TOPOLOGIE

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Skript zu einer Topologievorlesung mit den Themen
- Mengentheoretische Topologie und
- Fundamentalgruppen.

INHALTSVERZEICHNIS

1. METRISCHE RÄUME

1.1. **Metrische Räume.** In Dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit topologischen Räumen und deren Eigenschaften. Wir werden sehen, dass jeder metrische Raum ein topologischer Raum ist. Einige Aussagen für topologische Räume sind schon aus den Grundvorlesungen für den Spezialfall von metrische Räume bekannt. Wenn wir diese hier wiederholen, so dient dies dazu, Parallelen zwischen metrischen und topologischen Räumen aufzuzeigen.

Date: Oktober 2006-7. Oktober 2016.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 54-01.

Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer Vorlesung

- Topologie 1 an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2006/7,
- Fundamentalgruppen an der Universität Konstanz im Wintersemester 2009/10 und
- Topologie and der Universität Konstanz im Wintersemester 2016/17 als Lesekurs.

Wir danken Tobias Marxen, Olaf Schnürer und Andrey Zakharov für Korrekturen und Anregungen.

Definition 1.1 (Metrik)**.** Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls die folgenden Axiome für alle x, y, $z \in X$ erfüllt sind:

(i) $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y$ ist.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Definition 1.2 (Offene Menge)**.** Sei X ein metrischer Raum.

(i) Sei $a \in X$ und $r > 0$. Wir definieren eine (offene) Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r durch
$$B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$
(ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt offen, falls für alle $x \in A$ ein $r > 0$ existiert, so dass $B_r(x) \subset A$ gilt.
(iii) Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus B$ offen ist.

Satz 1.3. *Eine offene Kugel ist eine offene Menge.*

Beweis. Sei $B_r(a)$ die offene Kugel und sei $b \in B_r(a)$. Definiere $\rho := r - d(a, b)$. Für alle $x \in B_\rho(b)$ gilt aufgrund der Dreiecksungleichung
$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \rho + (r - \rho) = r.$$
Somit ist $B_\rho(b) \subset B_r(a)$ und die Behauptung folgt. $\square$

Satz 1.4. *In einem metrischen Raum (X, d), d. h. in einem Raum X mit Metrik d, gilt*

(i) Die leere Menge $\emptyset$ und X sind offene Mengen.
(ii) Jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen.
(iii) Der endliche Durchschnitt offener Mengen ist offen.

Beweis.

(i) Ist offensichtlich, da für die leere Menge die Offenheit für keinen Punkt überprüft werden muss und da alle Kugeln in X enthalten sind.
(ii) Ist A die Vereinigung offener Mengen $\{O_i\}_{i \in I}$ und $x \in A$, so gibt es ein $i \in I$ und eine zugehörige offene Menge O_i sowie ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset O_i$ ist. Wegen $O_i \subset A$ folgt auch $B_r(x) \subset A$ und A ist eine offene Menge.
(iii) Seien $I = \{1, \ldots, n\}$, $\{O_i\}_{i \in I}$ eine endliche Familie offener Mengen und $A := \bigcap\limits_{i \in I} O_i$. Wir wollen nachweisen, dass A offen ist. Fixiere also $x \in A$. Somit gilt $x \in O_i$ für alle $i \in I$. Da die Mengen O_i offen sind, gibt es Zahlen $r_i > 0$, so dass $B_{r_i}(x) \subset O_i$ ist. Wir definieren nun $r := \min\limits_{i \in I} r_i$. Da I endlich ist, ist $r > 0$. Da $r \leq r_i$ ist, folgt $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset O_i$. Damit ist aber $B_r(x)$ auch im Schnitt der Mengen O_i enthalten, also $B_r(x) \subset A$. Dies war zu zeigen. $\square$

1.2. **Stetige Abbildungen.**

Definition 1.5 (Stetigkeit)**.** Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume.

(i) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in $x \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass folgendes gilt: Ist $d(a, x) < \delta$, so folgt auch $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$.
(ii) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls sie in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

1.3. **Aufgaben.**

Aufgabe 1.1.

(i) Sei $X \subset \mathbb{R}$. Definiere $d : X \times X$ durch $d(x, y) := |x - y|$. Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(ii) Sei nun speziell $X = [0, 3)$. Welche der folgenden Mengen sind in (X, d) offen, welche sind abgeschlossen?

	$[0,1)$	$[0,1]$	$[2,3)$	$(2,3)$	$[1,2)$	$[0,3)$	$(1,2)$	$[1,2]$
offen								
abgeschlossen								

Aufgabe 1.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere auf $X \times X$ die Funktionen

(i) $d_1(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$,

(ii) $d_2(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$.

Zeige, dass dies ebenfalls Metriken auf X sind.

Aufgabe 1.3. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f ist stetig.

(ii) $\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists} : a \in B_\delta(x) \Longrightarrow f(a) \in B_\varepsilon(f(x))$.

(iii) $f^{-1}(B)$ ist offen für alle offenen Mengen $B \subset Y$.

Aufgabe 1.4. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Kreuze bei den folgenden Aussagen genau die an, die äquivalent zur Stetigkeit von f sind:

(i) $f(A)$ ist offen für alle offenen Mengen $A \subset X$.

(ii) $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $B \subset Y$.

(iii) $f(A)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$.

(iv) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für x, $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ auch $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.

Aufgabe 1.5 (Hausdorffabstand)**.** Sei X ein metrischer Raum. Bezeichne mit $\mathcal{F}(X)$ die Menge aller beschränkten abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen von X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dabei beschränkt, wenn $\sup\limits_{x,y\in A} d(x, y) < \infty$ gilt. Definiere den Hausdorffabstand von zwei Mengen A, $B \in \mathcal{F}(X)$ durch

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \max\left\{\sup_{x\in A} \rho(x, B), \sup_{x\in B} \rho(x, A)\right\},$$

wobei

$$\rho(x, A) := \inf_{y\in A} d(x, y)$$

der Abstand eines Punktes zu einer Menge ist.

Zeige, dass $(\mathcal{F}(X), d_{\mathcal{H}})$ ein metrischer Raum ist.

2. Topologische Räume

Definition 2.1 (Topologie)**.** Sei X eine Menge. Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X bzw. eine Menge von Teilmengen von X oder $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h.

$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i \in I \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h.

$$O_i \in \mathcal{O}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

Definition 2.2 (Topologischer Raum)**.**

(i) Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist. (Wir werden später auch sagen, dass X ein topologischer Raum ist, wenn es bei der Wahl der Topologie nicht zu Verwechslungen kommen kann.)
(ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt genau dann offen, wenn $A \in \mathcal{O}$ gilt.
(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt genau denn abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, $(X \setminus A) \in \mathcal{O}$.

Beispiele 2.3 (Topologische Räume)**.**

(i) Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X. Sie heißt indiskrete Topologie.
(ii) Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X, die diskrete Topologie.
(iii) Sei $X = \mathbb{R}$. Enthält $\mathcal{O}$ gerade die Vereinigungen von offenen Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{R}$ ein topologischer Raum. Diese Topologie heißt natürliche Topologie oder Standardtopologie.
(iv) Sei $X = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ wird auch zum topologischen Raum, wenn $\mathcal{O}$ genau aus $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ besteht.
(v) Sei $X = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ wird ebenso zum topologischen Raum, wenn $\mathcal{O}$ genau aus $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und allen Vereinigungen von Intervallen der Form $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$ besteht.
(vi) Sei X eine beliebige Menge. Sei $A \in \mathcal{O}$ genau denn, wenn $X \setminus A$ eine endliche Menge ist oder $A = \emptyset$ ist. Diese Topologie heißt kofinite Topologie.
(vii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Metrik d erzeugt eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X vermöge der Definition $A :\in \mathcal{O}$ genau dann, wenn A die Vereinigung von offenen Kugeln $B_r(x)$, $x \in X$, $r > 0$, ist. Auf diese Weise induziert die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ die natürliche Topologie oder Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$. Falls nicht anders angegeben, werden wir auf metrischen Räumen stets diese von der Metrik induzierte Topologie verwenden.

Definition 2.4 (Topologisch äquivalente Metriken)**.** Zwei Metriken d und d' auf einem Raum X heißen topologisch äquivalent, wenn die jeweils induzierten Topologien übereinstimmen.

Definition 2.5 (Basis)**.** Eine Familie $\mathcal{B}$ von offenen Mengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, wenn jede offene Menge von $(X, \mathcal{O})$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Satz 2.6. *Sei $\mathcal{B}$ eine Familie von offenen Mengen von $(X, \mathcal{O})$. Dann ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $(X, \mathcal{O})$, wenn zu jedem $x \in X$ und zu jedem $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in B \subset O$.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. □

Satz 2.7. *Sei $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(ii) Seien $B,\ B' \in \mathcal{B}$ und $x \in B \cap B'$. Dann gibt es eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $x \in A \subset B \cap B'$, d. h. der Schnitt $B \cap B'$ ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Besteht $\mathcal{O}$ aus allen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ heißt die durch $\mathcal{B}$ definierte Topologie. (Die leere Menge erhält man als Vereinigung über die leere Menge als Indexmenge.)

Jede Topologie $\mathcal{O}'$ auf X, die $\mathcal{B}$ als Basis besitzt, stimmt mit $\mathcal{O}$ überein.

Beweis. Die Menge $\mathcal{B}$ ist gerade so definiert, dass $\mathcal{O}$ insbesondere auch endliche Schnitte von zwei (und damit von endlich vielen) offenen Mengen enthält.

Die Eindeutigkeit folgt, da sich in jeder Topologie jede offene Menge als Vereinigung von offenen Mengen aus der Basis darstellen lässt. □

Beispiele 2.8 (Basen der Topologie)**.** Wir setzen das Beispiel 2.3 fort.

(i) Auf $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie ist $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Topologie.

(ii) Sei $X = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardmetrik. Dann bilden die Kugeln mit rationalen Koordinaten und rationalen Radien eine abzählbare Basis der Standardtopologie.

(iii) Im Beispiel mit den Intervallen der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, bilden die Intervalle der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{Q}$, eine Basis.

(iv) Im Beispiel mit den Intervallen der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, bilden die Intervalle der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{Q}$, keine Basis.

Definition 2.9 (Subbasis)**.** Sei $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X. Sei $\mathcal{B}$ definiert als die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{S}$, so ist $\mathcal{B}$ eine Basis (direktes Nachrechnen). Die Basis erzeugt eine Topologie $\mathcal{O}$, sie heißt die von $\mathcal{S}$ induzierte Topologie. Die Familie $\mathcal{S}$ heißt Erzeugendensystem oder Subbasis dieser Topologie. (Beachte, dass man die Menge X als Schnitt über die leere Menge als Indexmenge bekommt.)

Definition 2.10 (Umgebung)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt Umgebung von x, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subset U$ gibt. Ist U zusätzlich offen, so heißt U eine offene Umgebung von x. Die Menge aller Umgebungen von x heißt Umgebungssystem und wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

Satz 2.11. *In einem topologischen Raum sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) O ist offen.

(ii) O ist eine Umgebung für alle $x \in O$.

(iii) Zu jedem $x \in O$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset O$.

Beweis.

- (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) folgt direkt indem man $U = O$ wählt.
- (3) $\Longrightarrow$ (1) erhält man, indem man die nach Definition einer Umgebung von x existierende offene Menge A mit $A \subset U \subset O$ und $x \in A$ betrachtet.

□

Satz 2.12. *Ein Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) Aus $U \subset U'$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ folgt $U' \in \mathcal{U}(x)$.
(ii) Gilt $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{U}(x)$, so folgt $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}(x)$.
(iii) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so gilt $x \in U$.
(iv) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es eine Menge $V \in \mathcal{U}(x)$, so dass für alle $y \in V$ die Aussage $U \in \mathcal{U}(y)$ gilt.

Beweis.

(i) Klar.
(ii) Betrachte den Schnitt der zugehörigen offenen Mengen, die einen festen Punkt x enthalten.
(iii) Dies folgt direkt aus der Definition.
(iv) Wähle eine offene Menge V, die in U enthalten ist. Nach Satz 2.11 ist V Umgebung aller $y \in V$, also gilt $V \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$. Da $U \supset V$ ist, folgt auch $U \in \mathcal{U}(y)$. □

Satz 2.13. *Sei X eine Menge und sei jedem $x \in X$ ein System $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ zugeordnet, das die Eigenschaften aus Satz 2.12 erfüllt. Dann gibt es genau eine Topologie auf X, so dass für alle $x \in X$ die Systeme $\mathcal{U}(x)$ ein Umgebungssystem von x sind.*

Beweis.
Eindeutigkeit: Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ zwei Topologien mit dieser Eigenschaft. Gelte $O \in \mathcal{O}_1$. Nach Satz 2.11 ist O Umgebung jedes seiner Punkte. Damit ist O genau in allen $\mathcal{U}(x)$ mit $x \in O$ enthalten. Diese Umgebungssysteme stimmen für $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ überein. Nochmals nach Satz 2.11 ist aber O als Umgebung aller seiner Punkte eine offene Menge, auch in der Topologie $\mathcal{O}_2$. Damit stimmen $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ überein.

Existenz: Definiere, motiviert durch Satz 2.11,

$$\mathcal{O} := \{O \subset X : O \in \mathcal{U}(x) \quad \forall x \in O\}.$$

$\mathcal{O}$ ist unter Vereinigungen abgeschlossen, da Umgebungssysteme auch Obermengen enthalten. Nach Satz 2.12 ist $\mathcal{O}$ auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen. $\emptyset$, $X \in \mathcal{O}$ ist klar. Somit ist $\mathcal{O}$ eine Topologie.

Es bleibt also zu zeigen, dass das von der Topologie induzierte Umgebungssystem $\mathcal{U}'(x)$ für einen Punkt $x \in X$ mit dem vorgegebenen Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ übereinstimmt. Sei also $U' \in \mathcal{U}'(x)$. Nach Definition des Umgebungssystems $\mathcal{U}'(x)$ existiert daher ein $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subset \mathcal{U}'$. Nach Definition von $\mathcal{O}$ gilt $O \in \mathcal{U}(x)$. Da $\mathcal{U}(x)$ auch Obermengen enthält, folgt $U' \in \mathcal{U}(x)$.

Sei nun umgekehrt $U \in \mathcal{U}(x)$. Definiere

$$\dot{U} := \{y : U \in \mathcal{U}(y)\}.$$

Wir behaupten, dass $x \in \dot{U}$ und $\dot{U} \in \mathcal{O}$ gelten. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ ist, folgt $x \in \dot{U}$. Sei nun $y \in \dot{U}$. Nach Satz 2.12 existiert daher eine Menge $V \in \mathcal{U}(y)$, so dass für alle $z \in V$ auch $U \in \mathcal{U}(z)$ gilt. Daher ist V eine Teilmenge von $\dot{U}$, $V \subset \dot{U}$. Da $V \in \mathcal{U}(y)$ ist, gilt dies erst recht für die Obermenge $\dot{U}$, also ist $\dot{U} \in \mathcal{U}(y)$ für ein beliebiges $y \in \dot{U}$. Wir haben daher $x \in \dot{U} \subset U$ und $\dot{U} \in \mathcal{O}$. Nach Definition des von der Topologie $\mathcal{O}$ induzierten Umgebungssystems folgt daher $U \in \mathcal{U}'(x)$.

Damit stimmen die beiden Umgebungssysteme überein. □

Definition 2.14 (Umgebung einer Menge)**.** Sei $A \subset X$ und $B \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in A$, so heißt B Umgebung der Menge A.

Definition 2.15 (Umgebungsbasis)**.** Ein Teilsystem $\mathcal{B}(x)$ des Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ heißt Umgebungsbasis von x, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subset U$ existiert.

Beispiel 2.16. Sei X ein metrischer Raum, $x \in X$. Dann bilden die Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(x)$ eine Umgebungsbasis von x.

Definition 2.17 (Abzählbarkeitsaxiome)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.
(ii) X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn die Topologie $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Beispiele 2.18.

(i) Jeder metrische Raum erfüllt nach Beispiel 2.16 das erste Abzählbarkeitsaxiom.
(ii) Der $\mathbb{R}^n$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. (Benutze Kugeln mit rationalen Radien, deren Mittelpunkte rationale Koordinaten haben.)
(iii) Ist X nicht abzählbar, so erfüllt X mit der kofiniten Topologie das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht.

Definition 2.19 (Rand, …)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) $x \in X$ heißt Berührpunkt von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.
(ii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt Abschluss (oder abgeschlossene Hülle) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.
(iii) Ein Punkt x ist ein innerer Punkt von A, falls A eine Umgebung von x ist.
(iv) Das Innere von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\dot{A}$ bezeichnet, der einfachereren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.
(v) Ein Punkt x heißt Randpunkt, $x \in \partial A$, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Satz 2.20. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*

(i) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.
(ii) $\dot{A}$ ist die größte offene Menge in A.
(iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \dot{A}$.

Beweis.

(i) Das Komplement besteht gerade aus den Punkten, die eine zu A disjunkte offene Umgebung besitzen. Die Vereinigung dieser Umgebungen ist gerade das Komplement von $\overline{A}$. Oder äquivalent: $\overline{A}$ ist gerade der Schnitt aller dieser Komplemente, die nach Konstruktion abgeschlossen sind und A enthalten. Die kleinste Menge, die A enthält, existiert, da Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.
(ii) Analog zur Aussage für den Abschluss.

(iii) Ein Punkt x ist ein Berührpunkt von A und $X \setminus A$ genau dann, wenn jede (offene) Umgebung von x einen nichtleeren Schnitt mit A und $X \setminus A$ hat. Oder äquivalent: Keine Umgebung von x ist ganz in A oder in $X \setminus A$ enthalten. Keine Umgebung in A impliziert, dass $x \notin \dot{A}$ ist. Keine Umgebung in $X \setminus A$ liefert $x \in \overline{A}$. □

Definition 2.21 (Dichtheit)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) Eine Menge $A \subset X$ heißt dicht in X, falls $\overline{A} = X$ ist.
(ii) Eine Menge $A \subset X$ heißt nirgends dicht in X, falls $\dot{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.

2.1. **Aufgaben.**

Aufgabe 2.1. Zeige, dass die beiden Metriken aus Aufgabe 1.2 topologisch äquivalent sind.

Aufgabe 2.2. Sei X ein topologischer Raum. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) $A \subset X$ ist genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt.
(ii) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Aufgabe 2.3 (Zariski-Topologie)**.** Sei $X = \mathbb{R}^n$. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn es Polynomfunktionen $p_i \in \mathbb{R}[x^1, \ldots, x^n]$ gibt, so dass $\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcap\limits_i p_i^{-1}(\{0\})$ gilt. Die abgeschlossenen Mengen sind also gerade die gemeinsamen Nullstellen der gegebenen Polynomfunktionen. Zeige, dass dies eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Hinweis: Formuliere die Axiome einer Topologie zunächst als Bedingungen für abgeschlossene Mengen.

Zusatz: Benutze den Hilbertschen Basissatz um zu zeigen, dass es auch genügt, endliche Mengen von Polynomfunktionen zu betrachten.

3. Stetige Abbildungen

Definition 3.1 (Stetigkeit)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig (von $(X, \mathcal{O}_1)$ nach $(Y, \mathcal{O}_2)$), falls die Urbilder beliebiger offener Mengen in $(Y, \mathcal{O}_2)$ offene Mengen in $(X, \mathcal{O}_1)$ sind, d. h.

$$\underset{O \in \mathcal{O}_2}{\forall} f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1.$$

Satz 3.2. *Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen in Y abgeschlossene Mengen in X sind.*

Beweis. Betrachte die Komplemente. Ist $Y = A \dot{\cup} B$, so gilt auch

$$X = f^{-1}(A) \dot{\cup} f^{-1}(B).$$ □

Beispiele 3.3.

(i) Sei $(X, \mathcal{O}_1)$ ein diskreter topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ für jeden beliebigen topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_2)$ stetig. Diese Eigenschaft charakterisiert die diskrete Topologie.
(ii) Sei $(Y, \mathcal{O}_2)$ ein indiskreter topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ für jeden beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_1)$ stetig. Diese Eigenschaft charakterisiert die indiskrete Topologie.

(iii) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für alle Folgen $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ in X
$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$$
gilt. f ist genau dann unterhalbstetig, wenn f bezüglich der Topologie
$$\mathcal{O} := \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$
stetig ist.

Der folgende kurze Beweis zeigt die Vorteile der topologischen Definition der Stetigkeit gegenüber der ε-δ-Definition.

Satz 3.4. *Seien $(X,\mathcal{O}_1)$, $(Y,\mathcal{O}_2)$ und $(Z,\mathcal{O}_3)$ topologische Räume. Sind die Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so ist auch die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Ist $A \subset Z$ offen, so auch $g^{-1}(A)$ und $f^{-1} \circ g^{-1}(A)$ und damit $(g \circ f)^{-1}(A)$. □

Definition 3.5 (Feinheit)**.** Seien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ Topologien auf einer Menge X. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ gröber als $\mathcal{O}_1$, falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ ist, d. h., falls jede offene Menge bezüglich der Topologie von $\mathcal{O}_2$ auch bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_1$ offen ist.

Satz 3.6. *Auf einer Menge X ist die Topologie $\mathcal{O}_1$ genau dann feiner als die Topologie $\mathcal{O}_2$, wenn* $\mathrm{id}_X : X \to X$ *eine stetige Abbildung von $(X,\mathcal{O}_1)$ nach $(X,\mathcal{O}_2)$ ist.*

Beweis. Direkt aus der Definition. □

Satz 3.7. *Seien $(X,\mathcal{O}_1)$ und $(Y,\mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebig gewählte Subbasis von $\mathcal{O}_2$. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn die Mengen $f^{-1}(S)$ für alle $S \in \mathcal{S}$ offen in $(X,\mathcal{O}_1)$ sind.*

Beweis. Benutze, dass für alle Mengen $A_i \subset Y$, $i \in I$, die folgenden beiden Identitäten gelten:
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$
□

Die folgende Definition ähnelt der ε-δ Definition für Stetigkeit aus der Analysis Grundvorlesung.

Definition 3.8 (Stetigkeit in einem Punkt)**.** Seien $(X,\mathcal{O}_1)$ und $(Y,\mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt im Punkte $x \in X$ stetig, falls zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ existiert.

Satz 3.9. *Seien $(X,\mathcal{O}_1)$ und $(Y,\mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei f stetig, $x \in X$ und $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann enthält V eine offene Umgebung V' von $f(x)$. $U := f^{-1}(V')$ ist eine offene Menge, die x enthält und daher eine Umgebung von x mit $f(U) = V' \subset V$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $V \subset Y$ offen. Sei $x \in X$ beliebig mit $f(x) \in V$. V ist eine Umgebung von $f(x)$. Somit gibt es eine (ohne Einschränkung) offene Umgebung von x, U_x, so dass $f(U_x) \subset V$ gilt. Dann ist

$$U := \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

offen und gleich $f^{-1}(V)$, da $x \in U_x$ und $f(U_x) \subset V$ gelten. □

Satz 3.10. *Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann im Punkte $x \in X$ stetig, wenn für beliebige Umgebungsbasen $\mathcal{B}(x)$ und $\mathcal{B}(f(x))$ folgendes gilt: Für alle $B \in \mathcal{B}(f(x))$ existiert eine Menge $A \in \mathcal{B}(x)$ mit $f(A) \subset B$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. □

Wir haben bereits gesehen, dass die Bilder von offenen oder abgeschlossenen Mengen unter stetigen Abbildungen im allgemeinen nicht offen oder abgeschlossen sind.

Definition 3.11 (Offene Abbildungen)**.** Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ heißt offen, wenn die Bilder offener Mengen wieder offen sind. Sie heißt abgeschlossen, wenn die Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Satz 3.12. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ ist genau dann offen, wenn die Bilder einer Basis von $\mathcal{O}_1$ offen sind.*

Beweis. Direkt aus der Definition. □

Satz 3.13.
Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
- *(i) Sei f abgeschlossen. Ist $B \subset Y$ und $U \subset X$ offen mit $f^{-1}(B) \subset U$, dann existiert eine offene Menge $V \supset B$ mit $f^{-1}(V) \subset U$.*
- *(ii) Sei f offen. Ist $B \subset Y$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $f^{-1}(B) \subset A$, dann existiert eine abgeschlossene Menge $F \supset B$ mit $f^{-1}(F) \subset A$.*
- *(iii) f ist offen $\Longleftrightarrow$ für alle $x \in X$ gilt: Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so ist $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$.*

Beweis.

- (i) Die Menge $X \setminus U$ ist abgeschlossen, damit auch $f(X \setminus U)$. $V := Y \setminus (f(X \setminus U))$ ist nun gerade die gesuchte offene Menge. Nach Definition gilt $f^{-1}(V) \subset U$ und $V \supset B$.
- (ii) Funktioniert analog. $X \setminus A$ und $f(X \setminus A)$ sind offen. $F := Y \setminus (f(X \setminus A))$ ist die gesuchte abgeschlossene Menge mit $F \supset B$ und $f^{-1}(F) \subset A$.
- (iii) „$\Longrightarrow$“: Klar.

  „$\Longleftarrow$“: Sei $V \subset X$ offen. Zeige, dass auch $f(V)$ offen ist. Sei $x \in V$. Es genügt zu zeigen, dass $f(x)$ eine (offene) Umgebung in Y besitzt, die in $f(V)$ enthalten ist. Sei dazu $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset V$. Dann gilt $f(U) \subset f(V)$ und $f(U) \in \mathcal{U}(f(x))$ und die Behauptung folgt.

□

Definition 3.14 (Homöomorphismus)**.** Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Homöomorphismus oder topologische Abbildung, falls f und f^{-1} stetig sind.

Satz 3.15. *Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn f stetig und offen (oder abgeschlossen) ist.*

Beweis. Direkt aus den Definitionen. $\square$

Bemerkung 3.16. Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ ordnet die offenen Mengen von $(X, \mathcal{O}_1)$ bijektiv den offenen Mengen von $(Y, \mathcal{O}_2)$ zu. Die Zuordnung $F : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ ist gegeben durch $F(O) := f(O)$ für $O \in \mathcal{O}_1$.

3.1. **Aufgaben.**

Aufgabe 3.1. Seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für alle $A \subset X$ die Beziehung

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

gilt.

Kleiner Zusatz: Gilt für stetige Funktionen stets $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$?

Aufgabe 3.2. Sei $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
(ii) $A \subset \overline{A}$ für alle $A \subset X$,
(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ für alle $A \subset X$,
(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ für alle $A,\, B \subset X$.

Diese Abbildung heißt Hüllenoperator. Zeige, dass auf X genau eine Topologie existiert, so dass $\overline{A}$ gerade die abgeschlossene Hülle für alle $A \subset X$ ist. Zeige auch, dass in einem topologischen Raum X die Abbildung, die A auf die abgeschlossene Hülle abbildet, ein Hüllenoperator ist.

Aufgabe 3.3. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. Die charakteristische Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ von A ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ sei mit der natürlichen Topologie versehen. Zeige, dass χ_A genau in $X \setminus (\partial A)$ stetig ist.

Aufgabe 3.4. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen. Zeige, dass A genau dann nirgends dicht in X ist, wenn $X \setminus A$ dicht in X ist.

Aufgabe 3.5. Sei X ein topologischer Raum, $a \in X$ und $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ zwei in a stetige Funktionen mit $f(a) = g(a)$. $\mathbb{R}$ trage die Standardtopologie. Zeige:

(i) Ist $h : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die in einer Umgebung $U \in \mathcal{U}(a)$ die Ungleichungen
$$f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \forall x \in U$$
gelten, dann ist h ebenfalls in a stetig.
(ii) Die Funktion h mit $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ für $x \neq 0$ und $0 \mapsto 0$ ist stetig.

Aufgabe 3.6. Sei $W := \partial\left([0,1]^3\right) \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitswürfeloberfläche, versehen mit der induzierten Metrik und der dadurch induzierten Topologie. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeige, dass $f : W \to X$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $f|_{\{x^i=c\}}$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und $c \in \{0,1\}$ stetig sind.

Aufgabe 3.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Zeige, dass die folgenden beiden Funktionen stetig sind:

(i) Die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$.
(ii) $f : X \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := d(x, A) \equiv \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.

4. Erzeugung topologischer Räume

In diesem Kapitel lernen wir Methoden kennen, mit denen man aus topologischen Räumen neue topologische Räume konstruieren kann.

4.1. **Unterraumtopologie.**

Bemerkung 4.1 (Erinnerung: Metrische Räume). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $E \subset X$ eine Teilmenge. Dann wird E durch die induzierte Metrik $d' := d|_{E \times E}$ auf natürliche Weise zu einem metrischen Raum.

E wird damit auch zu einem topologischen Raum. Die offenen Mengen in (E, d') sind gerade die Mengen $O' \subset E$, für die es eine offene Menge $O \subset X$ mit $O' = O \cap E$ gibt. (Vergleiche Aufgabe 1.1).

Definition 4.2 (Unterraumtopologie)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $E \subset X$. Definiere $\mathcal{O}_E := \{O \cap E : O \in \mathcal{O}\}$. (Wir werden gleich zeigen, dass dies eine Topologie ist. Sie heißt Unterraumtopologie, induzierte Topologie oder Spurtopologie.)

Satz 4.3. *Sei (X, O) ein topologischer Raum, $E \subset X$. Dann ist $(E, \mathcal{O}_E)$ ein topologischer Raum.*

Beweis. Wähle für jede offene Menge $O \subset E$ eine offene Menge $O' \subset X$ mit $O = O' \cap E$ und benutze, dass X ein topologischer Raum ist. □

Bemerkung 4.4. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $E \subset X$. Die offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen in $(E, \mathcal{O}_E)$ sind gerade die Schnitte von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen in X mit E.

Im allgemeinen sind die offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmengen von E als Teilmengen von X nicht offen (bzw. abgeschlossen). Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 4.5. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $E \subset X$. Die offenen (bzw. abgeschlossenen) Teilmengen von E sind genau dann offen (bzw. abgeschlossen) in X (bezüglich der natürlichen Inklusion), wenn die Menge E offen (bzw. abgeschlossen) in X ist.*

Beweis. Direkt aus der Definition. □

Beispiel 4.6. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset B \subset X$. Trägt B die von X induzierte Unterraumtopologie, so stimmen die von B und von X induzierten Unterraumtopologien auf A überein.

Satz 4.7. *Sei X ein topologischer Raum, $E \subset X$ und $j : E \to X$ die Inklusionsabbildung. Die Unterraumtopologie $\mathcal{O}_E$ auf E hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : Y \to E$ gilt: g ist genau dann stetig, wenn $j \circ g : Y \to X$ stetig ist.*
(ii) *$\mathcal{O}_E$ ist die gröbste Topologie auf E, so dass die kanonische Injektion $j : E \to X$ stetig ist.*

Beweis.

(i) Es gilt: $j \circ g$ ist stetig
$\iff (j \circ g)^{-1}(O)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset X$ offen
$\iff g^{-1}\left(j^{-1}(O)\right)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset X$ offen
$\iff g^{-1}(O \cap E)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset X$ offen
$\iff g^{-1}(O)$ ist für alle offenen Mengen $O \subset E$ offen (d. h. für alle $O \in \mathcal{O}_E$)
$\iff g$ ist stetig.
(ii) Folgt direkt aus der Definition der induzierten Topologie. □

Satz 4.8. *Seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ sei mit der Unterraumtopologie versehen und $f : X \to Y$ sei stetig im Punkt $x \in A$. Dann ist auch die Restriktion $f|_A : A \to Y$ stetig in x.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. □

Bemerkung 4.9. Beachte aber, dass die Stetigkeit der Restriktion $f|_A$ nicht impliziert, dass $f : X \to Y$ in einem Punkt aus A stetig ist. Beispiel: $X = Y = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. f ist nirgends stetig, aber $f|_A$ ist in jedem Punkt stetig.

Den folgenden Satz benutzt man, wenn man Abbildungen von einem Raum betrachten will, der aus Zellen zusammengesetzt ist.

Satz 4.10. *Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes und*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für alle i die Restriktionen $f|_{A_i}$ stetig sind.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Gilt nach Satz 4.8.
„$\Longleftarrow$“: Sei B eine abgeschlossene Teilmenge von Y. Wir wollen nachweisen, dass $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) =& f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \\ =& \bigcup_{i=1}^{n} \left(f^{-1}(B) \cap A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (f|_{A_i})^{-1}(B) \end{aligned}$$

Da $f|_{A_i}$ stetig ist, ist $(f|_{A_i})^{-1}(B)$ in A_i abgeschlossen. Da A_i selber abgeschlossen ist, ist $(f|_{A_i})^{-1}(B)$ auch in X abgeschlossen. Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen. Also ist $f^{-1}(B)$ in X abgeschlossen. □

Definition 4.11. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Einbettung von X in Y, wenn f ein Homöomorphismus von X auf $f(X)$, versehen mit der Unterraumtopologie, ist.

Satz 4.12. *Seien X, Y topologische Räume. Die Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn die folgenden Kriterien alle erfüllt sind:*

(i) f ist injektiv,
(ii) f ist stetig,
(iii) für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist die Bildmenge $f(U)$ in $f(X)$ eine offene Menge, d. h. $f : X \to f(X)$ ist eine offene Abbildung.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition eines Homöomorphismusses. □

4.1.1. *Aufgaben.*

Aufgabe 4.1 (Eingebettete Mannigfaltigkeiten)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine C^1-Abbildung. Für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = 0$ sei $Df(x)$ surjektiv. (Man sagt, dass 0 ein regulärer Wert ist.) Dann heißt $f^{-1}(0)$ Mannigfaltigkeit.

(i) Sei $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ von der Klasse C^1. Dann ist $\operatorname{graph} g := \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l\}$ eine Mannigfaltigkeit. (Betrachte zunächst den Fall $k = l = 1$.)
(ii) Die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ ist eine Mannigfaltigkeit.
(iii) Die orthogonalen Matrizen $O(n)$ sind eine Mannigfaltigkeit.

Definition 4.13 (Topologische Mannigfaltigkeiten)**.** Sei X ein topologischer Raum. X heißt topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n, falls X die folgenden Axiome erfüllt:

(i) X ist hausdorffsch, d. h. für alle Punkte $x \neq y \in X$ gibt es disjunkte offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$, $U \cap V = \emptyset$.
(ii) X besitzt eine abzählbare Basis.
(iii) X ist lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$, d. h. für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $h : U \to V$.

Aufgabe 4.2 (Topologische Mannigfaltigkeiten I)**.** Zeige, dass $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, versehen mit der Unterraumtopologie, eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4.3 (Topologische Mannigfaltigkeiten II)**.** Zeige, dass auch jede eingebettete Mannigfaltigkeit im Sinne von Aufgabe 4.1 eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4.4 (Topologische Mannigfaltigkeiten III)**.** Seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten. Dann ist auch $M \times N$ eine topologische Mannigfaltigkeit.

4.2. **Produkttopologie.**

Bemerkung 4.14 (Erinnerung: Metrische Räume)*.* Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Dann ist $X_1 \times X_2$ mit der Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

ebenfalls ein metrischer Raum. Dies liefert, induktiv angewandt, gerade die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$. Äquivalente Metriken erhält man durch die Definitionen

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

oder

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Dies lässt sich auch direkt auf das Produkt von endlich vielen metrischen Räumen verallgemeinern. Dabei heißen Metriken d und d' auf einer Menge A äquivalent, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle a, $b \in A$

$$\frac{1}{c} \cdot d(a,b) \le d'(a,b) \le c \cdot d(a,b)$$

gilt. Wie im Falle des $\mathbb{R}^n$ mit unterschiedlichen Normen sieht man, dass diese Metriken alle äquivalent sind. Im Sinne von Definition 2.4 sind diese Metriken damit insbesondere topologisch äquivalent.

Wir beobachten, dass in endlichen Produkten

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n$$

Mengen der Form

$$X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times O \times X_{k+1} \times \cdots \times X_n$$

und endliche Schnitte davon eine Basis der von der Metrik induzierten Topologie bilden, wobei $O \subset X_k$ eine offene Menge ist. Mit Hilfe dieser Beobachtung wollen wir auf dem Produkt topologischer Räume eine Topologie definieren.

Definition 4.15 (Produkttopologie)**.** Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Definiere $X := \prod\limits_{i \in I} X_i$ sowie die natürlichen Projektionen $p_i : X \to X_i$ durch $X \ni x = (x^j)_{j \in I} \mapsto x^i \in X_i$.

Auf X definieren wir Elementarmengen: Sei $K \subset I$ endlich und $O_k \subset X_k$ offen für alle $k \in K$. Dann heißt

$$\bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(O_k)$$

Elementarmenge von X. Die Elementarmengen bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ (da insbesondere endliche Schnitte von Elementarmengen wieder offen sind). Diese Topologie heißt Produkttopologie. $(X, \mathcal{O})$ heißt Produktraum oder topologisches Produkt der $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$.

Beispiele 4.16.

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ stimmt die natürliche Topologie mit der Produkttopologie überein.
(ii) Seien X_i topologische Räume und $A_i \subset X_i$. Dann stimmt auf $\prod A_i \subset \prod X_i$ die Unterraumtopologie der Produkttopologie von $\prod X_i$ mit der Produkttopologie der Unterraumtopologie der $A_i \subset X_i$ überein.

Satz 4.17.
Sei $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ ein topologischer Raum mit der Produkttopologie.

(i) Die Projektionsabbildungen $p_j : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_j$ sind stetig und offen.
(ii) Die Produkttopologie auf $\prod\limits_{i \in I} X_i$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Projektionen $p_j : X \to X_j$ stetig sind.

Beweis.

(i) Direkt aus der Definition.

(ii) Sei $O \subset X_k$ offen, $k \in I$. Daher ist $p_k^{-1}(O)$ offen. Diese Elementarmengen bilden eine Subbasis der Topologie. In jeder anderen Topologie sind diese Mengen aufgrund der Stetigkeit der p_k aber auch offen. Daher kann solch eine Topologie höchstens feiner sein. □

Sei $(g_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $g_i : Y \to X_i$ zwischen topologischen Räumen. Dann definiert dies eine Abbildung $g : Y \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ vermöge $g(y) := (g_i(y))_{i\in I}$. Es gilt $g_i = p_i \circ g$. Umgekehrt sei nun eine Abbildung $g : Y \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ gegeben. Dann definiert dies Abbildungen $g_i : Y \to X_i$ vermöge $g_i := p_i \circ g$.

Satz 4.18. *Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ das Produkt von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$. Dann ist die Abbildung $g : Y \to X$ genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Abbildungen $g_i := p_i \circ g$ stetig sind.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Die Abbildungen g_i sind als Kompositionen stetiger Abbildungen wieder stetig.

„$\Longleftarrow$“: Wir wollen benutzen, dass es nach Satz 3.7 genügt zu zeigen, dass die Urbilder einer Subbasis offen sind. Sei also $O \in \mathcal{O}_i$ offen für ein $i \in I$. Mengen der Form $p_i^{-1}(O)$ bilden eine Subbasis der Topologie auf $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Wir erhalten

$$g^{-1}\left(p_i^{-1}(O)\right) = (p_i \circ g)^{-1}(O) = g_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}$$

und die Behauptung folgt. □

Satz 4.19. *Seien X_i und Y_i topologische Räume, $i \in I$, mit $X_j \neq \emptyset$ für alle $j \in I$. Seien $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \prod_{i\in I} X_i &\to \prod_{i\in I} Y_i, \\ (x_i)_{i\in I} &\mapsto (f_i(x_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

genau dann stetig, wenn die Abbildungen f_i für alle $i \in I$ stetig sind.

Beweis. Seien $p_i : X \to X_i$ bzw. $\pi_i : Y \to Y_i$ die natürlichen Projektionsabbildungen

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "p_i"] & \prod\limits_{i\in I} Y_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[u, bend left, "s_i"] & Y_i. \end{tikzcd}$$

„$\Longrightarrow$“: Seien die Abbildungen f_i stetig. Dann ist $f_i \circ p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to Y_i$ stetig und nach Satz 4.18 ist damit auch f stetig, da $f_i \circ p_i = \pi_i \circ f$ gilt.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun f stetig. Sei $(a_i)_{i\in I}$ ein fester Punkt aus $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Definiere für jedes $j \in I$ die Abbildung $s_j : X_j \to X$ durch

$$s_j(x_j) = (z_i)_{i\in I} \quad \text{mit} \quad z_i := \begin{cases} a_i & i \neq j, \\ x_j & i = j. \end{cases}$$

Nach Satz 4.18 sind die Abbildungen s_j stetig. Es gilt $f_j = \pi_j \circ f \circ s_j$. Daher ist auch f_j für jedes $j \in I$ stetig. □

Bemerkung 4.20. Vergleichen wir noch einmal die definierenden Eigenschaften der Untterraumtopologie und der Produkttopologie.

(i) Nach Satz 4.7 ist die Unterraumtopologie die gröbste Topologie auf $E \subset X$, so dass die kanonische Inklusionsabbildung $j : E \to X$ stetig ist.
(ii) Nach Satz 4.17 ist die Produkttopologie die gröbste Topologie auf $\prod\limits_{i\in I} X_i$, so dass die Projektionsabbildungen $p_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ stetig sind.
(iii) Weiterhin haben wir gesehen (Sätze 4.7 und 4.18), dass eine Abbildung g von einem topologischen Raum Y in einen Teilraum $E \subset X$ bzw. in einen Produktraum $\prod\limits_{i\in I} X_i$ genau dann stetig ist, wenn $j \circ g$ bzw. $p_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig sind.

4.3. **Initialtopologie.** Die Eigenschaften aus Bemerkung 4.20 wollen wir verwenden, um die Initialtopologie zu definieren. Sie verallgemeinert die Produkttopologie und die Unterraumtopologie.

Definition 4.21 (Initialtopologie)**.** Sei E eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und $(f_i : E \to X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Eine Topologie auf E heißt Initialtopologie bezüglich $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : Y \to E$ ist g genau dann eine stetige Abbildung, wenn $f_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig ist.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i\circ g"'] & E \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.22. Ist die Indexmenge I einelementig, ist also nur ein $f : E \to X$ gegeben, so sind die offenen Mengen in E in der Initialtopologie gerade die Urbilder offener Mengen in X.

Satz 4.23 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Falls eine Initialtopologie $\mathcal{I}$ auf E bezüglich der Familie $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$ existiert, so ist $\mathcal{I}$ die gröbste Topologie, für die die Abbildungen f_i stetig sind. Daher ist $\mathcal{I}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Betrachte die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} (E,\mathcal{I}) \arrow[r, "g=\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i=f_i\circ\mathrm{id}"'] & (E,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} (E,\mathcal{O}) \arrow[r, "g=\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f_i"'] & (E,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i. \end{tikzcd}$$

Im ersten Diagramm wählen wir $g = \mathrm{id}$. Nach Definition ist g genau dann stetig, wenn $f_i \circ g = f_i$ stetig ist. Die Identität ist stetig, da wir in beiden Räumen dieselbe Topologie verwenden. Somit ist f_i stetig.

Sei auch im zweiten Diagramm $g = \mathrm{id}$. Sei weiterhin $(E, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so dass jede Abbildung $f_i : (E, \mathcal{O}) \to X_i$ stetig ist. Dann ist nach Definition der Initialtopologie auch g selber stetig. Damit muß aber die Topologie $\mathcal{O}$ feiner als die Topologie $\mathcal{I}$ sein. □

Satz 4.24 (Existenzsatz)**.** *Definiere* $\mathcal{M}_i := \left\{f_i^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}_i\right\}$*. Dann ist* $\mathcal{S} := \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ *eine Subbasis der Initialtopologie auf* E *bezüglich* $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$*.*

Beweis. Die Mengen $\mathcal{M}_i$ und $\mathcal{S}$ sind gerade so definiert, dass die Abbildungen $f_i : E \to X_i$ stetig sind. Ist also g stetig, so ist damit auch $f_i \circ g$ stetig.

Sei nun $f_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig. Wir wollen nachweisen, dass dann auch g stetig ist. Sei also $S \in \mathcal{S}$. Nach Satz 3.7 genügt es, nachzuweisen, dass $g^{-1}(S)$ offen ist. Nach Definition von $\mathcal{S}$ existieren ein $i \in I$ und ein $O \in \mathcal{O}_i$, so dass $S = f_i^{-1}(O)$ ist. Es gilt nun
$$g^{-1}(S) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O)\right) = (f_i \circ g)^{-1}(O).$$
Da nach Voraussetzung $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig ist, ist $g^{-1}(S) = (f_i \circ g)^{-1}(O)$ offen, was zu zeigen war. □

4.4. **Finaltopologie, Quotiententopologie.** Wir wollen wieder universelle Eigenschaften für die Definitionen dieser Topologien verwenden. Hier verwenden wir nun zu den obigen universellen Eigenschaften „duale" Eigenschaften.

Definition 4.25 (Finaltopologie)**.** Sei E eine Menge, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_i : X_i \to E)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Eine Topologie auf E heißt Finaltopologie bezüglich der Familie $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$, falls sie die folgende Eigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & E \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $g : E \to Y$ ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für jedes $i \in I$ stetig ist.

Wie bei der Initialtopologie haben wir einen Existenz- und einen Eindeutigkeitssatz sowie eine Charakterisierung der Finaltopologie.

Satz 4.26 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Falls auf* E *eine Finaltopologie bezüglich der Familie* $(X_i, \mathcal{O}_i, f_i)_{i\in I}$ *existiert, so ist sie die feinste Topologie auf* E*, für die die Abbildungen* f_i *stetig sind. Daher ist sie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ähnlich wie bei der Initialtopologie; Übung. □

Satz 4.27 (Existenzsatz)**.** *Definiere* $\mathcal{M}_i := \left\{O \subset E : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i\right\}$ *und* $\mathcal{M} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$*. Dann ist* $\mathcal{M}$ *die Finaltopologie auf* E*.*

Beweis. Ähnlich wie bei der Initialtopologie; Übung. □

Definition 4.28 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\pi : X \to X/\!\sim$ die kanonische Projektion auf die Äquivalenzklassen $X/\!\sim$. Die finale Topologie auf $X/\!\sim$ bezüglich π heißt Quotiententopologie auf $X/\!\sim$. Versehen mit dieser Topologie heißt $X/\!\sim$ Quotientenraum oder Faktorraum bezüglich der Relation $\sim$.

Bemerkung 4.29. Die Quotiententopologie auf $X/\!\sim$ ist die feinste Topologie, für die $\pi : X \to X/\!\sim$ stetig ist, d. h. $A \subset X/\!\sim$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen in X ist.

Beispiel 4.30. Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Der Quotientenraum $\mathbb{R}/\sim$ ist homöomorph zum Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

4.4.1. *Aufgaben.*

Aufgabe 4.5. Beweise Satz 4.26.

Aufgabe 4.6. Beweise Satz 4.27.

4.5. **Identifizierungstopologie, Zusammenkleben von Räumen.**

Satz 4.31. *Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Definiere auf X die Äquivalenzrelation $\sim$ durch*

$$x \sim y :\iff f(x) = f(y).$$

Zerlege f wie folgt in eine surjektive, eine bijektive und eine injektive Abbildung:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[r, "\overline{f}"] & f(X). \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Dann gilt

(i) Die Abbildungen π, $\overline{f}$ und j sind stetig.
(ii) Die Abbildung $\overline{f}$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder offenen (oder jeder abgeschlossenen) Menge der Form $f^{-1}(A)$ unter f offen (bzw. abgeschlossen) in $f(X)$ ist.

Beweis.

(i) Nach Definition der Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist π stetig. Die Abbildung j ist als die kanonische Injektion des mit der Unterraumtopologie versehenen Raumes $f(X) \subset Y$ in Y stetig. Die Unterraumtopologie auf $f(X)$ stimmt nach Beispiel 4.22 mit der Initialtopologie bezüglich der Injektionsabbildung $j : f(X) \to Y$ überein. Die Abbildung $f = j \circ \overline{f} \circ \pi$ ist stetig. Dies ist nach Definition der Initialtopologie äquivalent zur Stetigkeit von $\overline{f} \circ \pi$. Da die Quotiententopologie auf $X/\sim$ mit der Finaltopologie bezüglich $\pi : X \to X/\sim$ übereinstimmt, ist die Stetigkeit von $\overline{f} \circ \pi$ äquivalent zur Stetigkeit von $\overline{f}$.
(ii) Die Mengen in $X/\sim$ sind gerade von dieser Form, wobei $A \subset Y$ beliebig ist. Daher folgt die Aussage, denn eine stetige offene bijektive Abbildung ist ein Homöomorphismus (Satz 3.15). □

Definition 4.32 (Identifizierungstopologie)**.** Ist in der Zerlegung in (4.1) die Abbildung $\overline{f}$ ein Homöomorphismus, so heißt f identifizierende Abbildung. Ist f zusätzlich surjektiv, so heißt die Topologie von Y Identifizierungstopologie bezüglich f. (Es handelt sich dann nämlich um dieselbe Topologie wie auf X, wenn man dort Punkte mit gleichen Bildern identifiziert und die Quotiententopologie bezüglich dieser Identifikation verwendet.)

Bemerkung 4.33. Trägt Y die Identifizierungstopologie, so vereinfacht sich die Zerlegung von f in (4.1) zu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y. \\ & X/\sim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 4.34. *Ist $f : X \to Y$ stetig, surjektiv und offen oder abgeschlossen, so trägt Y die Identifizierungstopologie bezüglich f.*

Beweis. Beachte dazu, dass die Voraussetzungen an Offenheit oder Abgeschlossenheit stärker sind als in Satz 4.31. □

Beispiele 4.35.

(i) Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^1$ gegeben durch $x \mapsto (\sin x, \cos x)$. Dann ist f eine abgeschlossene surjektive stetige Abbildung. Somit ist $[0, 2\pi]/\sim_f$ homöomorph zum Einheitskreis. (Dasselbe Beispiel funktioniert auch mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, nur muss man dann benutzen, dass f offen ist.)

(ii) Sei $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Definiere auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch $x \sim y :\iff \underset{\lambda>0}{\exists} : x = \lambda y$. Die Abbildung $\overline{f} : X/\sim \to \mathbb{S}^n$ mit $\overline{f}([x]_\sim) = \frac{x}{|x|}$ ist ein Homöomorphismus. Sei $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Die Identifizierungstopologie auf $\mathbb{S}^n$ bezüglich $f = \overline{f} \circ \pi$ stimmt daher mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{S}^n$ überein.

Definition 4.36 (Topologische Summe)**.** Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ eine Familie disjunkter topologischer Räume. Dann heißt $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$, versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Injektionen $j_i : X_i \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, topologische Summe von $(X_i)_{i\in I}$.

Sind die Teilmengen X_i nicht disjunkt, so geht man vorher zur Familie $(X_i \times \{i\})_{i\in I}$ über.

Bemerkung 4.37. Eine Teilmenge $O \subset \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ist genau dann offen, wenn für jedes $i \in I$ die Menge $O \cap X_i$ in X_i offen ist. Auf den Mengen X_i induziert die Topologie auf $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ als Teilraumtopologie die ursprüngliche Topologie $\mathcal{O}_i$ auf X_i.

Definition 4.38 (Zusammenkleben von Räumen)**.** Seien X und Y disjunkte topologische Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren auf $X \cup Y$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z_1 \sim z_2 :\iff \begin{cases} (z_1,\, z_2 \in A & \text{und} \quad f(z_1) = f(z_2)) \quad \text{oder} \\ (z_1 \in A,\, z_2 \in f(A) & \text{und} \quad f(z_1) = z_2) \quad \text{oder} \\ (z_2 \in A,\, z_1 \in f(A) & \text{und} \quad f(z_2) = z_1) \quad \text{oder} \\ & \quad\quad\quad (z_1 = z_2). \end{cases}$$

Den Faktorraum $(X \cup Y)/\sim$ bezeichnen wir mit $Y \cup_f X$. $Y \cup_f X$ heißt der durch Zusammenkleben von X mit Y mittels f entstandene Raum.

Bemerkung 4.39. Insbesondere werden beim Zusammenkleben von $X \cup Y$ zu $Y \cup_f X$ die Punkte aus $f(A)$ mit allen ihren Urbildern identifiziert.

Beispiele 4.40.

(i) Sei $X = [0,1]$, $A = \{0\} \cup \{1\}$, $Y = [2,3]$ und $f(0) = 2$, $f(1) = 3$. Dann ist $X \cup_f Y$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$.
(ii) Sei $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$, $A = \partial B_1(0)$, $Y = \{p\}$ eine einpunktige Menge und sei $f(x) = p$ für alle $x \in A$. Dann ist $Y \cup_f X$ homöomorph zu $\mathbb{S}^n$.

Definition 4.41 (Ankleben von Zellen)**.** Definiere $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ als die abgeschlossene n-dimensionale Einheitskugel, $e^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ als die offene n-dimensionale Einheitskugel und $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) \equiv D^n \setminus \dot{D}^n$ als die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Wir nennen auch D^n einen n-dimensionalen Ball, e^n eine n-dimensionale Zelle und $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Sphäre.

Sei X ein topologischer Raum und $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine Abbildung. Wir sagen, dass $X \cup_f D^n$ (oder ein dazu homöomorpher Raum) durch Ankleben (oder Anheften) einer n-Zelle mittels f entstanden sei. Man schreibt auch laxerweise $X \cup_f e^n$ statt $X \cup_f D^n$.

Bemerkung 4.42. Sei $p : X \cup D^n \to X \cup_f D^n$ die kanonische Projektion. Dann ist $p|_{e^n} : e^n \to p(e^n)$ ein Homöomorphismus. Dies erklärt, warum man vom Anheften/Ankleben einer n-Zelle spricht.

Beispiele 4.43.

(i) Sei $X = D^n$ und $f : \mathbb{S}^{n-1} \to D^n$ die kanonische Inklusionsabbildung (in einen zweiten n-Ball). Dann ist $X \cup_f D^n$ eine n-dimensionale Sphäre.
(ii) Sei $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $A := \{(x,y) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$, $Y := [0,1]$. Sei $f : A \to Y$ definiert durch $f(0,y) := y$ und $f(1,y) := 1-y$. Dann ist $M := Y \cup_f X$ homöomorph zu dem Möbiusband.

Der Rand $\partial M = M \setminus \dot{M}$ des Möbiusbandes ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. Somit lässt sich an M eine 2-Zelle mittels einer Abbildung $g : \mathbb{S}^1 \to \partial M$ ankleben. Wir können für g einen Homöomorphismus wählen. Wir erhalten einen neuen Raum. (Dieser ist homöomorph zu $\mathbb{P}^2$.)

Wir können auch mehrere Zellen gleichzeitig ankleben.

Definition 4.44. Seien $D^n \times \{i\}$, $i \in I$, n-Bälle und $f_i : \mathbb{S}^{n-1} \times \{i\} \to X$ stetige Abbildungen der dazugehörigen $(n-1)$-Sphären in einen topologischen Raum X. $\mathbb{S}^{n-1}_I = \bigcup\limits_{i \in I} \left(\mathbb{S}^{n-1} \times \{i\}\right)$ ist ein Unterraum von $D^n_I := \bigcup\limits_{i \in I} (D^n \times \{i\})$. Wir erhalten eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^{n-1}_I \to X$ durch die Definition $f(x,i) := f_i(x)$. Man sagt, dass $X' := X \cup_f D^n_I$ durch Ankleben der n-Zellen $e^n \times \{i\}$, $i \in I$, an X entstanden sei.

CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead eingeführt. Sie werden induktiv definiert. (CW steht für "closure-finite weak topology".)

Definition 4.45 (CW-Komplex)**.** Ein nulldimensionaler CW-Komplex ist eine Menge von Punkten, die mit der diskreten Topologie versehen ist.

Ein n-dimensionaler CW-Komplex ist ein Raum der Form $X \cup_f e^n_I$, wobei f stetig, X ein k-dimensionaler CW-Komplex mit $k < n$ und $e^n_I = \bigcup\limits_{i \in I} (e^n_i \times \{i\})$ die topologische Summe von n-Zellen mit $n \ge 1$ ist.

Wir fordern zusätzlich, dass die Gesamtzahl der Zellen endlich ist.

Beispiele 4.46.

(i) $\mathbb{S}^2$ ist homöomorph zu einem zweidimensionalen CW-Komplex. Man klebt zunächst eine 1-Zelle e^1 an einen Punkt und erhält einen zu $\mathbb{S}^1$ homöomorphen Raum. Durch Ankleben von zwei 2-Zellen e_1^2 und e_2^2 an den entstandenen Raum erhält man einen zu $\mathbb{S}^2$ homöomorphen Raum.
(ii) Man erhält auch einen zu einer $\mathbb{S}^2$ homöomorphen CW-Komplex, indem man eine 2-Zelle an einen Punkt klebt.
(iii) Klebt man eine n-Zelle an einen Punkt, so erhält man einen n-dimensionalen CW-Komplex homöomorph zu $\mathbb{S}^n$.

4.5.1. *Aufgaben.*

Aufgabe 4.7. Sei X ein topologischer Raum. Tragen $A \subset X$ und $B \subset X$ die Unterraumtopologie. Gelte $X = A \cup B$. Sei M eine Menge mit $M \subset A \cap B$. Ist $M \subset A \cap B$ offen (abgeschlossen) in A und in B, so ist M auch offen (abgeschlossen) in X.

Aufgabe 4.8. Seien X und Y topologische Räume und gelte $A \subset X$ sowie $B \subset Y$. Zeige:
(i) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$
(ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
(iii) $\partial(A \times B) = \left(\partial A \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times \partial B\right)$

Aufgabe 4.9. Sei $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Projektion auf den ersten Faktor, $p_1(x, y) := x$. Zeige, dass p_1 nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.10. Seien X_i, $i \in I$, topologische Räume und seien $A_i \subset X_i$ Teilmengen mit der induzierten Topologie (Unterraumtopologie).
(i) Die Produkttopologie auf $\prod\limits_{i\in I} A_i$ und die Unterraumtopologie, die von $\prod\limits_{i\in I} X_i$ auf $\prod\limits_{i\in I} A_i$ induziert wird, stimmen überein.
(ii) Fixiere $j \in I$. Die Finaltopologie auf X_j bezüglich der Projektionsabbildung $p_j : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j$ ist gerade die ursprüngliche Topologie auf X_j.

Aufgabe 4.11. Gib eine Basis für die folgenden Topologien an:
(i) Die feinste Topologie auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, stetig ist. (Das Intervall $[0, 2\pi]$ trägt dabei die übliche Topologie.)
(ii) Die feinste Topologie auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, stetig ist.
(iii) Die feinste Topologie auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, stetig ist.
(iv) Die gröbste Topologie auf $\mathbb{S}^1$, so dass die Abbildung
$$(\cos t, \sin t) \mapsto \cos t,$$
also die Projektion auf die erste Komponente, für $t \in [0, 2\pi)$ stetig ist.

Aufgabe 4.12 (Box-Topologie)**.** Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann bilden in $\prod\limits_{i\in I} X_i$ die Mengen der Form $\prod\limits_{i\in I} U_i$, wobei $U_i \subset X_i$ offen ist, eine Basis einer Topologie. Zeige dies. Diese Topologie heißt Box-Topologie.

Aufgabe 4.13. Seien X und Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $(A_i)_{i\in I}$ ein System von abgeschlossenen Teilmengen von X, die eine lokal endliche Überdeckung von X bilden, d. h. es gilt:

(i) Jedes A_i, $i \in I$, ist abgeschlossen.
(ii) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$, d. h. X ist die Vereinigung der Mengen A_i.
(iii) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, so dass $U(x)$ nur mit endlich vielen A_i's einen nichtleeren Schnitt hat, also $\{i \in I : A_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist, d. h. die Vereinigung ist lokal endlich.

Dann gilt: Sind alle Abbildungen $f|_{A_i} : A_i \to Y$ stetig, so ist auch $f : X \to Y$ stetig. (Die Umkehrung gilt ebenfalls.)

5. Zusammenhängende Räume

Definition 5.1 (zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, wenn X nicht disjunkte Vereinigung von zwei offenen nicht leeren Mengen ist. D. h. gilt $X = O_1 \cup O_2$ für zwei offene nicht leere Mengen O_1 und O_2, so gilt $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Bemerkung 5.2. Äquivalent dazu ist die Definition, wenn man „offene Mengen“ durch „abgeschlossene Mengen“ ersetzt.

Satz 5.3. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Mengen sind, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.*

Beweis. Klar (Übung). □

Satz 5.4. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn es eine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum mit mindestens zwei Punkten gibt.*

Beweis. Klar (Übung). □

Satz 5.5. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung. Dann ist f konstant.*

Beweis. Klar (Übung). □

Definition 5.6. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend, wenn A, versehen mit der induzierten Topologie, ein zusammenhängender Raum ist. D. h. es gibt keine offenen Mengen O_1 und O_2 mit $O_1 \cup O_2 \supset A$, $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$, $O_1 \cap A \neq \emptyset$ und $O_2 \cap A \neq \emptyset$.

Beispiele 5.7.

(i) Intervalle der Form $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ und (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sind zusammenhängend. (Wäre eines dieser Intervalle nicht zusammenhängend, so finden wir Punkte x und y (ohne Einschränkung $x < y$) mit $x \in O_1$ und $y \in O_2$ mit offenen Mengen O_1 und O_2 wie in der Definition einer zusammenhängenden Teilmenge. Betrachte $t := \sup\{z \in [x, y] : z \in O_1\}$. $t \in O_1$ widerspricht der Maximalität, $t \in O_2$ der Definition von t, da das Supremum von Punkten in O_1 durch Punkte in O_1 von unten approximierbar ist. Da aber $t \in O_1 \cup O_2$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch.)
(ii) Außer der leeren Menge sind alle anderen Teilmengen von $\mathbb{R}$ als die oben aufgeführten Intervalle nicht zusammenhängend.

(iii) Die leere Menge und ein Raum, der genau einen Punkt enthält, sind zusammenhängend. Ein diskreter Raum mit zwei oder mehr Punkten ist nicht zusammenhängend.
(iv) $\mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend. (Zerlege an einer irrationalen Zahl.)

Satz 5.8. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ zusammenhängend. Gilt $A \subset B \subset \overline{A}$, so ist auch B zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen B wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei offene Mengen O_1 und O_2 in X mit $(B \cap O_1) \cup (B \cap O_2) = B$, $(B \cap O_1) \cap (B \cap O_2) = \emptyset$ und $B \cap O_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$. Es folgt, dass auch $(A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A$ und $(A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \emptyset$ gelten. Wähle nun Punkte $b_i \in B \cap O_i$ für $i = 1, 2$. Es gilt $b_i \in \overline{A}$. Somit gilt für jede offene Menge $O \subset X$ mit $b_i \in O$ auch $O \cap A \neq \emptyset$. Dies liefert aber insbesondere $O_i \cap A \neq \emptyset$. Mit Hilfe der beiden offenen Mengen O_1 und O_2 könnte man also zeigen, dass A nicht zusammenhängend ist. Widerspruch. □

Satz 5.9. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ sei zusammenhängend. Sei $B \subset X$. Enthält A einen inneren Punkt von B und einen äußeren Punkt von B (d. h. einen Punkt, der eine zu B disjunkte Umgebung besitzt), so enthält A auch einen Randpunkt von B.*

Beweis. Wenn A keine Randpunkte von B enthielte, wären die beiden Mengen $\dot{B}$ und $\operatorname{int}(X \setminus B)$ eine Überdeckung von A durch zwei offene Mengen, deren Schnitt mit A jeweils nichtleer wäre. Da A aber zusammenhängend ist, ist dies unmöglich. □

Satz 5.10. *Sei X zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es in $f(X)$ offene disjunkte nichtleere Mengen O_1 und O_2 mit $O_1 \cup O_2 = f(X)$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dann sind die Urbilder $f^{-1}(O_1)$ und $f^{-1}(O_2)$ offene disjunkte nichtleere Mengen, die X überdecken. Widerspruch. □

Korollar 5.11 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei X eine zusammenhängende Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $s, t \in f(X)$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen s und t an.*

Beweis. $f(X)$ ist ein Intervall. □

Wir wollen zeigen, dass die Vereinigung zweier zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend ist, wenn ihr Durchschnitt nichtleer ist. Dazu benötigen wir etwas Vorbereitung.

Definition 5.12. Sei X ein topologischer Raum und $a, b \in X$. Eine einfache Kette zwischen a und b ist eine Folge von offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ in X mit

(i) $a \in U_1$, $a \notin U_i$ für $i \neq 1$,
(ii) $b \in U_n$, $b \notin U_i$ für $i \neq n$,
(iii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$.

Beachte, dass wir nicht voraussetzen müssen, dass die offenen Mengen auch zusammenhängend sind.

Lemma 5.13. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen. Definiere auf X eine Relation $\sim$ durch $a \sim b :\iff$ Es gibt eine einfache Kette zwischen a und b mit Elementen aus $\mathcal{U}$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind offen und abgeschlossen (als Teilmengen von X).*

Beweisskizze. Reflexivität und Symmetrie sind klar. Zur Transitivität: Fügt man die beiden einfachen Ketten aneinander, so erhält man eine verbindende Kette U_1, $\ldots$, U_n, V_1, $\ldots$, V_m. Durch Herauslassen von offenen Mengen (am Ende der „U-Kette" und dann auch noch am Anfang der „V-Kette") erhält man eine einfache Kette. Dies zeigt die Transitivität.

Einfache Ketten bestehen aus offenen Mengen. Also sind die Äquivalenzklassen offen. Das Komplement einer Äquivalenzklasse ist die Vereinigung aller anderen Äquivalenzklassen und damit auch offen. Somit ist jede Äquivalenzklasse abgeschlossen. □

Satz 5.14. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten a, $b \in X$ und jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ von X durch offene Mengen eine Kette zwischen a und b gibt, deren Elemente aus $\mathcal{U}$ sind.*

Beweis. „$\Longleftarrow$": Sei X nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nicht leere offene Mengen O_1 und $O_2 \subset X$, so dass $O_1 \cup O_2 = X$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ gelten. Dann ist $\mathcal{U} := \{O_1, O_2\}$ eine offene Überdeckung von X. Ist $a \in O_1$ und $b \in O_2$ (solche Punkte existieren, da die beiden Mengen nicht leer sind), so gibt es keine einfache Kette von a nach b, die aus Elementen von $\mathcal{U}$ besteht.

„$\Longrightarrow$": Betrachte die in Lemma 5.13 beschriebenen Äquivalenzklassen. Diese sind nach diesem Lemma gleichzeitig offen und abgeschlossen. Gibt es zwei Punkte, die nicht durch eine Kette verbunden werden können, also auch nicht zur selben Äquivalenzklasse gehören, so bilden die zugeörigen Äquivalenzklassen (ggf. nach Vereinigung mit weiteren Äquivalenzklassen) O_1 und O_2 eine Zerlegung von X in zwei offene nichtleere Mengen. Somit kann X nicht zusammenhängend sein und die Behauptung folgt. □

Satz 5.15. *Seien A, B zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes X. Gilt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.*

Beweis. Nach Satz 5.14 genügt der Nachweis, dass es zwischen je zwei Punkten zu jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ von $A \cup B$ durch offene Mengen eine einfache Kette zwischen a und b aus offenen Mengen gibt. Seien also $a \in A$ und $b \in B$ beliebig. (Wenn beide Punkte in A oder in B liegen, folgt die Existenz einer einfachen Kette zwischen diesen beiden Punkten, da A und B zusammenhängend sind.) Sei $c \in A \cap B \neq \emptyset$ beliebig. Dann gibt es eine einfache Kette von a nach c (A ist zusammenhängend) und eine einfache Kette von c nach b (B ist zusammenhängend). Aufgrund der Transitivität der Äquivalenzrelation „es gibt eine einfache Kette aus Mengen in $\mathcal{U}$" gibt es also auch eine einfache Kette von a nach b und es folgt, dass $A \cup B$ zusammenhängend ist. □

Satz 5.16. *Sei $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ das topologische Produkt nichtleerer Mengen X_i. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn jede Menge X_i zusammenhängend ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$": Ist X zusammenhängend, so ist auch $X_i = p_i(X)$, das Bild unter der stetigen Projektionsabbildung, zusammenhängend.

„$\Longleftarrow$": Seien alle Mengen X_i zusammenhängend. Sei $a \in \prod\limits_{i \in I} X_i$. Sei E als die Menge aller Punkte in $\prod\limits_{i \in I} X_i$ definiert, die mit a in einer gemeinsamen zusammenhängenden Menge liegen. Aus dem Beweis von Satz 5.15 folgt dann, dass auch die Menge E zusammenhängend ist, da E die Vereinigung von zusammenhängenden

Mengen ist, die alle den fixierten Punkt a enthalten. Wir wollen nun nachweisen, dass $\overline{E} = X$ ist. Dann folgt die Behauptung, denn nach Satz 5.8 ist mit E auch der Abschluss zusammenhängend. Betrachte also eine Elementarmenge $U \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen, dass $E \cap U \neq \emptyset$ ist. Die Elementarmenge habe die Form $U = \bigcap\limits_{k \in K} p_k^{-1}(U_k)$, wobei $K \subset I$ eine endliche Teilmenge ist und die Mengen $\emptyset \neq U_k \subset X_k$ offen sind. Wir dürfen annehmen, dass $K = \{1, \ldots, n\}$ gilt. Wähle Punkte $b_k \in U_k$ für $1 \le k \le n$. Wir definieren nun die folgenden Mengen:

$$
\begin{aligned}
E_1 &:= \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_1 \text{ beliebig}, \; x_i = a_i \text{ sonst} \right\}, \\
E_2 &:= \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_1 = b_1, \; x_2 \text{ beliebig}, \; x_i = a_i \text{ sonst} \right\}, \\
&\ldots, \\
E_n &:= \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i : x_i = b_i, \text{ für } 1 \le i \le n-1, \; x_n \text{ beliebig}, \; x_i = a_i \text{ sonst} \right\}.
\end{aligned}
$$

Die Mengen E_i sind homöomorph zu X_i und daher zusammenhängend. Nach Definition ist für $1 \le i < n$ $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$. Daher ist auch $A := \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ nach Satz 5.15 zusammenhängend. Es gelten $a \in A$ und $a \in E$. Nach Definition von E folgt also $A \subset E$. Nach Definition von E_n ist $\emptyset \neq E_n \cap U$, also auch $A \cap U \neq \emptyset$. Wir erhalten $E \cap U \neq \emptyset$ und die Behauptung folgt. □

Definition 5.17 (Zusammenhangskomponente)**.** Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen von X, welche x enthalten (und damit die größte zusammenhängende Menge, die x enthält), heißt Zusammenhangskomponente $K(x)$ von x.

Satz 5.18. *Sei X ein topologischer Raum. Für $x \in X$ ist die Zusammenhangskomponente von x, $K(x)$, zusammenhängend und abgeschlossen. Es gilt $\bigcup\limits_{x \in X} K(x) = X$. Für $x, y \in X$ ist entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$. Ist O eine offene und abgeschlossene Menge, die x enthält, so gilt $K(x) \subset O$.*

Beweis. Benutze insbesondere die Sätze 5.8 und 5.15 und die Definition von zusammenhängend. □

Somit ist $K(x)$ im Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen von X, die x enthalten, enthalten. Das folgende Beispiel zeigt, dass hier aber im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Beispiel 5.19. Bestehe $X \subset \mathbb{R}^2$ aus den Punkten $u := (0,0)$, $v := (0,1)$ und den Strecken $s_i := \left\{ \left(\frac{1}{i}, y \right) : 0 \le y \le 1 \right\}$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. X trage die Unterraumtopologie. Die Mengen s_i sind bezüglich dieser Topologie offen, abgeschlossen und zusammenhängend. Gilt $(x,y) \in s_i$, so folgt $K((x,y)) = s_i$. Die übrigen Zusammenhangskomponenten von X sind durch $K(u) = \{u\}$ und $K(v) = \{v\}$ gegeben. Sei nun O eine offene und abgeschlossene Teilmenge von X mit $u \in O$. O ist offen, also enthält O Punkte aus fast allen Mengen s_i. Da O offen und abgeschlossen ist, enthält O alle Zusammenhangskomponenten, aus denen O Punkte enthält. Somit gilt für fast alle i auch $s_i \subset O$. Wir sehen also, dass v ein Berührpunkt von O ist.

Da O abgeschlossen ist, folgt auch $v \in O$. Es gilt also $\{u, v\} \subset O$. Daher ist $K(u)$ nicht gleich dem Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen von X, die u enthalten, da jede solche Menge aufgrund der obigen Überlegungen auch v enthält.

Satz 5.20. *Sei* $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ *und* $x = (x_i) \in X$. *Dann gilt* $K(x) = \prod\limits_{i \in I} K(x_i)$, *wobei* $K(x_i)$ *die Zusammenhangskomponente von* x_i *in* X_i *ist.*

Beweis. Nach Satz 5.16 ist die Menge $\prod\limits_{i \in I} K(x_i)$ zusammenhängend. Wegen $x \in \prod\limits_{i \in I} K(x_i)$ folgt auch $K(x) \supset \prod\limits_{i \in I} K(x_i)$. Nun ist aber auch $K(x)$ selber zusammenhängend. Daher sind die kanonischen Projektionen (als stetige Bilder zusammenhängender Mengen) $p_i(K(x))$ zusammenhängend und enthalten x_i. Es folgt also $p_i(K(x)) \subset K(x_i)$. Daher gilt also auch $K(x) \subset \prod\limits_{i \in I} K(x_i)$ und die Behauptung folgt. □

Definition 5.21 (total unzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt total unzusammenhängend, falls die Zusammenhangskomponente jedes Punktes nur aus diesem Punkt besteht, also $K(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$ gilt.

Beispiele 5.22.

(i) Ein diskreter topologischer Raum (also ein Raum, versehen mit der diskreten Topologie), ist total unzusammenhängend.
(ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist total unzusammenhängend.

5.1. **Wegzusammenhang, lokaler Zusammenhang.**

Definition 5.23 (wegzusammenhängend)**.** Sei X ein topologischer Raum und $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Eine stetige Abbildung $f : I \to X$ heißt ein Weg in X. Der Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten x, $y \in X$ einen Weg $f : I \to X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gibt.

Satz 5.24. *Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Jeder Weg ist in einer Zusammenhangskomponente enthalten. □

Definition 5.25 (lokal zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt lokal zusammenhängend, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ eine zusammenhängende Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subset U$ gibt.

5.2. **Aufgaben.**

Aufgabe 5.1. Zeige, dass die folgende Menge zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist:

$$G := \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 5.2.

(i) Sei X ein topologischer Raum und seien A, $B \subset X$ abgeschlossen. Sind $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend, so sind A und B zusammenhängend.
(ii) Die Aussage aus (i) wird falsch, wenn A oder B nicht abgeschlossen sind.

Aufgabe 5.3. Seien X und Y zusammenhängende Räume. Gelte $A \subsetneq X$ und $B \subsetneq Y$. Zeige, dass dann das Komplement von $A \times B$, $(X \times Y) \setminus (A \times B)$, zusammenhängend ist.

Aufgabe 5.4. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer offen und zusammenhängend. Dann ist A wegzusammenhängend.

6. Filter und Konvergenz

Filter verallgemeinern den Begriff einer Folge.

6.1. **Folgen.**

Definition 6.1 (konvergente Folgen)**.** Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$, $x_n \to x$, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgeglieder liegen.

Bemerkung 6.2. Es genügt für den Beweis der Konvergenz, eine Umgebungsbasis zu betrachten.

Mit Hilfe von Ordinalzahlen und mit dem Wohlordnungssatz kann man eine unstetige Funktion bekommen [4, Beispiel 5.3], so dass aus $x_n \to x$ aber stets noch $f(x_n) \to f(x)$ folgt. Daher verallgemeinern wir den Begriff einer Folge und definieren Filter.

6.2. **Filter.**

Definition 6.3 (Filter)**.** Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,
(ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
(iii) $F \in \mathcal{F}$ und $F \subset F' \Longrightarrow F' \in \mathcal{F}$.

Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ heißt Filterbasis für $\mathcal{F}$, wenn jedes Element aus $\mathcal{F}$ ein Element aus $\mathcal{F}_0$ enthält. Sei also $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen von X. Dann ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Filterbasis, wenn es ein nicht leeres System ist, nur nicht leere Teilmengen enthält und für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ stets ein $B_3 \subset X$ enthält, $B_3 \in \mathcal{B}$, mit $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Beispiele 6.4 (Filter)**.**

(1) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{U}(x)$, das Umgebungssystem von x, ein Filter, der Umgebungsfilter von x.
(2) Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Das System $\mathcal{B}$, bestehend aus den Mengen $B_k := \{x_i : i \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, ist eine Filterbasis für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X. $\mathcal{F}$ heißt der von der Folge erzeugte Filter oder der zur Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gehörige Filter.
(3) Sei $\mathcal{B} := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{B}$ ist Basis eines Filters $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ heißt Fréchet-Filter auf $\mathbb{R}$.

Definition 6.5. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter. $\mathcal{F}$ heißt frei, falls $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ gilt und fixiert, falls $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$ ist.

Beispiele 6.6. Der Fréchet-Filter auf $\mathbb{R}$ ist ein freier Filter, der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist ein fixierter Filter. Nimmt man auf $\mathbb{R}$ zum Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ noch zu allen Mengen $U \in \mathcal{U}(x)$ die Mengen $U \setminus \{x\}$ hinzu, so erhält man einen freien Filter.

Definition 6.7 (feiner, Ultrafilter)**.** Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Filter auf X. Dann heißt $\mathcal{F}_1$ feiner als $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ gilt. $\mathcal{F}_2$ heißt dann gröber als $\mathcal{F}_1$.

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt Ultrafilter, wenn es keinen Filter auf X gibt, der echt feiner ($=$ feiner und ungleich) als $\mathcal{F}$ ist.

Satz 6.8. *Jeder Filter $\mathcal{F}$ ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Wir wollen das Zornsche Lemma verwenden. Sei Φ die Menge aller Filter, die feiner als $\mathcal{F}$ sind. Φ ist partiell geordnet durch die Relation $\subset$. Sei Φ_1 eine linear geordnete Teilmenge. Dann ist $\bigcup\limits_{\mathcal{F} \in \Phi_1} \mathcal{F}$ eine obere Schranke von Φ_1. Man überlegt sich direkt nach der Definition eines Filters, dass auch dies wieder ein Filter ist. Aufgrund des Zornschen Lemmas existiert also ein maximales Element in Φ. Dies ist nicht mehr verfeinerbar, also der gesuchte Ultrafilter. $\square$

Satz 6.9. *Ein Filter $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Sei X der zugrunde liegende topologische Raum.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Es gilt $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Daher ist höchstens eine dieser beiden Mengen im Filter enthalten. Betrachte zwei Mengen F_1 und F_2, so dass $F_1 \subset A$ und $F_2 \subset X \setminus A$ gilt. Zwei solche Mengen können nicht gleichzeitig in $\mathcal{F}$ sein. Also gilt für alle $F \in \mathcal{F}$, dass $F \cap A \neq \emptyset$ oder $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ ist. (Falls nicht, so finden wir nämlich zwei Mengen F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft $F_1 \cap A = \emptyset$ und $F_2 \cap (X \setminus A) = \emptyset$, also $F_1 \subset X \setminus A$ und $F_2 \subset A$ und wir erhalten einen Widerspruch zu den obigen Überlegungen.) Wir nehmen ohne Einschränkung (da A eine beliebige Menge war) an, dass $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$.

Daher ist $\{F \cap A : f \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis. Der zugehörige Filter $\mathcal{G}$ ist feiner als $\mathcal{F}$ und enthält A. Nach Voraussetzung ist aber $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und somit folgt aus $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, dass $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ gilt. Da $A \in \mathcal{G}$ ist, ist auch $A \in \mathcal{F}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der für alle Teilmengen $A \subset X$ entweder A oder $X \setminus A$ enthält. Gäbe es einen Filter $\mathcal{G}$, der echt feiner als $\mathcal{F}$ wäre, so gibt es ein $G \in \mathcal{G}$, so dass $G \notin \mathcal{F}$ ist. Nach Voraussetzung gilt dann aber $X \setminus G \in \mathcal{F}$ und auch $X \setminus G \in \mathcal{G}$, da $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$ ist. Der Filter $\mathcal{G}$ enthält daher G und $X \setminus G$. Widerspruch. $\square$

Satz 6.10. *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein fixierter Ultrafilter, wenn $\mathcal{F} = \{F \subset X : x \in F\}$ für einen Punkt $x \in X$ gilt.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein fixierter Ultrafilter. Dann ist $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Sei $x \in \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$. Sei A eine beliebige Menge mit $x \in A$. Nach Definition von x ist $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Also folgt nach Satz 6.9, dass $A \in \mathcal{F}$ gilt.

„$\Longleftarrow$“: Klar. $\square$

Definition 6.11 (Limes, Berührpunkt)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter.

(i) $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $x \in X$, $\mathcal{F} \to x$, falls $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}(x)$. x heißt Limespunkt des Filters $\mathcal{F}$.

(ii) Ein Punkt $x \in X$ heißt Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$, wenn $F \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. Die Menge der Berührpunkte ist daher $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Beispiele 6.12.

(i) Ein Limespunkt eines Filters $\mathcal{F}$ ist auch Berührpunkt von $\mathcal{F}$.
(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X. Sei $\mathcal{F}$ der von der Folge erzeugte Filter. Dann ist x genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn x ein Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$ ist.
(iii) Der Fréchetfilter auf $\mathbb{R}$ besitzt keine Berührpunkte.
(iv) Sei $\mathcal{F}$ der von der Filterbasis $\{(0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ auf $\mathbb{R}$ erzeugte Filter. Dann gilt $\mathcal{F} \to 0$.

Satz 6.13. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann ist $x \in X$ genau dann ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$, wenn es einen Filter $\mathcal{G}$ gibt, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und der gegen x konvergiert.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei x Berührpunkt des Filters $\mathcal{F}$. Dann ist $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}(x), \quad F \in \mathcal{F}\}$ Filterbasis für einen Filter $\mathcal{G}$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und der gegen x konvergiert. (Nach der Definition von Berührpunkt rechnet man direkt nach, dass dies eine Filterbasis ist.)

„$\Longleftarrow$“: Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ und gelte $\mathcal{G} \to x$. Daher ist $U \in \mathcal{G}$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ (Konvergenz) und $F \in \mathcal{G}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{G}$ ist feiner als $\mathcal{F}$). Da $U,\ F \in \mathcal{G}$ gilt, folgt $U \cap F \neq \emptyset$. Nach Definition ist daher x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. ☐

Wir werden nun sehen, wie man mit Hilfe von Filtern die Stetigkeit von Abbildungen beschreiben kann.

Definition 6.14 (Bildfilter)**.** Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit $f(\mathcal{F})$ den Filter auf Y, der $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ als Basis hat. $f(\mathcal{F})$ heißt das Bild des Filters $\mathcal{F}$ unter f oder der Bildfilter.

Satz 6.15. *Seien X und Y topologische Räume und sei $A \subset X$.*

(i) Es ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn ein Filter $\mathcal{F}$ auf X existiert, so dass $A \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$ gelten.
(ii) Die Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann in $x \in X$ stetig, wenn das Bild jedes gegen $x \in X$ konvergierenden Filters gegen $f(x)$ konvergiert.
(„$\mathcal{F} \to x \Longrightarrow \; f(\mathcal{F}) \to f(x)$“).

Beweis.

(i) „$\Longrightarrow$“: Sei $x \in \overline{A}$. Dann ist $\{A \cap U : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Filterbasis für einen Filter, der A enthält und gegen x konvergiert.
„$\Longleftarrow$“: Gelten $\mathcal{F} \to x$ und $A \in \mathcal{F}$, so ist x insbesondere Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Damit ist $x \in \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{A}$.
(ii) „$\Longrightarrow$“: Sei $f : X \to Y$ in x stetig und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Da f in x stetig ist, gibt es zu einer (beliebigen) Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x, so dass $f(U) \subset V$ gilt. Da $\mathcal{F} \to x$ konvergiert, ist $U \in \mathcal{F}$. Somit ist $V \in f(\mathcal{F})$. V war beliebig, also folgt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
„$\Longleftarrow$“: Gelte nun für jeden Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \to x$ auch $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Eine Umgebung V von $f(x)$ gehört damit zum Bildfilter $f(\mathcal{F})$, $V \in f(\mathcal{F})$. Nach Definition des Bildfilters gibt es daher ein $U \in \mathcal{F}$ mit $f(U) \subset V$. Nehmen wir

für $\mathcal{F}$ den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$, so folgt, dass U auch eine Umgebung von x ist. Somit ist f in x stetig. □

Satz 6.16. *Sei X eine Menge, $(X_i)_{i\in I}$ sei eine Familie topologischer Räume und X trage die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $f_i : X \to X_i$. Dann konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann gegen $x \in X$, wenn $f_i(\mathcal{F}) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ konvergiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Klar, da die Abbildungen f_i stetig sind.
„$\Longleftarrow$“: Das System

$$\left\{ \bigcap_{k\in K} f_k^{-1}(U_k) : K \subset I \text{ endlich, } U_k \in \mathcal{U}(f_k(x)) \right\}$$

ist eine Umgebungsbasis für x. Es ist nachzuweisen, dass eine solche Menge zum Filter $\mathcal{F}$ gehört. Es genügt zu zeigen, dass es ein $F \in \mathcal{F}$ gibt mit $F \subset \bigcap\limits_{k\in K} f_k^{-1}(U_k)$. Nach Annahme gibt es zu $U_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$ ein $F_k \in \mathcal{F}$, so dass $f_k(F_k) \subset U_k$ ist. Daher ist $F := \bigcap\limits_{k\in K} F_k \in \mathcal{F}$. Nach Konstruktion ist aber $F_k \subset f_k^{-1}(U_k)$ und es folgt $F \subset \bigcap\limits_{k\in K} f_k^{-1}(U_k)$, wie behauptet. □

Korollar 6.17. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. $\prod\limits_{i\in I} X_i$ trage die Produkttopologie. Seien $p_i : X \to X_i$ die kanonischen Projektionsabbildungen. Dann konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X genau dann gegen ein $x \in X$, wenn $p_i(\mathcal{F}) \to p_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.*

Beweis. Die Produkttopologie ist eine Initialtopologie. □

Satz 6.18 (Spurfilter)**.** *Sei X eine Menge und $\emptyset \neq A \subset X$.*

(i) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann ist die Spur $\mathcal{F} \cap A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ von $\mathcal{F}$ auf A genau dann ein Filter auf A, wenn $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. $\mathcal{F} \cap A$ heißt dann Spurfilter.
(ii) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist $\mathcal{F} \cap A$ genau dann ein Filter auf A, wenn $A \in \mathcal{F}$ ist. In diesem Fall ist $\mathcal{F} \cap A$ ein Ultrafilter auf A.

Beweis. Folgt aus den bisherigen Überlegungen. Übung. □

Korollar 6.19. *Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $x \in \overline{A}$.
(ii) Für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x ist die Spur $\mathcal{U}(x) \cap A$ auf A ein Filter.
(iii) Es gibt einen Filter auf A, dessen Bild unter der Injektion $A \subset X$ gegen x konvergiert.

Beweis. Folgt aus den bisherigen Überlegungen. Übung. □

6.3. **Aufgaben.**

Aufgabe 6.1 (Punktweise Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also $f_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, wobei wir $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \cong \prod\limits_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R} \times \{x\}$ mit der Produkttopologie versehen. Sei $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Zeige, dass $f_n \to f$ genau dann gilt, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. (Die Produkttopologie beschreibt also gerade die punktweise Konvergenz.)

Aufgabe 6.2. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und sei $A \cup B \in \mathcal{F}$. Dann ist $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.

7. Trennungseigenschaften

Dieses Kapitel wollen wir nicht allzu sehr vertiefen.

Bemerkung 7.1 (Metrische Räume). Sei (X, d) ein metrischer Raum und seinen A, $B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es disjunkte Umgebungen U und V von A und B.

Beweis. Für jeden Punkt $a \in A$ ist der Abstand zu B positiv. Er sei gleich $r_a > 0$. Fixiere $B_{r_a/3}(a)$. Wiederhole diese Konstruktion für alle Punkte $a \in A$. Deren Vereinigung $\bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a/3}(a)$ ist eine offene Umgebung von A, die zu B disjunkt ist. Dies ist U. Analog erhält man von B ausgehend eine offene Umgebung V von B. Nach Konstruktion gilt $U \cap V = \emptyset$. □

7.1. **Trennungsaxiome.**

In allgemeinen topologischen Räumen braucht solch eine Aussage nicht richtig zu sein. Räume, in denen man trotzdem Mengen voneinander durch Umgebungen „trennen“ kann, erfüllen entsprechende Trennungsaxiome.

Definition 7.2 (Trennungsaxiome)**.** Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt T_1-Raum, falls je zwei Punkte x und y aus X Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ besitzen, die jeweils den anderen Punkt nicht enthalten, $x \notin V$ und $y \notin U$.
(ii) X heißt T_2-Raum oder Hausdorffraum, wenn je zwei Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.
(iii) X heißt T_3-Raum, wenn jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jeder Punkt $x \notin A$ disjunkte Umgebungen besitzen.
(iv) X heißt T_{3a}-Raum, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \notin A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ gibt, so dass $f(x) = 1$ gilt und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$.
(v) X heißt T_4-Raum, falls es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen disjunkte Umgebungen gibt.

Definition 7.3.

(i) Ein topologischer Raum heißt regulär, wenn er ein T_3- und ein T_1-Raum ist.
(ii) Ein topologischer Raum heißt vollständig regulär, wenn er ein T_{3a}- und ein T_1-Raum ist.
(iii) Ein topologischer Raum heißt normal, falls er ein T_4- und ein T_1-Raum ist.

Satz 7.4. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist ein T_1-Raum.
(ii) Jede einpunktige Menge ist abgeschlossen. „Punkte sind abgeschlossen.“
(iii) Jede Teilmenge $A \subset X$ ist Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

Beweis.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $a \in X$. Die Menge $\bigcup\limits_{x \neq a} U_x$ ist offen, wenn alle Mengen U_x offen sind. Wähle für U_x jeweils eine offene Menge mit $x \in U_x$, aber $a \notin U_x$, die aufgrund der T_1-Eigenschaft existiert.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Verwende als offene Mengen gerade die Komplemente zu einem gegebenen Punkt.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $a \notin A$. Wähle dann als Umgebung von A die Menge $\bigcup\limits_{x\in A} U_x$ mit Mengen U_x wie oben.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $x \in X$. Sei $a \neq x$. Da die Menge $\{a\}$ Durchschnitt aller ihrer Umgebungen ist, gibt es insbesondere eine Umgebung, die x nicht enthält. Man vertausche nun die Rollen von x und a. □

Korollar 7.5. *Sei X ein regulärer ($T_3 + T_1$) topologischer Raum. Dann ist X hausdorffsch.*

Beweis. Nach Satz 7.4 sind Punkte abgeschlossen. Somit folgt aus T_3 auch T_2. □

Satz 7.6. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist hausdorffsch.
(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich der Menge $\{x\}$.
(iii) Die Diagonale $\Delta \subset X\times X$ ist abgeschlossen in $X\times X$. ($\Delta := \{(x, x) \in X\times X : x \in X\}$)
(iv) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.

Beweis.
(i) $\Longrightarrow$ (iv): Sei $\mathcal{F}$ ein konvergenter Filter. Seien x und y Limespunkte von $\mathcal{F}$. Nach Definition von Konvergenz gilt dann $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(y) \subset \mathcal{F}$. Ist $x \neq y$, so gibt es Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U\cap V = \emptyset$. Da $U \in \mathcal{F}$ und $V \in \mathcal{F}$ gelten, folgt auch $U \cap V \in \mathcal{F}$, also $\emptyset \in \mathcal{F}$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Definition eines Filters.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $y \in \bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}(x)} \overline{U}$, liege also im Schnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x. Nach Definition ist damit y Berührpunkt von $\mathcal{U}(x)$. Nach Satz 6.13 gibt es also einen Filter $\mathcal{F}$, der feiner ist als $\mathcal{U}(x)$ und der gegen y konvergiert. Damit sind aber x und y Limespunkte des Filters $\mathcal{F}$. Es gilt also nach Voraussetzung $x = y$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Seien $x \neq y \in X$. Nach (ii) gibt es eine abgeschlossene Umgebung $\overline{U} \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin \overline{U}$. Sei ohne Einschränkung U offen. Dann ist $X \setminus \overline{U}$ eine offene Umgebung von y, die zur offenen Umgebung U von x disjukt ist. Somit ist X hausdorffsch.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei X hausdorffsch und gelte $(x, y) \notin \Delta \subset X \times X$, also $x \neq y$. Dann gibt es offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Die Menge $(U \times V) \subset (X \times X)$ ist eine Umgebung von (x, y). Da $U \cap V = \emptyset$ ist, gilt auch $(U \times V) \cap \overline{\Delta} = \emptyset$. Da aus $(x, y) \notin \Delta$ also $(x, y) \notin \overline{\Delta}$ folgt, ist die Diagonale Δ abgeschlossen.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Nehme nun an, dass die Diagonale abgeschlossen ist. Sei $x \neq y$, also $(x, y) \notin \Delta$. Daher gibt es eine offene Umgebung von (x, y), die einen leeren Schnitt mit der Diagonalen Δ hat. Da offene Umgebungen der Form $U \times V$ eine Basis der offenen Mengen bilden, finden wir auch eine solche Menge, die (x, y) enthält, so dass $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Also sind U und V disjunkte offene Umgebungen von x und y. □

Satz 7.7. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann T_3, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis bilden.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei X ein T_3-Raum und sei U eine Umgebung von $x \in X$. Dann ist $X \setminus \dot{U}$ abgeschlossen und enthält den Punkt x nicht. Somit gibt es offene disjunkte Mengen V und W mit $x \in V$ und $\left(X \setminus \dot{U}\right) \subset W$. Es gilt $V \subset X \setminus W$. Da die Menge $X \setminus W$ abgeschlossen ist, folgt auch $\overline{V} \subset X \setminus W$. Da nach Wahl von W die Inklusion $X \setminus \dot{U} \subset W$ gilt, folgt, dass $X \setminus W \subset \dot{U} \subset U$ gilt. Zusammengenommen erhalten wir also $\overline{V} \subset X \setminus W \subset U$. Damit ist V eine in U enthaltene abgeschlossene Umgebung mit $x \in V$; die Behauptung folgt.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $A \neq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $x \in X \setminus A$. Dann ist $X \setminus A$ eine offene Umgebung von x und enthält daher auch eine abgeschlossene Umgebung U mit $x \in U \subset X \setminus A$. Daher sind $\dot{U}$ und $X \setminus U$ offen und disjunkt. Weiterhin gilt $x \in \dot{U}$ und $A \subset X \setminus U$. Daher ist X ein T_3-Raum. □

7.2. **Vererbbarkeit von Trennungseigenschaften.**

Satz 7.8. *Sei X ein Hausdorffraum und $A \subset X$. Dann ist auch A (versehen mit der Unterraumtopologie) ein Hausdorffraum.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. □

Bemerkung 7.9. Man kann zeigen, dass sich die Trennungsaxiome T_1, T_2, T_3 und T_{3a} auf Untterräume vererben. Ein abgeschlossener Unterraum eines T_4-Raumes ist wieder T_4.

Beweis. [4, Kapitel 6 B] □

Satz 7.10. *Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/\!\sim$ die kanonische Projektion. Dann gilt*

(i) Ist $X/\!\sim$ ein Hausdorffraum, dann ist die Relation $\sim$ abgeschlossen in $X \times X$, d. h. die Teilmenge $\{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.
(ii) Sei X regulär $(T_1 + T_3)$ und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation, definiert durch $x \sim y :\Longleftrightarrow \quad (x = y$ oder $(x \in A$ und $y \in A))$. Dann ist $X/\!\sim$ hausdorffsch.

Beweis.

(i) Betrachte die Abbildung $\pi \times \pi : X \times X \to (X/\!\sim) \times (X/\!\sim)$. Da $X/\!\sim$ hausdorffsch ist, ist die Diagonale $\Delta \subset (X/\!\sim) \times (X/\!\sim)$ abgeschlossen. Also ist auch das Urbild der Diagonalen unter der stetigen Abbildung $\pi \times \pi$ abgeschlossen. Dieses Urbild ist aber gerade die Relation $\sim$.
(ii) Sei $x \in A$, $y \notin A$. Dann folgt die für die Hausdorffeigenschaft nötige Trennung gerade aus der T_3-Eigenschaft. Seien $x \notin A$ und $y \notin A$, so argumentiere man wie in Aufgabe 7.3, um zu A disjunkte Umgebungen zu erhalten. Der Fall $x \in A$, $y \in A$ tritt nicht auf, da diese beiden Punkte identifiziert werden.

□

7.3. **Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen.**

Satz 7.11. *Sei X ein topologischer Raum und Y ein Hausdorffraum. $f, g : X \to Y$ seien stetige Abbildungen. Dann gilt:*

(i) $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *ist abgeschlossen in X.*
(ii) Ist $D \subset X$ dicht und gilt $f|_D = g|_D$, so ist $f = g$.
(iii) $\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *ist abgeschlossen in $X \times Y$.*
(iv) Ist f injektiv und stetig, so ist X hausdorffsch.

Beweis.

(i) Betrachte die stetige Abbildung
$$\begin{aligned}(f, g) : X \to& Y \times Y,\\ x \mapsto& (f(x), g(x)).\end{aligned}$$
Dann ist $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta)$ als Urbild der Diagonalen, die in einem Hausdorffraum abgeschlossen ist, abgeschlossen.
(ii) Definiere $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Dann ist $D \subset A$. A ist abgeschlossen und D ist dicht in X, also gilt $A \supset \overline{D} = X$.
(iii) Der Graph von f ist gerade das Urbild der Diagonalen $\Delta \subset Y \times Y$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto (f(x), y)$.
(iv) Die Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(f(X)) \to \mathcal{P}(X)$ mit $f(A) \mapsto A$ ist eine offene Bijektion. Sei also $x \neq y \in X$. Wähle nun disjunkte Umgebungen zu $f(x)$ und $f(y)$ und bilde diese dann mit f^{-1} wieder nach X ab. □

Satz 7.12. *Sei X ein topologischer Raum, $D \subset X$ sei eine dichte Teilmenge. Sei Y regulär ($T_1 + T_3$) und $f : D \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt f genau dann eine stetige Fortsetzung $F : X \to Y$, wenn für jedes $x \in X$ der Filter $\mathcal{U}(x) \cap D := \{U \cap D : U \in \mathcal{U}(x)\}$ unter f auf einen konvergenten Filter abgebildet wird.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei f stetig fortsetzbar. Sei $x \in X$. Der von $\mathcal{U}(x) \cap D$ auf X erzeugte Filter ist feiner als $\mathcal{U}(x)$. Also konvergiert er gegen x. Nach der Stetigkeitscharakterisierung mit Hilfe von Filtern (Satz 6.15 (ii)) konvergiert aufgrund der Stetigkeit der von $F(\mathcal{U}(x) \cap D) = f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ erzeugte Filter. Somit ist die angegebene Bedingung notwendig.

„$\Longleftarrow$“: Nehme also an, dass für jedes $x \in X$ der Filter $\mathcal{U}(x) \cap D$ unter f auf einen konvergenten Filter abgebildet wird. Sei $x \in X$ beliebig. Nach Korollar 7.5 ist Y hausdorffsch. Also konvergiert der Filter $f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ gegen einen eindeutig bestimmten Limespunkt. Bezeichne diesen mit $F(x)$. Ist $x \in D$, so gilt $F(x) = f(x)$, denn $\mathcal{U}(x) \cap D$ ist der Umgebungsfilter von x in D und f ist stetig, bildet diesen Filter also gerade auf einen Filter ab, der gegen $f(x)$ konvergiert.

Wir wollen noch nachweisen, dass F für alle $x \in X$ stetig ist. Sei dazu $x \in X$ und W eine Umgebung von $F(x)$. Der Raum Y ist regulär. Somit existiert nach Satz 7.7 auch eine abgeschlossene Umgebung V von $F(x)$, so dass $V \subset W$ ist. Da $F(x)$ als Limespunkt des Bildfilters definiert ist (also enthält der Bildfilter den Umgebungsfilter), gibt es eine (ohne Einschränkung offene) Umgebung U von x, so dass $f(U \cap D) \subset V$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass $F(U) \subset V$ gilt, was dann die behauptete Stetigkeit liefert. Da U offen ist, gilt für beliebige $y \in U$, dass $U \in \mathcal{U}(y)$ ist. Hieraus folgt insbesondere $f(U \cap D) \in f(\mathcal{U}(y) \cap D)$. Nach Definition von $F(y)$ ist $F(y)$ Limespunkt (und damit auch Berührpunkt) des Bildfilters $f(\mathcal{U}(y) \cap D)$.

Somit ist nach Definition 6.11 (ii) insbesondere $F(y) \in \overline{f(U \cap D)}$. Wir hatten V als abgeschlossene Umgebung von $F(x)$ gewählt. Es folgt daher (wir hatten oben eingesehen, dass $f(U \cap D) \subset V$ gilt) $\overline{f(U \cap D)} \subset V$. Wir hatten y als einen beliebigen Punkt in U gewählt, erhalten also $F(U) \subset V$ und die Behauptung folgt. □

7.4. Aufgaben.

Aufgabe 7.1. Sei $X := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_a, 0_b\}$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt offen, falls

(i) $0_a \notin A$, $0_b \notin A$ und $A \subset \mathbb{R}$ ist offen.
(ii) $0_a \in A$ oder $0_b \in A$ und $(A \cup \{0\}) \setminus \{0_a, 0_b\} \subset \mathbb{R}$ ist offen.

Zeige, dass X ein topologischer Raum ist, aber kein Hausdorffraum.

Aufgabe 7.2. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, nicht hausdorffsch ist.

Aufgabe 7.3. Sei X ein Hausdorffraum und $a_1, \ldots, a_n \in X$ seien paarweise verschiedene Punkte. Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen U_i, $1 \leq i \leq n$, mit $a_i \in U_i$.

8. Normale Räume

Eine reellwertige Abbildung, $f : X \to \mathbb{R}$, wollen wir Funktion nennen. In diesem Abschnitt behandeln wir die Lemmata von Tietze und Urysohn sowie Partitionen der Eins aus topologischer Perspektive.

8.1. Das Lemma von Urysohn.

Wir wollen hier untersuchen, wie sich abgeschlossene Mengen durch stetige Funktionen trennen lassen.

Satz 8.1 (Urysohns Lemma)**.** *Sei X ein T_4-Raum und seien A, $B \subset X$ disjunkte nicht leere abgeschlossene Mengen in X. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.*

Beweis. Wir wollen im Beweis häufiger die folgende Tatsache benutzen: In einem T_4-Raum gibt es zu einer abgeschlossenen Menge C und zu einer offenen Menge O mit $C \subset O$ stets eine offene Menge O_1, so dass $C \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset O$ gilt (Man betrachtet dazu die beiden abgeschlossenen Mengen C und $X \setminus O$ und benutzt die T_4-Eigenschaft.).

Betrachte die Menge

$$D := \left\{ \frac{p}{2^k} : 0 \leq p \leq 2^k,\, p \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

und die folgende Aufzählung ihrer Elemente

$$0,\, 1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{4},\, \frac{3}{4},\, \ldots,\, \frac{1}{2^n},\, \frac{3}{2^n},\, \ldots,\, \frac{2^n-1}{2^n},\, \ldots.$$

Wir wollen nun gemäß dieser Aufzählung den Zahlen Mengen zuordnen, die wir entsprechend der üblichen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ geschachtelt wählen. Wähle zunächst offene Mengen G_0 und G_1, so dass

$$A \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset X \setminus B$$

gilt. Per Induktion ordnen wir nun jeder Zahl τ in der obigen Aufzählung eine Menge G_τ zu. Sei dazu a mit $a < \tau$ maximal aus den Zahlen der Aufzählung, die bereits verwendet wurden und b mit $\tau < b$ minimal aus denselben Zahlen. Wir wählen nun eine offene Menge G_τ, so dass $\overline{G}_a \subset G_\tau \subset \overline{G}_\tau \subset G_b$ gilt.

Definiere schließlich für beliebige $t \in [0,1]$ eine Menge G_t durch

$$G_t := \bigcup_{\substack{d \in D \\ d \le t}} G_d.$$

Wir beobachten, dass die Mengen G_t, $0 \le t \le 1$, alle offen sind und dass die Definition für die Mengen, die wir oben schon definiert haben, mit der obigen Definition übereinstimmt. Weiterhin gilt für $t < \tau$ die Inklusion $\overline{G}_t \subset G_\tau$. Wir definieren nun eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{t \in [0,1] : x \in G_t\} & x \in G_1, \\ 1 & x \notin G_1. \end{cases}$$

Es gilt $0 \le f(x) \le 1$ für alle $x \in X$. Weiterhin ist $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.

Wir wollen nun noch nachweisen, dass f stetig ist. Definiere dazu $G_t := \emptyset$, falls $t < 0$ ist und $G_t := X$, falls $t \ge 1$ gilt. Seien $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist $O := G_{f(x_0)+\varepsilon/2} \setminus \overline{G}_{f(x_0)-\varepsilon/2}$ eine offene Umgebung von x_0. Nach Definition von f gilt $f(O) \subset (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$. Daher ist die Funktion f im Punkte x_0 stetig. □

Satz 8.2. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein T_4-Raum, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen nicht leeren Teilmengen A und $B \subset X$ eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$ gibt.*

Beweis. (Falls die Teilmengen leer sein dürfen erhält man nur Aussagen wie $f(a) = 0$ für alle $a \in A$.)

„$\Longrightarrow$“: Ist genau die Aussage von Urysohns Lemma.

„$\Longleftarrow$“: Wähle als offene Umgebungen $f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)\right)$ und $f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, \infty\right)\right)$. □

Korollar 8.3. *Ein normaler Raum ($T_4 + T_1$) ist vollständig regulär ($T_{3a} + T_1$).*

Beweis. Ein normaler Raum ist T_1. Also sind Punkte abgeschlossen und die Behauptung folgt aus dem Urysohnschen Lemma. □

Um zu sehen, ob es auch eine Funktion f gibt, die genau auf einer gegebenen abgeschlossenen Menge den Wert 1 annimmt, brauchen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 8.4. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt G_δ-Menge, wenn sie als Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen G_i dargestellt werden kann:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt F_σ-Menge, wenn sie als Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen F_i dargestellt werden kann:

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

(Eselsbrücke: G: Gebiet, offen, F: fermé, abgeschlossen, δ: Durchschnitt, σ: Summe, Vereinigung.)

Satz 8.5. *Sei X ein T_4-Raum. Sei $\emptyset \neq A \subset X$ abgeschlossen. Dann gibt es genau dann eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\{0\}) = A$, wenn A eine G_δ-Menge ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei f eine stetige Funktion mit $f^{-1}(\{0\}) = A$, so gilt

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{i}, \tfrac{1}{i}\right)\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\tfrac{1}{i}, \tfrac{1}{i}\right)\right).$$

Daher ist A eine G_δ-Menge.

„$\Longleftarrow$“: Seien nun $G_i \subset X$ offene Mengen und $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$. Nach dem Urysohnschen Lemma finden wir stetige Funktionen $f_i : X \to [0,1]$, so dass $f_i(A) = \{0\}$ und $f_i(X \setminus G_i) \subseteq \{1\}$ gelten. Definiere eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^i} f_i(x) \quad \text{für } x \in X.$$

Nach Aufgabe 8.1 ist f eine stetige Funktion. Nach Konstruktion gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$ ist. □

Wir erhalten damit die folgende Verschärfung des Urysohnschen Lemmas.

Satz 8.6. *Sei X ein T_4-Raum. Seien $A, B \subset X$ nichtleere disjunkte abgeschlossene G_δ-Mengen, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$, so dass $f(x) = 0 \iff x \in A$ und $f(x) = 1 \iff x \in B$ gelten.*

Beweis. In Satz 8.5 können wir die Funktion f so konstruieren, dass $f(x) = 0 \iff x \in A$ und $f(B) = \{1\}$ gelten. Sei $g : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $g(x) = 1 \iff x \in B$ und $g(A) = \{0\}$ gelten. Dann leistet die Funktion $\frac{1}{2}(f+g)$ das Geforderte. □

Aufgabe 8.1. Sei x ein topologischer Raum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen.

(i) Konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, so ist f stetig.
(ii) Gilt $|f_n(x)| < a_n$ für alle $x \in X$ und konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, dann ist $g_n := \sum\limits_{i=0}^{n} f_i$ gleichmäßig konvergent und $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \lim\limits_{i\to\infty} g_i(x)$ für alle $x \in X$ ist eine stetige Funktion.

8.2. **Fortsetzung stetiger Abbildungen.** Das Urysohnsche Lemma besagt, dass eine spezielle stetige Funktion auf $A \cup B$ sich für disjunkte nichtleere abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ zu einer stetigen Funktion auf X fortsetzen lässt. Dies verallgemeinern wir nun.

Satz 8.7 (Tietze)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein T_4-Raum, wenn sich jede auf einer abgeschlossenen Menge definierte stetige Funktion zu einer stetigen Funktion auf ganz X fortsetzen lässt.*

Aufgabe 8.2. Lies und verstehe den Beweis des Satzes von Tietze, z. B. in [4, Kapitel 7 B].

8.3. **Lokal endliche Systeme und Partition der Eins.**

Satz 8.8. *Sei X ein normaler Raum und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche Überdeckung von X. Dann gibt es eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.*

Aufgabe 8.3. Lies und verstehe den Beweis dieses Satzes (einschließlich Definitionen), z. B. in [4, Kapitel 7 C].

9. Kompakte Räume

Aus der Analysis wissen wir, dass im $\mathbb{R}^n$ beispielsweise Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit übereinstimmen. In $\mathbb{R}^n$ sind folgen- und überdeckungskompakte Teilmengen jeweils gerade die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen. Wir wollen hier Kompaktheit etwas genauer untersuchen.

9.1. **Kompakte Räume.**

Definition 9.1 (Kompaktheit)**.** Sei X ein topologischer Raum.

(i) X heißt quasikompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i\in I'}$ mit $I' \subset I$ und $\#I' < \infty$ enthält.
(ii) Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.
(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt quasikompakt (kompakt), wenn der Unterraum A quasikompakt (kompakt) ist.
(iv) $A \subset X$ heißt relativ kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Satz 9.2. *Sei X ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(i) X ist quasikompakt.
(ii) Jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen von X mit $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$ enthält eine endliche Familie $(A_i)_{i\in I'}$ mit $\bigcap\limits_{i\in I'} A_i = \emptyset$.
(iii) Jeder Filter auf X besitzt einen Berührpunkt.
(iv) Jeder Ultrafilter ist konvergent.

Beweis.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Man betrachtet die Komplemente: Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$, so ist $(X \setminus A_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Daher gibt es eine endliche Teilmenge $I' \subset I$, so dass $\bigcup\limits_{i\in I'} (X\setminus A_i) = X$ gilt. Es folgt $\bigcap\limits_{i\in I'} A_i = \emptyset$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Hat $\mathcal{F}$ keinen Berührpunkt, so ist $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset$. Die Mengen $\overline{F}$ sind aber auch in $\mathcal{F}$ enthalten. Somit ist der Schnitt von jeweils endlich vielen von ihnen nichtleer. Nach (ii) und wegen $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset$ folgt aber gerade, dass $\bigcap\limits_{F\in I} \overline{F} = \emptyset$ für eine endliche Teilmenge $I \subset \mathcal{F}$ gilt. Widerspruch.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Dies folgt direkt aus Satz 6.13, denn ein Filter mit Häufungspunkt lässt sich zu einem konvergenten Filter verfeinern. Nach (iii) hat ein gegebener Filter einen Häufungspunkt. Die Verfeinerung davon, die konvergiert, stimmt für einen Ultrafilter mit diesem überein. Also konvergiert schon der Ultrafilter.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Definiere $A_L := X \setminus \bigcup\limits_{i\in L} U_i$ für endliche Teilmengen $L \subset I$. Da die Familie $(U_i)_{i\in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, ist $A_L \neq \emptyset$. Da $\left(X \setminus \bigcup\limits_{i\in L} U_i\right) \cap \left(X \setminus \bigcup\limits_{i\in K} U_i\right) = X \setminus \bigcup\limits_{i\in L\cup K} U_i$ gilt und diese Mengen stets nichtleer sind, bilden sie eine Filterbasis zu einem Filter $\mathcal{F}$. Verfeinere $\mathcal{F}$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{G}$. Nach (iv) konvergiert $\mathcal{G}$ gegen ein $x \in X$. Da die Mengen U_i eine Überdeckung von X bilden, gibt es ein i_0, so dass $x \in U_{i_0}$ ist. Da $\mathcal{G} \to x$ gilt und $U_{i_0} \in \mathcal{U}(x)$ ist, folgt $U_{i_0} \in \mathcal{G}$. Nach Konstruktion gilt aber $(X \setminus U_{i_0}) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Korollar 9.3. *In einem quasikompakten Raum X besitzt jede unendliche Folge einen Häufungspunkt.*

Beweis. Die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ induziert einen Filter $\mathcal{F}$. Da X quasikompakt ist, besitzt der Filter $\mathcal{F}$ nach Satz 9.2 einen Berührpunkt. Nach Beispiel 6.12 besitzt die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ somit einen Häufungspunkt. □

Satz 9.4. *Sei X quasikompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A quasikompakt.*

Beweis. Sei $\left(\tilde{U}_i\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Zu jeder offenen Menge $\tilde{U}_i \subset A$ finden wir eine offene Menge $U_i \subset X$ mit $U_i \cap A = \tilde{U}_i$. Dann überdeckt $(U_i)_{i\in I}$ zusammen mit $X \setminus A$ die Menge X. Da X quasikompakt ist, gibt es eine endliche Menge $L \subset I$, so dass $X = (X \setminus A) \cup \bigcup\limits_{i\in L} U_i$ gilt. Es folgt $A = \bigcup\limits_{i\in L} \tilde{U}_i$. Also ist A quasikompakt. □

Satz 9.5. *Sei X ein Hausdorffraum, K eine kompakte Teilmenge von X. Dann existiert zu jedem Punkt $x \in X \setminus K$ eine Umgebung U von K und eine Umgebung V von x mit $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist X ein Hausdorffraum. Also gibt es zu $x \in X \setminus K$ und $y \in K$ offene Umgebungen $U(y) \in \mathcal{U}(y)$ und $V(y) \in \mathcal{U}(x)$ mit $U(y) \cap V(y) = \emptyset$. Die offenen Mengen $(U(y))_{y\in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Sei $K' \subset K$ endlich, so dass $K \subset U := \bigcup\limits_{y\in K'} U(y)$ gilt. Definiere $V := \bigcap\limits_{y\in K'} V(y)$. Dann ist V eine offene Umgebung von x mit $U \cap V = \emptyset$. □

Es gibt Beispiele [4, Aufgabe 8.4] von quasikompakten Teilmengen eines quasikompakten Raumes, die nicht abgeschlossen sind. Jedoch gilt der folgende Satz.

Satz 9.6. *Sei X ein kompakter Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei $A \subset X$ kompakt. Aus Satz 9.5 folgt insbesondere, dass jeder nicht in A enthaltene Punkt eine zu A disjunkte offene Umgebung besitzt. Somit ist $X \setminus A$ eine offene Menge und $A \subset X$ abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$“: Dies folgt aus Satz 9.4.

Alternativ: Sei A abgeschlossen. Dann ist $X \setminus A$ offen. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Zusammen mit $X \setminus A$ überdecken diese Mengen X. Also gibt es nach Satz 9.4 eine endliche Teilmenge $I' \subset I$, so dass $(X \setminus A) \cup \bigcup\limits_{i\in I'} U_i = X$ gilt.

Wir erhalten $\bigcup_{i\in I'} U_i = A$. Da eine Teilmenge eines T_2-Raumes wieder ein T_2-Raum ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 9.7. *Ein kompakter Raum ist regulär* ($T_1 + T_3$).

Beweis. In einem T_2-Raum sind Punkte abgeschlossen, also ist er auch ein T_1-Raum. Es folgt aus Satz 9.6, dass ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten Raumes selbst wieder kompakt ist. Nach Satz 9.5 folgt also, dass das Trennungsaxiom T_3 erfüllt ist. □

Es gilt noch mehr.

Satz 9.8. *Ein kompakter Raum ist normal.*

Beweis. Seien A und B abgeschlossene Teilmengen eines kompakten topologischen Raumes mit $A \cap B = \emptyset$. Dann sind A und B nach Satz 9.6 selbst wieder kompakt. Wir gehen nun ganz ähnlich wie im Beweis von Satz 9.5 vor. Benutze Satz 9.5 und erhalte für jedes $x \in A$ offene Umgebungen $U(x) \in \mathcal{U}(x)$ und $V(x)$ von B mit $U(x) \cap V(x) = \emptyset$. Sei $K \subset A$ eine endliche Teilmenge, so dass $A \subset U := \bigcup_{x\in K} U(x)$ gilt. Definiere $V := \bigcap_{x\in K} V(x)$. Dann sind U und V disjunkte offene Umgebungen von A und B. □

Definition 9.9 (Folgenkompaktheit)**.** Ein topologischer Raum heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge (siehe Definition 6.1) besitzt.

Satz 9.10. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Wäre A kompakt, aber nicht beschränkt, so bilden die Kugeln $(B_1(x))_{x\in\mathbb{R}^n}$ eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung. Wäre A kompakt, aber nicht abgeschlossen, so gibt es $x \in \overline{A} \setminus A$. Nach Definition des Abschlusses gilt $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Also ist $\left(\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{i}}(x)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A, zu der es keine endliche Teilüberdeckung gibt.

„$\Longleftarrow$“: Mittels Intervallhalbierung sieht man (vergleiche die Grundvorlesung), dass A folgenkompakt ist.

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_i \in A$, $i \in I$, so dass $A \subset \bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(x_i)$ gilt. (Wir benötigen hier nicht $x_i \in A$ und so kann man die Bälle auch explizit hinschreiben.) Sonst findet man nämlich induktiv eine Folge von Mittelpunkten, so dass $\bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$ für ein $\varepsilon > 0$ für kein N die Menge A überdeckt. Wir dürfen annehmen, dass wir die Punkte so gewählt haben, dass auch $x_{N+1} \notin \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$ gilt. Da nun die Punkte $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten bilden, die jeweils $|x_i - x_j| \geq \varepsilon$ für $i \neq j$ erfüllen, konvergiert keine Teilfolge.

Nehme also an, es gäbe eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Ball $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ wie oben, der nicht schon durch endlich viele der Mengen U_i überdeckt wird. Die Punkte x_ε enthalten eine konvergente Teilfolge, die gegen einen Punkt $x \in A$ konvergiert. Da

x in einer Menge U_{i_0} enthalten ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U_{i_0}$ ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $|x_\varepsilon - x| < \delta/2$ gilt, so folgt für $a \in B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ die Ungleichung

$$|a - x| \le |a - x_\varepsilon| + |x_\varepsilon - x| < \varepsilon + \tfrac{\delta}{2}.$$

Ist also $\varepsilon < \delta/2$, so gilt $B_\varepsilon(x_\varepsilon) \subset B_\delta(x) \subset U_{i_0}$ im Widerspruch zu Annahme, dass sich $B_\varepsilon(x_\varepsilon)$ nicht schon durch endlich viele Menge aus $(U_i)_{i\in I}$ überdecken lässt. Die Behauptung folgt. □

Der folgende Satz besagt: „Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.“

Satz 9.11. *Sei X quasikompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ quasikompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Aufgrund der Quasikompaktheit von X existiert eine endliche Teilüberdeckung $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i\in L}$ von X. Dann ist $(U_i)_{i\in L}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$ und die Behauptung folgt. □

Satz 9.12. *Sei X quasikompakt, Y hausdorffsch und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f abgeschlossen. Ist f injektiv (bijektiv), so ist f eine Einbettung (ein Homöomorphismus).*

Beweis. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir wollen nachweisen, dass auch $f(A)$ abgeschlossen ist. Nach Satz 9.4 ist A als abgeschlossener Teilraum eines quasikompakten Raumes selbst quasikompakt. Nach Satz 9.11 ist damit auch das Bild $f(A)$ quasikompakt. Da Y Hausdorffraum ist, ist $f(A)$ sogar kompakt. Nach Satz 9.6 ist damit $f(A)$ abgeschlossen.

Ist f injektiv, so ist $f : X \to f(X)$ eine offene Abbildung. Sei nämlich $O \subset X$ offen. Dann ist $f(X \setminus O) = f(X) \setminus f(O)$ abgeschlossen in $f(X)$. Somit ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus und $f : X \to Y$ eine Einbettung, vergleiche auch Satz 4.12. Ist f bijektiv, so ist f natürlich ein Homöomorphismus. □

Bemerkung 9.13. Aus Definition 4.32 und Satz 4.34 folgt nun, dass jede stetige Abbildung eines quasikompakten Raumes in einen Hausdorffraum identifizierend ist.

Satz 9.14 (Tychonoff)**.** *Ein nicht leerer Produktraum $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ ist ganau dann quasikompakt, wenn jedes X_i quasikompakt ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei X quasikompakt. Dann ist $X_i = p_i(X)$ als stetiges Bild eines quasikompakten Raumes wieder quasikompakt.

„$\Longleftarrow$“: Nach Satz 9.2 genügt es zu zeigen, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Sei also $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann sind die Bildfilter $p_i(\mathcal{F})$ für alle $i \in I$ selbst wieder Ultrafilter. ($p_i(\mathcal{F})$ ist ein Ultrafilter, da er jede Menge A oder ihr Komplement enthält, da $\mathcal{F}$ entweder $p_i^{-1}(A)$ oder $p_i^{-1}(X_i \setminus A)$ enthält, siehe Satz 6.9.) Nach Voraussetzung sind die Mengen X_i quasikompakt, also erhalten wir die Konvergenz $p_i(\mathcal{F}) \to x_i$ für alle $i \in I$ für Punkte $x_i \in X_i$. Nach Korollar 6.17 gilt also $\mathcal{F} \to x := (x_i)_{i\in I}$ und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 9.15. Hieraus sieht man auch sofort, dass beschränkte abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ kompakt sind, wenn man weiß, dass beschränkte abgeschlossene Intervalle kompakt sind. Diese Mengen sind nämlich abgeschlossene Teilmengen von $[-k, k]^n$ für genügend großes $k > 0$.

9.2. **Lokalkompakte Räume.**

Definition 9.16. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X lokal kompakt, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 9.17. Alternativ könnte man definieren, dass X lokal kompakt ist, wenn X hausdorffsch ist und wenn jede Umgebung eines Punktes eine kompakte Umgebung besitzt. Dies rechtfertigt die Bezeichnung „lokal“. Benutze für den Nachweis der Äquivalenz der beiden Definitionen Satz 7.7 und die Tatsache, siehe Satz 9.19, dass X ein T_3-Raum ist.

Beispiele 9.18.

(i) Offensichtlich ist jeder kompakte Raum lokal kompakt.
(ii) Der $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt.
(iii) In einem lokal kompakten Raum X ist jeder Teilraum, der Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Menge ist, selbst lokal kompakt. (Sei A offen, B abgeschlossen und $x \in A \cap B$. Sei U eine kompakte Umgebung von x in X. Da $\{x\}$ und $X \setminus A$ abgeschlossen als Teilmengen von B sind, gibt es im normalen, da kompakten, Raum U offene disjunkte Umgebungen U_x und U_A mit $x \in U_x$ und $X \setminus A \subset U_A$. Nun ist $U \cap ((A \cap B) \setminus U_A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $U \setminus U_A$ und daher kompakt.)

Satz 9.19. *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann ist X regulär* ($T_1 + T_3$).

Beweis. Wir brauchen nur nachzuweisen, dass X ein T_3-Raum ist, da er nach Voraussetzung T_2 und damit T_1 ist. Sei $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei weiterhin K eine kompakte Umgebung von x. Dann ist K abgeschlossen und nach Korollar 9.7 auch regulär. Somit gibt es offene Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \subset X$, so dass $A \cap K \subset V$ ist. Wir dürfen weiterhin ohne Einschränkung annehmen (K ist selbst Umgebung), dass $U \subset K$ gilt. Dann sind U und $V \cup (X \setminus K)$ offene Mengen, die zeigen, dass X ein T_3-Raum ist. □

Satz 9.20 (Alexandroff-Kompaktifizierung)**.** *Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann gibt es einen bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmten kompakten Raum Y, der einen zu X homöomorphen Raum X_1 enthält, so dass $Y \setminus X_1 =: \{\infty\}$ aus einem Punkt besteht. Ist X nicht kompakt, so ist X_1 dicht in Y. ∞ heißt der unendlich ferne Punkt.*

Beweis. Sei ∞ ein Punkt, der nicht zu X gehört. Definiere $Y := X \cup \{\infty\}$. Auf Y definieren wir eine Topologie durch die folgende Festlegung: Alle Mengen die in X offen sind, seien auch in Y offen. Weiterhin seien alle Mengen der Form $Y \setminus K$ für eine kompakte Menge $K \subset X$ offen. Dies definiert eine Topologie auf Y. Es gilt nämlich

(i) In einem Hausdorffraum ist die endliche Vereinigung kompakter Mengen wieder kompakt, was das Schnittaxiom für offene Mengen zeigt, die alle den Punkt ∞ enthalten.
(ii) Da kompakte Mengen abgeschlossen sind, ist $(Y \setminus K) \cap X$ offen in X. Somit folgt das Schnittaxiom.
(iii) Beliebige Durchschnitte kompakter Mengen sind als abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt. Also sind beliebige Vereinigungen von offenen Mengen, die ∞ enthalten, wieder offen.

(iv) Das allgemeine Vereinigungsaxiom folgt nun, da der Durchschnitt einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge wieder kompakt ist.

Nach Definition ist $X_1 := Y \setminus \{\infty\}$ ein zu X homöomorpher Unterraum von Y.

Mit dieser Topologie ist Y ein kompakter topologischer Raum: Zunächst einmal ist Y hausdorffsch. Punkte in X lassen sich trennen, da X hausdorffsch ist. Sei $x \in X$. Da x eine kompakte Umgebung $K(x) \subset X$ besitzt, sind $K(x)$ und $Y \setminus K(x)$ disjunkte Umgebungen von x und ∞. Schließlich enthält $K(x)$ auch noch eine offene Umgebung von x. Die Quasikompaktheit folgt direkt, denn jede offene Überdeckung von Y enthält eine Menge der Form $Y \setminus K$ für eine kompakte Menge $K \subset X$ und der Rest ist kompakt.

Sei Y' ein weiterer Raum, der die Bedingungen des Satzes erfüllt. Sei X' ein zu X homöomorpher Unterraum, so dass $Y' \setminus X' = \{\infty'\}$ aus einem Punkt besteht. Sei $f : X \to X'$ ein Homöomorphismus und $F : Y \to Y'$ die Fortsetzung von f mit $F(\infty) := \infty'$. Nach Konstruktion ist F bijektiv. Für alle offenen Mengen, die ∞' nicht enthalten ist das Urbild offen, da f ein Homöomorphismus ist.

Betrachte nun eine offene Umgebung von ∞' in Y'. Ihr Komplement ist eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes Y' und daher selbst kompakt. Unter dem Homöomorphismus $f^{-1} : X' \to X$ werden kompakte Teilmengen auf kompakte Teilmengen abgebildet. Also ist $f^{-1}(K')$ für alle kompakten Mengen $K' \subset Y'$ selbst wieder kompakt. Somit sind die Urbilder aller offenen Mengen offen, F ist also stetig.

Da wir nun wissen, dass F stetig ist, können wir Satz 9.12 anwenden und erhalten, dass F ein Homöomorphismus ist.

X_1 ist ein dichter Teilraum, da $Y \setminus X_1$ nur aus ∞ besteht und jede Umgebung von ∞ einen nichtleeren Schnitt mit X_1 hat, falls X nicht selbst schon kompakt ist. □

Definition 9.21. Ein lokalkompakter Raum heißt abzählbar im Unendlichen, wenn er abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist.

Die Bezeichnung „abählbar im Unendlichen“ kommt von dem folgenden Satz.

Satz 9.22.

(i) Ein lokal kompakter Raum ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn der bei der Alexandroff-Kompaktifizierung hinzugefügte Punkt ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

(ii) Ein lokal kompakter Raum X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in X gibt mit folgende Eigenschaften:
  - *(a) $\overline{U}_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakt.*
  - *(b) $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
  - *(c) $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$.*

Beweis.

(i) Die kompakten Mengen aus der Definition der Abzählbarkeit im Unendlichen sind gerade die Komplemente von offenen Mengen einer Umgebungsbasis von ∞.

(ii) „$\Longleftarrow$“: Wenn die angegebenen Eigenschaften erfüllt sind, ist X im Unendlichen abzählbar.

„$\Longrightarrow$“: Interessant ist nur die Umkehrung: Sei $K \subset X$ kompakt. Zu K existiert dann, da X lokal kompakt ist, eine endliche Überdeckung durch offene Mengen, deren Abschluß jeweils kompakt ist. (Man betrachtet zunächst kompakte Umgebungen, dann darin enthaltene offene Umgebungen. Beachte, dass deren Abschluss jeweils kompakt ist.) Somit finden wir eine kompakte Menge K' und eine offene Menge O mit $K \subset O \subset K'$. Sei nun $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von X durch kompakte Mengen. Definiere $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch: $U_1 := O_1$, wobei O_1 eine zu K_1 gewählte Menge ist, die genauso gewählt wurde, wie oben O zu K. Wähle dann $U_{n+1} := O_{n+1}$, wobei O_{n+1} wieder nach derselben Konstruktion, diesmal aber von $\overline{U}_n \cup K_{n+1}$ ausgehend, gewählt wurde. Dann erfüllt die Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die oben angegebenen Eigenschaften. $\square$

Definition 9.23. Seien X und Y lokal kompakte Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt eigentlich, wenn für jede kompakte Menge $K \subset Y$ die Menge $f^{-1}(K)$ kompakt in X ist.

Satz 9.24. *Seien X, Y lokal kompakt und X', Y' die zugehörigen Alexandroff-Kompaktifizierungen mit unendlich fernen Punkten ∞ beziehungsweise ∞'. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann lässt sich f genau dann durch die Festsetzung $f'(\infty) := \infty'$ zu einer stetigen Abbildung $f' : X' \to Y'$ fortsetzen, wenn f eigentlich ist.*

Beweis. Zeige, dass die Urbilder offener Mengen, die ∞' enthalten, genau dann offen sind, wenn f eigentlich ist. Durch Übergang zu Komplementen sieht man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn Urbilder kompakter Mengen in Y in X auch wieder kompakt sind. Die Behauptung folgt. $\square$

Satz 9.25. *Seien X und Y lokal kompakt und $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung. Dann ist f abgeschlossen und $f(X)$ lokal kompakt.*

Beweis. Sei $f' : X' \to Y'$ die stetige Fortsetzung von f auf die Alexandroff-Kompaktifizierung wie in Satz 9.24. Dann ist f' nach Satz 9.12 auch abgeschlossen. Eine Menge $A \subset X$ ist nach Konstruktion der Alexandroff-Kompaktifizierung genau dann in X abgeschlossen, wenn $A \cup \{\infty\}$ in X' abgeschlossen ist. Nun ist $f'(A\cup\{\infty\}) = f(A)\cup\{\infty'\}$ als Bild einer kompakten Menge selbst wieder kompakt. Daher ist, wiederum aufgrund der obigen Charakterisierung von abgeschlossenen Mengen in X, auch f selber eine abgeschlossene Abbildung.

Es gilt $f(X) = f'(X') \cap Y$. Da $f'(X')$ kompakt ist, ist $f(X)$ der Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer offenen Menge in einem lokal kompakten Raum. Nach Beispiel 9.18 ist $f(X)$ daher lokal kompakt. $\square$

9.3. **Aufgaben.**

Aufgabe 9.1. Zeige, dass das abzählbare topologische Produkt folgenkompakter Räume wieder folgenkompakt ist.

Aufgabe 9.2. Sei X ein kompakter Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass es $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ gilt.

Aufgabe 9.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und bezeichne $\operatorname{dist}(x, A)$ den Abstand eines Punktes x zu einer Menge A. Untersuche, auch für den Spezialfall $X = \mathbb{R}^n$, ob es einen Punkt $a \in A$ gibt, so dass $d(x, a) = \operatorname{dist}(x, A)$ gilt. Betrachte dies für kompakte bzw. für abgeschlossene Mengen A.

Aufgabe 9.4. Ein lokal kompakter Raum ist vollständig regulär ($T_{3a} + T_1$).

Aufgabe 9.5. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte a, $b \in X$ und für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt mit $x_1 = a$, $x_n = b$ und $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ für $1 \le i \le n-1$.

Aufgabe 9.6. (Raumfüllende Kurven) Sei $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$. Finde eine surjektive stetige Abbildung $f : I \to I^2$. Zeige, dass die von dir angegebene Abbildung nicht injektiv ist.

Bemerkung: Dies wird später erklären, warum wir bei der Berechnung der Fundamentalgruppe eine Kurve so deformieren müssen, dass sie nicht surjetiv ist. I. a. ist dies nämlich nicht erfüllt.

10. Fundamentalgruppen: Motivation – Beispiele

Wie wollen einige motivierende Beispiele für die algebraische Topologie bzw. die Betrachtung von Fundamentalgruppen ansehen.

10.1. **Was macht man in der (algebraischen) Topologie?** In der Topologie betrachtet man Objekte nur bis auf stetige Deformationen. Man will also beispielsweise nicht zwischen einer Tasse und einem Ring unterscheiden, da sich diese beiden Objekte stetig ineinander überführen lassen.

In der algebraischen Topologie versucht man, topologischen Objekten algebraische Invarianten zuzuordnen, die sich unter solchen Deformationen nicht ändern. Mit diesen Invarianten kann man dann Objekte unterscheiden. Sie geben Obstruktionen (= Hindernisse) für mögliche Deformationen an.

Beachte aber, dass es hochgradig nichttrivial ist, so viele algebraische Invarianten anzugeben, dass bei Übereinstimmung aller dieser Invarianten auch eine Deformation zwischen den betrachteten Objekten möglich ist.

10.2. **Beispiele für topologische Invarianten.** Eine ganz einfache Invariante erhält man, wenn man die Zusammenhangskomponenten eines Raumes zählt.

Die Fundamentalgruppe beschreibt, welche nicht stetig ineinander überführbaren Möglichkeiten es gibt, eine $\mathbb{S}^1$ in einen Raum abzubilden.

Definition 10.1. Sei X ein topologischer Raum. (Ein topologischer Raum ist eine Verallgemeinerung eines metrischen Raumes.)

(i) Eine geschlossene Kurve (in X) ist eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{S}^1 \to X$.

(ii) Eine geschlossene Kurve ist *nullhomotop* (oder zusammenziehbar), wenn es eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$, eine Homotopie, mit den folgenden Eigenschaften gibt:
- $f(p, 0) = \gamma(p)$ für alle $p \in \mathbb{S}^1$,
- $f(p, 1) = f(q, 1)$ für alle $p, q \in \mathbb{S}^1$.

Die Anfangskurve wird also in stetiger Weise zu einem konstanten Weg deformiert.

Beispiele 10.2.

(i) Wir betrachten hier $\mathbb{S}^1$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$
Die geschlossene Kurve $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ mit $p \mapsto p$ ist nullhomotop. Eine Homotopie f die dies zeigt ist $f(p, t) = (1 - t)p$.

(ii) Die geschlossene Kurve $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $p \mapsto p$ ist „offensichtlicherweise“ nicht nullhomotop. Dies ist nichttrivial und erfordert einen Beweis.
(iii) Betrachte eine Tasse mit einem geschlossenen Seil (eine $\mathbb{S}^1$) durch den Henkel. Dann lassen sich Seil und Tasse nicht trennen, d. h. so stetig deformieren, dass am Ende beide auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegen.
(iv) Betrachte eine Fläche vom Geschlecht 2, eine „Tasse mit zwei Henkeln“. Führe ein geschlossenes Seil durch genau einen Henkel. Dann lassen sich Tasse und Seil so stetig deformieren, dass am Ende das Seil durch beide Henkel verläuft. Überraschenderweise ist also die Zahl, die angibt, durch wieviele Henkel ein Seil verläuft, keine Invariante.
Eine Visualisierung gibt es unter `www.youtube.com/watch?v=S5fPwE7GQOA`

Beispiel 10.3. Es gibt eine Möglichkeit, ein Bild mit Hilfe eines Seiles so an zwei Nägeln aufzuhängen, so dass es herunterfällt, wenn man einen beliebigen der beiden Nägel entfernt.

Dies ist die umgangssprachliche Formulierung zu dem folgenden Problem. (Ganz äquivalent sind die beiden Formulierungen jedoch nicht, da sich das Seil nicht selbst durchdringen kann. Probleme in diesem Zusammenhang vermeidet man jedoch, indem man das Seil stets von oben auf den bereits „verlegten“ Teil des Seiles legt.)

Behauptung: Es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus N$, die für $N = \{(1,0)\}$ und $N = \{(0,1)\}$ nullhomotop ist, jedoch nicht für $N = \{(1,0),(0,1)\}$.

Die zweielementige Menge entspricht dabei der Situation, in der beide Nägel in der Wand stecken, die einelementige Menge genau einem Nagel in der Wand. Ist die Abbildung nullhomotop kann man daran kein Bild aufhängen, es fällt herunter.

Die (wahrscheinlich erst später verständliche Begründung) für das Hängenbleiben ist wie folgt: Die Abbildung γ ist im Wesentlichen dadurch charakterisiert, wie sich ihr Bild um die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ herumwindet. Beschreibe a eine Kurve, die sich einmal im Uhrzeigersinn um $(1,0)$ herumwindet und b eine Kurve, die sich einmal im Uhrzeigersinn um $(0,1)$ herumwindet. Dann ist γ als $ab^{-1}a^{-1}b$ definiert. Hier ist die Konvention, dies von links nach rechts zu lesen, die Kurve windet sich also einmal im Uhrzeigersinn um $(1,0)$ herum, dann einmal im Gegenuhrzeigersinn um $(0,1)$, einmal im Gegenuhrzeigersinn um $(1,0)$ und schließlich im Uhrzeigersinn um $(0,1)$ herum. Dies ist gerade der Kommutator der beiden (erzeugenden) Elemente a und b^{-1}: $[a,b^{-1}]$. Wir werden später lernen, dass alle Kurven in der doppelt punktierten Ebene durch die freie Gruppe mit zwei Erzeugern beschrieben werden können.

Offensichtlich ist, dass die Kurve nullhomotop ist, wenn man einen der beiden Nägel entfernt. Man braucht nur die offensichtliche Homotopie als Formel hinzuschreiben. Algebraisch: Das Entfernen eines Nagels entspricht einer zusätzlichen Relation $a = 1$ und $b^{-1}b$ ist trivial.

In der einfach punktierten Ebene genügt die (vielleicht aus der Funktionentheorie oder vom Abbildungsgrad her bekannte) Umlaufzahl. Diese ist nach Entfernen von einem der beiden Nägel trivial und damit ist die Kurve zusammenziehbar. Bei zwei Nägeln ist die Umlaufzahl um jeden einzelnen der beiden Nägel ebenfalls Null. Trotzdem ist die Kurve aber nicht zusammenziehbar.

Beachte: Solange beide Nägel in der Wand stecken ist keineswegs offensichtlich, dass die Kurve nicht nullhomotop ist. Dies beruht darauf, dass $ab^{-1}a^{-1}b$ ein nichttriviales Element der Fundamentalgruppe ist. Die Details dazu gibt es später in der Vorlesung.

Aufgabe 10.1. Wie hängt man ein Bild mit einem Seil so an drei Nägel, dass das Bild herunterfällt, wenn man einen beliebigen Nagel entfernt?

Zusatz: Untersuche weitere Fragen wie beispielsweise: Wie hängt man ein Bild so an drei Nägel, dass es herunterfällt, wenn man zwei beliebige Nägel entfernt? Wie lassen sich mit einem solchen Vorgehen logische Formeln umsetzen? Welche Bedingungen muss eine logische Formel erfüllen, damit sie sich in dieser Weise logisch umsetzen lässt?

Das folgende Theorem wurde 2002/03 von Grisha Perelman (in allgemeinerer Form) bewiesen.

Theorem 10.4. *Sei M eine geschlossene einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist die Mannigfaltigkeit M homöomorph zu einer dreidimensionalen Sphäre.*

Diese Version ist als Poincarévermutung bekannt. Die zentrale Annahme ist, dass M einfach zusammenhängend ist, also eine triviale Fundamentalgruppe hat; wir werden das später noch genau definieren. Die Poincarévermutung wurde mit Hilfe des Ricciflusses bewiesen. Der Beweis macht noch allgemeinere Aussagen über dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeiten.

Zur Poincarévermutung gibt es Verallgemeinerungen für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Hierbei nimmt man an, dass alle Homotopiegruppen mit denen der Sphäre übereinstimmen. Diese Vermutung ist für alle n bekannt:

- $n = 0, 1, 2$: Gibt es nicht bzw. einfach
- $n \geq 5$: Stephen Smale 1960, Fields-Medaille
- $n = 4$: Michael Freedman 1982, Fields-Medaille
- $n = 3$: Grischa Perelman 2002/03, Fields-Medaille, abgelehnt

Homotopiegruppen sind Verallgemeinerungen der Fundamentalgruppe. Statt Abbildungen von $\mathbb{S}^1$ in einen topologischen Raum betrachtet man Abbildungen von $\mathbb{S}^n$. Homotopiegruppen werden in der algebraischen Topologie betrachtet.

11. Die Fundamentalgruppe: Erste Konstruktionen

Die Fundamentalgruppe beschreibt in einem gegebenen Raum alle geschlossenen Kurven bis auf stetige Deformationen. Wie in Beispiel 10.3 kann man mit ihrer Hilfe angeben, dass sich ein Knoten nicht auflösen lässt. Weitere Beispiele befinden sich in [2], wonach wir auch vorgehen.

11.1. **Wege und Homotopien.**

Definition 11.1.

(i) Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $f : I \equiv [0, 1] \to X$.

(ii) Eine *Homotopie* von Wegen in X ist eine Familie $f_t : I \to X$, $0 \leq t \leq 1$, so dass
   (a) die Endpunkte (bzw. Anfangspunkte) $f_t(0) =: x_0$ und $f_t(1) =: x_1$ von t unabhängig sind.
   (b) die Abbildung $F : I \times I \to X$ mit $F(s, t) := f_t(s)$ stetig ist.

(iii) Gibt es zwischen zwei Wegen f_0 und f_1 eine solche Homotopie f_t, so heißen sie *homotop*. Wir schreiben $f_0 \simeq f_1$.

(iv) Ein Weg f heißt *nullhomotop*, wenn er homotop zu einem konstanten Weg c ist. (Ein Weg c heißt konstant, wenn $c(s) = x_0$ für ein $x_0 \in X$ und für alle $0 \le s \le 1$ gilt.)

Beispiel 11.2. Seien f_0 und f_1 im $\mathbb{R}^n$ Wege mit gleichen Anfange- und Endpunkten x_0 bzw. x_1. Dann sind f_0 und f_1 homotop, $f_0 \simeq f_1$. Es genügt konvex zu interpolieren: $f_t(s) := (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$. Daher gilt eine solche Aussage auch für Wege in konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11.3. *Die Homotopierelation auf Wegen mit fixierten Endpunkten in einem topologischen Raum ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Reflexivität $f \simeq f$ ist klar, $f_t = f$ ist die gewünschte Homotopie. Ist f_t eine Homotopie zwischen f und g, so ist f_{1-t} eine Homotopie zwischen g und f. Somit folgt die Symmetrie.

Zur Transitivität: Sei $f_0 \simeq f_1$ vermöge der Homotopie f_t und $g_0 \simeq g_1$ vermöge der Homotopie g_t. Sei $f_1 = g_0$. Dann ist h_t, definiert durch

$$h_t := \begin{cases} f_{2t} & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g_{2t-1} & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen f_0 und g_1. Diese beiden Teildefinitionen stimmen für $t = \frac{1}{2}$ überein und die Stetigkeit von $H(s,t) := h_t(s)$ folgt aus Satz 4.10. □

Definition 11.4 (Homotopieklasse)**.** Die Äquivalenzklasse aller zu einem festen Weg f homotopen Wege heißt *Homotopieklasse* von f und wird mit $[f]$ bezeichnet.

Das nun definierte Produkt von Wegen bezeichnet das Nacheinander-Durchlaufen von zwei Wegen mit doppelter Geschwindigkeit.

Definition 11.5 (Produkt von Wegen)**.** Seien $f,\ g : I \to X$ Wege in einem topologischen Raum mit $f(1) = g(0)$. Dann definieren wir ein Produkt von f und g als

$$f \cdot g(s) := \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ g(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Bemerkung 11.6. Beachte, dass bei dieser Definition zunächst der links stehende Weg durchlaufen wird (anders als bei der Verkettung von Abbildungen).

Diese Definition des Produktes von Wegen induziert auch ein Produkt auf Homotopieklassen von Wegen. Denn seien $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$ homotop vermöge Homotopien f_t und g_t, so dass $f_0(1) = g_0(0)$ ist (also $f_0 \cdot g_0$ definiert ist), dann ist auch $f_t \cdot g_t$ definiert und liefert eine Homotopie, die $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ zeigt. Wir definieren $[f_0] \cdot [g_0] := [f_0 \cdot g_0]$.

Definition 11.7.

(i) Wege, bei denen $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ gilt, heißen geschlossene Wege. x_0 heißt Basispunkt.
(ii) Die Menge aller Homotopieklassen $[f]$ geschlossener Wege $f : I \to X$ mit Basispunkt x_0 wird mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet. $\pi_1(X, x_0)$ heißt *Fundamentalgruppe* (oder *erste Homotopiegruppe*) von X zum Basispunkt x_0.

Die folgende Proposition rechtfertigt den Namen Fundamentalgruppe.

Proposition 11.8. *Sei X ein topologischer Raum mit $x_0 \in X$. Dann ist die Menge $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe bezüglich des Produktes $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$.*

Beweis. Da wir nur Wege mit Endpunkten x_0 betrachten, können wir solche Wege hintereinander durchlaufen. Wir hatten gesehen, dass die angegebene Produktoperation unabhängig vom gewählten Repräsentanten der Homotopieklasse, also wohldefiniert, ist.

Assoziativität: Zeige, dass $(f \cdot g) \cdot h \simeq f \cdot (g \cdot h)$ für alle f, g, h mit $[f]$, $[g]$, $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt, was äquivalent zu $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ ist.

Zunächst einmal betrachten wir Umparametrisierungen. Sei $\varphi : I \to I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann ist die Verknüpfung $f \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von f. Unter Reparametrisierungen ändert sich die Homotopieklasse nicht, denn $f \circ \varphi \simeq f$ vermöge der Homotopie $f \circ \varphi_t$ mit $\varphi_t(s) := (1 - t)\varphi(s) + ts$, da $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1(s) = s$ gelten. Da $\varphi_t(s) \in I$ für alle $(s, t) \in I^2$ gilt, ist $f \circ \varphi_t$ wohldefiniert.

Für f, g, h mit $[f]$, $[g]$, $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$. Also sind die Verknüpfungen wohldefiniert. In $(f \cdot g) \cdot h$ und $f \cdot (g \cdot h)$ werden jeweils die Wege f, g und h hintereinander durchlaufen, jedoch in unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die beiden Produkte sind also gerade Umparametrisierungen voneinander, also insbesondere homotop zueinander.

Auch die Verknüpfung von einem Weg f mit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ mit dem konstanten Weg $c(s) = x_0$ für alle $s \in I$ ist lediglich eine Umparametrisierng von f. Es gilt daher $[f] = [f \cdot c] = [c \cdot f]$.

Die Aussagen der letzten beiden Abschnitte bleiben richtig, sobald $f \cdot g$ wohldefiniert ist. Man benötigt hierfür nicht, dass alle Endpunkte übereinstimmen.

Sei $f : I \to X$ ein Weg von $f(0) = x_0$ nach $f(1) = x_1$. Definiere den dazu inversen Weg $\overline{f} : I \to X$ durch $\overline{f}(s) := f(1 - s)$. Definiere weiterhin

$$f_t(s) := \begin{cases} f(s) & 0 \le s \le 1 - t, \\ f(1 - t) & 1 - t \le s \le 1. \end{cases}$$

Dann ist $h_t := f_t \cdot \overline{f_t}$ eine Homotopie, die zeigt, dass $f \cdot \overline{f}$ homotop zu einem konstanten Weg ist. Analog folgt auch, dass $\overline{f} \cdot f$ homotop zu einem konstanten Weg ist. Somit ist $\overline{f}$ ein beidseitiges Inverses zu f mit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$.

Daher ist $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppe. $\square$

Beispiel 11.9. Es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da sich im $\mathbb{R}^n$, wie wir in Beispiel 11.2 gesehen haben, alle geschlossenen Wege zu einem Punkt zusammenziehen lassen.

Wir wollen nun die Homotopiegruppen für unterschiedliche Basispunkte vergleichen.

Proposition 11.10. *Sei X ein topologischer Raum, x_0, $x_1 \in X$. Sei h ein Weg von x_0 nach x_1 und $\overline{h}$ der umgekehrt durchlaufene Weg. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \beta_h : \pi_1(X, x_1) &\to \pi_1(X, x_0), \\ \beta_h[f] &:= \left[h \cdot f \cdot \overline{h}\right] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir benutzen die Abkürzung $\beta_h[f]$ für $\beta_h([f])$.

Zunächst einmal ist zu zeigen, dass die Definition von der Wahl des Repräsentanten in der Homotopieklasse unabhängig ist. Ist f_t eine Homotopie zwischen Wegen mit Basispunkt x_1, so ist $h \cdot f_t \cdot \overline{h}$ eine Homotopie zwischen Wegen mit Basispunkt x_0. Daher ist β_h auf Homotopieklassen wohldefiniert.

Die Abbildung β_h ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt

$$\begin{aligned}\beta_h([f]\cdot[g]) &= \beta_h[f\cdot g] = \left[h\cdot f\cdot g\cdot \overline{h}\right] = \left[h\cdot f\cdot \overline{h}\cdot h\cdot g\cdot \overline{h}\right]\\ &= \left[h\cdot f\cdot \overline{h}\right]\cdot\left[h\cdot g\cdot \overline{h}\right] = \beta_h[f]\cdot\beta_h[g].\end{aligned}$$

Die Inverse von β_h ist durch $\beta_{\overline{h}}$ gegeben, denn es gilt $\beta_h\beta_{\overline{h}}[f] = \beta_h\left[\overline{h}\cdot f\cdot h\right] = \left[h\cdot\overline{h}\cdot f\cdot h\cdot\overline{h}\right] = [f]$. Analog rechnet man für die Inverse nach, dass $\beta_{\overline{h}}\beta_h[f] = [f]$ gilt. □

Bemerkung 11.11. Ist also X wegzusammenhängend, so hängt $\pi_1(X, x_0)$ – bis auf Gruppenisomorphismen – nicht vom Basispunkt x_0 ab. Daher schreiben wir auch $\pi_1(X)$ oder $\pi_1 X$. Wir sprechen dann auch einfach von der Fundamentalgruppe ohne einen Basispunkt explizit zu erwähnen.

Definition 11.12 (einfach zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend ist und eine triviale Fundamentalgruppe (aus nur einem Element bestehend) besitzt.

Proposition 11.13. *Ein Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte x_0, $x_1 \in X$ bis auf Homotopie nur genau einen Weg von x_0 nach x_1 gibt.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg, der zwei beliebige Punkte in X miteinander verbindet. Nehme an, dass $\pi_1(X) = \{1\}$ gilt. Seien x_0, $x_1 \in X$ und seien f und g zwei Wege von x_0 nach x_1. Nach Voraussetzung sind dann die geschlossenen Wege $\overline{g}\cdot g$ und $f\cdot\overline{g}$ nullhomotop, denn sie haben jeweils gleiche Start- und Endpunkte. Also gilt $f \simeq f\cdot\overline{g}\cdot g \simeq g$ und die Behauptung folgt.

„$\Longleftarrow$“: Gibt es – bis auf Homotopie – nur einen Weg von x_0 nach x_0, dann ist nach Definition die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial. □

11.2. **Die Fundamentalgruppe des Kreises.** Wir wollen nun nachweisen, dass $\pi_1\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{Z}$ ist, also – bis auf einen Gruppenisomorphismus – $\pi_1\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{Z}$ übereinstimmen. Wir sagen dann auch, dass $\mathbb{Z}$ die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^1$ ist. Dies folgt aus dem folgenden Theorem. Den Beweis führen wir so, dass er implizit das Konzept einer Überlagerung benutzt, das wir später noch allgemeiner kennenlernen werden.

Theorem 11.14. *Die Abbildung $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$, wobei eine ganze Zahl n auf die Homotopieklasse des Weges $[0,1] \ni s \mapsto \omega_n(s) := (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$ (mit Basispunkt $(1,0)$) abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Beweisidee ist es, Wege in $\mathbb{S}^1$ mit solchen in $\mathbb{R}$ zu vergleichen. Dazu verwenden wir die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, definiert durch $p(x) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Diese Abbildung lässt sich geometrisch durch die Einbettung von $\mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^3$ als Helix, parametrisiert duch $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, s)$, visualisieren. Dann ist p gerade die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ auf die ersten beiden Komponenten $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Somit ist der geschlossene Weg ω_n gerade die Verknüpfung $p\circ\tilde{\omega}_n$, wobei $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ identifiziert mit der Helix) gerade die Abbildung mit $\tilde{\omega}_n(s) =$

ns ist, die 0 mit n verbindet und sich dabei $|n|$-mal um die Helix (nach oben oder unten, je nach Vorzeichen von n) windet. Die Identität $\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n$ besagt dann gerade, dass $\tilde{\omega}_n$ der Abbildung ω_n überlagert ist. (Dies werden wir voraussichtlich in Kapitel 13 noch genau definieren.)

Die Abbildung Φ kann man nun auch wie folgt definieren: Definiere $\Phi(n)$ als die Homotopieklasse der geschlossenen Kurve $p \circ \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}$ ein beliebiger Weg in $\mathbb{R}$ von 0 nach n ist. Solch eine Abbildung $\tilde{f}$ ist zu $\tilde{\omega}_n$ vermöge der linearen Homotopie $(1-t)\tilde{f} + t\tilde{\omega}_n$ homotop. Daher ist auch $p \circ \tilde{f}$ zu $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ homotop und somit stimmt die alte Definition von $\Phi(n)$ mit der neuen überein.

Um nachzuweisen, dass Φ ein Homomorphismus ist, definieren wir für $m \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\tau_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als die Translation $\tau_m(x) := x + m$. Dann ist $\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ ein Weg von 0 nach $m + n \in \mathbb{R}$, also ist $\Phi(m+n)$ die Homotopieklasse in $\mathbb{S}^1$ dieses Weges unter der Abbildung p. Es gilt aber $p(\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)) = \omega_m \cdot \omega_n$. Somit ist $\Phi(m+n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n)$.

Um nachzuweisen, dass Φ ein Isomorphismus ist, wollen wir die folgenden beiden Tatsachen benutzen (und später beweisen):

(i) Zu jedem Weg $f : I \to \mathbb{S}^1$, der im Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^1$ beginnt, und zu jedem Punkt $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, die f überlagert ist, d. h., es gibt eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{f}$, die das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1. \end{tikzcd}$$

(ii) Zu jeder Homotopie $f_t : I \to \mathbb{S}^1$ von Wegen, die in x_0 beginnen und für jedes $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ gibt es eine eindeutige überlagernde Homotopie $\tilde{f}$ von Wegen, die in $\tilde{x}_0$ beginnen. Die folgenden Diagramme sind also kommutativ:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{f}_t(s) \arrow[d, mapsto, "p"] \\ (s,t) \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f_t(s). \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun zunächst mit diesen beiden Tatsachen das Theorem beweisen und dann die Beweise für die angegebenen Aussagen in einem Lemma nachholen.

Surjektivität: Um zu zeigen, dass die Abbildung Φ surjektiv ist, betrachten wir einen Weg $f : I \to \mathbb{S}^1$ mit Basispunkt $(1,0)$, der ein Element in $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ repräsentiert. Nach (i) finden wir einen dem Weg f überlagerten Weg $\tilde{f}$, der im Punkt 0 beginnt. Dieser Weg $\tilde{f}$ endet in einer ganzen Zahl n, da $p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = (1,0)$ gilt und $p^{-1}(\{(1,0)\}) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist. Wir benutzen nun die erweiterte Definition von Φ und erhalten $\Phi(n) = \left[p \circ \tilde{f}\right] = [f]$. Daher ist Φ surjektiv.

Injektivität: Nehme an, dass $\Phi(m) = \Phi(n)$ ist. Wir wollen also nachweisen, dass $m = n$ ist. Nach Definition folgt aus $\Phi(m) = \Phi(n)$ gerade, dass $\omega_m \simeq \omega_n$ ist. Sei also f_t eine Homotopie von $\omega_m = f_0$ nach $\omega_n = f_1$. Nach (ii) gibt es eine eindeutig bestimmte f überlagerte Homotopie $\tilde{f}_t$, die im Punkt 0 beginnt. Ebenso gibt es nach (i) überlagernde Abbildungen $\tilde{\omega}_m$ und $\tilde{\omega}_n$ zu ω_m und ω_n, die auch jeweils im Punkte 0 starten. Aufgrund der Eindeutigkeit der überlagernden Abbildungen gilt daher $\tilde{f}_0 = \tilde{\omega}_m$ und $\tilde{f}_1 = \tilde{\omega}_n$. Nun ist aber $\tilde{f}_t$ eine Homotopie von Wegen. Also ist insbesondere der Endpunkt $\tilde{f}_t(1)$ unabhängig von t. Für $t = 0$ gilt $\tilde{f}_0(1) = \tilde{\omega}_m(1) = m$ und für $t = 1$ erhalten wir $\tilde{f}_1(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$. Somit gilt $m = n$. □

Statt die beiden Behauptungen (i) und (ii) zu beweisen, zeigen wir die folgende allgemeinere Behauptung:

Lemma 11.15. *Sei Y ein topologischer Raum, $F : Y \times I \to \mathbb{S}^1$ stetig und $\tilde{F} : Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ eine $F|_{Y\times\{0\}}$ überlagerte Abbildung, d. h. es gilt $p \circ \left(\tilde{F}|_{Y\times\{0\}}\right) = F|_{Y\times\{0\}}$ mit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ wie in Theorem 11.14. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde{F} : Y \times I \to \mathbb{R}$, die F überlagert ist, d. h. es gilt $p \circ \tilde{F} = F$, so dass $\tilde{F}$ eine Fortsetzung der oben angegebenen Abbildung $\tilde{F} : Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ ist.*

Hieraus folgen dann die Behauptungen (i) und (ii) im Theorem 11.14, wenn wir für Y einen einpunktigen Raum $\{q\}$ bzw. I wählen. Behauptung (i) ist damit direkt klar, da wir $\tilde{F}((q, 0))$ vorgeben. Für Behauptung (ii) betrachten wir wie üblich die Abbildung $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$, die durch $F(s, t) := f_t(s)$ definiert ist. Wir wenden nun (i) an, um die eindeutig bestimmte überlagernde Abbildung $\tilde{F} : I \times \{0\} \to \mathbb{R}$ mit vorgegebenem Anfangspunkt $\tilde{F}(0, 0)$ zu bekommen. Dann liefert Lemma 11.15 eine eindeutig bestimmte überlagernde Abbildung $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$. Die Einschränkungen $\tilde{F}|_{\{0\}\times I}$ und $\tilde{F}|_{\{1\}\times I}$ sind konstanten Wegen überlagert, also aufgrund der Eindeutigkeit der überlagernden Abbildungen mit fixiertem Anfangspunkt wieder konstante Wege. Somit ist $\tilde{f}_t(s) := \tilde{F}(s, t)$ eine Homotopie von Wegen und $\tilde{f}_t$ ist f_t überlagert, denn es gilt $p \circ \tilde{F} = F$.

Beweis von Lemma 11.15. Wir wollen benutzen, dass es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ von $\mathbb{S}^1$ gibt, so dass für jedes α die Mengen $p^{-1}(U_\alpha)$ sich als disjunkte Vereinigung von Mengen homöomorph zu U_α darstellen lassen und die Abbildung p ein solcher Homöomorphismus ist. Dies ist offensichtlich, wenn wir $\mathbb{S}^1$ nur fein genug zerlegen (zwei offene Kreisbögen genügen). Beachte für später, wenn wir eine analoge Aussage für allgemeinere Überlagerungen zeigen wollen, dass wir im Folgenden nur diese Eigenschaft von p ausnützen.

Sei $y_0 \in Y$. Wir wollen zunächst eine überlagernde Abbildung $\tilde{F} : N \times I \to \mathbb{R}$ konstruieren, wobei N eine Umgebung von y_0 ist. Da die Abbildung F stetig ist, besitzt jeder Punkt $(y_0, t) \in Y \times I$ eine Umgebung in Produktform der Gestalt $N_t \times (a_t, b_t)$ (geschnitten mit dem Definitionsbereich), so dass $F(N_t \times (a_t, b_t)) \subset U_\alpha$ für ein α gilt. Aufgrund der Kompaktheit überdecken bereits endlich viele dieser Umgebungen die Menge $\{y_0\} \times I$. Daher können wir eine feste Umgebung N von y_0 wählen und Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, so dass für jedes i die Menge $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ in einem U_α enthalten ist. Dieses wollen wir mit U_i bezeichnen. Nehme nun induktiv an, dass $\tilde{F}$ auf $N \times [0, t_i]$ bereits konstruiert sei. Nach Voraussetzung gilt $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Daher gibt es eine Menge $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}$, die unter p homöomorph auf U_i abgebildet wird und die $\tilde{F}(y_0, t_i)$ enthält. Nun braucht nicht $\tilde{F}(N \times \{t_i\}) \subset \tilde{U}_i$ zu gelten (z. B. wenn N nicht zusammenhängend ist), aber wir können dies erreichen, indem wir die Umgebung $N \in \mathcal{U}(y_0)$ verkleinern; wir wählen dazu statt $N \times \{t_i\}$ die Menge $\left(\tilde{F}|_{N\times\{t_i\}}\right)^{-1}\left(\tilde{U}_i\right)$, schreiben aber weiterhin N. Nun können wir $\tilde{F}$ auf $N \times [t_i, t_{i+1}]$ durch $\tilde{F} := p_i^{-1} \circ F$ definieren, wobei $p_i : \tilde{U}_i \to U_i$ der

Homöomorphismus ist, den man aus p durch Einschränkung erhält. Nach endlich vielen solchen Schritten erhalten wir dann eine überlagernde Abbildung $\tilde{F} : N \times I \to \mathbb{R}$ für eine Umgebung N von y_0.

Wir betrachten nun die Eindeutigkeit in dem Falle, dass Y einpunktig ist. In diesem Spezialfall lassen wir Y in den Bezeichnungen ersatzlos weg. Nehme also an, dass $\tilde{F}$ und $\tilde{F}'$ zwei überlagernde Abbildungen von $F : I \to \mathbb{S}^1$ sind, so dass $\tilde{F}(0) = \tilde{F}'(0)$ gilt. Wie im Existenzteil wählen wir Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, so dass $F([t_i, t_{i+1}])$ stets in einer Menge U_i wie oben enthalten ist. Wir wollen induktiv annehmen, dass wir schon wissen, dass $\tilde{F} = \tilde{F}'$ auf $[0, t_i]$ gilt. Das Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ ist zusammenhängend und damit auch $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ sowie $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$. Somit muss $\tilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ in einer der Mengen $\tilde{U}_i$ enthalten sein, die unter p homöomorph auf U_i abgebildet werden. Auch $\tilde{F}'([t_i, t_{i+1}])$ muss in einer solchen Menge enthalten sein und zwar in derselben, da $\tilde{F}'(t_i) = \tilde{F}(t_i)$ gilt. Da $p|_{\tilde{U}_i}$ injektiv ist und $p \circ \tilde{F} = p \circ \tilde{F}'$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ gilt, folgt dass auch $\tilde{F} = \tilde{F}'$ auf dieser Menge gilt. Der Induktionsschritt folgt.

Wir beobachten nun, dass die oben auf Mengen der Form $N \times I$ konstruierten überlagernden Abbildungen eindeutig bestimmt sind, wenn wir sie auf Mengen der Form $\{y\} \times I$ einschränken. Daher stimmen sie im Schnitt von Mengen der Form $N \times I$ überein und wir können sie damit auf ganz $Y \times I$ definieren und erhalten eine wohldefinierte überlagernde Abbildung $\tilde{F} : Y \times I \to \mathbb{R}$. Die Eindeutigkeit folgt, da die Einschränkungen auf Mengen der Form $\{y\} \times I$ eindeutig bestimmt sind. Die Abbildung $\tilde{F}$ ist auch stetig, da die Einschränkungen $\tilde{F} : N \times I \to \mathbb{R}$ stetig sind, was zeigt, dass $\tilde{F}$ in allen Punkten stetig ist. □

Hieraus erhalten wir die Aussage, dass jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt.

Theorem 11.16 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $p(z) := z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $n \ge 1$, ein(e) Polynom(funktion) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann besitzt p eine Nullstelle.*

Beweis. Wenn $p(z)$ keine Nullstelle besitzt, dann definiert für jede Zahl $r \ge 0$ die Formel

$$f_r(s) := \frac{p\left(re^{2\pi i s}\right)/p(r)}{\left|p\left(re^{2\pi i s}\right)/p(r)\right|}$$

eine geschlosse Kurve $f_r : I \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ mit Basispunkt 1. In r ist f_r eine Homotopie von geschlossenen Wegen mit Basispunkt 1. Da f_0 ein trivialer geschlossener Weg ist, folgt, dass $[f_r] \in \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ für alle $r \ge 0$ das neutrale Element ist. Wir betrachten nun ein großes r mit $r \ge 1 + \max\{|a_1| + \cdots + |a_n|, 1\}$. Dann gilt für $|z| = r$ die Abschätzung

$$|z|^n = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)|z|^{n-1} \ge \left|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right|.$$

Wir schließen also, dass die Polynome $p_t(z) := z^n + t \cdot \left(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right)$ für $0 \le t \le 1$ keine Nullstellen auf dem Kreis $|z| = r$ besitzen. Damit induzieren sie, in die obige Formel für f_r statt p eingesetzt, eine Homotopie von f_r zu $\omega_n(s) := e^{2\pi i n s}$. Nach Theorem 11.14 ist ω_n gerade die n-mal ein Erzeuger der unendlichen zyklischen Gruppe $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ und somit vom neutralen Element verschieden. Dies widerspricht $[f_0] = 1$. Somit hat p doch eine Nullstelle. □

Wir erhalten einen weiteren Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes in zwei Dimensionen:

Theorem 11.17 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Selbstabbildung* $h : D^2 \to D^2$ *der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe* D^2 *besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir gehen ähnlich wie in Korollar A.3 vor. Falls h keinen Fixpunkt besitzt, definieren wir eine stetige Retraktion von D^2 nach $\mathbb{S}^1$, d. h. eine stetige Abbildung $r : D^2 \to \mathbb{S}^1$, so dass $r|_{\mathbb{S}^1}$ die Identität ist. Sei $x \in D$. Definiere $r(x)$ als den Punkt, in dem eine Halbgerade, die in $h(x)$ startet und durch x geht, den Rand $\partial D^2 = \mathbb{S}^1$ schneidet. Aufgrund der Stetigkeit von h und der Fixpunktfreiheit ist dies eine stetige Abbildung $D^2 \to \mathbb{S}^1$. Nach Definition ist auch klar, dass r eine Retraktion ist.

Wir zeigen nun, dass es keine solche Retraktion geben kann. Sei f_0 ein geschlossener Weg in $\mathbb{S}^1$. In D^2 gibt es eine Homotopie zu einem konstanten Weg, beispielsweise die lineare Homotopie $f_t(s) := (1-t)f_0(s) + tx_0$, wobei x_0 der Basispunkt von f_0 ist. Da die Retraktion r auf $\mathbb{S}^1$ die Identität ist, ist die Verkettung $r \circ f_t$ eine Homotopie in $\mathbb{S}^1$ von $r \circ f_0 = f_0$ zu einem konstanten Weg im Basispunkt x_0. Dies geht aber nicht, denn $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ ist nichttrivial und f_0 ist ein beliebiger geschlossener Weg. □

In beliebigen Dimensionen werden wir den Brouwerschen Fixpunktsatz noch in der algebraischen Topologie beweisen.

Aus dem angegebenen Beweis folgt noch:

Korollar 11.18. *Es gibt keine stetige Retraktion (vergleiche auch Definition 11.27) von* D^2 *auf* $\mathbb{S}^1$*.*

Das folgende Resultat zeigt beispielsweise, dass es auf der Erde stets zwei gegenüberliegende Punkte gibt, in denen die Temperatur und die Niederschlagsmenge übereinstimmen (falls diese sich stetig verhalten und die Erde topologisch eine Kugel ist).

Theorem 11.19 (Borsuk-Ulam)**.** *Sei* $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ *stetig. Dann gibt es* $x \in \mathbb{S}^2$*, so dass* f *an den beiden antipodalen Punkten* x *und* $-x$ *übereinstimmt,* $f(x) = f(-x)$*.*

In einer Dimension ist das analoge Resultat offensichtlich, da die Funktion $f(x) - f(-x)$ das Vorzeichen wechselt, wenn man ein halbes Mal um $\mathbb{S}^1$ herumläuft.

Im allgemeinen gibt es nicht mehr als dieses eine Paar von Punkten, betrachte beispielsweise die Orthogonalprojektion von $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Die Verallgemeinerung für Abbildungen$\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt ebenfalls, erfordert aber einen anderen Beweis.

Beweis von Theorem 11.19. Falls nicht, dann können wir eine stetige Abbildung $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ durch
$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$
definieren. Definiere eine geschlossene Kurve $\eta : I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, die den Äquator entlangläuft durch $\eta(s) := (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$. Definiere weiterhin $h : I \to \mathbb{S}^1$ durch $h := g \circ \eta$. Nach Definition von g gilt $g(-x) = -g(x)$, also folgt $h\left(s + \frac{1}{2}\right) = -h(s)$ für alle s im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Wie wir bei der Berechnung der Fundamentalgruppe von $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ gesehen haben, lässt sich der Weg $h : I \to \mathbb{S}^1$ zu einem Weg $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ „liften", d. h. wir finden eine Abbildung $\tilde{h}$, so dass $\tilde{h}$ der Abbildung h überlagert ist. Die Gleichung $h\left(s + \frac{1}{2}\right) = -h(s)$ liefert nun, dass $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ für eine ungerade Zahl $q \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir behaupten, dass q nicht von s abhängt. Dies folgt

aber direkt aus der definierenden Gleichung $\tilde{h}(s+\frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$ für q, in der alle anderen Summanden stetig von s abhängen. Dies gilt daher auch für q und da $q \in \mathbb{Z}$ ist, ist q von s unabhängig. Es gilt insbesondere $\tilde{h}(1) = \tilde{h}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{q}{2} = \tilde{h}(0) + q$. Dies bedeutet, dass h, als Element von $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ aufgefasst, gerade q-mal der Erzeuger von $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ ist. Da q ungerade ist, ist h damit nicht nullhomotop. Aber nach Definition ist $h = g \circ \eta : I \to \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ und die Abbildung η ist offensichtlich in $\mathbb{S}^2$ nullhomotop. Durch Komposition der entsprechenden Homotopie mit g sehen wir also, dass auch h nullhomotop ist. Dies ist ein Widerspruch und das Theorem folgt. □

Korollar 11.20. *Die Mengen $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph. $\mathbb{S}^2$ ist auch zu keiner Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ homöomorph.*

Beweis. Die erste Aussage folgt auch noch leicht aus der Kompaktheit von $\mathbb{S}^2$, die zweite nicht mehr. Für einen Homöomorphismus f gibt es aufgrund der Injektivität natürlich kein $x \in \mathbb{S}^2$, so dass $f(x) = f(-x)$ gilt. □

Korollar 11.21. *Seien A_1, A_2, $A_3 \subset \mathbb{S}^2$ drei abgeschlossene Teilmengen mit $\bigcup\limits_{i=1}^{3} A_i = \mathbb{S}^2$. Dann gibt es eine Menge A_i, die ein Paar von antipodalen Punkten $\{x, -x\}$ enthält.*

Beweis. Sei $d_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ die Distanz zu A_i, d. h. $d_i(x) := \inf\limits_{y \in A_i} |x-y|_{\mathbb{R}^3}$. Dies ist eine stetige Funktion. Daher können wir den Satz von Borsuk-Ulam auf die Abbildung $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (d_1(x), d_2(x))$ anwenden. Wir finden also ein $x \in \mathbb{S}^2$ mit $d_1(x) = d_1(-x)$ und $d_2(x) = d_2(-x)$. Ist einer dieser beiden Abstände Null, so liegen x und $-x$ beide in A_1 oder beide in A_2. Falls weder $d_1(x) = 0$ noch $d_2(x) = 0$ gilt, so liegt x weder in A_1 noch in A_2. Analog erhält man, dass auch $-x$ nicht in $A_1 \cup A_2$ liegt. Aufgrund der Überdeckungseigenschaft gilt daher $x \in A_3$ und $-x \in A_3$. Die Behauptung folgt. □

Hier ist die Anzahl der Mengen scharf, wie man sich überlegt, wenn man vier Mengen betrachtet, die die Symmetrien eines Tetraeders haben. In höheren Dimensionen bekommt man eine ähnliche Aussage, wenn man $\mathbb{S}^n$ mit $n+1$ abgeschlossenen Mengen überdeckt.

Das folgende Resultat liefert eine erste Möglichkeit, bei der Konstruktion eines topologischen Raumes die Fundamentalgruppe des neu konstruierten Raumes aus der seiner Komponenten zu bestimmen. Wir betrachten nur den Fall, dass X und Y wegzusammenhängend sind. Den allgemeinen Fall erhält man dann, indem man das Resultat auf Wegzusammenhangskomponenten anwendet.

Proposition 11.22. *Sind X und Y wegzusammenhängend, so ist $\pi_1(X \times Y)$ isomorph zu $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Beweis. Sei Z ein topologischer Raum und $f : Z \to X \times Y$ eine Abbildung. Definiere g und h durch $f(z) = (g(z), h(z))$. Dann ist nach Definition der Produkttopologie f genau dann stetig, wenn $g : Z \to X$ und $h : Z \to Y$ stetig sind. Daher lassen sich Wege in $X \times Y$ mit Basispunkt $z_0 = (x_0, y_0)$ bijektiv auf Paare von Wegen abbilden, wobei der eine Weg in X mit Basispunkt x_0 und der andere in Y mit Basispunkt y_0 ist. Genauso entspricht eine Homotopie f_t von Wegen in $X \times Y$ bijektiv Paaren (g_t, h_t) von Homotopieen, wobei g_t eine Homotopie von Wegen in X und h_t eine Homotopie von Wegen in Y ist. Somit erhalten wir die Bijektion

$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ mit $[f] \mapsto ([g], [h])$, wobei g und h die Verkettungen von h mit den jeweiligen Projektionen sind. Auf der rechten Seite multiplizieren wir komponentenweise. Die angegebene Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus. Da sie bijektiv ist, ist es ein Gruppenisomorphismus. □

Beispiel 11.23. Für einen zweidimensionalen Torus gilt $\pi_1\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \times \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Bis auf Homotopie ist also eine geschlossene Kurve durch zwei ganze Zahlen charakterisiert. (Beispiel, etwa $(2, 3)$, im Bild veranschaulichen.)

Induktiv folgt, dass die Fundamentalgruppe eines n-dimensionalen Torus isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist.

Insbesondere sind diese Fundamentalgruppen also abelsch. (Für "Doughnut" und Rechteck mit identifizierten Seiten skizzieren.)

11.3. **Induzierte Homomorphismen.** Sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung, die den Basispunkt $x_0 \in X$ auf den Basispunkt $y_0 \in Y$ abbildet. Wir kürzen dies mit $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ab. Dann induziert φ einen Homomorphismut $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, definiert durch $\varphi_*[f] := [\varphi \circ f]$ für einen geschlossenen Weg $f : I \to X$ mit Basispunkt x_0.

(i) Die Abbildung ist wohldefiniert, denn wenn f_t eine Homotopie in X ist, dann ist $\varphi \circ f_t$ eine Homotopie in Y.
(ii) Die angegebene Abbildung ist ein Homomorphismus, denn es gilt $\varphi \circ (f \cdot g) = (\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)$, da beide Seiten für $0 \le s \le \frac{1}{2}$ mit $\varphi \circ f(2s)$ und für $\frac{1}{2} \le s \le 1$ mit $\varphi \circ g(2s - 1)$ übereinstimmen.

Zwei grundlegende Eigenschaften induzierter Homomorphismen sind:

(i) Es gilt $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ für Abbildungen $(X, x_0) \xrightarrow{\psi} (Y, y_0) \xrightarrow{\varphi} (Z, z_0)$.
(ii) $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, d. h. die Identität $\mathbb{1} : X \to X$ induziert die Identität $\mathbb{1} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Die erste Behauptung folgt, das die Komposiition von Abbildungen assoziativ ist: $(\varphi \circ \psi) \circ f = \varphi \circ (\psi \circ f)$, die zweite ist offensichtlich.

Diese beiden Eigenschaften besagen, das die Abbildung, die jedem punktierten Raum (X, x_0) die Fundamentalgruppe zum Basispunkt x_0 zuordnet, ein Funktor ist. Wir brauchen die Definition eines Funktors erst in der algebraischen Topologie.

Sei φ ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung ψ. Dann ist φ_* ein Isomorphismus und die Umkehrabbildung ist durch ψ_* gegeben, denn es gilt $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = \mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ und analog folgt auch $\psi_* \circ \varphi_* = \mathbb{1}$.

Wir berechnen nun die Fundamentalgruppen für alle Sphären. Da wir schon wissen, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z}$ ist und da $\pi_1\left(\mathbb{S}^0, p\right)$ für $p \in \mathbb{S}^0$ einelementig ist, bleibt noch, $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ für $n \ge 2$ zu bestimmen.

Proposition 11.24. *Die Gruppen $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ sind für $n \ge 2$ trivial, d. h. sie bestehen nur aus einem Element.*

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{S}^n$ beliebig und f ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0. Nehme zunächst an, dass das Bild von f einen Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ auslässt. Dann ist f nullhomotop, denn $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und der ist einfach zusammenhängend. Daher genügt es, wenn wir eine gegebene Abbildung so homotopieren können, dass sie irgendeinen Punkt auf der Sphäre vermeidet, also nicht surjektiv ist. Fixiere dazu $x \neq x_0$, $x \in \mathbb{S}^n$, und eine offene Kugel $B \subset \mathbb{S}^n$ um x mit $x_0 \notin \overline{B}$. Wir wollen nun zeigen, dass die Anzahl, wie oft f in diese Kugel hineinkommt, x

als Wert annimmt und wieder B verlässt, endlich ist und dass auf jedem dieser Intervalle die Abbildung f mit Hilfe einer Homotopie so deformiert werden kann, dass sie außerhalb von B unverändert ist und den Punkt x vermeidet. (Beachte, dass so etwas nicht vollkommen trivial ist, da es raumfüllende Kurven gibt. Würden wir beispielsweise nur stückweise C^1-Kurven betrachten, gäbe es keine Probleme, solch einen Punkt zu finden.)

Die Menge $f^{-1}(B)$ ist eine offen Teilmenge von $(0,1)$ und daher eine (möglicherweise unendliche) disjunkte Vereinigung offener Intervalle der Form (a_i, b_i). Die Menge $f^{-1}(\{x\})$ ist abgeschlossen, in $(0,1)$ enthalten und da $x_0 \notin B$ ist, auch kompakt. Somit wird sie von endlich vielen Intervallen der Form (a_i, b_i) überdeckt. Nur auf ihnen brauchen wir f abzuändern. Schränken wir f auf die Intervalle $[a_i, b_i]$ ein und definieren $f_i := f|_{[a_i,b_i]}$ für diese endliche Kollektion von Intervallen, so sind die Bilder der f_i in $\overline{B}$ enthalten, es gilt insbesondere $f_i(a_i)$, $f_i(b_i) \in \overline{B}$. Da $n \geq 2$ ist, finden wir einen Weg g_i in $\overline{B}$ von $f_i(a_i)$ nach $f_i(b_i)$, der x vermeidet. Da $\overline{B}$ konvex ist (genauer: homöomorph zu einer konvexen Menge ist), ist f_i zu g_i in $\overline{B}$ homotop. Wenden wir die entsprechenden Homotopien auf jedes der endlich vielen Intervalle an, die $f^{-1}(x)$ enthalten, erhalten wir einen zu f homotopen geschlossenen Weg g, so dass $x \notin g(I)$ gilt. Zusammen mit den obigen Überlegungen folgt nun die Behauptung. □

Beispiel 11.25. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Nach Proposition 11.22 ist also $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$. Diese Gruppe ist also isomorph zu $\mathbb{Z}$ für $n = 2$ und trivial für $n > 2$.

Korollar 11.26. *Für $n \neq 2$ ist der $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist zunächst einmal $n \neq 1$, da $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aber wegzusammenhängend ist. (Das Argument funktioniert auch, wenn wir einen beliebigen anderen Punkt entfernen, etwa $f^{-1}(0)$ oder $f(0)$.)

Ist $n > 2$, so können wir $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht von $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ anhand der Zusammenhangskomponenten unterscheiden, die Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\})$ und $\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)$ sind aber nicht isomorph. Das ist unmöglich, wenn f ein Homöomorphismus ist. Widerspruch. □

In der algebraischen Topologie werden wir noch sehen dass es auch keine Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ gibt, wenn $m \neq n$ ist.

Mit Hilfe von induzierten Homomorphismen können wir Relationen auf topologischen Räumen auf ihre Fundamentalgruppen übertragen. Wir betrachten nun ein Beispiel hierfür:

Definition 11.27 (Retrakte)**.** Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

(i) Dann ist A ein *Retrakt* von X, wenn es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ (*Retraktion*) gibt, so dass $r|_A = \mathbb{1}_A$ ist.
(ii) Dann ist A ein *Deformationsretrakt* von X, wenn es eine stetige Familie $(f_t)_{t \in I}$ von stetigen Abbildungen $f_t : X \to X$ gibt, so dass $f_0 = \mathbb{1}_X$, $f_1(X) = A$ und $f_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ gelten. Genauer verlangt die (oben recht vage beschriebene) Stetigkeitsforderung, dass die Abbildung $X \times I \to X$ mit $(x,t) \mapsto f_t(x)$ stetig ist.

Beispiele 11.28.

(i) $\partial B_1((-1,0)) \cup \partial B_1((1,0))$ ist ein Retrakt und ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.
(ii) Die Menge $\partial B_1((1,0))$ ist ein Retrakt, aber kein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

Die Tatsache, dass es sich nicht um einen Deformationsretrakt handelt, sieht man mit Hilfe von Proposition 11.29, da die Fundamentalgruppen von $\mathbb{S}^1$ und zwei in einem Punkt zusammengeklebten Kopien von $\mathbb{S}^1$ nicht übereinstimmen (Vergleiche Kapitel 12), was aber der Fall sein müsste, wenn es sich in beiden Fällen um einen Deformationsretrakt handeln würde.

Proposition 11.29. *Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ und $x_0 \in A$. Sei $i : A \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusionsabbildung. Lässt sich X auf A retrahieren, so ist der Homomorphismus $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv. Ist A ein Deformationsretrakt von X, dann ist i_* sogar ein Isomorphismus.*

Beweis. Ist $r : X \to A$ eine Retraktion, dann gilt $r \circ i = \mathbb{1}_A$. Somit folgt $r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{A*} = \mathbb{1}_{\pi_1(A,x_0)}$. Daher ist i_* injektiv.

Ist $r_t : X \to X$ eine Familie von Abbildungen, die belegt, dass A ein Deformationsretrakt von X ist, so gilt $r_0 = \mathbb{1}_X$, $r_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ und $r_1(X) \subset A$. Sei $f : I \to X$ ein geschlossener Weg (in X) mit $x_0 \in A$ als Basispunkt, dann ist $r_t \circ f$ eine Homotopie von f zu einem Weg in A. Somit ist i_* auch surjektiv. □

Bemerkung 11.30. Wir sehen hieraus nochmals (siehe auch Korollar 11.18), dass $\mathbb{S}^1$ kein Retrakt von D^2 ist, da die durch die Inklusionsabbildung induzierte Abbildung $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \to \pi_1\left(D^2\right)$ ein Gruppenhomomorphismus von (bis auf Isomorphie) $\mathbb{Z}$ auf eine einelementige Gruppe ist, also nicht injektiv sein kann, wie es aber nach Proposition 11.29 im Falle eines Retraktes der Fall wäre.

Definition 11.31 (Homotopie)**.**

(i) Eine *Homotopie* ist eine Familie $(\varphi_t)_{t\in I}$ von Abbildungen $\varphi_t : X \to Y$, so dass die Abbildung $\Phi : X \times I \to Y$, definiert durch $\Phi(x,t) := \varphi_t(x)$, stetig ist.
(ii) Eine Homotopie $\varphi_t : X \to Y$ heißt *relativ* zu einer Menge $A \subset X$, wenn $\varphi_t(a)$ für beliebiges aber festes $a \in A$ unabhängig von $t \in A$ ist. (Einen Spezialfall davon haben wir bereits beim Deformationsretrakt kennengelernt. Dort hatten wir gefordert, dass $\varphi_t|_A = \mathbb{1}_A$ für alle $t \in I$ gilt.)
(iii) Zwei Abbildungen f_0, $f_1 : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie $(g_t)_{t\in I}$ mit $g_t : X \to Y$, $g_0 = f_0$ und $g_1 = f_1$ gibt. Wir schreiben $f_0 \simeq f_1$. (Wir kennen diese Definition bereits im Spezialfall von homotopen Wegen.)
(iv) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ gelten. (Einen Spezialfall davon haben wir beim Deformationsretrakt gesehen. (Eigentlich müsste man nun beim Definitionsbereich exakter sein.) Sei $f_t : X \to X$ eine Deformation mit $f_t|_A = \mathbb{1}_A$, $r := f_1$ und $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt $r \circ i = \mathbb{1}_A$ und $i \circ r \simeq \mathbb{1}_X$, wobei die zugehörige Homotopie durch f_t gegeben ist.)
(v) Zwei topologische Räume X und Y haben den gleichen *Homotopietyp* oder sind bis auf Homotopie äquivalent oder sind *homotopieäquivalent*, wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt. Wir schreiben $X \simeq Y$.

(vi) Sei $\varphi_t : X \to Y$ eine Homotopie und seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Falls $\varphi_t(A) \subset B$ für alle $t \in I$ gilt, so sprechen wir von einer Homotopie von Paaren $\varphi_t : (X, A) \to (Y, B)$. Im Spezialfall, dass $A = \{x_0\}$ und $B = \{y_0\}$ gelten, sprechen wir von einer Homotopie von punktierten Räumen und schreiben $\varphi_t : (X, x_0) \to (Y, y_0)$.

(vii) Entsprechend heißen punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ gibt, so dass $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$ gelten, wobei „$\simeq$" sich auf Homotopien punktierter Räume bezieht. Die Abbildungen φ und ψ heißen dann *Homotopieinverse* voneinander. Wir schreiben $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$.

Bemerkung 11.32.

(i) Ist $\varphi_t : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Homotopie von punktierten Räumen, so gilt $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$.

Es gilt nämlich (unter Verwendung von φ_t beim mittleren Gleichheitszeichen) $(\varphi_0)_*[f] = [\varphi_0 \circ f] = [\varphi_1 \circ f] = (\varphi_1)_*[f]$, wobei f ein beliebiger geschlossener Weg mit Basispunkt $x_0 \in X$ ist.

(ii) Seien (X, x_0) und (Y, y_0) homotopieäquivalent vermöge der Abbildungen $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Dann folgt aus $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$, dass $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = \mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ gilt, und aus $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$, dass $\psi_* \circ \varphi_* = \mathbb{1}$ gilt. Somit sind φ_* und ψ_* inverse Isomorphismen und es gilt $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.

Dieses formale Argument zeigt nochmals, dass eine Deformationsretraktion einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert, da eine Deformationsretraktion von X auf $A \subset X$ die Homotopieäquivalenz $(X, x_0) \simeq (A, x_0)$ für einen beliebigen Punkt $x_0 \in A$ liefert.

Bemerkung 11.32 (ii) wollen wir noch als Proposition festhalten:

Proposition 11.33. *Die Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter punktierter Räume sind isomorph.*

Bei Fundamentalgruppen ist der Basispunkt in vielen Fällen unerheblich. Dies folgt aus dem folgenden Resultat. Es verallgemeinert Proposition 11.33 von homotopieäquivalenten punktierten Räumen auf homotopieäquivalente Räume.

Proposition 11.34. *Sei $\varphi : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist der induzierte Homomorphismus $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ für beliebiges $x_0 \in X$ ein Isomorphismus.*

Für den Beweis wollen wir das folgende Resultat benutzen.

Lemma 11.35. *Sei $\varphi_t : X \to Y$ eine Homotopie und $h(s) := \varphi_s(x_0)$ der Weg, den man als Bild des Basispunktes $x_0 \in X$ unter der Homotopie bekommt. Dann gilt $(\varphi_0)_* = \beta_h \circ (\varphi_1)_*$, wobei $\beta_h[f] := \left[h \cdot f \cdot \overline{h}\right]$ in der Notation von Proposition 11.10 definiert ist. Das folgende Diagramm kommutiert also:*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \arrow[dd, "\beta_h"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "(\varphi_1)_*"] \arrow[dr, "(\varphi_0)_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)).
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei h_t die Einschränkung von h auf das Intervall $[0,t]$ mit einer Umparametrisierung, so dass der Definitionsbereich wieder I wird, genauer: $h_t(s) := h(ts)$. Ist nun f eine geschlossene Kurve in X mit Basispunkt x_0, so ist $h_t \cdot (\varphi_t \circ f) \cdot \overline{h}_t$ eine Homotopie von Wegen mit Basispunkt $\varphi_0(x_0)$. Wir betrachten diese Homotopie an den Endpunkten $t = 0$ und $t = 1$ und erhalten $(\varphi_0)_*([f]) = [\varphi_0 \circ f] = \left[h_1 \cdot (\varphi_1 \circ f) \cdot \overline{h}_1\right] = \beta_{h_1}[\varphi_1 \circ f] = \beta_h((\varphi_1)_*([f]))$. □

Beweis von Proposition 11.34. Sei $\psi : Y \to X$ eine Homotopie-Inverse zu φ, d. h. eine Abbildung mit $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(X, \psi \circ \varphi(x_0)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y, \varphi \circ \psi \circ \varphi(x_0)).$$

Die Verknüpfung der ersten beiden Abbildungen ist ein Isomorphismus, denn aus $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}$ folgt nach Lemma 11.35, dass $\psi_* \circ \varphi_* = \beta_h$ für einen Weg h in X gilt. Da $\psi_* \circ \varphi_* = \beta_h$ nach Proposition 11.10 ein Isomorphismus ist, ist φ_* insbesondere injektiv. Wenden wir dasselbe Argument auf die zweite und die dritte Abbildung an, so folgt, dass ψ_* injektiv ist. (Beachte aber, dass die Notation φ_* für die dritte Abbildung zwar korrekt ist, dies aber nicht dieselbe Abbildung wie die erste ist, da sich der Basispunkt gegenüber der ersten Abbildung geändert hat.) Nun sind die ersten beiden Abbildungen im obigen Diagramm injektiv und ihre Verknüpfung ist ein Isomorphismus. Daher muss φ_* auch surjektiv sein. Es folgt, dass φ_* ein Isomorphismus ist. □

11.4. **Aufgaben.**

Aufgabe 11.1. Seien f_0, f_1, g_0 und g_1 Wege in einem topologischen Raum. Gelten $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ und $g_0 \simeq g_1$, so folgt auch $f_0 \simeq f_1$.

Aufgabe 11.2. Zeige, dass der Basispunktwechselhomomorphismus β_h nur von der Homotopieklasse von h abhängt.

Aufgabe 11.3. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist $\pi_1(X)$ genau dann abelsch, wenn die Basispunktwechselhomomorphismen β_h nur von den Endpunkten des Weges h abhängen.

Aufgabe 11.4. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Strecke von x nach x_0, also die Menge $\{tx + (1-t)x_0 : t \in [0,1]\}$, in X enthalten ist.

Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt lokal sternförmig, wenn jeder Punkt eine sternförmige Umgebung $U \subset X$ besitzt.

Ein Weg in einer lokal sternförmigen Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist homotop zu einem stückweise (affin) linearen Weg h, d. h. zu einem Weg, der aus endlich vielen geraden Strecken besteht, die mit konstanter Geschwindigkeit $\left|\frac{\partial}{\partial t} h(t)\right|$ (was außer in endlich vielen Punkten $t \in [0,1]$, die den Endpunkten der Strecken entsprechen, definiert ist) durchlaufen werden.

Eine Menge ist insbesondere dann lokal sternförmig, wenn sie offen ist oder wenn sie die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen konvexen Mengen ist.

Aufgabe 11.5. Benutze Aufgabe 11.4 um zu zeigen, dass ein geschlossener Weg auf $\mathbb{S}^n$ homotop zu einem glatten Weg ist. Zeige, dass ein glatter Weg nicht surjektiv ist. Benutze dies, um nochmals zu zeigen, dass $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ trivial ist, falls $n \geq 2$ ist.

Aufgabe 11.6. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(i) Jede Abbildung $\mathbb{S}^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung, d. h. zu einer Abbildung, deren Bild ein Punkt ist.
(ii) Jede Abbildung $\mathbb{S}^1 \to X$ lässt sich zu einer Abbildung $D^2 \to X$ fortsetzen.
(iii) Für jeden Punkt $x_0 \in X$ ist $\pi_1(X, x_0)$ einelementig.

Schließe, dass ein wegzusammenhängender Raum X genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn alle Abbildungen $\mathbb{S}^1 \to X$ homotop sind. (In dieser Aufgabe bedeutet „homotop", „homotop ohne Basispunkt".)

Aufgabe 11.7. Seien A_1, A_2, $A_3 \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Zeige mit Hilfe des Satzes von Borsuk-Ulam, dass es eine Ebene gibt, die gleichzeitig jede Menge A_i in zwei Teile gleichen Maßes zerlegt.

Dies besagt, dass man ein Sandwich mit zwei verschiedenen Belägen durch einen geraden Schnitt so in zwei Teile teilen kann, dass alle drei Zutaten gleichmäßig aufgeteilt sind.

Aufgabe 11.8. Der Isomorphismus $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ zeigt, dass geschlossene Wege in $X \times \{y_0\}$ und in $\{x_0\} \times Y$ kommutierende Elemente in $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ repräsentieren. Gib eine explizite Homotopie an, die dies zeigt.

Hinweis: Betrachte dies zunächst für $X = Y = \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 11.9. Zeige, dass es in den folgenden Fällen keine Retraktionen $r : X \to A$ gibt:

(i) $X = \mathbb{R}^3$, A eine Teilmenge von X, die homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.
(ii) Der Volltorus $X = \mathbb{S}^1 \times D^2$ und sein Rand $A := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Die folgenden Betrachtungen werden wir in Aufgabe 12.4 noch vertiefen.

Aufgabe 11.10.

(i) Sei A ein topologischer Raum. Durch Anheften einer Zelle e^n mit $n \geq 2$ erhalte man einen Raum X. Sei $a \in A$. Zeige, dass die Inklusion $i : A \hookrightarrow X$ eine Surjektion $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ induziert. Gib ein Beispiel an, dass die Abbildung im Allgemeinen nicht injektiv ist.
(ii) Betrachte einen endlichen CW-Komplex X. (Ohne die Endlichkeitsannahme wird es komplizierter.) Sei X^1 das 1-Skelett, d. h. der eindimensionale CW-Komplex, aus dem X durch Ankleben von Zellen der Dimension $n \geq 2$ entstanden ist. Ist X^1 wegzusammenhängend, so induziert die Inklusionsabbildung $X^1 \hookrightarrow X$ eine Surjektion $\pi_1\left(X^1\right) \to \pi_1(X)$.

Hinweis: Benutze Techniken wie beim Beweis, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ für $n \geq 2$ trivial ist.

Aufgabe 11.11. Sei X ein wegzusammenhängender eindimensionaler CW-Komplex. Sei der Basispunkt x_0 eine 0-Zelle. Dann ist jeder geschlossene Weg mit Basispunkt x_0 homotop zu einer endlichen Folge von 1-Zellen, die monoton durchlaufen werden.

Schließe insbesondere, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ eine zyklische Gruppe ist, die ein erzeugendes Element besitzt, das durch einen Weg repräsentiert wird, der den Kreis einmal durchläuft. (Der komplizierte Teil bei der Berechnung der Fundamentalgruppe ist der Nachweis, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)$ nicht endlich ist.)

Hinweis: Benutze Techniken wie beim Beweis, dass $\pi_1\left(\mathbb{S}^n\right)$ für $n \geq 2$ trivial ist.

12. Das van Kampen Theorem

Können wir einen topologischen Raum in geeigneter Weise in Teilräume zerlegen, deren Fundamentalgruppen wir kennen, so gibt das van Kampen Theorem eine Möglichkeit, die Fundamentalgruppe zu bestimmen.

12.1. Freie Produkte von Gruppen.

Wie wir in Beispiel 10.3 bereits erwähnt haben, hat $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, definiert als die disjunkte topologische Summe von zwei $\mathbb{S}^1$-en, wobei wir einen Punkt auf der ersten $\mathbb{S}^1$ mit einem Punkt auf der zweiten $\mathbb{S}^1$ identifizieren ($\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist also homöomorph zur Figur „8“), als Fundamentalgruppe die freie Gruppe, die von zwei Elementen erzeugt wird.

Die universelle Eigenschaft aus Lemma 12.2 hat andere Pfeile als die der Produkttopologie. Daher wäre es algebraisch korrekter, von einem Koprodukt von Gruppen zu sprechen.

Definition 12.1 (Freie Gruppe)**.** Sei $(G_\alpha)_\alpha$ eine Familie von Gruppen. Definiere $*_\alpha G_\alpha$, das freie Produkt der Gruppen G_α, wie folgt:

(i) Ein Wort aus Elementen der Gruppen G_α ist eine endliche Folge $g_1 g_2 g_3 \cdots g_m$ von Elementen, genannt Buchstaben, wobei $g_i \in G_{\alpha_i}$ für alle $1 \le i \le m$ gilt und α_i geeignete Indizes sind.

(ii) Auf Worten definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch
$$(g_1 \cdots g_m) \circ (h_1 \cdots h_n) := g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n.$$

(iii) Wir definieren das Inverse eines Wortes $g_1 \cdots g_m$ als $g_m^{-1} \cdots g_1^{-1}$.

(iv) Wir bezeichnen das leere Wort mit e.

(v) Mit diesen Definitionen bilden die Worte keine Gruppe.

(vi) Ein reduziertes Wort ist definiert als ein Wort $g_1 \cdots g_m$ ohne Einselemente, in dem benachbarte Buchstaben g_i und g_{i+1} von verschiedenen Gruppen her kommen: $g_i \in G_{\alpha_i}$ und $g_{i+1} \in G_{\alpha_{i+1}} \Longrightarrow \alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Wir erhalten aus einem Wort ein reduziertes Wort, indem wir benachbarte Elemente g_i und g_{i+1}, die zur selben Gruppe G_α gehören, durch deren Produkt in G_α ersetzen. Weiterhin lassen wir die Eins einer Gruppe und aufeinanderfolgende Buchstaben der Form gg^{-1} ganz weg. Beachte insbesondere, dass das Produkt reduzierter Wörter im Allgemeinen nicht reduziert ist.

(vii) Man rechnet nach, z. B. in einer Algebravorlesung, dass die reduzierten Worte eine Gruppe bilden, die *freie Gruppe* der Gruppen G_α.

    Nachzuweisen ist insbesondere:
    - Assoziativität.
    - Fassen wir Worte, die durch Reduktion auseinander hervorgehen als äquivalent auf (ebenso, wenn mehrere solche Schritte dazwischenliegen), so liegt in jeder Äquivalenzklasse genau ein reduziertes Wort.

(viii) Die Gruppe G_β ist in $*_\alpha G_\alpha$ kanonisch als Untergruppe enthalten. G_β ist isomorph zu den einbuchstabigen Worten der Form g in $*_\alpha G_\alpha$, für die $g \in G_\beta$ gilt.

(ix) Wir schreiben $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ für das freie Produkt von zwei Kopien von $\mathbb{Z}$.

Lemma 12.2. *Sei $(G_\alpha)_\alpha$ eine Familie von Gruppen und sei H eine Gruppe. Seien $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ Gruppenhomomorphismen. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\varphi : *_\alpha G_\alpha \to H$, der φ_α für alle Untergruppen $G_\alpha \subset *_\alpha G_\alpha$*

fortsetzt. Dieser ist gegeben durch

$$\varphi(g_1 \cdots g_n) := \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n),$$

wenn die Indices α_i so gewählt sind, dass $g_i \in G_{\alpha_i}$ gilt.

Beweis. Beachte insbesondere, dass φ auf gekürzten und äquivalenten ungekürzten Wörtern denselben Wert ergibt. Vergleiche eine Algebravorlesung für Details. $\square$

12.2. **Das van Kampen Theorem.** Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Seien A_α wegzusammenhängende Mengen, die X überdecken, d. h. $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = X$ erfüllen, und die alle x_0 enthalten, also $x_0 \in A_\alpha$ für alle α erfüllen. Die Inklusionen $A_\alpha \hookrightarrow X$ induzieren Homomorphismen $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$. Nach Lemma 12.2 lassen sich diese Homomorphismen zu einem Homomorphismus $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ erweitern. Nach dem van Kampen Theorem ist Φ oft surjektiv.

Im Allgemeinen können wir nicht erwarten, dass Φ auch injektiv ist. Bezeichnen wir nämlich mit $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$ den durch die Inklusion $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ induzierten Homomorphismus, so gilt $j_\alpha \circ i_{\alpha\beta} = j_\beta \circ i_{\beta\alpha}$, denn beide Verkettungen sind durch die Inklusion $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow X$ induziert.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A_\alpha) \arrow[dr, "j_\alpha"] & \\
\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \arrow[ur, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[rr] \arrow[dr, "i_{\beta\alpha}"'] & & \pi_1(X) \\
 & \pi_1(A_\beta) \arrow[ur, "j_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Somit enhält der Kern von Φ mindestens alle Elemente der Form $i_{\alpha\beta}(\omega)(i_{\beta\alpha}(\omega))^{-1}$ für $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$, denn nach Definition von Φ werden diese unter Φ auf

$$(j_\alpha i_{\alpha\beta}(\omega)) \left(j_\beta i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}\right) = (j_\alpha i_{\alpha\beta}(\omega))(j_\beta i_{\beta\alpha}(\omega))^{-1} = 1$$

abgebildet. Das Theorem von van Kampen (oder Seifert-van Kampen) gibt nun insbesondere Bedingungen an, unter denen diese Elemente bereits den Kern erzeugen.

Theorem 12.3 (van Kampen)**.** *Sei X die Vereinigung von offenen wegzusammenhängenden Mengen A_α, die jeweils den Basispunkt $x_0 \in X$ enthalten. Ist jeder Schnitt der Form $A_\alpha \cap A_\beta$ wegzusammenhängend, so ist der Homomorphismus $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ surjektiv. Ist zusätzlich noch jeder Schnitt der Form $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ wegzusammenhängend, dann ist der Kern von Φ gerade die normale Untergruppe N, die von allen Elementen der Form $i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ mit $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ erzeugt wird. Somit induziert Φ in diesem Fall einen Isomorphismus $\pi_1(X) \cong *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$.*

Als Homomorphismus muss Φ ein Normalteilerals Kern haben.Auf den angegebenen Elementen verschwindet Φ, somit auch auf dem kleinsten Normalteiler, der diese Elemente enthält. Der kleinste Normalteiler ist wohldefiniert, da der Schnitt zweier Normalteiler wieder ein Normalteiler ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass Φ surjektiv ist. Sei dazu $f : I \to X$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0. Dann gibt es Zahlen s_i mit $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$, so dass jedes Intervall $[s_i, s_{i+1}] \subset I$ unter f in eine einzige Menge A_α abgebildet wird. Solch eine Partition existiert, denn da f stetig ist, gibt es für jeden Punkt $s \in I$ eine offene Umgebung, ohne Einschränkung ein offenes Intervall V_s , das in ein A_α abgebildet wird. Durch Verkleinern der Intervalle können wir ohne Einschränkung annehmen, dass auch noch die Abschlüsse jeweils in eine Menge A_α abgebildet werden. Aufgrund der Kompaktheit überdecken nun bereits endlich viele dieser (in I relativ) offenen Intervalle ganz I. Als Zahlen s_i kann man nun gerade die Endpunkte dieser Intervalle nehmen.

Wir bezeichnen nun die Menge A_α, die $f([s_{i-1}, s_i])$ enthält, mit A_i. Definiere $f_i := f|_{[s_{i-1},s_i]}$. Dann gilt $f = f_1 \cdots f_m$, wobei f_i ein Weg in A_i ist. Nun sind nach Voraussetzung die Mengen $A_i \cap A_{i+1}$ jeweils wegzusammenhängend und enthalten den Basispunkt x_0. Wir können daher Wege g_i von x_0 nach $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$ in $A_i \cap A_{i+1}$ wählen. Dann ist der Weg

$$(f_1 \cdot \overline{g}_1) \cdot (g_1 \cdot f_2 \cdot \overline{g}_2) \cdot (g_2 \cdot f_3 \cdot \overline{g}_3) \cdots (g_{m-1} \cdot f_m)$$

homotop zu f. Er ist aber auch eine Hintereinanderausführung von Wegen, die jeweils in einer einzigen Menge A_i liegen, wie die Klammern andeuten. Daher ist $[f] \in \operatorname{im} \Phi$, Φ ist also surjektiv.

Der komplizierte Teil des Beweises ist nun, dass $\ker \Phi = N$ gilt, falls alle Mengen der Form $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ wegzusammenhängend sind. Dafür führen wir zunächst noch folgende Bezeichnung ein. Eine *Faktorisierung* eines Elementes $[f] \in \pi_1(X)$ ist ein formales Produkt $[f_1] \cdots [f_k]$, wobei

(i) jedes f_i ein geschlossener Weg in einer Menge A_α mit Basispunkt x_0 und $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ die Homotopieklasse von f_i ist.
(ii) der Weg f zu $f_1 \cdots f_k$ in X homotop ist.

(Dabei kommt es natürlich insbesondere nicht darauf an, welchen Repräsentanten f_i wir wählen, um eine Homotopieklasse $[f_i]$ zu beschreiben; wir könnten auch einen zu f_i homotopen Weg verwenden.)

Eine Faktorisierung von $[f]$ ist also ein (möglicherweise nicht reduziertes) Wort in $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$, das unter Φ auf $[f]$ abgebildet wird. Wie wir beim Beweis der Surjektivität gesehen haben, besitzt jedes $[f] \in \pi_1(X)$ eine Faktorisierung.

Wir untersuchen nun die Eindeutigkeit einer Faktorisierung. Dazu nennen wir zwei Faktorisierungen von $[f] \in \pi_1(X)$ äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge der folgenden beiden Operationen oder ihrer Inversen auseinander hervorgehen.

(i) Kombiniere aufeinanderfolgende Ausdrücke $[f_i][f_{i+1}]$ in einen einzigen Ausdruck $[f_i \cdot f_{i+1}]$, wenn $[f_i]$ und $[f_{i+1}]$ in derselben Gruppe $\pi_1(A_\alpha)$ liegen.
(ii) Betrachte den Ausdruck $[f_i] \in \pi_1(A_\alpha)$ als einen Ausdruck in der Gruppe $\pi_1(A_\beta)$ statt in $\pi_1(A_\alpha)$, falls f_i ein geschlossener Weg in $A_\alpha \cap A_\beta$ ist.

Die erste Operation ändert das durch die Faktorisierung in $*_\alpha \pi_1(A_\alpha)$ definierte Element nicht. Nach Definition von N ändert die zweite Operation nicht das Bild dieses Elementes in der Quotientengruppe $Q := *_\alpha \pi_1(A_\alpha)/N$. Somit ergeben äquivalente Faktorisierungen dasselbe Element in Q.

Nun fehlt nur noch der Nachweis, dass je zwei Faktorisierungen einer Homotopieklasse $[f]$ äquivalent sind. Dann folgt nämlich, dass die von $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ induzierte Abbildung $Q \to \pi_1(X)$ injektiv ist. Dann ist $\ker \Phi = N$ und das Theorem folgt.

Seien also $[f_1] \cdots [f_k]$ und $[f_1'] \cdots [f_l']$ zwei Faktorisierungen von $[f]$. Dann sind die Wege $f_1 \cdots f_k$ und $f_1' \cdots f_l'$ homotop. Sei also $F : I \times I \to X$ eine Homotopie von $f_1 \cdots f_k$ nach $f_1' \cdots f_l'$. Ähnlich wie beim Beweis der Surjektivität dürfen wir annehmen (verwende nun Mengen der Form $[a,b] \times [c,d] \subset I \times I$ statt Intervallen), dass Zahlen s_i und t_j existieren mit $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, so dass jedes der Rechtecke $R_{ij} := [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ in eine einzige Menge A_α abgebildet wird. Wir wollen diese Menge mit A_{ij} bezeichnen. Wir dürfen annehmen, dass die s-Unterteilung die Hintereinanderausführungen $f_1 \cdots f_k$ und $f_1' \cdots f_l'$ liefert. Da F auch eine Umgebung von R_{ij} in A_{ij} abbildet, können wir bei den Rechtecken, die nicht zu $t = 0$ oder $t = 1$ gehören, die durch die s-Koordinate definierten Begrenzungen so verschieben, dass jeder Punkt in $I \times I$ zu höchstens drei der abgeschlossenen Rechtecke gehört. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $n \geq 4$ für den Index bei t_n gilt. Wir wollen die Rechtecksgrenzen so verschieben, dass weiterhin ein Rechteck R_{ij} in eine Menge A_{ij} abgebildet wird. Die Eigenschaft, dass kein Punkt zu mehr als drei Rechtecken gehören soll, korrespondiert zu der Schnittbedingung mit $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$, die auch drei Mengen beinhaltet. Wir nummerieren die Rechtecke wie folgt neu durch (horizontal $\leftrightarrow s$, vertikal $\leftrightarrow t$)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline R_{m(n-1)+1} & R_{m(n-1)+2} & \cdots & R_{mn} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline R_1 & R_2 & \cdots & R_m \\ \hline \end{array}.$$

Ist nun γ ein Weg in $I \times I$ von ganz links ($s = 0$) nach ganz rechts ($s = 1$) (vergleiche das Bild), dann ist $F \circ \gamma$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0, da $F(\{0\} \times I) = F(\{1\} \times I) = \{x_0\}$ gilt.

Wähle nun (im Wesentlichen eindeutig bestimmte) Wege γ_r, die die ersten r Rechtecke $R_1, \ldots, R_r$ von den übrigen Rechtecken trennen. Wir können diese Wege so wählen, dass wir von γ_r zu γ_{r+1} kommen, indem wir den Weg γ_r in R_{r+1} modifizieren, ihn also „über R_{r+1} hinüberziehen“. Dann ist γ_0 ein Weg entlang der unteren Kante und γ_{mn} ein Weg entlang der oberen Kante.

Die Ecken der Dreiecke R_r nennen wir Knoten. Wähle für jeden Knoten ν mit $F(\nu) \neq x_0$ einen Weg g_ν von x_0 nach $F(\nu)$. Da wir angenommen haben, dass der Schnitt von jeweils drei Mengen der Form A_α, also $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$, wegzusammenhängend ist und da jeder Knoten nach Konstruktion in höchstens drei Rechtecken liegt, können wir den Weg g_ν so wählen, dass er im Schnitt der Mengen A_{ij} liegt, in die die Rechtecke in denen ν enthalten ist, unter F abgebildet werden.

Wenn wir nun in $F \circ \gamma_r$ an den jeweils den Knoten entsprechenden Stellen ähnlich wie beim Beweis der Surjektivität Wege der Form $\overline{g}_\nu g_\nu$ einfügen, so erhalten wir eine Faktorisierung der Homotopieklasse $[F \circ \gamma_r]$. Dabei fassen wir die Teile des Weges, die einem Entlanglaufen an einer gemeinsamen Kante von Rechtecken entsprechen, als Wege in einer beliebigen der entsprechenden Mengen A_{ij} auf. Wählen wir hier andere Mengen, so erhalten wir eine zur gewählten Faktorisierung $[F \circ \gamma_r]$ äquivalente Faktorisierung.

Nach Wahl der Rechtecke sind nun die Faktorisierungen, die wir zu $[F \circ \gamma_r]$ und $[F \circ \gamma_{r+1}]$ erhalten, äquivalent, denn sie unterscheiden sich (wenn wir oben jeweils geeignete Mengen A_{ij} gewählt haben) nur durch eine Homotopie in einer entsprechenden Menge A_{ij}: Dazu dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass wir die von den Kanten des zugehörigen Rechtecks induzierten Wege alle als Wege in ein und demselben A_{ij} auffassen. Dann ist die Homotopie in A_{ij} gegeben durch $F \circ \gamma_t^r$, wobei γ_t^r gerade den Teil des Weges γ_r, der links und unten an R_{r+1} entlangführt, in R_{r+1} zu einem Weg homotopiert, der oben und rechts an R_{r+1} entlangführt, also gerade eine Homotopie von γ_r zu γ_{r+1} auf dem Teil ist, auf dem sich diese beiden Wege unterscheiden.

Wir wollen nun einsehen, dass die Faktorisierung zu γ_0 äquivalent zur gegebenen Faktorisierung $[f_1]\cdots[f_k]$ ist. Dies beendet den Beweis, da dann $[f_1]\cdots[f_k]$ induktiv äquivalent zu den Faktorisierungen zu $[F\circ\gamma_0]$, $[F\circ\gamma_1]$, $\ldots$, $[F\circ\gamma_{mn}]$ ist. Analog zur noch ausstehenden Behauptung ist dann auch $[F\circ\gamma_{mn}]$ äquivalent zur Faktorisierung $[f_1']\cdots[f_l']$. Somit sind dann auch $[f_1]\cdots[f_k]$ und $[f_1']\cdots[f_l']$ äquivalent.

Um zu sehen, dass $[f_1]\cdots[f_k]$ und die zu $[F\circ\gamma_0]$ gehörende Faktorisierung äquivalent sind, unterscheiden wir zwei Fälle. Gehört ein Knoten ν in der unteren Kante zu einem Endpunkt eines Weges f_i, so gilt $F(\nu)=x_0$ und wir brauchen an dieser Stelle überhaupt keinen Weg der Form $\overline{g}_\nu g_\nu$ einzuschieben. (Das Ergebnis wäre ohnehin eine zur gegebenen Faktorisierung äquivalente Faktorisierung.) Für die anderen Knoten ν in der unteren Kante benutzen wir nochmals die Bedingung über dreifache Schnitte und wählen einen Weg g_ν, den wir als $\overline{g}_\nu g_\nu$ einschieben, der nicht nur in den Mengen A_{ij} enthalten ist, die zu den Rechtecken gehören, in denen ν liegt, sondern der auch in der Menge A_i liegt, die zu dem Teilstück $[f_i]$ gehört, zu dem ν gehört. Dies beendet den Beweis. $\square$

Definition 12.4 (Einpunktvereinigung)**.** Seien $(X_i,x_i)_{i\in I}$ punktierte topologische Räume, d. h. topologische Räume X_i mit einem ausgezeichneten Punkt $x_i\in X_i$. Dann definieren wir ihre *Einpunktvereinigung* durch

$$\bigvee_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I} X_i \Big/ \bigcup_{i\in I}\{x_i\} \equiv \coprod_{i\in I} X_i \Big/ \coprod_{i\in I}\{x_i\},$$

also als disjunkte Vereinigung, die in den ausgezeichneten Punkten zusammengeklebt ist. Wir schreiben auch beispielsweise $\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$, wenn der ausgezeichnete Punkt irrelevant ist.

Die Einpunktvereinigung wird auch Bouquet, Wedgeprodukt oder Koprodukt in der Kategorie der punktierten topologischen Räume genannt.

Beispiel 12.5 (Einpunktvereinigung)**.** Seien $(X_\alpha,x_\alpha)_\alpha$ punktierte topologische Räume, so dass $x_\alpha\in X_\alpha$ eine offene Umgebung $U_\alpha\subset X_\alpha$ besitzt, so dass $\{x_\alpha\}$ Deformationsretrakt von U_α ist. Dann ist X_α Deformationsretrakt der offenen Umgebung $A_\alpha := X_\alpha \vee \bigvee\limits_{\beta\neq\alpha} U_\beta$. (Beachte dazu, dass die aus den einzelnen Homotopien zusammengesetzte Homotopie nach Definition 4.25 stetig ist.) Der Schnitt von zwei oder mehr verschiedenen Mengen A_α ist $\bigvee\limits_\alpha U_\alpha$, was einen Punkt als Deformationsrektrakt besitzt. Daher ist nach dem Theorem von van Kampen die Abbildung $\Phi : *_\alpha\pi_1(X_\alpha)\to\pi_1\left(\bigvee\limits_\alpha X_\alpha\right)$ ein Isomorphismus.

Insbesondere ist für $\bigvee\limits_\alpha\mathbb{S}^1$, die Einpunktvereinigung von Kreisen, $\pi_1\left(\bigvee\limits_\alpha\mathbb{S}^1\right)$ isomorph zum freien Produkt von (entsprechend vielen) Kopien von $\mathbb{Z}$. Beispielsweise gilt $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1\right)\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

In moderner algebraischer Sprache induziert also das Koprodukt von punktierten topologischen Räumen (mit deformationsretrahierbaren offenen Umgebungen der Basispunkte) einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen in das Koprodukt dieser Gruppen.

Es gilt der allgemeine Satz, dass die Fundamentalgruppen von Graphen freie Gruppen sind, siehe [2, Proposition 1.A.2, S. 84]. Wir behandeln hier nur ein Beispiel.

Beispiel 12.6. Wir wollen die Fundamentalgruppe des Graphen X berechnen, der aus den zwölf Kanten des Einheitswürfels $[0,1]^3 \in \mathbb{R}^3$ besteht.

Es gibt einen einfach zusammenhängenden Teilgraphen T aus sieben Kanten, der alle Knoten enthält. Dann ist $\pi_1(X) \cong *_{i=1}^5 \mathbb{Z}$, wobei fünf auch gerade die Anzahl der Kanten ist, die nicht in T enthalten sind. Definiere zu jeder Kante $e_\alpha \notin T$ eine offene Umgebung A_α in X, die $e_\alpha \cup T$ als Deformationsretrakt enthält. Der Schnitt von mindestens zwei solcher Mengen besitzt T als Deformationsretrakt, ist also einfach zusammenhängend. Es gilt $X = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{5} A_\alpha$. Auf diese Mengen ist das Theorem von van Kampen anwendbar und da alle Schnitte von verschiedenen Mengen A_α einfach zusammenhängend sind, tritt kein Kern auf, es gilt

$$\pi_1(X) \cong *_{\alpha=1}^5 \pi_1(A_\alpha) \cong *_{\alpha=1}^5 \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Die Fundamentalgruppe ist von geschlossenen Wegen erzeugt, die in T verlaufen und genau eine Kante e_α einmal monoton durchlaufen, die nicht in T enthalten ist.

Beispiel 12.7 (Verschlingungen)**.**

(i) Sei A eine in $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \ni (x,y) \mapsto (x,y,0)$. Dann ist $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus A$. (Deformiere alternativ das Komplement auf eine $\mathbb{S}^2$ mit einem Durchmesser des Äquators. Das Ergebnis ist dann homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$. Dies sieht man beispielsweise, indem man an die Wege vom ausgezeichneten Punkt zu den Endpunkten des Durchmessers Streifen einklebt und beobachtet, dass die beiden betrachteten Räume jeweils Deformationsretrakte hiervon sind.) Also gilt $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus A\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) \cong \mathbb{Z} * \{1\} \cong \mathbb{Z}$.

(ii) Seien A und B zwei unverschlungen in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathbb{S}^1$-en. Unverschlungen sind diese beiden eingebetteten $\mathbb{S}^1$-en beispielsweise, wenn sie beide Radius eins und Abstand zehn haben, $\mathbb{S}^1_A \ni (x,y) \mapsto (x+6,y,0)$, $\mathbb{S}^1_B \ni (x,y) \mapsto (x-6,y,0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)\right) &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1\right)\\ &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)\\ &\cong \{1\} * \mathbb{Z} * \{1\} * \mathbb{Z}\\ &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(iii) Seien A und B nun zwei verschlungen in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathbb{S}^1$-en, beispielsweise mittels $\vartheta \mapsto (\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$ und $\vartheta \mapsto (1+\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist. Dann ist $\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) \vee \mathbb{S}^2 \equiv \mathbb{T}^2 \vee \mathbb{S}^2$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$, wobei der Torus der Rand eines Volltorusses um eine eingebettete $\mathbb{S}^1$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)\right) &\cong \pi_1\left(\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) \vee \mathbb{S}^2\right)\\ &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\right) * \pi_1\left(\mathbb{S}^2\right)\\ &\cong \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \times \pi_1\left(\mathbb{S}^1\right)\\ &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Da (vergleiche eine Algebravorlesung) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht abelsch ist, aber $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abelsch ist, gibt es keinen Homöomorphismus des $\mathbb{R}^3$ der die unverschlungen und die verschlungen eingebetteten $\mathbb{S}^1$-en ineinander überführt, da ein Homöomorphismus die Homotopiegruppen der Komplemente invariant lässt.

Eigentlich sind wir aber nicht daran interessiert, auch noch den umgebenden Raum zu deformieren. Dies spielt aber zumindest im glatten Fall keine Rolle, da sich glatte Deformationen glatter Kurven leicht zu stetigen Deformationen des umgebenden Raumes fortsetzen lassen: Um eine glatte Kurve gibt es eine Tubenumgebung. Auf diese lässt sich eine kleine Deformation der Kurve leicht fortsetzen. Außerhalb der Tubenumgebung deformieren wir nichts. Die Hintereinanderausführung solcher Deformationen des umgebenden Raumes ist dann die gesuchte Deformation.

Definition 12.8 (Abbildungszylinder)**.** Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann ist der *Abbildungszylinder* M_f als $(X \times I) \coprod Y/\sim$ definiert, wobei $\sim$ die durch $X \times I \ni (x,1) \sim f(x) \in Y$ induzierte Äquivalenzrelation ist.

Bemerkung 12.9. Der Abbildungszylinder M_f besitzt Y als Deformationsretrakt, da wir das Segment $\{x\} \times I \subset M_f$ auf $f(x)$ schieben können.

Beispiel 12.10 (Torusknoten)**.** Seien $m,\, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd (was die Injektivität sichert) und sei $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Standardeinbettung des Torus. Definiere $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ durch $f(\exp(2\pi i\vartheta)) = (\exp(2\pi im\vartheta), \exp(2\pi in\vartheta))$. Definiere $K_{m,n} \equiv K := g \circ f\left(\mathbb{S}^1\right)$. Wir wollen $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus K\right)$ bestimmen.

Wir können den $\mathbb{R}^3$ auch kompaktifizieren, K als Teilmenge von $\mathbb{S}^3$ auffassen, und die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^3 \setminus K$ ausrechnen. Das Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis in $\mathbb{R}^3$ überein: Wenden wir nämlich das van Kampen Theorem auf $\mathbb{R}^3$ und auf einen Ball B um den unendlich fernen Punkt an, so sind B und $B \cap \mathbb{R}^3$, was homöomorph zu $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ist, nullhomotop. Also folgt $\pi_1\left(\mathbb{R}^3 \setminus K\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{S}^3 \setminus K\right)$.

Wir behaupten, dass $\mathbb{S}^3 \setminus K$ als Deformationsretrakt einen Raum $X = X_{m,n}$ homöomorph zu $\left(\mathbb{S}^1 \times I\right)/\!\sim$ besitzt, wobei die Äquivalenzrelation für $z \in \mathbb{S}^1$ durch $(z,0) \sim (\exp(2\pi i/m)z, 0)$ und $(z,1) \sim (\exp(2\pi i/n)z, 1)$ induziert ist. Seien X_m und X_n die beiden Hälften von X, die sich als Quotienten von $\mathbb{S}^1 \times [0,1/2]$ beziehungsweise $\mathbb{S}^1 \times [1/2,1]$ ergeben, also die Abbildungszylinder von $\mathbb{S}^1 \ni z \mapsto z^m$ und $z \mapsto z^n$. Dann ist $X_m \cap X_n$ homöomorph zu einer $\mathbb{S}^1$.

Betrachte die Standardzerlegung von $\mathbb{S}^3$ in zwei Volltori $\mathbb{S}^1 \times D^2$ und $D^2 \times \mathbb{S}^1$. Beachte dazu, dass $\mathbb{S}^3$ homöomorph zu

$$\begin{aligned}\partial D^4 =&\partial\left(D^2 \times D^2\right)\\ =&\left(\partial D^2 \times D^2\right) \cup \left(D^2 \times \partial D^2\right)\\ =&\left(\mathbb{S}^1 \times D^2\right) \cup \left(D^2 \times \mathbb{S}^1\right)\end{aligned}$$

ist. Visualisieren lässt sich dies in $\mathbb{R}^3$ als ein Volltorus vereinigt mit einem Volltorus, dessen Rand mit dem Rand des anderen Torus verklebt wird („Breitenkreise auf Längenkreise“).

Im ersten Volltorus schneidet K die Kreise $\{x\} \times \partial D^2$ in m gleichverteilten Punkten. In $\{x\} \times D^2$ können diese Punkte durch jeweils dazwischenliegende Punkte und radiale Verbindungsstrecken zu $\{x\} \times \{0\}$ getrennt werden. Durchläuft nun x einmal $\mathbb{S}^1$, so durchlaufen die radialen Strecken gerade eine Kopie des Abbildungszylinders X_m im ersten Volltorus. Analoges funktioniert für den zweiten Volltorus und X_n.

Anhand eines Bildes kann man sich überzeugen, dass es im ersten Volltorus eine Deformationsretraktion, jeweils innerhalb der entsprechenden Scheibe $\{x\} \times D^2$, gibt, die das Komplement von K auf X_m deformiert. Wählt man die Deformationen auch noch so, dass sie insbesondere $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ nicht verlassen, wenn sie dort starten, so kann man durch Modifikation der Deformation nahe $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ die beiden Deformationen stetig zusammenfügen und erhält, dass $X_{m,n}$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{S}^3 \setminus K$ ist.

Zerlegt man X in X_m und X_n (genauer: in kleine geeignete offene Umgebungen davon), so gibt es Deformationsretrakte von X_m und X_n auf Mengen homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ in X_m beziehungsweise X_n. Nun ist $X_m \cap X_n$ homöoomorph zu einer $\mathbb{S}^1$. Alle diese Bausteine haben also eine Fundamentalgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$. Eine geschlossene Kurve in $X_m \cap X_n$, die einen Erzeuger der Fundamentalgruppe repräsentiert, wird unter der Inklusion $X_m \cap X_n \hookrightarrow X_m$ zu dem m-fachen eines Repräsentanten eines Erzeugers von $\pi_1(X_m)$ und unter $X_m \cap X_n \hookrightarrow X_n$ zum n-fachen eines Repräsentanten eines Erzeugers von $\pi_1(X_n)$. Daher ist nach dem Theorem von van Kampen $\pi_1(X)$ isomorph zur freien von a und b erzeugten Gruppe, aus der die von $a^m b^{-n}$ erzeugte normale Untergruppe herausgeteilt ist. Bezeichne diese Gruppe mit $G_{m,n}$.

Man kann nun mit etwas Algebra zeigen, dass $G_{m,n}$ für natürliche Zahlen m, $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nur zu $G_{n,m}$ isomorph ist, aber zu keiner anderen Gruppe in dieser Familie. Somit können die entsprechenden Torusknoten für unterschiedliche Werte von $0 \le m \le n$ durch einen Homöomorphismus des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{S}^3$ nicht ineinander überführt werden.

12.3. **Aufgaben.**

Aufgabe 12.1. Sei $\varphi : G \to K$ ein Gruppenhomomorphismus, $H := \ker \varphi$. Dann ist H eine normale Untergruppe von G, d. h. es gilt $aH = Ha$ für alle $a \in G$ und G/H, bestehend aus Restklassen der Form aH, $a \in G$, mit $(aH)(bH) := (ab)H$ bildet eine Gruppe.

Aufgabe 12.2. Sei $X := [0,2] \cup [3,5] \cup [6,8]/\sim$ mit der von $0 \sim 3 \sim 6$ und $2 \sim 5 \sim 8$ induzierten Äquivalenzrelation. Definiere $A_1 := X \setminus \{1\}$, $A_4 := X \setminus \{4\}$ und $A_7 := X \setminus \{7\}$. Skizziere X. Wende auf zwei dieser Mengen das van Kampen Theorem an um die Fundamentalgruppe zu berechnen. Zeige, dass die Bedingung an Dreifachschnitte der Mengen A_i im van Kampen Theorem nötig ist.

Aufgabe 12.3. Untersuche die Komplemente aus Beispiel 12.7 nochmals, aber nun nicht $\mathbb{R}^3 \setminus A$ und $\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$, sondern indem du $\mathbb{R}^3$ als Teilmenge von $\mathbb{S}^3$ auffasst, also A, $B \subset \mathbb{S}^3$. Bestimme also $\mathbb{S}^3 \setminus A$ und $\mathbb{S}^3 \setminus (A \cup B)$.

Aufgabe 12.4. Sei X wegzusammenhängend und sei Y aus X durch Ankleben von e^n's entstanden für $n \ge 3$. Zeige, dass die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ einen Isomorphismus $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ induziert.

12.4. **Klassifikation zweidimensionaler Flächen.** Wir kleben 2-Zellen $(e^2_\alpha)_\alpha$ mit Abbildungen $\varphi_\alpha : \mathbb{S}^1 \to X$ an einen wegzusammenhängenden Raum X an und nennen das Ergebnis Y. Sei $x_0 \in X$. Die Abbildung φ_α induziert einen geschlossen Weg $\tilde{\varphi}_\alpha$ (später einfach auch wieder mit φ_α bezeichnet) in X mit einem Basispunkt $\varphi_\alpha(s_0)$. Wähle einen Weg γ_α von x_0 nach $\varphi_\alpha(s_0)$. Dann ist $\gamma_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha \overline{\gamma}_\alpha$ ein geschlossener Weg zum Basispunkt x_0. Nach Ankleben der Zellen sind alle diese Wege nullhomotop, liegen also im Kern der Abbildung $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$, die von

$X \hookrightarrow Y$ induziert ist. Sei N die von diesen Wegen erzeugte normale Untergruppe. (Wir bemerken, dass die von diesen Elementen erzeugte normale Untergruppe nicht von der Wahl von γ_α abhängt, denn für einen anderen solchen Weg η_α sind $\gamma_\alpha\varphi_\alpha\overline{\gamma}_\alpha$ und $\eta_\alpha\varphi_\alpha\overline{\eta}_\alpha = (\eta_\alpha\overline{\gamma}_\alpha)\gamma_\alpha\varphi_\alpha\overline{\gamma}_\alpha(\gamma_\alpha\overline{\eta}_\alpha)$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert, erzeugen also dieselbe normale Untergruppe, da für jedes Gruppenelement g und einen Normalteiler N stets $gNg^{-1} = N$ gilt.)

Proposition 12.11. *Die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ induziert eine Surjektion $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ mit Kern N. Es gilt also $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N$.*

Beweis. Statt Y betrachten wir einen Raum Z, der aber als Deformationsretrakt den Raum Y besitzt. Dazu kleben wir an Y die Quadrate $Q_\alpha = I \times I$ entlang $I \times \{0\}$ und entlang der Wege γ_α ein. Wir identifizieren die Kanten $\{1\} \times I$ mit einem kleinen Wegstück von $\gamma_\alpha(1)$ in e^2_α und alle Kopien von $\{0\} \times I$ identifizieren wir zu einem Einheitsintervall I. (Stellt man sich X in der Ebene vor und die angeklebten e^2_α's als Halbkugeln, so „sitzen“ die angeklebten $I \times I$'s gerade über den Wegen γ_α. Daher ist auch Y ein Deformationsretrakt von Z.) Wähle Punkte $y_\alpha \in e^2_\alpha$, die disjunkt vom Weg sind, entlang dessen $I \times I$ angeklebt wird. Definiere $A := Z \setminus \bigcup\limits_\alpha \{y_\alpha\}$ und $B := Z \setminus X$. Dann besitzt A als Deformationsretrakt den Raum X und B ist kontrahierbar, d. h. besitzt einen Punkt als Deformationsretrakt. Also ist $\pi_1(B) = \{1\}$. Nach dem Theorem von van Kampen, angewandt auf A und B ist $\pi_1(Z) \cong \pi_1(A)/L$, wobei L die vom Bild der Abbildung $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ erzeugte normale Untergruppe ist. Es genügt also einzusehen, dass $\pi_1(A \cap B)$ von zu Wegen der Form $\gamma_\alpha\varphi_\alpha\overline{\gamma}_\alpha$ homotopen Wegen in $A \cap B$ erzeugt wird. Dazu wenden wir noch einmal das Theorem von van Kampen an. Diesmal überdecken wir $A \cap B$ mit den offenen Mengen $A_\alpha := (A \cap B) \setminus \bigcup\limits_{\beta \neq \alpha} e^2_\beta$. Da A_α als Deformationsretrakt das Bild einer $\mathbb{S}^1$ in $e^2_\alpha \setminus \{y_\alpha\}$ besitzt, gilt $\pi_1(A_\alpha) \cong \mathbb{Z}$, wobei die Gruppe von einem Weg der Form $\gamma_\alpha\varphi_\alpha\overline{\gamma}_\alpha$ erzeugt wird. Ein Kern tritt hier nicht auf, da $A_\alpha \cap A_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ zusammenziehbar (= kontrahierbar) ist. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 12.12. Wir folgen [3]: Plausibel sind die folgenden Überlegungen:

(i) Jede glatte geschlossene Fläche M, d. h. jede zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, lässt sich triangulieren, d. h. in Mengen $(D_i)_{1 \le i \le N}$ homöomorph zu Dreiecken zerlegen, so dass $M = \bigcup\limits_{i=1}^{N} D_i$ gilt. Dabei ist $D_i \cap D_j$ entweder (bis auf einen Homöomorphismus) ein Dreieck, eine Dreiecksseite oder ein Punkt.

(ii) Sei M nun stets eine glatte geschlossene Fläche. Nehme an, dass M zusammenhängend ist. Wir stellen nun M als ein reguläres Polygon dar, an dem wir Kanten identifizieren. Dazu wählen wir ein festes „Dreieck“ D_1. Nehme ohne Einschränkung an, dass $D_1 \cap D_2$ eine Menge homöomorph zu einer Kante enthält. Dann ist $D_1 \cap D_2$ homöomorph zu einem Quadrat, gegebenenfalls bis auf Außenkanten, die wir identifizieren müssen, falls $D_1 \cap D_2$ aus mehr als aus einer Kante besteht. Iterativ fügen wir nun stets ein weiteres Dreieck an und sehen am Ende, dass M homöomorph zu einem regulären Polygon ist, wenn wir die Außenkanten geeignet identifizieren.

(iii) Die unterschiedlichen (Außen-)Kanten des Polygons bezeichnen wir nun mit Buchstaben und drücken die Identifizierungen symbolisch aus durch Worte, beispielsweise durch $aba^{-1}b^{-1}$ für einen Torus. a^{-1} drückt dabei aus, dass die

Kante in umgekehrter Richtung durchlaufen wird. Wir schreiben auch aa für den projektiven Raum und $aba^{-1}b$ oder $aacc$ für die Kleinsche Flasche. Die letzten beiden Darstellungen sind äquivalent, wie man sich durch Aufschneiden entlang einer Diagonalen überlegt.

(iv) Die letzten beiden Beispiele sind nicht orientierbar. Eine zweidimensionale Fäche heißt *orientierbar*, wenn es auf ihr zwei linear unabhängige stetige Vektorfelder gibt. Man überlegt sich, dass eine Fläche genau dann orientierbar ist, wenn in einer Darstellung wie oben zu jeder Kante a auch a^{-1} vorkommt. Tritt eine Kante b doppelt auf, so ist M nicht orientierbar. Wir wollen ab jetzt nur noch orientierbare Flächen betrachten.

(v) Die symbolische Darstellung der Randkanten ist nicht eindeutig. Wir werden uns nun überlegen, dass eine orientierbare geschlossene Fläche sich aber immer in Normalform darstellen lässt. Die Normalform ist entweder aa^{-1} oder $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-2}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ für ein $1 \le p \in \mathbb{N}$. Im zweiten Fall sind alle Ecken äquivalent. In drei Schritten werden wir nun die oben hergeleitete Darstellung auf Normalform bringen.

(vi) Zunächst einmal lassen wir alle Ausdrücke der Form aa^{-1} in der Darstellung ersatzlos weg, wenn die Darstellung noch weitere Zeichen enthält.

(vii) Wir wollen die Darstellung nun so modifizieren, dass alle Ecken äquivalent sind. Wir schreiben zunächst die Ecken als Großbuchstaben mit in die Darstellung hinein. Tritt eine Kante PaQ mit $P \ne Q$ auf und sind wir nicht im Fall aa^{-1}, so liegt neben a eine von a verschiedene Kante, also ohne Einschränkung $PaQbR$, wobei R nicht notwendigerweise von P und Q verschieden sein muss. Wir schneiden das Polygon entlang einer Hilfskante PcR im Inneren auf und kleben die beiden Teile entlang QbR und $Rb^{-1}Q$ (das auch vorkommen muss) wieder zusammen. Wir erhalten dann ein Polygon, das an einer Stelle PcR enthält und an einer anderen Stelle $Rc^{-1}PaQ$ und beobachten, dass die Anzahl der Ecken Q sich um eins vermindert hat. Wir setzen dies fort, bis maximal einmal Q als Ecke auftritt. Sind alle Ecken Q verschwunden, sind wir (mit diesem Eckpunkt) fertig, tritt genau einmal Q auf, dann sind wir in einer Situation der Form aQa^{-1}, das haben wir aber schon im ersten Schritt weggelassen, wenn die Darstellung mehr als zwei Buchstaben enthält.

(viii) Wir sagen, dass zwei Kanten a und b gekreuzt sind, wenn in der Darstellung von M, in genau dieser Reihenfolge $\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1} \ldots$ auftaucht. Außer im Fall, wenn die gesamte Darstellung die Form aa^{-1} hat, ist nun jede Kante c mit einer anderen Kante gekreuzt. Wäre nämlich c mit keiner anderen Kante gekreuzt, so würden alle Kanten zwischen c und c^{-1} bereits miteinander identifiziert. Dies widerspricht aber der bereits erreichten Normalisierung, denn wir hatten gesehen, dass die Kanten so identifiziert werden, dass dadurch auch automatisch alle Ecken identifiziert werden. Die Ecken, die in der Darstellung von M außerhalb von c und c^{-1} liegen, werden nun aber mit einem anderen Punkt identifiziert, als die, die innerhalb davon liegen. Somit ist jede Kante mit mindestens einer weiteren Kante gekreuzt.

(ix) Wir modifizieren nun das Polygon, so dass jeweils zwei miteinander gekreuzte Kanten in der Darstellung nebeneinander liegen. Die Darstellung sei nicht von der Form aa^{-1}. Bezeichne $(k_i)_{1\le i\le 4}$ eine nicht näher spezifizierte Folge von Kanten. Sei die Darstellung gegeben durch $aPk_1bk_2Qa^{-1}k_3b^{-1}k_4$. Die markierten Ecken dienen hier nur der einfacheren Bezeichnungsweise beim

Hinzufügen von Hilfskanten. Durch künstliches Einfügen einer inneren Kante PcQ und Verkleben der Teile entlang von b und b^{-1} erhalten wir die Darstellung $acRa^{-1}k_3k_2Sc^{-1}k_1k_4$. Füge nun RdS ein und identifiziere a und a^{-1}. Wir erhalten $cdc^{-1}k_1k_4k_3k_2d^{-1}$ und da wir einen Buchstaben vom Ende an den Anfang stellen dürfen eine zusätzliche Folge der Form $d^{-1}cdc^{-1}$ ohne die Kantenzahl vergrößert zu haben. Per Induktion kommen wir nun auf die behauptete Normalform.

(x) Wir schreiben $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Sei M eine geschlossene orientierbare Fläche. Sie lässt sich darstellen, indem wir an die in Bemerkung 12.12 erhaltene Normalform eine 2-Zelle entlang des Weges $[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g]$ einkleben. Wir bezeichnen diese Fläche mit M_g. Als Fundamentalgruppe erhalten wir die von den Elementen a_1, b_1, ..., a_g, b_g erzeugte freie Gruppe modulo der von $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ erzeugten normalen Untergruppe.

Zu Proposition 12.11 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 12.13 (Klassifikationssatz)**.** *Die Flächen M_g und M_l sind für $g \neq l$ weder homöomorph noch homotopieäquivalent zueinander.*

Beweis. Wir machen die Gruppe $\pi_1(M_g)$ künstlich abelsch und erhalten die direkte Summe von $2g$ Kopien von $\mathbb{Z}$. Für homöomorphe oder homotopieäquivalente Flächen M_g und M_l folgt $\pi_1(M_g) \cong \pi_1(M_l)$, also auch $g = l$. □

13. Überlagerungen

Definition 13.1 (Überlagerungen)**.** Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $\tilde{X}$ zusammen mit einer Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung von X, wenn es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ von X gibt, so dass $p^{-1}(U_\alpha)$ für alle α eine disjunkte (möglicherweise leere) Vereinigung von offenen Mengen ist, die jeweils unter p homöomorph auf U_α abgebildet werden.

Die wichtigsten Existenzaussagen für Abbildungen in Überlagerungen sind:

Wie im Falle $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ zeigt man

Proposition 13.2. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f_t : Y \to X$ eine Homotopie. Gibt es eine f_0 überlagerte Abbildung $\tilde{f}_0 : Y \to \tilde{X}$, d. h. gilt $p \circ \tilde{f}_0 = f_0$, so existiert eine eindeutig bestimmte Homotopie $\tilde{f}_t : Y \to \tilde{X}$, die f_t überlagert ist, also $p \circ \tilde{f}_t = f_t$ erfüllt, so dass $\tilde{f}_0$ in beiden Definitionen übereinstimmt.*

In diesem Falle heißt $\tilde{f}_t$ eine f_t überlagerte Abbildung oder ein *Lift* von f_t.

Es gilt das folgende allgemeinere Liftbarkeitskriterium

Proposition 13.3. *Sei $p : \left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, d. h. $p : \tilde{X} \to X$ sei eine Überlagerung wie oben definiert und es gelte $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann gibt es zu einer stetigen Abbildung $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ genau dann einen Lift $\tilde{f} : (Y, y_0) \to \left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)$, wenn $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)\right)$ gilt.*

Beweis. Siehe [2, Proposition 1.33, S. 61]. □

Anhang A. Brouwerscher Fixpunktsatz

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass jede stetige Abbildung f von der abgeschlossenen Einheitskugel D^n in sich einen Fixpunkt besitzt, d. h. es gibt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$. Wir folgen dabei [1].

Wir führen den Beweis hier nur für $n = 2$. Für $n = 1$ folgt der Brouwersche Fixpunktsatz aus dem Zwischenwertsatz und für $n \geq 3$ lässt sich das Spernersche Lemma, geeignet verallgemeinert, per Induktion beweisen.

Das Spernersche Lemma gilt auch für andere Triangulierungen, für uns genügt aber hier die folgende Version.

Satz A.1 (Spernersches Lemma)**.** *Sei V ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$, das in 4^k, $k \geq 1$, kleinere kongruente gleichseitige Dreiecke aufgeteilt ist. Dann bilden die Kanten und Ecken der kleineren Dreiecke einen Graphen G. Seien die Ecken so gefärbt (wir verwenden die Farben* 1*,* 2 *und* 3*), dass die Ecken des großen Dreiecks drei verschiedene Farben haben und auf jeder Kante des großen Dreiecks nur genau zwei verschiedene Farben vorkommen. Dann gibt es ein kleines Dreieck, dessen Ecken drei verschiedene Farben haben.*

Beweis. Wir betrachten einen neuen Graphen G', den dualen Graphen zum gegebenen Graphen. Er besteht aus jeweils einer Ecke in jedem der kleinen Dreiecke und einer Ecke außerhalb des großen Dreiecks. Zwei Ecken sind nun genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es einen Weg zwischen den Ecken gibt, der nur eine Kante von G genau einmal kreuzt und wenn diese Kante in G eine Ecke der Farbe 1 und eine Ecke der Farbe 2 hat.

Da entlang der äußeren Ecken in G eine ungerade Anzahl von Farbwechseln zwischen 1 und 2 stattfindet, gibt es in G' eine ungerade Anzahl von Kanten, $2l + 1$, die an der Ecke außerhalb des großen Dreiecks starten oder enden. Aus den Möglichkeiten, ein kleines Dreieck zu färben, folgt, dass in den Ecken von G' im Inneren des großen Dreiecks maximal zwei Kanten beginnen oder enden können. Wenn in solch einem Punkt (Ecke) genau eine Kante beginnt oder endet, so haben wir ein dreifarbiges Dreieck, wie wir es gesucht haben. Es gibt also in G' Punkte innerhalb des großen Dreiecks mit 0, 1 oder 2 Kanten. Ihre Anzahl wollen wir mit E_0, E_1 und E_2 bezeichnen. Sei k die Anzahl der Kanten in G'. Dann gilt

$$2k = 0 \cdot E_0 + 1 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + (2l + 1).$$

Es folgt, dass E_1 ungerade ist. Wir finden also eine ungerade Anzahl von dreifarbigen kleinen Dreiecken. $\square$

Satz A.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Dann gibt es einen Fixpunkt $x \in D^n$, d. h. es gibt einen Punkt $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Auch hier wollen wir wieder nur den zweidimensionalen Fall betrachen. Die n-dimensionale Variante folgt analog.

Da D^2 homöomorph zu einem Dreieck Δ ist, genügt es, die Existenz eines Fixpunktes für stetige Abbildungen $f : \Delta \to \Delta$ zu beweisen. Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ das Dreieck mit Ecken $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$. Es gilt $x \in \Delta$ genau dann, wenn $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist und alle $x_i \geq 0$ sind.

Wir unterteilen nun das Dreieck Δ wie im Spernerschen Lemma in 4^k Dreiecke. Diese wollen wir einfärben. Wir wollen annehmen, dass es eine Abbildung $f : \Delta \to \Delta$ gibt, die keinen Fixpunkt besitzt. Dann ist $f(x) - x \neq 0$ für alle $x \in \Delta$. Wir wollen nun einer Ecke $x \in \Delta$ die Farbe i geben, wenn dies die kleinste natürliche Zahl ist, für die $\langle f(x) - x, e_i \rangle$ negativ ist. Dies ist eine wohldefinierte Färbung. Denn wenn wir $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ schreiben, gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 1$. Da nicht $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$ und $x_3 = f_3(x)$ für $x \in \Delta$ gilt, gibt es für jedes $x \in \Delta$ mindestens ein i, so dass $f_i(x) - x_i = \langle f(x) - x, e_i \rangle$ negativ ist und ein i, so dass $f_i(x) - x_i$ positiv ist. Damit ist die Färbung wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass dies eine Färbung wie im Spernerschen Lemma ist. Für die Ecke e_i kann nur $f_i(e_i) - e_i$ negativ sein, also hat sie die Farbe i. Liegt x auf der Ecke gegenüber von e_i, so gilt dort $x_i = 0$. Also kann $f_i(x) - x_i$ nicht negativ sein und somit kann x nicht die Farbe i bekommen. Somit erhalten wir eine Färbung der gewünschten Art.

Wir finden also nach dem Spernerschen Lemma ein kleines Dreieck mit Eckpunkten v_1^k, v_2^k und v_3^k, so dass diese die Farben 1, 2 und 3 bekommen. Daher gilt $\langle f(v_1^k) - v_1^k, e_1 \rangle < 0$, $\langle f(v_2^k) - v_2^k, e_2 \rangle < 0$ und $\langle f(v_3^k) - v_3^k, e_3 \rangle < 0$. Diese Punkte haben jeweils einen Abstand von genau $\sqrt{2} \cdot 2^{-k}$ (oder Null).

Wir betrachten nun eine Folge von Punkten $(v_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Da Δ eine kompakte Menge ist, konvergiert eine (nicht umbenannte) Teilfolge, $v_1^k \to x \in \Delta$ für $k \to \infty$. Man überzeugt sich mit Hilfe der Dreiecksungleichung direkt, dass auch die Folgen v_2^k und v_3^k gegen denselben Grenzwert konvergieren. Da die Funktion f stetig ist, folgt damit $f_1(x) - x_1 \le 0$, $f_2(x) - x_2 \le 0$ und $f_3(x) - x_3 \le 0$. Hieraus erhalten wir

$$1 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \le x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

mit Gleichheit genau dann, wenn in den obigen drei Ungleichungen Gleichheit gilt. Daher hat f eine Fixpunkt. Widerspruch. $\square$

Korollar A.3. *Es gibt keine stetige Retraktion von D^n nach $\mathbb{S}^{n-1}$, d. h. es gibt keine stetige Abbildung $f : D^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, so dass $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt.*

Beweis. Falls doch, so ist $g : D^n \to D^n$ mit $g(x) := -f(x)$ eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt. Sei nämlich $x \in D^n$ mit $g(x) = x$. Da $f(D^n) = \mathbb{S}^{n-1}$ ist, folgt $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Es gilt also $g(x) = -f(x) = -x$. Widerspruch zum Brouwerschen Fixpunktsatz. $\square$

Korollar A.4. *Sei $V : D^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit $\langle V(x), x \rangle \le 0$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann gibt es $x \in D^n$ mit $V(x) = 0$, das Vektorfeld besitzt also eine Nullstelle.*

Beweisskizze. Wir wollen annehmen, dass $V(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt.

Betrachte die Abbildung $f : D^n \to D^n$ mit $x \mapsto x + \varepsilon V(x)$ für ein kleines $\varepsilon > 0$. Die Abbildung ist genau dann eine fixpunktfreie Selbstabbildung von D^n, wenn $V(x)$ keine Nullstelle besitzt.

Um sicherzustellen, dass es sich bei f um eine Selbstabbildung von D^n handelt, genügt es nicht, f wie oben definiert zu betrachten. Durch Hinzufügen eines Annulus und nullstellenfreies Fortsetzen des Vektorfeldes kann man ohne Einschränkung annehmen, dass sogar $V(x) = -x$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ klein genug, so ist die oben definierte Abbildung f eine Selbstabbildung von D^n. $\square$

Aufgabe A.1. Führe den Induktionsbeweis aus, d. h. beweise das Spernersche Lemma und den Brouwerschen Fixpunktsatz auch in höheren Dimensionen.

Literatur

1. Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Including illustrations by Karl H. Hofmann, Corrected reprint of the 1998 original.
2. Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`.
3. Jürgen Jost, *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
4. Boto von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Hochschultext.

Oliver C. Schnürer, Fachbereich Mathematik und Statistik, 78457 Konstanz
E-mail address: `Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de`