(x-i)) = \frac{1}{2i} \log \frac{x-i}{x+i} = \frac{1}{2i} \log \left(-\frac{1+ix}{1-ix} \right).
\end{aligned}$$

Mit $1+ix = \sqrt{1+x^2} \cdot e^{i\varphi}$, $1-ix = \sqrt{1+x^2} \cdot e^{-i\varphi}$ und $\varphi = \arctan x$ erhalten wir weiter

$$\dots = \frac{1}{2i} \log e^{i\pi+2i\varphi} = \frac{\pi}{2} + \arctan x.$$

Die Konstante in der Stammfunktion ist natürlich beliebig. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}
\int \frac{\dot{y}(t)}{1+y^2(t)} dt &= \int 1 dt, \\
\arctan y(t) &= t - t_0, \quad t_0 \text{ geeignet für Anfangsbedingungen}, \\
y(t) &= \tan(t - t_0), \\
x(t) &= \tan(t - t_0) - t.
\end{aligned}$$

Nun gelten $\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t}$ (Quotientenregel und $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$) und $\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$. Somit erhalten wir

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\tan(t - t_0) - t) = \frac{1}{\cos^2(t - t_0)} - 1 = \tan^2(t - t_0) = (x(t) + t)^2.$$

Damit haben wir für jedes t_0 eine Lösung gefunden.

Beispiel 2.1.3. Aus einer Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$ erhalten wir mit $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ für $t \neq 0$

$$\dot{x}(t) = u(t) + t\dot{u}(t) = f(u).$$

Man kann nun

$$\dot{u}(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t}$$

lösen und aus dem Ergebnis $x(t)$ rekonstruieren.

Als Beispiel wollen wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} - \frac{t^2}{x^2(t)}, \quad x(1) = 1$$

lösen. Mit $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ erhalten wir bei unterschiedlicher Differentiation von $x(t)$

$$\dot{x}(t) = u(t) - \frac{1}{u^2(t)} = u(t) + t\dot{u}(t)$$

und somit folgt

$$\dot{u}(t) = -\frac{1}{tu^2(t)}.$$

Weiterhin gilt $u(1) = 1$. Es folgt (vom Umbruch her gelesen)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}u^3(t) - \frac{1}{3}\underbrace{u^3(1)}_{=1} &= \int_1^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{3}u^3(\tau) \right) d\tau = \int_1^t u^2(\tau)\dot{u}(\tau) d\tau \\ &= \int_1^t -\frac{1}{\tau} d\tau = -\log t + \log 1 = -\log t, \\ u(t) &= \sqrt[3]{1 - 3\log t}, \\ x(t) &= t\sqrt[3]{1 - 3\log t}, \quad 0 < t < e^{1/3} \approx 1,396. \end{aligned}$$

2.2. Exakte Differentialgleichungen.

Bemerkung 2.2.1. Seien g, h in einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wir suchen eine Kurve $(x(t), y(t)): I \rightarrow \mathbb{R}^2$, die die Differentialgleichung $g(x(t), y(t))\dot{x}(t) + h(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0$ löst.

Sei $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gelte

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = g(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = h(x, y).$$

Die Differentialgleichung heißt dann exakt. Dann ist $F(x(t), y(t))$ konstant, denn es gilt

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}(t) = g \cdot \dot{x} + h \cdot \dot{y} = 0.$$

Die Differentialgleichung

$$y\dot{x} + 2x\dot{y} = 0$$

ist nicht exakt (siehe z. B. nächster Abschnitt). Nach Multiplikation mit y (Euler-scher Multiplikator/integrierender Faktor) erhält man jedoch

$$y^2 \dot{x} + 2xy\dot{y} = 0,$$

eine exakte Differentialgleichung mit $F(x, y) = xy^2$.

Die Exaktheit einer Differentialgleichung erfordert im Falle $F \in C^2$, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ unabhängig von der Differentiationsreihenfolge ist, also

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist diese Bedingung auch hinreichend für die Exaktheit.

3. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die Resultate in diesem Abschnitt gelten auch für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ oder in einem komplexen Vektorraum.

3.1. Einführung und Beispiele.

Definition 3.1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine lineare Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = h(t).$$

Dieselbe Form haben lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wir wollen annehmen, dass g und h stetig sind. Die Differentialgleichung heißt

- (i) homogen, falls $h(t) \equiv 0$ gilt.
- (ii) inhomogen, wenn h beliebig ist. Ersetzen wir $h(t)$ durch 0, so heißt die resultierende Differentialgleichung die zugehörige homogene Differentialgleichung.

Bemerkung 3.1.2. Lokal sind Lösungen linearer Differentialgleichungen stets eindeutig, da der Term $g(t)x(t)$ bezüglich $x(t)$ linear und damit Lipschitz stetig ist.

Beispiel 3.1.3 (Homogene Differentialgleichung, eindimensional). Die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g(t)x(t)$$

können wir durch Separation der Variablen lösen. Wir rechnen formal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log x(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = g(t), \\ \log x(t) &= \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau + \log C, \\ x(t) &= C \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Man rechnet direkt nach, dass dies eine Lösung ist. Mit $C := x(t_0)$ kann man beliebige Anfangswerte realisieren. Aufgrund der Lipschitzstetigkeit im zweiten Argument sind diese Lösungen auch eindeutig bestimmt.

Lemma 3.1.4. Sei

$$\dot{x}(t) + g(t)x(t) = h(t)$$

eine lineare Differentialgleichung. Seien $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen der Differentialgleichung und $x_0(t)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dann ist

- (i) $(x_1 - x_2)(t) := x_1(t) - x_2(t)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- (ii) $x_1 + x_0$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.
- (iii) Eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe aus einer fixierten Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und einer Lösung der homogenen Differentialgleichung. Anders ausgedrückt: Die Menge aller Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir, indem wir zur Menge der Lösungen der homogenen Gleichung eine spezielle Lösung (zu jedem Element) hinzuzählen. Solch eine Menge (Unterraum plus spezielles Element) bezeichnet man auch als affinen Unterraum.
- (iv) Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden einen Unterraum der C^1 -Funktionen.

Dasselbe Resultat gilt auch für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Beweis.

- (i) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1 - x_2)(t) &= \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = h(t) - g(t)x_1(t) - (h(t) - g(t)x_2(t)) \\ &= -g(t)(x_1(t) - x_2(t)). \end{aligned}$$

- (ii) Dies folgt wieder aus einer direkten Rechnung

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) + x_0(t)) = h(t) - g(t)x_1(t) - g(t)x_0(t) = h(t) - g(t)(x_1(t) + x_0(t)).$$

- (iii) Die ist eine Umformulierung der obigen Aussagen.
- (iv) Wie in (ii) erhalten wir, dass die Summe von zwei Lösungen der homogenen Differentialgleichung wieder eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(\lambda x(t)) = \lambda \dot{x}(t) = -\lambda g(t)x(t).$$

□

Beispiel 3.1.5 (Inhomogene Differentialgleichung, eindimensional). Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = g(t)x(t) + h(t).$$

Die „Methode der Variation der Konstanten“ von Lagrange besteht darin, einen Ansatz der Form

$$x(t) = C(t) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right)$$

zu machen, also die Lösung für die zugehörige homogene Differentialgleichung durch Ersetzen der Konstanten C durch eine Funktion $C(t)$ zu modifizieren. Dies ist genau dann eine Lösung, wenn

$$\dot{C}(t)e^{\dots} + \underline{C(t)e^{\dots}g(t)} = \underline{g(t)C(t)e^{\dots}} + h(t)$$

gilt. Wir erhalten

$$C(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} g(\rho) d\rho \right) d\tau + C_0.$$

Mit Hilfe des Eindeutigkeitsresultates für gewöhnliche Differentialgleichungen erhalten wir also:

Theorem 3.1.6. Die eindeutig bestimmte Lösung von $\dot{x}(t) = g(t)x(t) + h(t)$ mit Anfangswert $x(t_0) = C_0$ ist durch

$$x(t) = \left[C_0 + \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} g(\rho) d\rho \right) d\tau \right] \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t g(\sigma) d\sigma \right)$$

gegeben.

3.2. Homogene lineare Systeme.

Lemma 3.2.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $t_0 \in I$ und jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Entscheidend ist hier, dass die Lösung auf ganz I existiert. Eine analoge Argumentation funktioniert für die inhomogene Gleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$ und stetigem $b \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Theorem 1.2.2, angewandt auf Teilintervalle von I , liefert die Eindeutigkeit der Lösung. Das Theorem von Picard-Lindelöf liefert die Existenz einer Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.

In Bemerkung 1.1.8 hatten wir bereits die Existenz eines maximalen Existenzintervalles diskutiert. Im konkreten linearen Fall sieht dies so aus: Auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir Normen mit $\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$. Sei (a, b) das maximale offene Existenzintervall, auf dem eine C^1 -Lösung $\bar{x}$ existiert. Sei ohne Einschränkung $(b - 3\delta, b + 3\delta) \subset I$ für ein $\delta > 0$ und $t_0 < b - 3\delta$ sowie $t_0 - 3\delta > a$. Sei $C_A \geq 1$ mit $\|A(t)\| \leq C_A$ für $t \in [t_0 - 2\delta, b + 2\delta]$. Für die Lösung $x(t)$ erhalten wir aus

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

für alle $t \in [t_0, b)$

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t C_A \cdot \|x(\tau)\| d\tau$$

und somit mit dem Lemma von Gronwall

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \cdot e^{C_A \cdot |b - t_0|} \equiv C_x,$$

also eine gleichmäßige Schranke, d. h. C_x hängt nicht von t ab. Analog zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf wollen wir zeigen, dass

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

für alle $t_1 \in [b - \delta, b)$ und alle $\|x_1\| \leq C_x$ auf $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ für ein festes $\varepsilon > 0$ (das weder von x_1 noch von t_1 abhängt) lösbar ist. Setze $f(t, y) := A(t) \cdot y$. Es gilt

$$\sup_{[b-2\delta, b+2\delta] \times B_{2C_x}(0)} \|f\| \leq 2 \cdot C_A \cdot C_x$$

sowie

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C_A \cdot \|x - y\|$$

für alle $t \in [b - 2\delta, b + 2\delta]$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wähle nun $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \delta$ und $\varepsilon \cdot C_A \leq \frac{1}{2}$. Setze

$$\mathcal{M} := \{x \in C^0([t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon], \mathbb{R}^n) : x(t) \in \overline{B}_{2C_x}(0) \forall t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]\}.$$

Setze weiterhin

$$(T(x))(t) := x_1 + \int_{t_1}^t A(\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

für $x \in \mathcal{M}$. Wegen

$$\|(T(x))(t)\| \leq \|x_1\| + \varepsilon \cdot C_A \cdot 2 \cdot C_x \leq C_x + C_x = 2C_x$$

ist $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \|(T(x))(t) - (T(y))(t)\| &= \left\| \int_{t_1}^t A(\tau) \cdot (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \varepsilon \cdot C_A \cdot \sup_{\tau \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]} \|x(\tau) - y(\tau)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Da $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ also eine Kontraktion ist, folgt aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes, dass (3.1) auf $[t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$ für jedes $t_1 \in [b - \delta, b]$ und jedes $x_1 \in B_{C_x}(0)$ lösbar ist. Wir wenden dies mit $t_1 = b - \frac{\varepsilon}{2}$ und $x_1 = \bar{x}(b - \frac{\varepsilon}{2})$ als Anfangswert an. Somit lässt sich $\bar{x}$ bis $t = b + \frac{\varepsilon}{2}$ fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität von b . Damit existiert die maximale Lösung auf ganz I . $\square$

Theorem 3.2.2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $I \ni t \mapsto A(t)$ stetig. Dann bilden die Lösungen $x(t)$ der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ einen Unterraum U von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Bezeichne mit $x(t; t_0, x_0)$ die Lösung mit $x(t_0) = x_0$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \ni x_0 \mapsto (I \ni t \mapsto x(t; t_0, x_0)) \in U$$

für festes $t_0 \in I$ ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Wir haben bereits in Lemma 3.1.4 gesehen, dass U ein Vektorraum ist. Daraus folgt auch, dass $x_0 \mapsto x(\cdot; t_0, x_0)$ eine lineare Abbildung ist: Die Lösung zum Anfangswert λx_0 ist $\lambda x(\cdot; t_0, x_0) = x(\cdot; t_0, \lambda x_0)$, da beides Lösungen sind und denselben Anfangswert haben. Ebenso erhalten wir $x(\cdot; t_0, x_1) + x(\cdot; t_0, x_2) = x(\cdot, t_0, x_1 + x_2)$. Da jede Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung einen Anfangswert zur Zeit t_0 besitzt und dieser die Lösung eindeutig bestimmt, ist die Abbildung surjektiv und injektiv. $\square$

Korollar 3.2.3. *Die Lösungen $(x(\cdot; t_0, e_i))_{1 \leq i \leq n}$ bilden eine Basis aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.*

Bemerkung 3.2.4.

- (i) Sei $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis des Lösungsraumes. Dann nennen wir $(x_i)_i$ ein Fundamentalsystem.
- (ii) Setze $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. $X(t)$ mit $(x_i)_i$ wie oben heißt Lösungsmatrix. Sie erfüllt $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$. Jede Lösung hat die Gestalt $X(t)v$ für ein $v \in \mathbb{R}^n$. Ist $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, so ist $X(t)B$ ebenfalls eine Lösungsmatrix. Alle Lösungsmatrizen sind von dieser Form.
- (iii) Ist $X_e(t)$ die Lösungsmatrix mit $X_e(t_0) = \mathbb{I}$, so erfüllt eine beliebige Lösungsmatrix $X(t)$

$$X(t) = X_e(t) \cdot X(t_0),$$

denn auf beiden Seiten stehen Lösungsmatrizen mit den gleichen Anfangswerten.

(iv) Eine Lösung zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist durch $X_e(t)x_0$ gegeben.

Lemma 3.2.5. Sei $A = (a_{ij}^i)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann gilt

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}^i} = \det A \cdot (a^{-1})_i^j.$$

Beweis. Wir verwenden Resultate über die Determinante und die Inverse einer Matrix; vergleiche [3, Lemma 2.14] und benachbarte Resultate. Setze

$$b_j^i := (-1)^{i+j} \det A_j^i,$$

wobei (A_j^i) die Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn man die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht, also die Zeile und Spalte, in der a_{ij}^i steht. Es gilt

$$(a^{-1})_i^j = (-1)^{i+j} \frac{\det A_j^i}{\det A} = \frac{b_j^i}{\det A},$$

$$\det A \cdot \delta_k^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^i b_k^j.$$

Daraus erhalten wir, da b_j^i nicht von a_{ij}^i abhängt mit $i = k$

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}^i} = b_i^j = \det A \cdot (a^{-1})_i^j. \quad \square$$

Theorem 3.2.6 (Wronski-Determinante). Sei $X(t) = (x_j^i(t))$ eine Lösungsmatrix des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $A = (a_{ij}^i) \in C^0(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Setze $\varphi(t) := \det X(t)$. Dann gilt

$$\dot{\varphi}(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot \varphi(t).$$

Beweis. Wir benutzen Lemma 3.2.5 und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \det X(t)}{\partial x_{ij}^i(t)} \frac{\partial x_{ij}^i(t)}{\partial t} = \det X(t) \cdot \sum_{i,j=1}^n (x^{-1})_i^j \dot{x}_{ij}^i \\ &= \det X(t) \cdot \sum_{i,j,k=1}^n (x^{-1})_i^j a_{kj}^i x_k^k = \det X(t) \cdot \operatorname{tr} ((X(t))^{-1} A(t) X(t)) \\ &= \det X(t) \cdot \operatorname{tr} (X(t) (X(t))^{-1} A(t)) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr} A(t). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 3.2.7. Sind die Spalten x_i , $1 \leq i \leq n$, einer Matrix X mit $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ für ein t linear unabhängig, so gilt dies auch für alle anderen Zeiten in einem Intervall, in dem $A(t)$ stetig ist.

3.3. Inhomogene lineare Systeme.

Bemerkung 3.3.1. Wir wollen das System

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

für stetige Funktionen $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$ lösen. Sei $X(t)$ die Lösungsmatrix des homogenen Systems $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ und $X(t_0) = \mathbf{1}$. Wie bei der Variation der Konstanten machen wir einen Ansatz

$$x(t) = X(t) \cdot v(t)$$

und versuchen, den im homogenen Fall konstanten Vektor v so zu wählen, dass wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anfangswert x_0 erhalten. Es ist

$$Ax + b \stackrel{!}{=} \dot{x} = \dot{X}v + X\dot{v} = AXv + X\dot{v}.$$

Also sollte $b = X\dot{v}$ gelten. Setze daher $v(t) := x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau$. Somit ist die Lösung durch

$$x(t) = X(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau \right)$$

gegeben, denn man rechnet nach, dass diese Formel eine Lösung liefert.

3.4. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Definition 3.4.1. Eine Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Matrizen und eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ heißen verträglich, wenn

- (i) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- (ii) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Beispiele 3.4.2.

- (i) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$ und $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}^i)^2}$, siehe [3, vor Lemma 1.23]. Mit dieser Norm ist $\mathbb{R}^{n \times n}$ ein vollständiger normierter Raum, d. h. ein Banachraum, jede Cauchyfolge konvergiert also.

Ebenso gilt, dass jeder normierte endlichdimensionale $\mathbb{R}$ - oder $\mathbb{C}$ -Vektorraum ein Banachraum ist, denn für endlichdimensionale Vektorräume sind alle Normen äquivalent, d. h. für beliebige Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gibt es ein $C > 0$ mit

$$\frac{1}{C} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1$$

für alle x .

- (ii) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Definiere

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Hier ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ für $\|x\| = 1$ nach Definition klar und folgt sonst durch Skalierung. Wegen $\|Bx\| \leq \|B\|$ für alle $\|x\| = 1$ und

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

erhalten wir

$$\|A \cdot B\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|y\|=\|B\|} \|Ay\| = \|B\| \cdot \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Lemma 3.4.3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ differenzierbar, ebenso $B(t)$ und $I \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind auch die folgenden Ausdrücke differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(t)B(t)) &= \frac{d}{dt}A(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \frac{d}{dt}B(t), \\ \frac{d}{dt}(A(t)x(t)) &= \frac{d}{dt}A(t) \cdot x(t) + A(t) \cdot \frac{d}{dt}x(t). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Produktregel, angewandt auf die Definition der entsprechenden Matrixprodukte. $\square$

Wir wollen e^A , A eine Matrix, bestimmen und auch ableiten. Dies kann man in diesem konkreten Fall explizit machen, indem man den eindimensionalen Beweis anpasst. Das folgende Theorem liefert eine allgemeine Methode dafür. Eindimensional wurde es bereits in [3, Proposition 3.32] bewiesen.

Theorem 3.4.4. *Seien E, F Banachräume, $\Omega \subset E$ offen und zusammenhängend. Sei (f_n) eine Folge differenzierbarer Abbildungen $f_n: \Omega \rightarrow F$. Gelte:*

- (i) *Es gibt $x_0 \in \Omega$, so dass $f_n(x_0)$ in F konvergiert.*
- (ii) *Zu jedem Punkt $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $B_r(x) \subset \Omega$, so dass (f'_n) gleichmäßig konvergiert.*

Dann konvergiert die Folge (f_n) in jeder solchen Umgebung $B_r(x)$ gleichmäßig. Für $x \in \Omega$ gilt

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Beide Voraussetzungen sind nötig; Gegenbeispiele sind die Funktionenfolgen

$$f_n(x) = n \quad \text{und} \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Beim zweiten Beispiel ist f'_n sogar gleichmäßig beschränkt, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{n} \equiv 0$ ist differenzierbar, aber der Grenzwert der Ableitungen $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx)$ existiert nicht.

Beweis. Für $y, z \in B_r(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f_n(y) - f_m(y) - (f_n(z) - f_m(z))\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dt} (f_n - f_m)(ty + (1-t)z) dt \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 (f'_n - f'_m)(ty + (1-t)z) \langle y - z \rangle dt \right\| \\ &\leq \|z - y\| \cdot \sup_{w \in B_r(x)} \|f'_n(w) - f'_m(w)\| \\ (3.2) \quad &\leq 2r \cdot \sup_{w \in B_r(x)} \|f'_n(w) - f'_m(w)\|. \end{aligned}$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung können wir die linke Seite nach unten mit $\dots \geq \| \|f_n(y) - f_m(y)\| - \|f_n(z) - f_m(z)\| \|$ abschätzen. Wir erhalten

$$\|f_n(y) - f_m(y)\| \leq 2r \cdot \sup_{w \in B_r(x)} \|f'_n(w) - f'_m(w)\| + \|f_n(z) - f_m(z)\|.$$

Konvergiert $f_n(z)$ für $n \rightarrow \infty$, so konvergiert daher f_n gleichmäßig in $B_r(x)$.

Dies liefert, dass die Menge der Punkte x , in der $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert, in Ω offen, abgeschlossen und nicht leer ist. Somit konvergiert f_n in ganz Ω . (Dies benötigt etwas Topologie oder ein elementares Argument für $E = \mathbb{R}$.)

Wir definieren

$$f(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \quad \text{und} \quad g(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(y).$$

Zur Vertauschbarkeit der Grenzwertbildung mit der Ableitung: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine Kugel $B_r(x)$ wie in der Annahme. Dann gibt es ein n_0 , so dass für alle $m, n \geq n_0$ die Abschätzung $\|f'_n(w) - f'_m(w)\| \leq \varepsilon$ für alle $w \in B_r(x)$ gilt. Sei weiterhin n so groß, dass $\|g(x) - f'_n(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $a \in B_r(x)$ gilt. In (3.2) betrachten wir den Grenzwert $m \rightarrow \infty$ und erhalten für $n \geq n_0$ in $B_r(x)$

$$\|f(y) - f(z) - (f_n(y) - f_n(z))\| \leq \varepsilon \cdot \|y - z\|.$$

Nach Definition der Ableitung im Punkt x gibt es zu jedem $n \geq n_0$ ein $r' \leq r$, so dass für $y \in B_{r'}(x)$ die Abschätzung $\|f_n(y) - f_n(x) - f'_n(x) \langle y - x \rangle\| \leq \varepsilon \cdot \|y - x\|$

gilt. Für $\|y - x\| \leq r'$ erhalten wir daher mit Hilfe der obigen Ungleichungen und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x) - g(x)\langle y - x \rangle\| &\leq \|f(y) - f(x) - (f_n(y) - f_n(x))\| \\ &\quad + \|f_n(y) - f_n(x) - f'_n(x)\langle y - x \rangle\| \\ &\quad + \|f'_n(x) - g(x)\| \cdot \|y - x\| \\ &\leq 3\varepsilon \cdot \|y - x\|. \end{aligned}$$

Wir haben für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $r' > 0$ gefunden, so dass $\|f(y) - f(x) - g(x)\langle y - x \rangle\| \leq \varepsilon \cdot \|y - x\|$ für $y \in B_{r'}(x)$ gilt. Damit ist $g(x) = f'(x)$. Die Behauptung folgt. $\square$

Korollar 3.4.5. Sei $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ eine Potenzreihe, die in $B_r(0)$ konvergiert. Sei $I \ni t \rightarrow A(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ differenzierbar mit $\|A(t)\| < r$ für alle $t \in I$ für eine verträgliche Norm $\|\cdot\|$. Gelte

$$A(t)\dot{A}(t) - \dot{A}(t)A(t) = [A(t), \dot{A}(t)] = 0.$$

(Ohne diese Bedingung sieht die Ableitung deutlich komplizierter aus.) Dann existiert

$$g(A(t)) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i A^i(t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i(t),$$

ist in I differenzierbar und die Ableitung erfüllt

$$\frac{d}{dt}g(A(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i a_i A^{i-1}(t) \dot{A}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i A^{i-1}(t) \dot{A}(t).$$

Beweis. Hierbei ist A^i induktiv durch $A^0 = \mathbf{1}$ und $A^{i+1} := A \cdot A^i$ definiert. Wir wollen Theorem 3.4.4 anwenden. Setze

$$f_n(t) := \sum_{i=0}^n a_i A^i(t).$$

(i) Es gilt für $m > n$

$$\|f_m(t) - f_n(t)\| = \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i A^i(t) \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m |a_i| \|A(t)\|^i.$$

Wegen $\|A(t)\| < r$ und da die Potenzreihe für reelle x absolut konvergiert, ist $(f_n(t))$ für festes $t \in I$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^{N \times N}, \|\cdot\|)$. Da $(\mathbb{R}^{N \times N}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

(ii) Es gilt aufgrund der Produktregel

$$\frac{d}{dt}f_n(t) \equiv f'_n(t) = \sum_{i=1}^n i a_i A^{i-1}(t) \dot{A}(t),$$

da $A(t)$ und $\dot{A}(t)$ vertauschen. Wie oben sieht man, dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) =: h(t)$ existiert, da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzradiuses differenzierbar sind und die Ableitung durch die absolut konvergente Potenzreihe der Ableitungen der Summanden gegeben ist. Sei t in einem

Intervall J , in dem $\|A(t)\| \leq r_0 < r$ gilt. Dort gilt für $m > n$

$$\begin{aligned} \|f'_m(t) - f'_n(t)\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^m i a_i A^{i-1}(t) \dot{A}(t) \right\| \leq \left\| \sum_{i=n+1}^m i a_i A^{i-1}(t) \right\| \cdot \|\dot{A}(t)\| \\ &\leq \left(\sum_{i=n+1}^m i \|a_i\| \|A(t)\|^{i-1} \right) \cdot \|\dot{A}(t)\|. \end{aligned}$$

Wegen $\|A(t)\| \leq r_0$ und der gleichmäßigen absoluten Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^i$ auf $\overline{B_{r_0}(0)}$ konvergiert auch f'_n für $t \in J$ gleichmäßig: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so dass für alle $m > n \geq n_0$ die Abschätzung $\|f'_m(t) - f'_n(t)\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in J$ gilt. Mit $m \rightarrow \infty$ sieht man, dass f'_n gleichmäßig gegen ein $h(t)$ konvergiert.

Nach Theorem 3.4.4 erhalten wir also

$$\frac{d}{dt} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dt} f_n(t) \right)$$

und die Behauptung folgt. $\square$

Korollar 3.4.6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} A = A e^{tA}.$$

Beweis. Für die zweite Darstellung schreibt man $\dot{A}(t)$ im Beweis der Ableitungsregeln für Potenzreihen auch bei f'_n bereits nach links. $\square$

Lemma 3.4.7. Seien $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

- (i) $e^{B+C} = e^B \cdot e^C$, falls $BC = CB$,
- (ii) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,
- (iii) $e^{(s+t)A} = e^{sA} + e^{tA}$ für $s, t \in \mathbb{R}$,
- (iv) $e^{A+\lambda \mathbf{1}} = e^\lambda \cdot e^A$ für $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (v) $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C$, falls C invertierbar ist,
- (vi) $e^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Beweis.

- (i) e^B und e^C konvergieren absolut. Daher dürfen wir die Reihen gliedweise miteinander multiplizieren (Beweis wie im Reellen) und erhalten

$$\begin{aligned} e^B \cdot e^C &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B^p}{p!} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{C^q}{q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B^k C^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B^k C^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B+C)^n}{n!} = e^{B+C}. \end{aligned}$$

- (ii) Folgt aus (i) mit der Rechnung

$$\mathbf{1} = e^0 = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A}.$$

- (iii) Dies folgt unmittelbar aus (i).
- (iv) Dies folgt ebenso aus (i), da $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A$ gilt.
- (v) Per Induktion erhält man $(C^{-1}BC)^k = C^{-1}B^k C$ für alle k . Dies setzt man in die Anfangsstücke der Potenzreihe ein und erhält die Behauptung durch Grenzübergang.
- (vi) Dies funktioniert analog, denn per Induktion erhält man

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

$\square$

3.5. Systeme mit konstanten Koeffizienten. Analog zum eindimensionalen Fall erhalten wir

Lemma 3.5.1. *Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

die Lösung

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Für $A = A(t)$ funktioniert solch ein Vorgehen, mit $(t - t_0)A$ durch ein Integral ersetzt, falls alle Matrizen $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, kommutieren.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Es gilt

$$\dot{x}(t) = e^{A(t-t_0)}Ax_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t)$$

und der Anfangswert ist wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 3.5.2. Lässt sich A mit Hilfe einer invertierbaren Matrix B auf eine einfache Gestalt $C = BAB^{-1}$ bringen, so können wir $e^A = B^{-1}e^CB$ einfacher bestimmen, z. B. wenn C eine Diagonalmatrix ist.

Ist A eine Matrix, die aus genau einem Jordankästchen besteht, so können wir e^A wie folgt ausrechnen: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv D + N. \end{aligned}$$

Per Induktion folgt, dass $N^k = \binom{k}{j} m_j^i$, $k \geq 1$, mit $m_j^i = \delta_j^{i+k}$ gilt. N^k ist also eine Matrix, die in der k -ten oberen Nebendiagonalen Einsen und sonst Nullen enthält. Die Matrizen D und N kommutieren, somit auch D und alle Potenzen N^k , sowie beliebige Potenzen N^k untereinander. Beachte auch, dass $N^i = 0$ für alle $i \geq n$ gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tD+tN} = e^{tD} \cdot e^{tN} = e^{t\lambda} \mathbf{1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i N^i}{i!} \right) \\ &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & \ddots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Besteht A (oder C) aus mehreren Jordankästchen, so ist für jeden Block entsprechend zu verfahren.

Differentialgleichungen höherer Ordnung sind wie üblich zunächst als Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung umzuschreiben.

4. NUMERIK GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir benutzen [8] und beschränken uns auf den Fall einer skalaren Differentialgleichung. Mehr Details gibt es in einer Numerikveranstaltung über gewöhnliche Differentialgleichungen.

4.1. Begriffe.

Bemerkung 4.1.1 (Explizites Eulerverfahren). Man ersetzt die Ableitung $\dot{u}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$ in einer Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ durch eine diskrete Approximation, z. B. $\frac{u(t+h) - u(t)}{h}$, $h \neq 0$. Damit erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{u_h(t+h) - u_h(t)}{h} &= f(t, u_h(t)), \\ u_h(t+h) &= u_h(t) + h \cdot f(t, u_h(t)). \end{aligned}$$

Diese löst man von einem Startwert $u_h(t_0) = x_0$ ausgehend für $t_0 + h, t_0 + 2h, t_0 + 3h, \dots$

Bemerkung 4.1.2.

- (i) Ein Verfahren der Form

$$u_h(t+h) := u_h(t) + h \cdot \varphi_h(t, u_h(t), u_h(t+h))$$

heißt Einschrittverfahren. Bei Mehrschrittverfahren hängt $u_h(t+h)$ zusätzlich noch von weiteren Werten $u_h(t-h), \dots, u_h(t-kh)$ ab. Hängt φ_h nicht von $u_h(t+h)$ ab, so heißt das Verfahren explizit, sonst implizit.

- (ii) Sei $u(t)$ eine exakte Lösung. Die Größe

$$\tau_h := \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \varphi_h(t, u(t), u(t+h))$$

heißt lokaler Diskretisierungsfehler.

- (iii) Ein Einschrittverfahren heißt konsistent, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_h(t, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{u(t+h) - u(t)}{h}}_{=\dot{u}(t)=f(t, u(t))} - \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h(t, u(t), u(t+h)) \rightarrow 0$$

für die Lösung u gilt, oder, äquivalent dazu,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h(t, u(t), u(t+h)) = f(t, u(t))$$

für die Lösung u gilt.

Das Eulerverfahren ist nach Definition konsistent.

- (iv) Gilt $\tau_h(t, u) = O(h^p)$ für $|h| \rightarrow 0$ und $u \in C^p$, so heißt ein Verfahren von der Ordnung p . Dabei schreiben wir $g(h) = O(h^p)$ für eine Funktion g , wenn es ein $C > 0$ und ein $h_0 > 0$ mit $|g(h)| \leq C \cdot |h|^p$ für alle $|h| \leq h_0$ gibt.

Für das Eulerverfahren erhalten wir für $u \in C^p$ mit Taylorentwicklung

$$u(t+h) = u(t) + h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{u}(t) + \dots + \frac{h^p}{p!}u^{(p)}(t) + \vartheta h$$

für ein $0 \leq \vartheta \leq 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(t, u(t)), \\ \ddot{u}(t) &= \frac{d}{dt}f(t, u(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))\dot{u}(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))f(t, u(t)). \end{aligned}$$

Durch weiteres Differenzieren kann man auch die höheren Ableitungen von u durch f und Ableitungen davon ausdrücken. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \dot{u}(t) + \frac{h}{2!}\ddot{u}(t) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}u^{(p)}(t) + \vartheta h \\ &= f(t, u) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))f(t, u(t)) \right) + \dots\end{aligned}$$

und somit bekommen wir beim expliziten Eulerverfahren

$$\begin{aligned}\tau_h(t, u) &= \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \varphi_h(t, u(t)) \\ &= \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))f(t, u(t)) \right) + \dots = O(h),\end{aligned}$$

das Eulerverfahren ist also ein Verfahren erster Ordnung.

4.2. Konvergenz von Einschrittverfahren.

Definition 4.2.1.

- (i) Sei $u(t)$ eine exakte Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, u_h die durch ein Einschrittverfahren bestimmte diskrete Lösung. Dann heißt

$$e_h(t_i) := u_h(t_i) - u(t_i),$$

$t_i = t_0 + ih$, globaler Diskretisierungsfehler.

- (ii) Ein Einschrittverfahren heißt konvergent, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_h(t) = 0$$

für alle t gilt. Ist t fest, so ist die Folge der h 's so zu wählen, dass $e_h(t)$ definiert ist.

Für die Konvergenzaussage des diskreten Verfahrens benötigen wir ein technisches Lemma.

Lemma 4.2.2. Sei $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\xi_i \geq 0$ für alle i . Gibt es Konstanten $\delta > 0$ und $b \geq 0$, so dass

$$\xi_{i+1} \leq (1 + \delta)\xi_i + b$$

für alle i gilt, so folgt

$$\xi_i \leq e^{i\delta}\xi_0 + b \cdot \frac{e^{i\delta} - 1}{\delta}.$$

Beweis. Wir erhalten induktiv

$$\begin{aligned}\xi_1 &\leq (1 + \delta)\xi_0 + b, \\ \xi_2 &\leq (1 + \delta)\xi_1 + b \leq (1 + \delta)^2\xi_0 + (1 + \delta)b + b \\ \xi_i &\leq (1 + \delta)^i\xi_0 + b(1 + (1 + \delta) + (1 + \delta)^2 + \dots + (1 + \delta)^{i-1}) \\ &= (1 + \delta)^i\xi_0 + b \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (1 + \delta)^j.\end{aligned}$$

Wir benutzen eine Teleskopsumme und erhalten die Abschätzung

$$\sum_{j=0}^{i-1} (1 + \delta)^j = \frac{1 - (1 + \delta)^i}{1 - (1 + \delta)} = \frac{(1 + \delta)^i - 1}{\delta}.$$

Mit $1 + \delta \leq e^\delta$ der Folgerung $(1 + \delta)^i \leq (e^\delta)^i = e^{\delta i}$ daraus folgt nun die Behauptung. $\square$

Für das diskrete Verfahren erhalten wir die folgende Konvergenzaussage:

Theorem 4.2.3. *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

und das explizite Einschrittverfahren

$$\begin{cases} u_h(t+h) = u_h(t) + h \cdot \varphi_h(t, u(t)), \\ u_h(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Sei $h > 0$. Erfülle $\varphi_h = \varphi_h(t, u(t))$ (der Einfachheit halber) für alle $v_i \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ und die Lösung $u \in C^p$, $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\varphi_h(t, v_1) - \varphi_h(t, v_2)| &\leq L \cdot |v_1 - v_2|, \\ |\tau_h(t, u)| &\leq C \cdot h^p \end{aligned}$$

für Konstanten $C, L > 0$. Dann gilt für $t > t_0$ mit $t = t_0 + ih$, $i \in \mathbb{N}$,

$$|e_h(t)| \leq h^p \cdot C \cdot \frac{e^{L \cdot (t-t_0)} - 1}{L}.$$

Vergleiche dies mit dem Lemma von Gronwall im kontinuierlichen Fall.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} e_h(t+h) &= u_h(t+h) - u(t+h) \\ &= u_h(t) + h \cdot \varphi_h(t, u_h(t)) - u(t+h) \\ &= e_h(t) + h \cdot \varphi_h(t, u_h(t)) - h \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\ &= e_h(t) + h \cdot \underbrace{(\varphi_h(t, u_h(t)) - \varphi_h(t, u(t)))}_{\leq L \cdot |u_h(t) - u(t)| = L \cdot |e_h(t)|} \\ &\quad + h \cdot \underbrace{\left(\varphi_h(t, u(t)) - \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right)}_{=\tau_h}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} |e_h(t+h)| &\leq |e_h(t)| + h \cdot L \cdot |e_h(t)| + Ch^{p+1} \\ &= (1 + h \cdot L) \cdot |e_h(t)| + Ch^{p+1}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzungen verwenden wir nun in Lemma 4.2.2 mit $\xi_i = |e_h(t_0 + ih)|$ und erhalten $\xi_0 = |e_h(t_0)| = 0$ und daher

$$|e_h(t_i)| \leq Ch^{p+1} \frac{e^{ihL} - 1}{hL} = Ch^p \frac{e^{ihL} - 1}{L}.$$

Für $t = t_0 + ih \equiv t_i$ folgt daraus

$$|e_h(t)| \leq Ch^p \frac{e^{(t-t_0)L} - 1}{L}$$

wie behauptet. $\square$

Dieses Theorem liefert insbesondere, dass u_h für $h \searrow 0$ an den Stellen, an denen es definiert ist, gegen die tatsächliche Lösung der Differentialgleichung konvergiert. Interpolieren wir zwischen den Stellen, an denen u_h definiert ist, linear, so erhalten wir eine Approximation, die lokal in C^0 gegen eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung konvergiert.

5. STABILITÄT

5.1. Stabilität linearer Systeme. In einer Vorlesung über dynamische Systeme beschäftigt man sich mit dem Verhalten von Lösungen. Wir werden Stabilitätsfragen nur im generischen Fall einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung in zwei Raumdimensionen betrachten.

Definition 5.1.1. Sei $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ eine gewöhnliche Differentialgleichung.

- (i) Ein Punkt x_0 heißt stationär, wenn jede Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ für ein beliebiges $t_0 \in I$, I ein Intervall, $x(t) \equiv x_0$ für alle $t \in I$ erfüllt.

Ist f im zweiten Argument Lipschitz, so ist x_0 genau dann stationär, falls $f(t, x_0) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

- (ii) Ein stationärer Punkt x_0 heißt stabil (vereinfachte Definition im linearen Fall), falls jede Lösung $x(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

erfüllt.

- (iii) Andere stationäre Punkte heißen instabil.

Die Definitionen sind hier nicht überall einheitlich.

Bemerkung 5.1.2. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Sei $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ein generisches zweidimensionales lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Generisch bedeutet hier, dass das charakteristische Polynom von A in $\mathbb{C}[X]$ keine doppelten Nullstellen hat und 0 kein Eigenwert ist. Somit ist A diagonalisierbar und 0 der einzige stationäre Punkt.

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^2$ die (möglicherweise komplexen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Ist ein Eigenwert nicht reell, so gilt $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$, die Eigenwerte sind also komplex konjugiert zueinander, da sonst das charakteristische Polynom keine reellen Koeffizienten hätte. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ die Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 . Dann lösen $y_1(t) := e^{\lambda_1 t} x_1$ und $y_2(t) := e^{\lambda_2 t} x_2$ die Differentialgleichung und bilden ein Fundamentalsystem.

Es treten die folgenden Fälle auf:

- (i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: 0 ist stabil.
(ii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ oder umgekehrt: 0 ist instabil, Lösungen laufen entlang von Kurven, die im Fall $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ Hyperbeln sind. (Phasenportrait zeichnen.)
(iii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: 0 ist instabil.
(iv) $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:
(a) $\lambda_1 = ir, \lambda_2 = -ir, r \in \mathbb{R}$: Komplexe Lösungen sind $e^{irt} x_1 \equiv e^{irt}(a + ib)$ und $e^{-irt}(a - ib)$, $a, b \in \mathbb{R}^2$ da aus $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ direkt $A\bar{x}_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{x}_1$ folgt. Eine reelle Fundamentallösung ist durch

$$\begin{aligned} e^{irt}(a + ib) + e^{-irt}(a - ib) &= (\cos(rt) + i \sin(rt))(a + ib) \\ &\quad + (\cos(rt) - i \sin(rt))(a - ib) \\ &= 2 \cos(rt)a - 2 \sin(rt)b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} i(e^{irt}(a + ib) - e^{-irt}(a - ib)) &= (-\sin(rt) + i \cos(rt))(a + ib) \\ &\quad + (-\sin(rt) - i \cos(rt))(a - ib) \\ &= -2 \sin(rt)a - 2 \cos(rt)b \\ &= 2 \cos\left(rt + \frac{\pi}{2}\right)a - 2 \sin\left(rt + \frac{\pi}{2}\right)b. \end{aligned}$$

gegeben. Lösungen „rotieren“ also um den Ursprung herum.

- (b) Gilt $\lambda_1 = s + ir$, $\lambda_2 = s - ir$, so erhalten wir dieselben Lösungen wie im Falle $s = 0$, jedoch mit e^{st} multipliziert. Lösungen „schrauben“ sich also um den Ursprung herum und nähern sich ihm, falls $s < 0$ gilt und entfernen sich für $s > 0$.

Bemerkung 5.1.3. Bei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen heißt ein stationärer Punkt linear stabil, falls x_0 ein stabiler Punkt der affin linearen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = df(x_0)\langle x(t) - x_0 \rangle$ ist. Dies ist äquivalent zur Stabilität von 0 für $y(t) := x(t) - x_0$ unter der linearen Differentialgleichung $\dot{y}(t) = df(x_0)\langle y(t) \rangle$.

Bemerkung 5.1.4. Im nichtlinearen Fall kann man Stabilität mit Hilfe von Lyapunovfunktionen untersuchen. Eine Lyapunovfunktion ist eine Funktion L , die

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) \leq 0$$

erfüllt. Hiermit kann man unter geeigneten Voraussetzungen folgern, dass $x(t)$ gegen ein Minimum von L konvergiert.

Beispiel: Sei $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in C^1 . Dann erfüllt eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -\nabla L(x(t))$

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) = \nabla L(x(t))\langle \dot{x}(t) \rangle = -\nabla L(x(t))\langle \nabla L(x(t)) \rangle = -\|\nabla L(x(t))\|^2 \leq 0.$$

6. RAND- UND EIGENWERTPROBLEME

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir erinnern daran, dass $C^k(\Omega)$ für $k = 0, 1, \dots, \infty$ der Raum aller k -fach (beliebig oft, falls $k = \infty$) in Ω stetig differenzierbaren Funktionen ist. $C^k(\bar{\Omega})$ ist der Raum aller dieser Funktionen, deren (partielle) Ableitungen bis zur Ordnung k sich stetig und beschränkt auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen lassen. Ist $k < \infty$, so verstehen wir ihn mit der C^k -Norm $\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \|D^\alpha u\|_{C^0(\Omega)}$, wobei $\|u\|_{C^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ die Supremumsnorm und α ein Multiindex ist. Vergleiche [5].

6.1. Charakteristische Matrix. Die Schwingung einer Membran oder Seite wird durch

$$\frac{d^2}{dt^2}u(x, t) = \Delta u(x, t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschrieben. Der Ansatz $u(x, t) = \alpha(t)v(x)$ führt zu der Gleichung

$$\ddot{\alpha} \cdot v = \alpha \Delta v.$$

Für eine schwingende nicht gedämpfte Seite ist $\alpha(t) = \sin(\mu(t - t_0))$, also $\ddot{\alpha} = -\mu^2 \alpha$. Als Gleichung im Ort erhält man mit $\lambda = \mu^2$

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 & \text{in } (a, b), \\ v(a) = v(b) = 0. \end{cases}$$

Lösungen sind die Funktionen $v(x) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, für $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}$.

Bemerkung 6.1.1. Wir hatten gesehen, dass das System

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t),$$

$F \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{n \times n})$, $g \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit einer Fundamentalmatrix

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t)$$

des inhomogenen Systems die Lösung

$$x(t) = X(t)d + X(t) \left(\int_a^t X^{-1}(\tau)g(\tau) d\tau \right)$$

besitzt.

Dies bleibt auch auf dem abgeschlossenen Intervall richtig, man kann die Daten nämlich stetig über $[a, b]$ hinaus fortsetzen.

Theorem 6.1.2. Seien $F \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{n \times n})$, $g \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t), \\ Ax(a) + Bx(b) = c. \end{cases}$$

Sei X eine Fundamentalmatrix des zugehörigen linearen Systems. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Das Randwertproblem ist für beliebige $g \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ und $c \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
- (ii) Die charakteristische Matrix $C_X := AX(a) + BX(b)$ ist invertierbar.
- (iii) Das zugehörige homogene Randwertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t), \\ Ax(a) + Bx(b) = 0 \end{cases}$$

besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.

Beweis. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems hat die Form

$$x(t) = X(t)d + X(t) \left(\int_a^t X^{-1}(\tau)g(\tau) d\tau \right).$$

Wir setzen dies in die Randbedingung ein und erhalten

$$(6.1) \quad \underbrace{(AX(a) + BX(b))}_{=C_X} d + BX(b) \int_a^b X^{-1}(\tau)g(\tau) d\tau = c.$$

Dies ist für beliebige $c \in \mathbb{R}^n$ genau dann nach d auflösbar, wenn C_X regulär ist.

Im Spezialfall $g \equiv 0$ und $c = 0$ erhält man eine Bedingung dafür, dass eine Lösung der homogenen Differentialgleichung existiert. Sie ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es nur ein d gibt, das die Bedingung erfüllt. Aus $(AX(a) + BX(b))d = C_X d = 0$ sieht man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn C_X regulär und damit invertierbar ist. $\square$

6.2. Die Greensche Funktion. Wir betrachten wieder das Randwertproblem

$$(6.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t) & \text{in } [a, b], \\ Ax(a) + Bx(b) = 0. \end{cases}$$

Theorem 6.2.1. Sei C_X invertierbar. Dann existiert eine Abbildung

$$G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

die Greensche Matrix, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Einschränkungen von G auf $\{(t, s): a \leq t < s \leq b\}$ („oberhalb der Diagonalen“) und $\{(t, s): a \leq s \leq t \leq b\}$ sind stetig.
- (ii) Für $a < t < b$ gilt

$$\lim_{\tau \searrow t} G(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} G(\tau, t) = \mathbf{1}.$$

(iii) Sei $g \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)g(s) ds$$

eine Lösung des Randwertproblems (6.2).

Beweis. In der bisherigen Notation ist die eindeutige Lösung von (6.2) durch

$$x(t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(\tau)g(\tau) d\tau + X(t)d \equiv x_0(t) + X(t)d$$

mit $d := -C_X^{-1}Bx_0(b)$ gegeben (beachte (6.1)). Ausgeschrieben bedeutet das

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_a^t X(t)X^{-1}(s)g(s) ds - X(t)C_X^{-1}B \int_a^b X(b)X^{-1}(s)g(s) ds \\ &\equiv \int_a^b G(t, s)g(s) ds \end{aligned}$$

mit

$$G(t, s) := \begin{cases} (X(t) - X(t)C_X^{-1}BX(b))X^{-1}(s) \\ = X(t)(\mathbf{1} - C_X^{-1}BX(b))X^{-1}(s), & a \leq s \leq t \leq b, \\ -X(t)C_X^{-1}BX(b)X^{-1}(s), & a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

(i) Die Stetigkeit ist klar.

(ii) Es gilt

$$\lim_{\tau \searrow t} G(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} G(\tau, t) = \mathbf{1} - X(t)C_X^{-1}BX(b)X^{-1}(t) + X(t)C_X^{-1}BX(b)X^{-1}(t) = \mathbf{1}.$$

(iii) Gilt nach Definition von G . $\square$

Bemerkung 6.2.2. Aus $C_X = AX(a) + BX(b)$ erhalten wir $\mathbf{1} - C_X^{-1}BX(b) = C_X^{-1}AX(a)$ und daher eine weitere Darstellung von G

$$G(t, s) = \begin{cases} X(t)C_X^{-1}AX(a)X^{-1}(s), & a \leq s \leq t \leq b, \\ -X(t)C_X^{-1}BX(b)X^{-1}(s), & a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

Die Werte auf der Diagonalen $\Delta = \{(t, t) : t \in [a, b]\}$ sind beliebig, da sie bei der Integration keine Rolle spielen.

Lemma 6.2.3. Seien die Voraussetzungen wie in Theorem 6.2.1, insbesondere sei C_X invertierbar.

Folgende vier Eigenschaften bestimmen die Greensche Funktion außerhalb der Diagonalen eindeutig:

(i) G ist auf $[a, b]^2 \setminus \Delta$ stetig,

(ii) Für $a < t < b$ gilt

$$\lim_{\tau \searrow t} G(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} G(\tau, t) = \mathbf{1}.$$

(iii) Für jedes feste $s \in [a, b]$ löst $G(\cdot, s)$ die homogene Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, s) = F(t)G(t, s)$$

für $t \in [a, b] \setminus \{s\}$.

(iv) Für jedes feste $s \in (a, b)$ erfüllt $G(\cdot, s)$ die homogenen Randbedingungen $AG(a, s) + BG(b, s) = 0$.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei G eine Greensche Funktion wie in Theorem 6.2.1.

- (i) Die Stetigkeit folgt aus Theorem 6.2.1.
- (ii) Die Grenzwertbeziehung folgt ebenso aus 6.2.1.
- (iii) Für $t < s$ oder $t > s$ ist $G(t, s)$ von der Form $X(t)S(s)$ für eine Matrix $S(s)$. Da $X(t)$ eine Fundamentalmatrix ist, folgt die Behauptung.
- (iv) Sei $s \in (a, b)$ fest. Dann folgt mit $C_X = BX(b) + AX(a)$

$$\begin{aligned} AG(a, s) + BG(b, s) &= A \left(-X(a)C_X^{-1}BX(b)X^{-1}(s) \right) \\ &\quad + B \left(X(b)C_X^{-1}AX(a)X^{-1}(s) \right) \\ &= \left[-AX(a)C_X^{-1}(C_X - AX(a)) \right. \\ &\quad \left. + (C_X - AX(a))C_X^{-1}AX(a) \right] X^{-1}(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

„ $\impliedby$ “: Sei $\tilde{G}$ eine weitere Funktion, die diese Eigenschaften besitzt. Setze $H := G - \tilde{G}$. Da beide Funktionen dieselbe Sprungbedingung für $s = t$ erfüllen, lässt sich H stetig auf ganz $[a, b]^2$ fortsetzen. Nehme dies an. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} H(t, s) = F(t)H(t, s)$$

ist ebenso für alle t erfüllt. $H(t, s)$ erfüllt die Randbedingungen

$$AH(a, s) + BH(b, s) = 0$$

für alle $a < s < b$. Da C_X invertierbar ist, gilt nach Theorem 6.1.2 $H(t, s) = 0$ für alle $a < s < t$. Da H stetig ist, folgt überall – bis auf die Diagonale – $G = \tilde{G}$. $\square$

6.3. Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung. Indem man gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen schreibt, erhält man analoge Aussagen auch für diese Gleichungen.

Betrachte die Gleichung

$$(6.3) \quad \begin{cases} f_0(t)u^{(n)}(t) + f_1(t)u^{(n-1)}(t) + \dots + f_n(t)u(t) = \gamma(t) & \text{in } [a, b], \\ R^i u := \sum_{j=1}^n \alpha_j^i u^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^n \beta_j^i u^{(j-1)}(b) = \gamma^i, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

mit $a < b$, $f_0, \dots, f_n, \gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, $f_0(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$, und $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma^i \in \mathbb{R}$. Wir schreiben dies als System

$$(6.4) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = F(t)x(t) + g(t) & \text{in } [a, b], \\ Ax(a) + Bx(b) = c \end{cases}$$

mit

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{f_n}{f_0}(t) & \dots & \dots & \dots & -\frac{f_2}{f_0}(t) & -\frac{f_1}{f_0}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\gamma}{f_0}(t) \end{pmatrix},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$A = (\alpha_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad B = (\beta_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{und} \quad c = (\gamma^i)_{1 \leq i \leq n}.$$

Theorem 6.3.1. *Angenommen, das homogene System (6.4) mit $\gamma = 0$, $\gamma^i = 0$, $1 \leq i \leq n$ besitze nur die triviale Lösung $x \equiv 0$. Dann gibt es eine Funktion $G: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die in $[a, b]^2 \setminus \Delta$ stetig ist, so dass*

$$u(t) := \int_a^b G(t, s) \gamma(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

die Differentialgleichung in (6.3) mit homogenen Randbedingungen $R^i u = 0$, $1 \leq i \leq n$, löst. G heißt Greensche Funktion des Randwertproblems.

Beweis. Sei M die Greensche Matrix des zugehörigen linearen Systems erster Ordnung. Wir haben gezeigt, dass dann

$$x(t) = \int_a^b M(t, s) g(s) ds$$

eine Lösung dieses Systems ist. Aus den Einträgen von x und g folgt, dass wir $G(t, s)$ als den Eintrag in der rechten oberen Ecke von $M(t, s)$, dividiert durch $f_0(s)$, also $G(t, s) = \frac{M_{n,1}^1(t, s)}{f_0(s)}$, wählen können. $\square$

Lemma 6.3.2. *Sei $n > 1$. Angenommen, das homogene System zu (6.4) besitze nur die triviale Lösung. Dann ist die Greensche Funktion $G: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zum Randwertproblem (6.3) durch die folgenden vier Eigenschaften eindeutig bestimmt:*

- (i) G ist stetig. Für festes $s \in [a, b]$ ist $G(\cdot, s) \in C^{n-2}([a, b], \mathbb{R})$.
- (ii) Für festes $s \in [a, b]$ ist $G(\cdot, s)$ in $[a, b] \setminus \{s\}$ sogar n -mal stetig differenzierbar und es gilt für $s \in (a, b)$

$$\lim_{\tau \searrow t} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} G(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} G(\tau, t) = \frac{1}{f_0(t)}.$$

- (iii) Für festes $s \in [a, b]$ löst $G(\cdot, s)$ die homogene Differentialgleichung in (6.3), d. h. $G(\cdot, s)$ erfüllt die Differentialgleichung mit $\gamma = 0$, in $[a, b] \setminus \{s\}$.
- (iv) Für festes $s \in [a, b]$ erfüllt $G(\cdot, s)$ die homogenen Randbedingungen in (6.3), d. h. $G(\cdot, s)$ erfüllt die Randbedingungen mit $\gamma^i = 0$.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei $M = (M_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ die Greensche Matrix. Daher gilt die folgende Differentialgleichung für $s \neq t$, die wir mehrfach im Beweis verwenden werden:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 & \dots & M_n^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & \dots & M_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1^n & M_2^n & \dots & M_n^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{f_n}{f_0}(t) & \dots & \dots & \dots & -\frac{f_2}{f_0}(t) & -\frac{f_1}{f_0}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 & \dots & M_n^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & \dots & M_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1^n & M_2^n & \dots & M_n^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist $G(t, s) = \frac{M_n^1(t, s)}{f_0(s)}$. Es folgt

$$\begin{aligned} M_n^2 &= \dot{M}_n^1, \\ M_n^3 &= \dot{M}_n^2 = \ddot{M}_n^1, \quad \dots, \\ M_n^n &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-1} M_n^1. \end{aligned}$$

- (i) Da $M_n^1(\cdot, s)$ für $t \neq s$ in C^1 ist, ist $M_n^1(\cdot, s)$ dort in C^n und es gibt von jeder Seite C^n -Fortsetzungen bis $t = s$. Induktiv erhalten wir überall, da M_j^i für $i \neq j$ für alle $s, t \in [a, b]$ stetig ist, $M_n^{n-2}(\cdot, s) \in C^1$, $M_n^{n-3}(\cdot, s) \in C^2$, $\dots$, $\frac{M_n^1(\cdot, s)}{f_0(s)} \equiv G(\cdot, s) \in C^{n-2}$.
- (ii) Sei $s \in (a, b)$, $t \in [a, b] \setminus \{s\}$. Die Differenzierbarkeit haben wir uns bereits überlegt. Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \searrow t} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} G(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} G(\tau, t) \\ &= \frac{1}{f_0(t)} \left(\lim_{\tau \searrow t} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} M_n^1(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} M_n^1(\tau, t) \right) = \dots \\ &= \frac{1}{f_0(t)} \left(\lim_{\tau \searrow t} M_n^n(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} M_n^n(\tau, t) \right) = \frac{1}{f_0(t)}. \end{aligned}$$

- (iii) Sei $s \in [a, b]$, $t \in [a, b] \setminus \{s\}$. Betrachte den Eintrag rechts unten bei der Matrizenmultiplikation $\dot{M}(t) = F(t)M(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_n^n &= -\frac{f_n}{f_0} M_n^1 - \frac{f_{n-1}}{f_0} M_n^2 - \dots - \frac{f_1}{f_0} M_n^n, \\ 0 &= f_0 \dot{M}_n^n + f_1 M_n^n + f_2 M_n^{n-1} + \dots + f_n M_n^1, \\ &= f_0 (M_n^1)^{(n)} + f_1 (M_n^1)^{(n-1)} + \dots + f_{n-1} (M_n^1)^{(1)} + f_n M_n^1. \end{aligned}$$

- (iv) Die Greensche Matrix erfüllt die homogenen Randbedingungen. Wie oben folgt auch hier aus der letzten Spalte der Gleichung $AM(a) + BM(b) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1^1 M_n^1(a) + \alpha_2^1 M_n^2(a) + \dots + \beta_1^1 M_n^1(b) + \dots \\ &= \alpha_1^1 M_n^1(a) + \alpha_2^1 (M_n^1)^{(1)}(a) + \dots + \beta_1^1 M_n^1(b) + \dots \equiv R^1 M_n^1, \\ 0 &= \alpha_1^2 M_n^1(a) + \alpha_2^2 M_n^2(a) + \dots + \beta_1^2 M_n^1(b) + \dots \\ &= \alpha_1^2 M_n^1(a) + \alpha_2^2 (M_n^1)^{(1)}(a) + \dots + \beta_1^2 M_n^1(b) + \dots \equiv R^2 M_n^1, \quad \dots \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Argumentiere wie beim entsprechenden Satz für Systeme. Benutze jedoch C^{n-1} -Funktionen statt stetiger Funktionen und die Differentialgleichung statt der Matrixdifferentialgleichung für die Greensche Matrix. $\square$

6.4. Sturm-Liouville Randwertprobleme. Wir betrachten Randwertprobleme der Form

$$(6.5) \quad \begin{cases} (Lx)(t) \equiv -\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}(t)) + q(t)x(t) = r(t) & \text{in } [a, b], \\ R^1 x \equiv \alpha_1^1 x(a) + \alpha_2^1 \dot{x}(a) = \gamma^1, \\ R^2 x \equiv \beta_1^2 x(b) + \beta_2^2 \dot{x}(b) = \gamma^2 \end{cases}$$

mit $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, $q, r \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ und $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma^i \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_1^1, \alpha_2^1) \neq 0$, $(\beta_1^2, \beta_2^2) \neq 0$. Solch ein Randwertproblem heißt Sturm-Liouville-sches Randwertproblem.

Theorem 6.4.1. *Nehme an, dass das homogene Randwertproblem zu (6.5) nur die triviale Lösung besitzt. Seien $\varphi, \psi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ mit $L\varphi = L\psi = 0$, $R^1\varphi = 0$, $R^2\varphi \neq 0$ und $R^1\psi \neq 0$, $R^2\psi = 0$. Sei*

$$W(t) \equiv W(\varphi, \psi)(t) := \varphi(t)\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t)\psi(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante der als System zweiter Ordnung geschriebenen Gleichung. Dann ist

$$G(t, s) := \begin{cases} -\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(t)\psi(s), & a \leq t \leq s \leq b, \\ -\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(s)\psi(t), & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

die Greensche Funktion von (6.5).

Beweis. Zur Existenz von φ und ψ : Fixiere $\varphi(a) \neq 0$ und $\varphi'(a)$ mit $R^1\varphi = 0$. Löse das zugehörige Anfangswertproblem für die homogene Differentialgleichung. Dann gilt $R^2\varphi \neq 0$. Sonst widerspräche dies der eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Systems zu (6.5), das bereits die Nulllösung besitzt. Verfahre analog mit ψ , b und R^2 . φ und ψ sind linear unabhängig, wie man mit Hilfe der Randbedingungen sieht.

Wir wollen nun die Bedingungen aus Lemma 6.3.2 nachrechnen um zu sehen, dass G eine Greensche Funktion ist. Aus den Randbedingungen an der Stelle a sehen wir, dass $W(a) \neq 0$ gilt.

- (i) Die Stetigkeit ist offensichtlich.
- (ii) $G(\cdot, s) \in C^2$ in $[a, b] \setminus \{s\}$ ist klar. Wir behaupten zunächst, dass $W(t)p(t)$ in t konstant ist. Dazu könnten wir Theorem 3.2.6 verwenden, müssten die Gleichung dafür aber zunächst auf Standardform bringen. Wir rechnen stattdessen direkt

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{dt}(p\dot{\varphi}) + q\varphi = -p\ddot{\varphi} - \dot{p}\dot{\varphi} + q\varphi, \\ 0 &= -p\ddot{\psi} - \dot{p}\dot{\psi} + q\psi, \\ W(t) &= \varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi, \\ \frac{d}{dt}(W(t) \cdot p(t)) &= (\varphi\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\psi)p + (\varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi)\dot{p} \\ &= \underbrace{(-p\ddot{\varphi} - \dot{p}\dot{\varphi} + q\varphi)}_{=0}\psi - \underbrace{(-p\ddot{\psi} - \dot{p}\dot{\psi} + q\psi)}_{=0}\varphi = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \lim_{\tau \searrow t} \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, t) - \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, t) \\
&= -\frac{1}{p(a)W(a)} (\varphi(t)\dot{\psi}(t) - \dot{\varphi}(t)\psi(t)) \\
&= -\frac{1}{p(a)W(a)} W(t) = -\frac{1}{p(t)}.
\end{aligned}$$

- (iii) Dies folgt unmittelbar, da die homogene Differentialgleichung linear ist und $G(\cdot, s)$ für $t < s$ und für $t > s$ jeweils die Differentialgleichung erfüllt.
(iv) Dies folgt wieder direkt aus $R^1\varphi = 0 = R^2\psi$.

Somit ist G nach Lemma 6.3.2 die gesuchte Greensche Funktion. $\square$

6.5. Selbstadjungierte Eigenwertprobleme. Wir untersuchen das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

$$(6.6) \quad \begin{cases} (Lx)(t) \equiv -\frac{1}{r(t)} \left[\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}(t)) - q(t)x(t) \right] = \lambda x(t) & \text{in } [a, b], \\ R^1x \equiv \alpha_1^1 x(a) + \alpha_2^1 \dot{x}(a) = \gamma^1, \\ R^2x \equiv \beta_1^2 x(b) + \beta_2^2 \dot{x}(b) = \gamma^2 \end{cases}$$

mit $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, $q, r \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ mit $r(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$, $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma^i \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_1^1, \alpha_2^1) \neq 0$ und $(\beta_1^2, \beta_2^2) \neq 0$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in C^2([a, b], \mathbb{C})$. Hier ist es wichtig, dass die auftretenden Koeffizienten reellwertig sind.

Definition 6.5.1.

- (i) Definiere den Operator

$$A: \underbrace{\{x \in C^2([a, b], \mathbb{C}) : R^1x = 0 = R^2x\}}_{\equiv \mathcal{D}(A) \subset C^0([a, b], \mathbb{C})} \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{C})$$

durch $Ax := Lx$ für $x \in \mathcal{D}(A)$.

- (ii) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A , falls es ein $u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$ mit $Au = \lambda u$ gibt. u heißt Eigenfunktion von A zum Eigenwert λ .
(iii) Zum Eigenwertproblem (6.6) definieren wir ein zugehöriges unitäres Skalarprodukt durch

$$\langle u, v \rangle_L := \int_a^b r(t) u(t) \overline{v(t)} dt$$

für $u, v \in C^0([a, b], \mathbb{C})$.

Bemerkung 6.5.2.

- (i) λ ist genau dann ein Eigenwert von A , wenn $Au = \lambda u$ nicht eindeutig lösbar ist, da $Au = \lambda u$ stets die triviale Lösung $u \equiv 0$ besitzt.
(ii) Sei $\{\varphi_1 = \varphi_1(t, \lambda), \varphi_2 = \varphi_2(t, \lambda)\}$ ein Fundamentalsystem der gewöhnlichen Differentialgleichung $Au - \lambda u = 0$. Dann ist eine beliebige Lösung $x = c^1 \varphi_1 + c^2 \varphi_2$, $c^i \in \mathbb{C}$, genau dann eine Lösung von (6.6), falls

$$\sum_{j=1}^2 c^j R^i \varphi_j(\cdot, \lambda) = 0$$

für $i = 1, 2$ gilt. Mit Linearer Algebra erhalten wir, dass Lösungen $(c^1, c^2) \neq 0$ genau dann existieren, falls

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{pmatrix} R^1 \varphi_1(\cdot, \lambda) & R^1 \varphi_2(\cdot, \lambda) \\ R^2 \varphi_1(\cdot, \lambda) & R^2 \varphi_2(\cdot, \lambda) \end{pmatrix} = 0$$

gilt.

- (iii) Die Konstruktion aus Theorem 6.4.1 liefert, dass die Greensche Funktion reell ist.

Theorem 6.5.3.

(i) A ist ein symmetrischer Operator, d. h. für $u, v \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\langle Au, v \rangle_L = \langle u, Av \rangle_L.$$

(ii) Alle Eigenwerte λ sind reell. Die zugehörigen Eigenfunktionen können wir ebenfalls reellwertig wählen.

(iii) Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$ Eigenfunktionen zu Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt

$$\langle u_1, u_2 \rangle_L = 0.$$

Beweis.

(i) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_L &= - \int_a^b \frac{d}{dt} (p(t) \dot{u}(t) \overline{v(t)} - q(t) u(t) \overline{v(t)}) dt \\ &= \int_a^b p(t) \dot{u}(t) \overline{\dot{v}(t)} + q(t) u(t) \overline{v(t)} dt - p(t) \dot{u}(t) \overline{v(t)} \Big|_a^b, \\ \langle u, Av \rangle_L &= \int_a^b p(t) \dot{u}(t) \overline{\dot{v}(t)} + q(t) u(t) \overline{v(t)} dt - p(t) u(t) \overline{\dot{v}(t)} \Big|_a^b, \end{aligned}$$

$$\langle Au, v \rangle_L - \langle u, Av \rangle_L = p(t) \left(u(t) \overline{\dot{v}(t)} - \dot{u}(t) \overline{v(t)} \right) \Big|_a^b = 0.$$

Die beiden Randterme fallen einzeln, d. h. für $t = a$ und $t = b$, weg, denn aus den Randbedingungen folgt (hier nur für $t = b$ vorgerechnet)

$$\begin{aligned} R^2 u &= \beta_1^2 u(b) + \beta_2^2 \dot{u}(b) = 0, \\ \overline{R^2 v} &= \beta_1^2 \overline{v(b)} + \beta_2^2 \overline{\dot{v}(b)} = 0. \end{aligned}$$

Wegen $(\beta_1^2, \beta_2^2) \neq 0$ hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{u(b)}{v(b)} & \frac{\dot{u}(b)}{\dot{v}(b)} \end{pmatrix}$$

also einen nichttrivialen Kern. Daher verschwindet die oben als Randterm auftretende Determinante davon.

(ii) Gelte $Au = \lambda u$ mit $u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$. Es folgt

$$\lambda \langle u, u \rangle_L = \langle \lambda u, u \rangle_L = \langle Au, u \rangle_L = \langle u, Au \rangle_L = \langle u, \lambda u \rangle_L = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle_L.$$

Daher ist λ reell.

Sei u eine Eigenfunktion. Da die Koeffizienten und λ in der linearen Gleichung $(A - \lambda)u = 0$ alle reell sind, sind auch der Realteil und der Imaginärteil von u Eigenfunktionen zum selben Eigenwert. Eine dieser beiden Funktionen ist von Null verschieden.

(iii) Zur Orthogonalität bezüglich des $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ -Skalarproduktes: Auch hier rechnet man genau wie in der Linearen Algebra unter Benutzung von $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle_L = \langle \lambda_1 u_1, u_2 \rangle_L = \langle Au_1, u_2 \rangle_L = \langle u_1, Au_2 \rangle_L = \overline{\lambda_2} \langle u_1, u_2 \rangle_L = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle_L.$$

Hieraus folgt $\langle u_1, u_2 \rangle_L = 0$. $\square$

Bemerkung 6.5.4. Man kann mit Zusatzaufwand folgendes zeigen: Ist 0 kein Eigenwert von A , so besitzt A unendlich viele Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. Nach Umnummerierung gilt $|\lambda_i| \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$.

Seien u_i zugehörige normierte und paarweise orthogonale Eigenfunktionen, d. h. gelte $Au_i = \lambda_i u_i$ und $\langle u_i, u_j \rangle_L = \delta_{ij}$ für alle i, j . Dann können wir $f \in \mathcal{D}(A)$ als

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, u_i \rangle_L u_i$$

mit noch genauer zu definierender Konvergenz schreiben.

Für weitere Details, auch im Falle von mehreren Raumdimensionen, siehe [6].

LITERATUR

1. Robert Denk, *Mathematik für Physiker III*, 2007, Skript zur Vorlesung.
2. Jean Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, 1969, Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
3. Michael Dreher, *Mathematik für Physiker II*, 2009, Skript zur Vorlesung.
4. Claus Gerhardt, *Analysis. II*, International Series in Analysis, International Press, Cambridge, MA, 2005.
5. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
6. Ralph E. Showalter, *Hilbert space methods for partial differential equations. Electronic reprint of the 1977 original*, Electronic Journal of Differential Equations. Monograph. 1. San Marcos, TX: Southwest Texas State University, iii, 242 p. , 1994.
7. Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, fifth ed., Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1993, Eine Einführung.
8. Gabriel Wittum, *Numerik I, Teil I: Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2005, Skript zur Vorlesung.

OLIVER C. SCHNÜRER, FACHBEREICH MATHEMATIK UND STATISTIK, UNIVERSITÄT KONSTANZ,
78457 KONSTANZ, GERMANY

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`