VARIATIONSRECHNUNG

OLIVER C. SCHNÜRER

ZUSAMMENFASSUNG. Dies ist ein Vorlesungsmanuskript für eine Vorlesung über Variationsrechnung, gehalten im Wintersemester 2012/13 an der Universität Konstanz.

INHALTSVERZEICHNIS

Wir benutzen insbesondere [5] und empfehlen darüber hinaus [2, 4, 10].

Die Kapitel 1 und 2 sind als Einführung zu verstehen.

1. EINDIMENSIONALE BEISPIELE

1.1. Brachistochrone.

Beispiel 1.1. Auf welcher Kurve gleitet eine anfänglich ruhende punktförmige Masse (Kugel) unter dem Einfluss der Schwerkraft und ohne Reibung am schnellsten von $(0,0)$ nach $(1,-a)$, $a>0$?

Sei $(x(t),y(t))_{0\le t\le T}$ für ein $T>0$ der Ort der Kugel. Es gilt Energieerhaltung, also ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant:

$$0 = mgy(t) + \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2\right),$$

wobei m die Masse und g die Gravitationskonstante ist. Wir schreiben (ohne formale Begründung nehmen wir $\dot{x}>0$ an) $t=t(x)$ und erhalten

$$T = t(1)-t(0) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{dx}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\,dx.$$

Aufgrund der Energieerhaltung ist $u(x) := -y(t(x)) \ge 0$. Es gilt $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = -\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} \equiv -u'\dot{x}$. Die Energieerhaltung liefert also $gu = \frac{1}{2}\left(1+(u')^2\right)\dot{x}^2$. Somit ist

$$T = \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1+(u'(x))^2}{2gu(x)}}\,dx.$$

Wir suchen also eine Funktion $u\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ mit $u(0)=0$ und $u(1)=a$, so dass T für diese Funktion minimal wird. Dies ist ein eindimensionales Variationsproblem.

Date: 19. Dezember 2012.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35A15.

Nehme nun an, dass $T = T(u)$ für eine positive genügend glatte Funktion u minimal sei. Dann gilt $T(u+\varphi) \geq T(u)$ für alle $\varphi \in C_c^\infty((0,1))$, also auch $T(u+\tau\varphi) \geq T(u)$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $\tau \mapsto T(u+\tau\varphi)$ differenzierbar ist und dass wir unter dem Integral differenzieren dürfen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{d\tau} T(u+\tau\varphi)\Big|_{\tau=0} &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \sqrt{\frac{1+(u'(x)+\tau\varphi'(x))^2}{2g(u(x)+\tau\varphi(x))}}\Bigg|_{\tau=0} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gu}{1+(u')^2}} \cdot \frac{2u'\varphi' 2gu - 2g\varphi\left(1+(u')^2\right)}{(2gu)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{2guu'\varphi' - g\varphi\left(1+(u')^2\right)}{2gu\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\varphi' - \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2u\sqrt{u}}\varphi\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 -\left(\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right)'\varphi - \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2u\sqrt{u}}\varphi\, dx,
\end{aligned}$$

da φ Randwerte Null hat. Da φ beliebig war, erhalten wir nach DuBois-Reymond

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right)' + \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2u\sqrt{u}} = 0.$$

Der Rest des Beispiels gehört nicht zum Thema der Vorlesung: Durch einen Trick kann man dies lösen; es gilt nämlich (wobei man die erste Gleichheit am besten rückwärts nachrechnet)

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right\}' \\
&= \left\{\frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}} - \left(\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right)u'\right\}' \\
&= \underline{\frac{u'u''}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}u}u' \\
&\qquad - \left(\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right)'u' - \underline{\left(\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right)u''} \\
&= \left\{-\left(\frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}\right)' - \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2\sqrt{u}u}\right\}u' = 0.
\end{aligned}$$

Wir überprüfen nur noch, dass durch $x = \frac{1}{2}c(s-\sin s)$ und $u = \frac{1}{2}c(1-\cos s)$ für alle c eine Lösung gegeben ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
u\left(1+(u')^2\right) &= \frac{1}{2}c(1-\cos s)\left(1+\left(\frac{\frac{du}{ds}}{\frac{dx}{ds}}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}c(1-\cos s)\left(1+\left(\frac{\frac{1}{2}c\sin s}{\frac{1}{2}c(1-\cos s)}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} c \frac{(1-\cos s)^2 + \sin^2 s}{1-\cos s} = c \frac{1 - 2\cos s + \cos^2 s + \sin^2 s}{2 - 2\cos s} \\
&= c \frac{2-2\cos s}{2-2\cos s} = c.
\end{aligned}
$$

Für einen geeigneten Parameter c erhalten wir die gesuchte Lösung.

Bemerkung 1.2. Untersucht man die Differentialgleichung, die ein Minimum eines Variationsproblems erfüllen muss und versucht mit Hilfe der Differentialgleichung eine Lösung zu bekommen, so spricht man von der indirekten Methode der Variationsrechnung.

Bei der direkten Methode der Variationsrechnung minimiert man ein Funktional und bekommt mit Hilfe einer Minimalfolge eine schwache Lösung, von der man später nachzuweisen versucht, dass dies auch eine klassische Lösung ist.

1.2. **Minimalflächen.**

Beispiel 1.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\varphi \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ in $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Gelte $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$, wobei hier u die stetige Fortsetzung auf den Rand bezeichnet. Der Flächeninhalt der Hyperfläche $\operatorname{graph} u = \{(x, u(x)) \colon x \in \Omega\}$ ist durch

$$A[u] := \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx$$

gegeben. $\operatorname{graph} u$ – oder ungenau: u – hat minimalen Flächeninhalt unter allen Graphen über Ω mit Randwerten φ, falls $A[u] \le A[v]$ für alle Funktionen $v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ mit $v = \varphi$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Eingebürgert hat sich die folgende Definition. Beachte, dass nicht gefordert wird, dass eine Minimalfläche den Flächeninhalt tatsächlich minimiert.

Definition 1.4. Seien Ω, φ und A wie oben. Eine Minimalfläche mit Randwerten φ ist ein kritischer Punkt des Funktionals

$$X \ni u \mapsto A[u]$$

mit

$$X = \left\{ u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) : u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega \right\}.$$

Bemerkung 1.5. Wir erinnern daran, dass eine Funktion $\varphi \colon E \to F$ zwischen zwei Banachräumen (und analog zwischen offenen Teilmengen oder wie im obigen Beispiel affinen Teilräumen) in x_0 differenzierbar ist, falls $A \in L(E, F)$ mit

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + A\langle x - x_0 \rangle + o(\|x - x_0\|)$$

existiert. Wir schreiben $A =: d\varphi(x_0)$ oder $A = D\varphi(x_0)$.

x_0 heißt kritischer Punkt von $\varphi \in C^1(E, F)$, falls $df(x_0) = 0$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass die Ableitung von $\psi \colon t \mapsto \varphi(x_0 + ty)$ für alle $y \in E$ in $t = 0$ verschwindet.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Es gilt aufgrund der Kettenregel $\psi'(0) = d\varphi(x_0)\langle y \rangle = 0$, $\psi'(0)$ verschwindet also, falls x_0 ein kritischer Punkt ist.

„$\Longleftarrow$“: Sei umgekehrt $d\varphi(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $y \in E$ mit $d\varphi(x_0)\langle y \rangle \neq 0$. Wir erhalten für $\psi(t) = \varphi(x_0 + ty)$ wiederum nach Kettenregel $\psi'(0) = d\varphi(x_0)\langle y \rangle \neq 0$. Somit gibt es eine solche Abbildung ψ mit $\psi'(0) \neq 0$. □

Beispiel 1.6 (Triviales Beispiel)**.** Gesucht ist die Verbindung von $(0, 0)$ nach (a, b) mit $a > 0$, so dass die Verbindung den kleinstmöglichen Flächeninhalt hat. Dazu minimieren wir (ohne formale Begründung, warum wir nach graphischen Verbindungen suchen) die Länge von graph u für Funktionen $u \in C^1([0,a])$ mit $u(0) = 0$ und $u(a) = b$. Das Längenfunktional ist durch

$$L[u] = \int\limits_0^a \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

gegeben. Sei u ein Minimum mit $u \in C^2((0,a))$. Dann folgt $L[u + \tau\varphi] \geq L[u]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C_c^1((0,a))$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \left.\frac{d}{d\tau} \int\limits_0^a \sqrt{1 + (u' + \tau\varphi')^2}\, dx\right|_{\tau=0} &\equiv \delta L[u]\langle\varphi\rangle \\ = \int\limits_0^a \frac{u'\varphi'}{\sqrt{1 + (u')^2}}\, dx = - \int\limits_0^a \left(\frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}}\right)' \varphi\, dx, \end{aligned}$$

da φ Randwerte Null hat. Dabei bezeichnet $\delta L[u]\langle\varphi\rangle$ die erste Variation von L an der Stelle u in Richtung φ. Nach DuBois-Reymond schließen wir also, dass

$$0 = \left(\frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}}\right)' = \frac{u''}{\sqrt{1 + (u')^2}} - \frac{(u')^2 u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}} = \frac{u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}}$$

gilt. Somit ist $u'' = 0$, u also affin linear und es gilt $u(x) = \frac{b}{a} x$.

Beispiel 1.7 (Rotationssymmetrische Minimalflächen)**.** Wir suchen eine minimale Rotationsfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$, die durch

$$M = \left\{(x, u(x) \cdot p) \colon p \in \mathbb{S}^{n-1}, x \in [a,b]\right\}$$

mit Hilfe einer positiven Funktion $u \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $u(a) = A$ und $u(b) = B$ gegeben ist. Mit Methoden der elementaren Differentialgeometrie oder Analysis berechnen wir den Flächeninhalt: $X \colon (x,p) \mapsto (x, p \cdot u(x))$, $X_0 = (1, p \cdot u')$, $X_i = (0, p_i u)$, $1 \leq i \leq n-1$,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + (u')^2 & 0 \\ 0 & u^2(\sigma_{ij}) \end{pmatrix},$$

$A = \int \sqrt{\det g_{ij}}$ ergibt

$$A[u] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (u')^2} \cdot u^{n-1} \cdot \underbrace{\operatorname{vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}_{= n\omega_n} dx.$$

Für ein glattes Minimum u erhalten wir also für $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{n\omega_n} \delta A[u]\langle\varphi\rangle &= \int\limits_a^b \frac{u'\varphi'}{\sqrt{1 + (u')^2}} u^{n-1} + (n-1)\sqrt{1 + (u')^2} u^{n-2} \varphi\, dx \\ &= \int\limits_a^b \left(- \left(\frac{u' u^{n-1}}{\sqrt{1 + (u')^2}}\right)' + (n-1)\sqrt{1 + (u')^2} u^{n-2} \right) \varphi\, dx. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{u' u^{n-1}}{\sqrt{1 + (u')^2}}\right)' - (n-1)\sqrt{1 + (u')^2} u^{n-2} \\ &= \frac{u'' u^{n-1}}{\sqrt{1 + (u')^2}} + \frac{(n-1)(u')^2 u^{n-2}}{\sqrt{1 + (u')^2}} - \frac{u^{n-1}(u')^2 u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}} - (n-1)\sqrt{1 + (u')^2} u^{n-2}, \end{aligned}$$

$$0 = \frac{u''u}{1+(u')^2} - (n-1).$$

Für $n = 2$ ist eine Lösung durch $u(x) = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$, $c > 0$, gegeben, denn es gilt $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\cosh''(x) = \sinh'(x) = \cosh(x)$ und $1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$. Durch die Wahl von c und durch Ersetzen von x durch $x - x_0$ können wir die Lösung an die Randwerte anpassen. Dies ist nicht immer möglich, z. B. existiert für $a = -1$, $b = 1$ und $A = B = 1$ keine Lösung, da aus $\cosh x \geq x$ dieselbe Ungleichung auch für beliebige Konstanten c folgt.

Für $n \geq 3$ kenne ich keine explizite Lösung.

1.3. **Mikrostrukturen.** Das folgende Beispiel stammt aus [7].

Wir wollen das materialwissenschaftlich motivierte Funktional

$$I(u) = \int_0^1 \left((u')^2 - 1\right)^2 + u^2$$

mit Randwerten $u(0) = u(1) = 0$ minimieren. Es ist naheliegend, dies für $u \in C^{0,1}([0,1])$ oder $u \in W_0^{1,4}((0,1))$ zu versuchen, da das Funktional für solche Funktionen wohldefiniert (und endlich) ist.

Wir definieren die Funktion $t : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$t(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

uns setzen sie (ohne eine Umbenennung) periodisch mit Periode eins nach $\mathbb{R}$ fort. Dann ist $t \in C^{0,1} \subset W^{1,4}_{loc}$. Wir erhalten eine „Sägezahnfunktion“. Definiere weiterhin $t_n(x) := \frac{1}{n} t(nx)$, also eine skalierte Sägezahnfunktion. Es gilt fast überall $|t_n'| = 1$. Somit erhalten wir $0 \leq I(t_n) \leq \frac{1}{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$. Daher ist es naheliegend, dass $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ das gesuchte Minimum ist. Wegen $t_n \rightrightarrows 0$ und $I(0) = 1$ erhalten wir so jedoch kein Minimum. Die in der Minimalfolge auftretenden Zacken entsprechen Mikrostrukturen.

Das Problem beim Grenzübergang ist, dass I nicht konvex und daher unter der betrachteten Konvergenz nicht unterhalbstetig ist. Für dieses Problem gibt es jedoch auch einen Minimierer. Dazu benötigen wir Youngsche Maße. I wird durch die Nullfunktion minimiert, in jedem Punkt ist das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, das dem Gradienten entspricht mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gleich $+1$ und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gleich -1.

Im Jahr 1900 hat D. Hilbert beim Internationalen Mathematiker-Kongress in Paris eine Rede gehalten, in der er 23 mathematische Probleme vorstellte (`http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/`): Im 20. Problem spekuliert D. Hilbert, ob es nicht möglich ist, für jedes Variationsproblem durch einen geeigneten schwachen Lösungsbegriff eine Lösung zu bekommen: „Ich bin überzeugt, daß es möglich sein wird, diese Existenzbeweise durch einen allgemeinen Grundgedanken zu führen, auf den das Dirichletsche Princip hinweist und der uns dann vielleicht in den Stand setzen wird, der Frage näher zu treten, ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung besitzt, sobald hinsichtlich der gegebenen Grenzbedingungen gewisse Annahmen - etwa die Stetigkeit und stückweise öftere Differenziirbarkeit, der für die Randbedingungen maßgebenden Functionen - erfüllt sind und nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt.“

1.4. **Konvexität und Minimierer.**

In diesem Abschnitt werden wir sehen, warum es wichtig ist, dass die Integranden der betrachteten Funktionale bezüglich Du konvex sind.

Theorem 1.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \Omega)$. Schreibe $F = F(p_i, z, x)$. Sei $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ein Minimierer von*

$$I[u] := \int\limits_\Omega F(Du, u, \cdot),$$

gelte also insbesondere $I[u] \le I[u+\varphi]$ für alle $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Dann ist F bezüglich p_i konvex, d. h. es gilt

$$F_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)\xi_i\xi_j \ge 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \Omega$.

Die Beschränktheit von Ω ist nicht nötig solange das Integral endlich ausfällt. Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Dann ist $I[u] \le I[u + t\varphi]$. Die rechte Seite ist bezüglich t zweimal differenzierbar wie man sich z. B. unten beim Ausrechnen der Ableitungen überlegt. Es folgt $\frac{d^2}{dt^2} I[u+t\varphi]\Big|_{t=0} \ge 0$, d. h. die zweite Variation von I ist nichtnegativ. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I[u+t\varphi] &= \int\limits_\Omega F_{p_i}(Du + tD\varphi, u + t\varphi, \cdot)\varphi_i + F_z(\ldots)\varphi,\\
\frac{d^2}{dt^2} I[u+t\varphi] &= \int\limits_\Omega F_{p_ip_j}\varphi_i\varphi_j + 2F_{p_iz}\varphi_i\varphi + F_{zz}\varphi^2.
\end{aligned}$$

Den Wert an der Stelle $t = 0$ erhalten wir indem wir sämtliche Ableitungen von F an der Stelle $(Du, u, \cdot)$ auswerten. Durch Approximation erhalten wir

$$0 \le \int\limits_\Omega F_{p_ip_j}(Du, u, \cdot)\varphi_i\varphi_j + 2F_{p_iz}(\ldots)\varphi_i\varphi + F_{zz}\varphi^2 \tag{1.1}$$

für alle $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und damit auch für alle $\varphi \in C_0^{0,1}(\Omega)$, also für alle Lipschitzfunktionen φ mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei nun $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine durch

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2},\\ 1 - x & \text{für } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

und 1-periodische Fortsetzung nach $\mathbb{R}$ definierte Sägezahnfunktion. Es gilt $|\rho'| = 1$ fast überall. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Definiere die Testfunktion

$$v(x) := \varepsilon \cdot \rho\left(\frac{\langle x, \xi\rangle}{\varepsilon}\right)\zeta(x).$$

Es gilt fast überall

$$Dv = \rho'\left(\frac{\langle x, \xi\rangle}{\varepsilon}\right)\zeta(x)\xi + \varepsilon\rho\left(\frac{\langle x, \xi\rangle}{\varepsilon}\right)D\zeta(x) = \rho'\left(\frac{\langle x, \xi\rangle}{\varepsilon}\right)\zeta(x)\xi + O(\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \searrow 0.$$

Wir setzen dies in (1.1) ein und erhalten

$$0 \le \int\limits_\Omega F_{p_ip_j}(Du, u, \cdot)(\rho')^2\xi_i\xi_j\zeta^2 + O(\varepsilon).$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir

$$0 \le \int\limits_\Omega F_{p_ip_j}(Du, u, \cdot)\xi_i\xi_j\zeta^2.$$

Da dies für alle $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt, erhalten wir, da $F_{p_ip_j}$ stetig ist

$$0 \le F_{p_ip_j}(Du(x), u(x), x)\xi_i\xi_j$$

wie behauptet für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Im obigen Beweis hätten wir die Stetigkeit von $F_{p_ip_j}$ nicht gebraucht. Dies folgt aus dem folgenden Lemma, das wir aber für die weitere Vorlesung nicht benötigen.

Lemma 1.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und gelte*

$$\int\limits_\Omega f\varphi \ge 0 \quad \textit{für alle } 0 \le \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dann gilt $f \ge 0$ fast überall.

Beweis. Sei η_ε ein symmetrischer nichtnegativer Glättungskern. Dann gilt in der üblichen Notation für kleine $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_\Omega f_\varepsilon(x)\varphi(x) = \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dy\,dx = \int\limits_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(y)\,dy \ge 0,$$

da $\eta_\varepsilon \ge 0$ gilt und η_ε für kleine $\varepsilon > 0$ in $C_c^\infty(\Omega)$ ist. Da f_ε stetig ist, folgt $f_\varepsilon(x) \ge 0$ für alle $x \in \Omega$. Lasse $\varepsilon \searrow 0$. Eine Teilfolge der f_ε konvergiert punktweise fast überall gegen f. Somit folgt die Behauptung. $\square$

2. Variationelle Betrachtung der Laplacegleichung

Als Modellfall wollen wir die Laplacegleichung genauer betrachten.

2.1. **Das Dirichletprinzip.**
Zunächst stellen wir für glatte Lösungen der Laplacegleichung einen Zusammenhang zu einem Funktional her.

Theorem 2.1 (Dirichletprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Definiere*

$$I[w] := \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf,$$

und

$$\mathcal{A} := \left\{ w \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \,:\, w = g \text{ auf } \partial\Omega \right\},$$

wobei $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^2(U(\partial\Omega))$, also in C^2 in einer Umgebung U von $\partial\Omega$.

Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dann gilt

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Ist umgedreht $u \in \mathcal{A}$ ein Minimierer für I,

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w],$$

so löst u das Randwertproblem (2.1).

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei u eine Lösung zu (2.1) und sei $w \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w) = \int_\Omega \langle Du, D(u-w)\rangle - f \cdot (u - w),$$

wobei wir partiell integrieren durften, da $u - w$ Randwerte Null hat. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du|^2 - uf &= \int_\Omega \langle Du, Dw\rangle - wf \\ &\le \int_\Omega |Du| \cdot |Dw| - wf \\ &\le \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 + \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 - uf \le \int_\Omega \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf.$$

Somit minimiert u das Funktional I in $\mathcal{A}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun u ein Minimum von I in $\mathcal{A}$. Wir leiten die Euler-Lagrange Gleichung des Funktionals I her. Sei dazu $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Definiere

$$i(\tau) := I[u + \tau v].$$

Für $\tau \in \mathbb{R}$ gilt $u + \tau v \in \mathcal{A}$. Somit nimmt i für $\tau = 0$ ein Minimum an. Wir werden nun nachweisen, dass i in τ differenzierbar ist. Also folgt $i'(0) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}i(\tau) &= \int_\Omega \frac{1}{2}|Du + \tau Dv|^2 - (u + \tau v)f \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 + \tau\langle Du, Dv\rangle + \frac{1}{2}\tau^2|Dv|^2 - (u + \tau v)f\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}0 = i'(0) &= \left.\frac{d}{d\tau} i\right|_{\tau=0} = \text{“}\delta i\text{”} \\ &= \int_\Omega \langle Du, Dv\rangle - vf = \int_\Omega (-\Delta u - f)v.\end{aligned}$$

Dies gilt für beliebiges $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit folgt $-\Delta u = f$ in Ω. □

2.2. **Variationeller Existenzbeweis.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}$ von

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

d. h. ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle + f\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

(Vergleiche dies mit der Definition der schwachen Ableitung. Auch hier genügt es, die Gleichheit für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ zu fordern, da sie sonst durch Approximation folgt.) Dazu wollen wir

$$I(u) := \int\limits_\Omega \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

unter allen Funktionen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ minimieren.

Sei $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Minimiert man nun I unter allen Funktionen u mit $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so kann man auch noch eine Randbedingung $u = g$ erhalten.

Lemma 2.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_k \rightharpoonup u$ eine schwach konvergente Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 \ge \int\limits_\Omega |\nabla u|^2.$$

Beweis. Auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist (die Wurzel von) $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ eine zu $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega u^2$ äquivalente Norm und ist vom Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle$ induziert. Die Behauptung folgt nun aus der Unterhalbstetigkeit der Norm. □

Einfacher wäre es, wenn wenn $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2$ bezüglich der schwachen Topologie stetig wäre, denn dann gälte Gleichheit in

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 \underset{\text{i. a.}}{\neq} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2.$$

Unterhalbstetigkeit des Funktionals genügt jedoch um einen Minimierer zu finden.

Sei nun $(u_k)_k$, $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$, eine Minimalfolge für $I(u)$, d. h. es gelte

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} I(u).$$

Im folgenden werden wir häufiger $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \ge \lambda \int\limits_\Omega u^2$ für ein $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ verwenden.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass das betrachtete Infimum endlich ist. Es gilt

$$I(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu \ge \frac{1}{2}\lambda \int\limits_\Omega u^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega u^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega f^2 \ge -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} > -\infty,$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Mit einer analogen Rechnung können wir die $W^{1,2}$-Norm der u_k's gleichmäßig beschränken: Aufgrund der Minimalfolgeneigenschaft gilt

$$\begin{aligned} c &\ge \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega f u_k \ge \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega u_k^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega f^2 \\ &\ge \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda}\int\limits_\Omega |\nabla u_k|^2 - \int\limits_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ klein und bringen den $\int\limits_\Omega f^2$-Term auf die linke Seite. Die Behauptung folgt. Aufgrund der Äquivalenz der Normen mit und ohne L^2-Term auf $W_0^{1,2}$ ist auch $\int\limits_\Omega u_k^2$ gleichmäßig beschränkt.

Nach Banach-Alaoglu besitzt u_k also eine Teilfolge (wir benennen nicht um), die in $W^{1,2}$ schwach gegen u konvergiert. Nach Definition ist $W_0^{1,2}$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}$. Ein abgeschlossener Unterraum ist, wie man durch Testen mit einem Vektor aus dem orthogonalen Komplement sieht, auch unter schwacher Konvergenz abgeschlossen. Daher hat auch der Grenzwert u wieder Randwerte Null. Da $W^{1,2} \Subset L^2$ ist, dürfen wir weiterhin annehmen, dass diese Folge in $L^2(\Omega)$ (schwach) gegen u konvergiert. Somit ist

$$\begin{aligned}\inf_{w\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w) &= \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega f u_k\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega fu \ge \liminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 + \int\limits_\Omega fu\\ &\ge \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega fu = I(u) \ge \inf_{w\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w)\end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit. u minimiert also I in $W_0^{1,2}$ und die Euler-Lagrange-Gleichung besagt gerade, dass u eine schwache Lösung ist: Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}0 &= \left.\frac{d}{dt} I(u+tv)\right|_{t=0}\\ &= \left.\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + 2t\langle\nabla u, \nabla v\rangle + |\nabla v|^2\right) + fu + tfv\right|_{t=0}\\ &= \int\limits_\Omega \langle\nabla u, \nabla v\rangle + fv.\end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes bewiesen:

Theorem 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2$. Dann gibt es ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, das das Funktional*

$$I(u) = \int\limits_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

minimiert.

2.3. **Harmonische Abbildungen.** Bei der Laplacegleichung kann man bei glatten Daten zeigen, dass die Lösung selbst glatt ist. Daher ist noch nicht klar, dass man in Sobolevräumen arbeiten muss.

Im folgenden Beispiel sehen wir, dass wir aus topologischen Gründen auch bei „schönen“ Funktionalen nicht immer Glattheit von kritischen Punkten erwarten dürfen. Es gibt nämlich keine stetige Abbildung $\overline{B_1^n(0)} \to \mathbb{S}^{n-1}$, deren Einschränkung auf $\mathbb{S}^{n-1}$ die Identität ist (Brouwerscher Fixpunktsatz). Daher ist es nötig, in Sobolevräumen zu arbeiten.

Definition 2.4. Sei $u\colon B_1^n(0) \to \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ mit $u \in H^{1,2}(B_1(0), \mathbb{R}^n)$. Wir schreiben auch

$$H^{1,2}\left(B_1(0), \mathbb{S}^{n-1}\right) = \left\{u \in H^{1,2}\left(B_1(0), \mathbb{R}^n\right) : u(x) \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ für fast alle } x\right\}$$

und setzen

$$\|u\|_{H^{1,2}(B_1(0),\mathbb{S}^{n-1})} = \|u\|_{H^{1,2}(B_1(0),\mathbb{R}^n)} \equiv \|u\|_{H^{1,2}}.$$

Wir definieren die Energie von u, $E(u)$, durch

$$E(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{B_1(0)} |Du|^2 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{B_1(0)} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)^2 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{B_1(0)} \sum_{i,j=1}^n u_j^i u_j^i.$$

Dann heißt u harmonische Abbildung, falls in u die erste Variation von E verschwindet, d. h. falls

$$\left.\frac{d}{dt}E(u(x,t))\right|_{t=0} = 0$$

für alle Abbildungen der Form

$$u(x,t) = \frac{u(x)+t\varphi(x)}{|u(x)+t\varphi(x)|}$$

mit $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0),\mathbb{R}^n)$ und $\|\varphi\|_{L^\infty} < 1$ gilt.

Bemerkung 2.5. Allgemeiner könnte man in der Definition auch differenzierbare Funktionen $t \mapsto u(\cdot,t) \in H^{1,2}\left(B_1(0),\mathbb{S}^{n-1}\right)$ mit $u(\cdot,t)-u(\cdot,0) \in H_0^{1,2}$ betrachten. Hier ist jedoch Vorsicht geboten, sobald $H^{1,2} \not\hookrightarrow L^\infty$ gilt.

Die folgende Aussage gilt bereits für $n \geq 3$, siehe [6].

Lemma 2.6. *Sei $n \geq 7$. Dann ist die Abbildung*

$$u\colon x \mapsto \frac{x}{|x|}$$

eine harmonische Abbildung.

Beweis. Der Beweis folgt durch direkte Rechnung. Im Fall $\frac{n-2}{2} > \alpha$ ist $x \mapsto |x|^{-\alpha} \in H^{1,2}(B_1(0))$. Dies rechtfertigt die partielle Integration in der nachfolgenden Rechnung. Sei $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0),\mathbb{R}^n)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{x+t\varphi(x)}{|x+t\varphi(x)|} \equiv \left(\frac{x^i+t\varphi^i(x)}{|x+t\varphi(x)|}\right)_{1\leq i\leq n}, \\
u^i_j &= \frac{\delta^i_j+t\varphi^i_j}{|x+t\varphi|} - \frac{\left(x^i+t\varphi^i\right)\left(x^k+t\varphi^k\right)\delta_{kl}\left(\delta^l_j+t\varphi^l_j\right)}{|x+t\varphi|^3}, \\
\left.\frac{d}{dt}u^i_j\right|_{t=0} &= \frac{\varphi^i_j}{|x|} - \frac{\delta^i_j x_k\varphi^k}{|x|^3} - \frac{\varphi^i x_j + x^i\varphi^k\delta_{kj} + x^i x_k\varphi^k_j}{|x|^3} + 3\frac{x^i x_j x_k\varphi^k}{|x|^5}, \\
u^i_j\big|_{t=0} &= \frac{\delta^i_j}{|x|} - \frac{x^i x_j}{|x|^3} = \frac{1}{|x|}\left(\delta^i_j - \frac{x^i x_j}{|x|^2}\right), \\
\delta E(u)\langle\varphi\rangle &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{B_1(0)}\left|D\frac{x+t\varphi}{|x+t\varphi|}\right|^2\Bigg|_{t=0} = \int\limits_{B_1(0)}\sum_{i,j=1}^n u^i_j\frac{d}{dt}u^i_j\Bigg|_{t=0} \\
&= \int\limits_{B_1(0)}\frac{1}{|x|}\sum_{i,j=1}^n\left(\delta^i_j - \frac{x^i x_j}{|x|^2}\right)\left(\frac{\varphi^i_j}{|x|} - \frac{\delta^i_j x_k\varphi^k}{|x|^3}\right),
\end{aligned}$$

da Terme mit x^i oder x_j beim Ausmultiplizieren der rechten Klammer verschwinden

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{B_1(0)}\frac{1}{|x|}\left(\delta^j_i - \frac{x^j x_i}{|x|^2}\right)\left(\frac{\varphi^i_j}{|x|} - \frac{\delta^i_j x_k\varphi^k}{|x|^3}\right) \\
&= \int\limits_{B_1(0)}\left(\frac{\varphi^i_i}{|x|^2} - \frac{n x_k\varphi^k}{|x|^4} - \frac{x^j x_i\varphi^i_j}{|x|^4} + \frac{x_k\varphi^k}{|x|^4}\right) \\
&= \int\limits_{B_1(0)} -\left(\frac{1}{|x|^2}\right)_i\varphi^i - \frac{(n-1)x_k\varphi^k}{|x|^4} + \left(\frac{x^j x_i}{|x|^4}\right)_j\varphi^i
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{B_1(0)} \frac{2x_i\varphi^i}{|x|^4} - \frac{(n-1)x_k\varphi^k}{|x|^4} + \frac{nx_i\varphi^i + x_i\varphi^i}{|x|^4} - 4\frac{x^jx_ix_j\varphi^i}{|x|^6}$$

$$= \int\limits_{B_1(0)} \frac{2-n+1+n+1-4}{|x|^4} x_i\varphi^i = 0. \qquad \square$$

3. Klassische Theorie

Wir folgen [5].

In diesem Kapitel minimieren wir Funktionale der Form

$$\mathcal{F}(u,\Omega) = \int\limits_\Omega F(Du)$$

für konvexe Integranden F über skalarwertige Lipschitzstetige Funktionen u. Falls nicht anders angegeben nehmen wir an, dass F auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

3.1. **Maximumprinzip und Existenz von Minimierern.**

Definition 3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir schreiben $\operatorname{Lip}(\Omega) \equiv C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right)$ und bezeichnen die Norm mit $\|\cdot\|_{\operatorname{Lip}(\Omega)} = \|\cdot\|_{C^{0,1}(\Omega)}$. Wir benutzen auch die Lipschitzhalbnorm

$$[u]_{C^{0,1}(\Omega)} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

(Manchmal schreiben wir $x \neq y$ nicht explizit dazu.) Sei $U \in \operatorname{Lip}(\partial\Omega)$. Definiere

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip}(\Omega) &:= C^{0,1}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}\colon \|u\|_{C^{0,1}(\Omega)} < \infty\right\}, \\ \operatorname{Lip}_k(\Omega) &:= \{u \in \operatorname{Lip}(\Omega)\colon [u]_{0,1} \le k\}, \\ \operatorname{Lip}(\Omega, U) &:= \{u \in \operatorname{Lip}(\Omega)\colon u = U \text{ auf } \partial\Omega\} \end{aligned}$$

sowie

$$\operatorname{Lip}_k(\Omega, U) := \operatorname{Lip}_k(\Omega) \cap \operatorname{Lip}(\Omega, U).$$

Bemerkung 3.2.

(i) Die Definition ändert sich nicht, wenn man zunächst Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ betrachtet und diese danach stetig auf den Rand fortsetzt.

(ii) Lipschitzstetige Funktionen sind fast überall differenzierbar, siehe [9, S. 311], und die Ableitung stimmt mit der schwachen Ableitung, die wegen $\operatorname{Lip}(\Omega) \subset W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$ existiert, überein.

Zunächst minimieren wir $\mathcal{F}$ über Funktionen mit gleichmäßig beschränkter Lipschitzkonstante. Für solche Funktionen liefert uns Arzelà-Ascoli ein Kompaktheitsresultat. Mit Hilfe von Proposition 3.7 können wir diese zusätzliche Einschränkung wieder loswerden, wenn wir geeignete Lipschitzschranken an einen Minimierer haben.

Proposition 3.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $F \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ konvex und $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$. Sei $U \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$. Dann gibt es $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ mit*

$$\inf_{\operatorname{Lip}_k(\Omega,U)} \mathcal{F}(\cdot,\Omega) = \mathcal{F}(u,\Omega).$$

Beweis. Sei $(u_j) \subset \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ eine Minimalfolge mit

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j,\Omega) = \inf_{\operatorname{Lip}_k(\Omega,U)} \mathcal{F}(\cdot,\Omega) =: \mu.$$

Wegen $|Du| \le k$ fast überall für $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ fällt das Infimum endlich aus. Wegen

$$\sup_\Omega |u_j| \le \sup_\Omega |U| + \underbrace{[u_j]_{C^{0,1}}}_{\le k} \cdot \operatorname{diam}(\Omega)$$

ist $(u_j) \subset \operatorname{Lip}(\Omega)$ beschränkt. Nach Arzelà-Ascoli dürfen wir daher ohne Einschränkung annehmen, dass $u_j \rightrightarrows u$ (gleichmäßige Konvergenz) für eine Funktion $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ gilt.

Da F konvex ist, gibt es eine Funktion $\lambda \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$F(w) \ge F(z) + \langle \lambda(z), w - z\rangle$$

für alle $w, z \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wegen $F \in C^1_{loc}$ ist λ stetig, insbesondere also Borel messbar. (Hier könnte man mit Hilfe von Theorem B.1 auch direkt eine Borel messbare Funktion λ auswählen, wobei wir dort f als die abgeschlossene Menge wählen, die alle hier möglichen $(z, \lambda(z))$ enthält.) Wir erhalten

$$\int_\Omega F(Du_j) \ge \int_\Omega F(Du) + \int_\Omega \langle \lambda(Du), Du_j - Du\rangle.$$

Die Abbildung $x \mapsto \lambda(Du(x))$ ist als Verkettung einer Borel messbaren Funktion und einer messbaren Funktion selbst wieder messbar [8, Theorem 1.12]. Da $x \mapsto \lambda(Du(x))$ beschränkt und messbar ist, können wir das letzte Integral ausführen. Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Messbarkeit können wir $x \mapsto \lambda(Du(x))$ zunächst durch stetige und dann durch C^1-Funktionen approximieren. Somit gibt es $g \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ mit

$$\int_\Omega |\lambda(Du) - g| < \varepsilon.$$

Es folgt

$$\int_\Omega \langle \lambda(Du), Du_j - Du\rangle \ge \int_\Omega \langle g, Du_j - Du\rangle \underbrace{- \int_\Omega |\lambda(Du) - g| \cdot \underbrace{|Du_j - Du|}_{\le 2k}}_{\ge -2k\varepsilon},$$

da $u_j, u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ sind. Da $u = u_j = U$ auf $\partial\Omega$ gilt, können wir im ersten Integral partiell integrieren und erhalten

$$\int_\Omega \langle g, Du_j - Du\rangle = -\int_\Omega (u_j - u) \operatorname{div} g \to 0$$

aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $u_j \rightrightarrows u$. Also erhalten wir

$$\mu = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}(u_j, \Omega) \ge \mathcal{F}(u, \Omega) - 2k\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mathcal{F}(u, \Omega) = \mu$, also die Behauptung. □

Im Beweis von Proposition 3.3 haben wir auch gleich die Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$ gezeigt.

Korollar 3.4 (Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{F}$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathcal{F}(u, \Omega) := \int_\Omega F(Du)$. Sei $k > 0$ und $U \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$. Sei $(u_l) \subset \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ und gelte $u_l \rightrightarrows u$. Dann ist*

$$\liminf_{l\to\infty} \mathcal{F}(u_l, \Omega) \ge \mathcal{F}(u, \Omega).$$

Beweis. Für $F \in C^1$ können wir wie in Proposition 3.3 argumentieren. Sonst approximieren wir F und schließen wie im Beweis von Proposition 3.5. □

Im folgenden Resultat werden wir die zusätzliche Annahme $F \in C^1_{loc}$ wieder los:

Proposition 3.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int_\Omega F(Du)$. Sei $U \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$. Dann gibt es $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ mit*

$$\inf_{\operatorname{Lip}_k(\Omega,U)} \mathcal{F}(\cdot,\Omega) = \mathcal{F}(u,\Omega).$$

Beweis. Sei F_ε eine glatte konvexe Approximation von F mit $|F - F_\varepsilon| \le \varepsilon$ für Argumente $|\cdot| \le k$. Die Konvexität wird bei der üblichen Glättung mittels Faltung mit einer nicht-negativen Funktion η_ε nicht zerstört.

Sei $(u_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ eine Minimalfolge für $\mathcal{F}(\cdot,\Omega)$. Ohne Einschränkung dürfen wir nach Arzelà-Ascoli annehmen, dass $u_l \rightrightarrows u$ für ein $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ gilt. Damit erhalten wir von der Mitte der Formel ausgehend mit Korollar 3.4

$$\liminf_{l\to\infty} \mathcal{F}(u_l,\Omega) + \varepsilon|\Omega| \ge \liminf_{l\to\infty} \mathcal{F}_\varepsilon(u_l,\Omega) \ge \mathcal{F}_\varepsilon(u,\Omega) \ge \mathcal{F}(u,\Omega) - \varepsilon|\Omega|.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt der nichttriviale Teil der behaupteten Gleichheit. □

Bemerkung 3.6.

(i) Wenn wir ab jetzt davon sprechen, dass u das Funktional $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}_k(\Omega)$ minimiert, meinen wir damit, dass $u \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ ist und dass
$$\mathcal{F}(u,\Omega) \le \inf_{\substack{v\in\operatorname{Lip}_k(\Omega)\\ v=u \text{ auf } \partial\Omega}} \mathcal{F}(v,\Omega)$$
gilt.

(ii) Offensichtlich ist, dass ein solcher Minimierer auch ein Minimierer von $\mathcal{F}(\cdot, A)$ für alle offenen Mengen $A \subset \Omega$ ist.

(iii) Wir erwarten, dass die Lipschitzkonstante von Minimierern u^k in Lip_k in k wächst während das Minimum fällt. Dies ist beweisbar, wenn man jeweils einen Minimierer mit minimaler Lipschitzkonstante wählt. Jedoch haben wir einen Minimierer gefunden, wenn der Minimierer in Lip_k nicht mehr die Lipschitzkonstante k besitzt (Proposition 3.7).

Proposition 3.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathcal{F}(u,\Omega) = \int_\Omega F(Du)$. Sei u^k ein Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$. Gilt $\left[u^k\right]_{C^{0,1}} < k$, so minimiert u^k das Funktional $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.*

Beweis. Sei $v \in \operatorname{Lip}(\Omega, U)$ beliebig. Definiere $v_t := u^k + t\left(v - u^k\right) = (1-t)u^k + tv$. Dann gilt $v_t = u^k = U$ auf $\partial\Omega$. Ist $t > 0$ klein genug, so erhalten wir $[v_t]_{C^{0,1}} < k$. Die Funktion u^k minimiert $\mathcal{F}$ in Lip_k. Da sich die Konvexität von F auf $\mathcal{F}$ überträgt, erhalten wir

$$\mathcal{F}\left(u^k,\Omega\right) \le \mathcal{F}(v_t,\Omega) \le (1-t)\mathcal{F}\left(u^k,\Omega\right) + t\mathcal{F}(v,\Omega).$$

Umsortieren liefert $\mathcal{F}\left(u^k,\Omega\right) \le \mathcal{F}(v,\Omega)$, also die Behauptung. □

Definition 3.8. Eine Funktion $w \in \operatorname{Lip}_k(\Omega)$ heißt ein Super-Minimum (bzw. ein Sub-Minimum) für ein Funktional $\mathcal{F}$, falls für jedes $\vartheta \in \operatorname{Lip}_k(\Omega, w)$ mit $\vartheta \ge w$ (bzw. $\vartheta \le w$)

$$\mathcal{F}(w,\Omega) \le \mathcal{F}(\vartheta,\Omega)$$

folgt.

Lemma 3.9 (Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Definiere $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int_\Omega F(Du)$. Sei v ein Super-Minimum und w ein Sub-Minimum in $\operatorname{Lip}_k(\Omega)$ für $\mathcal{F}$. Nehme an, dass $w \le v$ auf $\partial\Omega$ gilt. Dann folgt $w \le v$ in Ω.*

Strikte Konvexität ist hier als $F(ta + (1-t)b) < tF(a) + (1-t)F(b)$ für $t \in (0,1)$ und $a \ne b$ zu verstehen.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass

$$A := \{x \in \Omega \colon v(x) < w(x)\} \neq \emptyset$$

gilt. Definiere $\vartheta(x) := \max\{v(x), w(x)\}$. Dann ist $\vartheta \in \mathrm{Lip}_k(\Omega, v)$ und es gilt $\vartheta \geq v$ in Ω. Da v ein Super-Minimum ist, folgt $\mathcal{F}(v,\Omega) \leq \mathcal{F}(\vartheta,\Omega)$. Dies ist äquivalent zu

$$\mathcal{F}(v,A) \leq \mathcal{F}(w,A).$$

Vergleichen wir analog das Sub-Minimum w mit $\min\{v,w\}$ in A, so erhalten wir $\mathcal{F}(w,A) \leq \mathcal{F}(v,A)$. Also folgt $\mathcal{F}(v,A) = \mathcal{F}(w,A)$.

Nun gilt nach Definition $w = v$ auf ∂A und $w > v$ in A. Somit ist $Dw \neq Dv$ auf einer Menge von positivem Maß. Damit erhalten wir aus der strikten Konvexität von $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{v+w}{2}, A\right) < \frac{1}{2}\mathcal{F}(v,A) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(w,A) = \mathcal{F}(v,A).$$

Die Funktion $u := \frac{v+w}{2}$ erfüllt $u = v$ auf ∂A und $u \geq v$ in A. Da v ein Super-Minimum ist, erhalten wir

$$\mathcal{F}\left(\frac{v+w}{2}, A\right) \geq \mathcal{F}(v,A).$$

Wir erhalten einen Widerspruch zur obigen Ungleichung. □

Lemma 3.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Definiere $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int_\Omega F(Du)$. Sei v ein Super-Minimum und w ein Sub-Minimum in $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$ für $\mathcal{F}$. Dann gilt*

$$\sup_\Omega (w - v) = \sup_{\partial\Omega}(w - v).$$

Beweis. Zunächst ist, da $\mathcal{F}$ lediglich von Gradienten abhängt, mit v auch $v + \alpha$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ ebenfalls ein Sub-Minimum in $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Für $x \in \partial\Omega$ gilt offensichtlicherweise

$$w(x) \leq v(x) + \sup_{\partial\Omega}(w - v).$$

Nach Lemma 3.9 gilt diese Ungleichung auch für beliebige $x \in \Omega$. Durch Umstellen und Übergang zum Supremum erhalten wir den „$\leq$"-Teil der Behauptung. Die andere Ungleichung ist trivial. □

Korollar 3.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Definiere $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int_\Omega F(Du)$. Seien u, v Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Dann gilt*

$$\sup_\Omega |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v|.$$

Somit ist der Minimierer eindeutig bestimmt. Dies gilt, da k beliebig ist, auch in $\mathrm{Lip}(\Omega)$.

Ohne strikte Konvexität ist dieses Resultat falsch, z. B. für $F \equiv 0$.

3.2. **Funktionen beschränkter Steigung.** Um Proposition 3.7 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die Steigung von Minimierern in $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$ strikt kleiner als k ist. Dazu müssen wir insbesondere Punkte auf dem Rand betrachten.

Lemma 3.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex sowie $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int_\Omega F(Du)$. Sei u ein Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Dann gilt*

$$[u]_{C^{0,1}} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \partial\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $x_1 \neq x_2$. Definiere $\tau := x_2 - x_1$. Die Funktion F hängt nicht von x ab. Daher können wir die Situation verschieben und sehen für $\Omega_\tau := \{x \in \mathbb{R}^n : x + \tau \in \Omega\}$, dass $u_\tau(x) := u(x+\tau)$ das Funktional $\mathcal{F}(\cdot, \Omega_\tau)$ in $\operatorname{Lip}_k(\Omega_\tau)$ minimiert.

Es gilt $x_1 \in \Omega \cap \Omega_\tau \neq \emptyset$. Sowohl u als auch u_τ minimieren $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}_k(\Omega \cap \Omega_\tau)$. Nach Korollar 3.11 gibt es daher ein $x_0 \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$, so dass

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_\tau(x_1)| \le |u(x_0) - u_\tau(x_0)| = |u(x_0) - u(x_0 + \tau)|$$

gilt. Wegen $x_0 \in \partial\Omega$ oder $x_0 \in \partial\Omega_\tau$ gilt $x_0 \in \partial\Omega$ oder $x_0 + \tau \in \partial\Omega$. Wir dividieren nun auf beiden Seiten durch $|\tau|$ und erhalten

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \le \frac{|u(x_0) - u(x_0+\tau)|}{|\tau|} \le \sup_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \partial\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}.$$

Dies liefert den nichttrivialen Teil der Behauptung. □

Lemma 3.13. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Definiere $\mathcal{F}(u, \Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$. Dann minimiert*

$$w(x) := a + \langle z_0, x\rangle$$

für $a \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{R}^n$ das Funktional $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}(\Omega)$.

Beweis. Es gilt $w \in \operatorname{Lip}_{|z_0|}(\Omega)$. Damit folgt aus der Behauptung auch, dass w das Funktional $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}_k(\Omega)$ für alle $k \ge |z_0|$ minimiert.

Sei $\eta \in \operatorname{Lip}(\Omega)$ mit $\eta = 0$ auf $\partial\Omega$. Da F konvex ist, gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit

$$F(z_0 + \xi) \ge F(z_0) + \langle \lambda, \xi\rangle$$

für beliebige $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir verwenden speziell $\xi = D\eta(x)$, integrieren über Ω und erhalten

$$\mathcal{F}(w + \eta, \Omega) = \int\limits_\Omega F(z_0 + D\eta) \ge \underbrace{F(z_0) \cdot |\Omega|}_{=\mathcal{F}(w,\Omega)} + \underbrace{\int\limits_\Omega \langle \lambda, D\eta\rangle}_{=0},$$

wobei wir im letzten Integral partiell integriert und $\eta = 0$ auf $\partial\Omega$ benutzt haben. □

Definition 3.14. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir sagen, dass $U : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion von beschränkter Steigung sei oder die Beschränkte-Steigungs-Bedingung (BSB) für eine Konstante $Q \ge 0$ erfüllt, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ zwei affine Funktionen $w^+ \equiv w^+_{x_0}, w^- \equiv w^-_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} w^- &\le U \le w^+ \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ w^-(x_0) &= U(x_0) = w^+(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\left[w^\pm\right]_{C^{0,1}} \le Q$$

gibt.

Bemerkung 3.15.

(i) Die BSB kann für nicht affine Funktionen U nur für konvexe Mengen Ω erfüllt sein (Übung).

(ii) Für einen C^2-Rand mit positiven Hauptkrümmungen und C^2-Funktionen U ist sie erfüllt (Übung unter Benutzung des folgenden Theorems. Dann ist E eine Tangentialebene.).

Theorem 3.16. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und zusammenhängend. Gibt es ein $c = c(\Omega)$ und für jeden Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Hyperebene E mit $x_0 \in E$, so dass*

$$|x - x_0|^2 \le c \cdot \operatorname{dist}(x, E) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega$$

gilt, dann erfüllt $U|_{\partial\Omega}$ für jedes $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$ BSB auf $\partial\Omega$.

Beweis. Die Voraussetzung impliziert, dass Ω strikt auf einer Seite von E liegt. Also ist Ω konvex.

Da Ω beschränkt ist, dürfen wir ohne Einschränkung $U \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Seien weiterhin ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und $E = \{x^n = 0\}$ und nehme an, dass $\partial\Omega \setminus \{0\} \subset \{x^n > 0\}$ gilt. Definiere für $\mu \in \mathbb{R}$

$$w(x) := U(0) + DU(0)\langle x\rangle + \mu x^n.$$

Es gilt $w(0) = U(0)$ für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$.

Angenommen, es gibt einen Punkt $y \neq 0$ mit $y \in \partial\Omega$ und $w(y) = U(y)$. Dann folgt durch Umordnen der Terme

$$\mu = \frac{1}{y^n}(U(y) - U(0) - DU(0)\langle y\rangle) = \frac{1}{2y^n} D^2U(\xi)\,\langle y, y\rangle$$

für ein $\xi \in \mathbb{R}^n$, wobei wir für die letzte Gleichheit den Mittelwertsatz für $t \mapsto U(ty)$ benutzt haben. Also folgt

$$|\mu| \le \underbrace{\frac{|y|^2}{2|y^n|}}_{\le c(\Omega)} \left\|D^2U\right\|_{L^\infty}.$$

Also folgt für $\mu = \pm\left(c(\Omega)\left\|D^2U\right\|_{L^\infty} + 1\right)$ je nach Vorzeichen $w > U$ oder $w < U$ auf $\partial\Omega \setminus \{x_0\}$. Direkt nach Definition von w folgt $[w]_{C^{0,1}} \le \|DU\|_{L^\infty} + 1 + c(\Omega)\left\|D^2U\right\|_{L^\infty}$. Die Funktion w erfüllt also die Bedingungen aus Definition 3.14. $\square$

Theorem 3.17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Erfülle $U\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ BSB mit Konstante Q. Dann besitzt $\mathcal{F}(u, \Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$ ein Minimum u in $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$ und mindestens einer der Minimierer erfüllt $[u]_{C^{0,1}} \le Q$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass F strikt konvex ist. Dann ist $\operatorname{Lip}_Q(\Omega, U) \neq \emptyset$, es ist nämlich

$$\psi^+(x) := \inf_{x_0 \in \partial\Omega} w_{x_0}^+(x) \in \operatorname{Lip}_Q(\Omega, U).$$

Sei $k > Q$. Nach Proposition 3.5 gibt es eine Funktion u, die $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$ minimiert. Nach Korollar 3.11 ist dieser Minimierer eindeutig bestimmt, da F strikt konvex ist. Nach Lemma 3.13 sind die affinen Barrieren Minimierer in $\operatorname{Lip}_k(\Omega, w_{x_0}^\pm)$ und aufgrund des Maximumprinzips, Lemma 3.9, gilt daher

$$w_{x_0}^-(x) \le u(x) \le w_{x_0}^+(x)$$

für alle $x \in \Omega$. Wegen $u(x_0) = w_{x_0}^\pm(x_0)$ für $x_0 \in \partial\Omega$ folgt

$$w_{x_0}^-(x) - w_{x_0}^-(x_0) \le u(x) - u(x_0) \le w_{x_0}^+(x) - w_{x_0}^+(x_0).$$

Mit Lemma 3.12 und da BSB mit Q erfüllt ist liefert Proposition 3.7, dass u der gesuchte Minimierer in $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$ ist.

Falls F nicht strikt konvex ist, definieren wir $F_\varepsilon(p) := F(p) + \varepsilon|p|^2$ für $\varepsilon > 0$. Sei u_ε der im ersten Teil gefundene Minimierer von $\mathcal{F}_\varepsilon$ in $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$. Da die Schranke Q nicht von ε abhängt, gilt $[u_\varepsilon]_{C^{0,1}} \le Q$ für alle $\varepsilon > 0$. Aufgrund des Maximumprinzips gilt $\sup\limits_\Omega |u_\varepsilon| = \sup\limits_{\partial\Omega} |U|$. Nach Arzelà-Ascoli finden wir eine Teilfolge, $(u_{\varepsilon_l})_l$, die für $\varepsilon_l \searrow 0$ gleichmäßig gegen ein $u \in \mathrm{Lip}_Q(\Omega, U)$ konvergiert. Nach Korollar 3.4 erhalten wir

$$\mathcal{F}(u, \Omega) \le \liminf_{l \to \infty} \mathcal{F}(u_{\varepsilon_l}, \Omega).$$

Wir wollen nun nachweisen, dass u ein Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$ ist. Wir zeigen dies für $\mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$ und benutzen dann Proposition 3.7. Sei also $w \in \mathrm{Lip}_k(\Omega, U)$. Dann folgt

$$\mathcal{F}(u_{\varepsilon_l}, \Omega) \le \mathcal{F}_{\varepsilon_l}(u_{\varepsilon_l}, \Omega) \le \mathcal{F}_{\varepsilon_l}(w, \Omega) \le \mathcal{F}(w, \Omega) + \varepsilon_l \cdot k^2 \cdot |\Omega|.$$

Die Kombination der letzten beiden Ungleichungen liefert die Behauptung

$$\mathcal{F}(u, \Omega) \le \mathcal{F}(w, \Omega).$$

□

3.3. **Die Distanzfunktion.** Um nicht mehr fordern zu müssen, dass Ω konvex ist, werden wir im nächsten Kapitel Barrieren konstruieren. Diese hängen von der Distanzfunktion zum Rand ab. Daher werden wir uns zunächst mit der Distanzfunktion beschäftigen.

Bemerkung 3.18 (Generalvoraussetzung)**.** In diesem Kapitel wollen wir stets annehmen, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und von der Klasse C^k mit $k \ge 2$ ist.

Definiere die (signierte) Distanzfunktion $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x) := \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) - \mathrm{dist}(x, \Omega),$$

so dass d in Ω positiv ist. In Ω gilt dann auch $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Definiere eine ε-Umgebung des Randes durch

$$(\partial\Omega)_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |d(x)| < \varepsilon\}.$$

Lemma 3.19. *Gelte Bemerkung 3.18. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass d in $(\partial\Omega)_\varepsilon$ von der Klasse C^k ist.*

Solch eine Umgebung $(\partial\Omega)_\varepsilon$ heißt Tubenumgebung von $\partial\Omega$.

Beweis. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann dürfen wir nach einer Rotation und Verschiebung des Koordinatensystems ohne Einschränkung annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und dass es $\omega\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ in C^k mit $D\omega(0) = 0$ und

$$\Omega \cap B_r(0) = \{(\hat{x}, x^n) : x^n > \omega(\hat{x})\} \cap B_r(0)$$

für ein $r > 0$ gibt. Sei $\rho > 0$, so dass für alle $\hat{x} \in B^{n-1}_\rho(0)$ auch $(\hat{x}, \omega(\hat{x})) \in B_r(0)$ gilt. Dann ist die äußere Normale an Ω für $\hat{x} \in B_\rho(0)$ durch

$$\nu(\hat{x}, \omega(\hat{x})) = \frac{(D\omega(\hat{x}), -1)}{\sqrt{1 + |D\omega(\hat{x})|^2}}$$

gegeben. Setze ν durch $\nu(\hat{x}, x^n) := \nu(\hat{x}, \omega(\hat{x}))$ nach $\mathbb{R}^n$ fort.

Definiere die Abbildung

$$\Phi\colon\ \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$\Phi(\hat{x}, t) = (\hat{x}, \omega(\hat{x})) - t\nu(\hat{x}, \omega(\hat{x})),$$

wobei wir die Formel für ν auch für $x \notin B_\rho(0)$ verwenden. Natürlich interessieren wir uns nur dort für die Abbildung Φ, wo $\operatorname{graph}\omega$ mit $\partial\Omega$ übereinstimmt. Wir können diese Abbildung auch auf ganz $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ durch $\Psi(x, t) := x - t\nu(x)$ definieren. Wir haben sie oben lediglich mit Hilfe von ω lokal in einer Karte dargestellt.

Wir behaupten, dass Φ nahe $(0, 0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es gilt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Phi(\hat{x}, t) = (e_i, \omega_i) - t\nu_i - t\nu_n\omega_i,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi(\hat{x},t)\bigg|_{(\hat{x},t)=0} &= (e_i,0),\\
\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\hat{x},t)\bigg|_{(\hat{x},t)=0} &= -\,\nu(0,0) = e_n,
\end{aligned}$$

also

$$D\Phi(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist Φ und daher auch Ψ nach dem Satz über implizite Funktionen ein lokaler Diffeomorphismus. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte, deren Umgebungen, in denen Ψ (bzw. Φ) ein Diffeomorphismus ist, nach Projektion auf die nicht-t-Komponenten bereits $\partial\Omega$ überdecken. Somit ist Ψ auf $\partial\Omega\times(-\delta,\delta)$ für ein $\delta>0$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir behaupten, dass (ggf. nach Verkleinerung von $\delta>0$) Ψ sogar ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Wäre dem nicht so, so wäre die Injektivität verletzt, es gäbe also zu jedem $k\in\mathbb{N}$ auch $(x_k,t_k)\neq(y_k,\tau_k)\in\partial\Omega\times\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ mit $\Psi(x_k,t_k)=\Psi(y_k,\tau_k)$. Nach Übergang zu einer nicht umbenannten Teilfolge dürfen wir $x_k\to x\in\partial\Omega$ annehmen. Wegen $|x_k-\Psi(x_k,t_k)|<\frac{1}{k}$ und $|y_k-\Psi(y_k,t_k)|<\frac{1}{k}$ folgt auch $y_k\to x$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Ψ bzw. Φ in einer geeigneten Umgebung von $(x,0)$ für einen beliebigen Punkte $x\in\partial\Omega$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Nehme also ab jetzt an, dass $\Psi\colon\partial\Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Wir behaupten, dass für $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

$$\{x\in\mathbb{R}^n\colon d(x)=t\}=\Psi(\partial\Omega,t) \tag{3.1}$$

gilt. Für $t=0$ ist dies offensichtlich. Sei also $x\in\Psi(\partial\Omega,t)$ für ein t mit $0<|t|<\varepsilon$. Da $|\nu|=1$ ist, folgt $|d(x)|\le|t|$. Wäre $|d(x)|<|t|$, so gäbe es aufgrund der Kompaktheit ein $y\in\partial\Omega$ mit $|x-y|=|d(x)|<|t|$. Wir behaupten, dass $\frac{x-y}{|x-y|}=\pm\nu(y)$ gilt. Sei $\alpha\colon(-\delta,\delta)\to\partial\Omega$ eine C^1-Kurve mit $\alpha(0)=y$. Dann ist $|x-\alpha(\tau)|^2$ nach Definition von d für $\tau=0$ minimal. Es gilt also

$$0=2\langle x-\alpha(0),-\alpha'(0)\rangle=-2\langle x-y,\alpha'\rangle.$$

Da also $x-y$ zu einem beliebigen Tangentialvektor α' in y senkrecht steht folgt die Behauptung. Somit ist aber für ein geeignetes Vorzeichen

$$\Psi(y,\pm|x-y|)=x\in\Psi(\partial\Omega,t).$$

Dies ist jedoch nicht möglich, da $|x-y|<|t|$ gilt und da Ψ auf $\partial\Omega\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ ein Diffeomorphismus ist. Somit folgt „$\supseteq$“ in (3.1).

Die umgekehrte Inklusion funktioniert analog. Für $x\in\mathbb{R}^n$ mit $|d(x)|<\varepsilon$ und $d(x)\neq0$ finden wir wie oben einen nächsten Punkt $y\in\partial\Omega$ mit Normalenvektor $\pm\frac{x-y}{|x-y|}$. Dann gilt $\Psi(y,d(x))=x$, da das Vorzeichen vor t in der Definition von Ψ geeignet gewählt ist bzw. da nach Definition der äußeren Normalen $x+t\nu(x)\notin\Omega$ für kleine $t>0$ gilt. Es folgt (3.1).

Damit ist $d(x)=\pi_n\Psi^{-1}(x)$, wobei π_n die Projektion auf die n-te bzw. t-Komponente bezeichnet.

Ist $\partial\Omega\in C^k$, so ist $\nu\in C^{k-1}$, $\Psi\in C^{k-1}$ und daher auch $d\in C^{k-1}$.

Da d die Abstandsfunktion zu einer Menge ist, folgt $|\nabla d|\le1$. Nun gilt $d(x-t\nu)=\pi_n\Psi^{-1}(x-t\nu)=\pi_n(x,t)=t$. Da also bereits $\frac{d}{dt}d(x-t\nu)=1=\nabla d(x-t\nu)\langle-\nu\rangle$ gilt, verschwindet die zu ν orthogonale Komponente von ∇d und es gilt $\nabla d(x-t\nu)=-\nu(x)$. Wegen $\nu\in C^{k-1}$ folgt also auch $d\in C^k$. $\square$

Bemerkung 3.20. Im Beweis des Lemmas haben wir noch folgendes gezeigt:

(i) $\Psi\colon \partial\Omega \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $(x,t) \mapsto x - t\nu(x)$ ist ein C^{k-1} Diffeomorphismus auf sein Bild, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.
(ii) In Ω_ε gilt $|\nabla d| = 1$.
(iii) $\nabla d(\Psi(x,t)) = -\nu(x)$.
(iv) Zu $y \in (\partial\Omega)_\varepsilon$ gibt es stets einen eindeutig bestimmten Punkt $x = \pi(y) \in \partial\Omega$, der $|\pi(y) - y|$ minimiert. Es gilt also $d(y) = |\pi(y) - y|$ für $y \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$.
(v) Daraus folgt auch $\overline{B_{d(y)}(y)} \cap \partial\Omega = \{\pi(y)\}$ für $x \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$.
(vi) Es gilt $\pi(\Psi(x,t)) = x$ für $x \in \partial\Omega$ und $|t| < \varepsilon$.
(vii) Es gilt $d(\Psi(x,t)) = t$ für $x \in \partial\Omega$ und $|t| < \varepsilon$.

Um die zweiten Ableitungen der Distanzfunktion mit der Geometrie des Randes in Verbindung zu bringen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Lemma 3.21. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ auf $\partial\Omega$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $\xi \in T_{x_0}\partial\Omega$, d. h. sei ξ im Punkte x_0 ein Tangentialvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\langle \nabla(f-g)(x_0), \xi\rangle \equiv D(f-g)(x_0)\langle\xi\rangle = 0.$$

Beweis. Nach einer Rotation und Translation des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und dass lokal in der Nähe des Ursprungs

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n)\colon x^n > \omega(\hat{x})\}$$

für eine C^1-Funktion $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $D\omega(0) = 0$ gilt. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass $\xi = e_1$ gilt. Gelte zusätzlich ohne Einschränkung $g \equiv 0$, denn sonst können wir das Lemma für $f - g$ und 0 statt f und g zeigen.

Definiere $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch $\alpha(t) = (te_1, \omega(te_1))$. Dann ist $\alpha'(0) = e_1 = \xi$ und es gilt $f \circ \alpha \equiv 0$, falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass α in einer Umgebung des Ursprungs bleibt, in der $\partial\Omega$ als $\operatorname{graph}\omega$ dargestellt ist. Nach Kettenregel erhalten wir daraus

$$Df(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Für $t = 0$ erhalten wir die Behauptung. □

Definition 3.22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2.

(i) Sei $0 \in \partial\Omega$ und gelte in der Nähe des Ursprungs

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n)\colon x^n > \omega(\hat{x})\}$$

für eine C^2-Funktion ω mit $D\omega(0) = 0$. Dann definieren wir die $n-1$ Hauptkrümmungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ von $\partial\Omega$ in 0 als die Eigenwerte von $D^2\omega(0)$.
(ii) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann definieren wir die Hauptkrümmungen in x_0 als die Eigenwerte, die wir erhalten, wenn wir Ω und x_0 mit Hilfe einer Translation und einer orthogonalen Transformation in die obige Situation überführen.
(iii) Wir definieren die mittlere Krümmung H von $\partial\Omega$ als die Summe der Hauptkrümmungen.
(iv) Wir nennen ein Gebiet strikt konvex, wenn sämtliche Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ positiv sind.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Definition der Hauptkrümmungen des Randes nicht von der nötigen Translation und Rotation abhängt, da die Eigenwerte von $D^2 d$ unter diesen Operationen invariant sind.

Lemma 3.23. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^2. Sei $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die signierte Distanzfunktion zu $\partial\Omega$. Dann sind die Eigenwerte von $-D^2 d$ in einem Randpunkt durch die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ und 0 gegeben.*

Beweis. Es gilt $|Dd| \le 1$. Im Beweis von Lemma 3.19 haben wir bereits gesehen, dass in Ω_ε sogar $|Dd| = 1$ gilt. Wir differenzieren das Quadrat dieser Gleichung und erhalten $0 = D^2 d\langle Dd\rangle \equiv \sum\limits_{j=1}^n d_{ij} d_j$. Damit ist der Normalenvektor $\nu = -\nabla d$ ein Eigenvektor von $D^2 d$ zum Eigenwert 0.

Für den Vergleich der Eigenwerte mit den anderen Hauptkrümmungen wählen wir ein Koordinatensystem wie in der Definition der Hauptkrümmungen, Definition 3.22. Zusätzlich dürfen wir nach einer weiteren Rotation annehmen, dass $D^2\omega(0)$ diagonal ist. Um die zweiten Ableitungen von d zu bestimmen, benutzen wir, dass $\nabla d = -\nu$ auf $\partial\Omega$ gilt. Es ist $-\nu = \frac{(-D\omega,1)}{\sqrt{1+|D\omega|^2}}$ auf $\partial\Omega$. Wenden wir Lemma 3.21 komponentenweise an, so sehen wir, dass $D^2 d\langle\xi\rangle = -D\tilde\nu\langle\xi\rangle$ für beliebige Tangentialvektoren $\xi \in T_0\partial\Omega$ gilt, wobei wir für $\tilde\nu$ eine beliebige C^1-Fortsetzung von ν wählen dürfen. Setze

$$-\tilde\nu(\hat x, x^n) := \frac{(-D\omega(\hat x), 1)}{\sqrt{1+|D\omega|^2}}.$$

Wir erhalten

$$D(-\tilde\nu)(0) = \begin{pmatrix} (-\omega_{ij}) & (0) \\ (0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt.

Wir bemerken, dass sich die 0-Einträge von $D(-\tilde\nu)$ bei einer anderen Fortsetzung von ν ändern können. □

Lemma 3.24. *Gelte Bemerkung 3.18. Sei $0 \in \partial\Omega$. Sei $D^2d(0)$ in einem Koordinatensystem wie im Beweis von Lemma 3.23 diagonal,*

$$-D^2 d(0) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(0), \ldots, \lambda_{n-1}(0), 0\}.$$

Sei $(\partial\Omega)_\varepsilon$ eine Tubenumgebung des Randes. Dann gilt für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$D^2 d(te_n) = \operatorname{diag}\left\{\frac{-\lambda_1(0)}{1-t\lambda_1(0)}, \ldots, \frac{-\lambda_n(0)}{1-t\lambda_n(0)}, 0\right\}.$$

Allgemein gilt somit für $y \in \Omega_\varepsilon$, dass $D^2d(y)$ die Eigenwerte

$$\frac{-\lambda_1(\pi(y))}{1-d(y)\lambda_1(\pi(y))}, \ldots, \frac{-\lambda_n(\pi(y))}{1-d(y)\lambda_n(\pi(y))}, 0$$

besitzt, wobei $\pi(y)$ die Projektion auf den nächsten Punkt in $\partial\Omega$ ist und $\lambda_i(\pi(y))$, $1 \le i \le n-1$, die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega$ in $\pi(y)$ sind.

Das folgende Argument haben wir von G. Bellettini gelernt.

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma 3.19, siehe Bemerkung 3.20, folgt, dass π in Ω_ε wohldefiniert ist.

Sei zunächst $k \ge 3$. Aus $|\nabla d|^2 = 1$ erhalten wir

$$0 = \sum_{l=1}^n d_{il} d_l \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{l=1}^n d_{ilj} d_l + \sum_{l=1}^n d_{il} d_{lj}.$$

Setze $D(t) := (d_{ij}(x - t\nu(x)))_{1\le i,j\le n}$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt

$$\dot D(t) = \left(\sum_{l=1}^n - \underbrace{d_{ijl}(x - t\nu(x))}_{=d_{ilj}(x-t\nu(x))} \quad \underbrace{\nu_l(x)}_{\substack{=-d_l(x) \\ =-d_l(x-t\nu(x))}} \right)_{i,j}$$

$$= -\left(\sum_{l=1}^{n} d_{il} d_{lj}(x - t\nu(x))\right)_{i,j} = -D^2(t).$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{f}(t) = -f^2(t)$ mit $f(0) = a$ wird durch $f(t) = \frac{a}{1+ta}$ gelöst. Beachte, dass $d(x - t\nu(x)) = t$ gilt. Setze $y = x - t\nu(x)$ und spezialisiere auf den Fall $x = 0$. Somit erfüllen die Einträge der Diagonalmatrix die Differentialgleichung mit dem gewünschten Anfangswert für $t = 0$. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Lipschitz stetiger rechter Seite folgt die erste Behauptung für $k \geq 3$.

Durch Approximation erhält man die Behauptung auch für $k \geq 2$. Einige Details dazu sind nachfolgend aufgeführt.

Da die Eigenwerte von $D^2 d$ sich unter einer Rotation oder Translation des Koordinatensystems nicht ändern, folgt die allgemeine Behauptung aus der Behauptung im diagonalen Fall. □

Das folgende Lemma zeigt, dass die Menge, in der eine approximierende Funktion Ψ_ε von Ψ ein Diffeomorphismus ist, sich im Grenzwert nicht verkleinert.

Lemma 3.25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf* $\operatorname{im}\varphi$. *Sei $K \Subset \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass jede C^1-Abbildung $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\varphi - \psi\|_{C^1(\Omega)} < \varepsilon$ einen Diffeomorphismus $\psi\colon K \to \psi(K)$ liefert.*

Beweis. Sei K ohne Einschränkung kompakt. Für $\varepsilon > 0$ klein genug folgt $\det d\psi \neq 0$ in K. Somit ist ψ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir müssen also noch nachweisen, dass ψ auch injektiv ist. Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es ein $\delta > 0$ (Lebsguezahl), so dass für jedes $x \in K$ die Abbildung $\psi|_{B_\delta(x)}$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Seien also $x_0 \neq y_0 \in K$ mit $\psi(x_0) = \psi(x_0)$. Dann gilt $|x_0 - y_0| \geq \delta$. Die Menge

$$(\varphi \times \varphi)\{(x, y) \in K \times K \colon |x - y| \geq \delta\}$$

ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst wieder kompakt. Dabei haben wir $(\varphi \times \varphi)(x, y) = (\varphi(x), \varphi(x))$ verwendet. Da φ injektiv ist, hat diese Menge einen positiven Abstand $\zeta > 0$ zur Diagonalen $\{(x, x) \colon x \in \mathbb{R}^n\}$. Somit folgt $|\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| \geq \zeta > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= |\psi(x_0) - \psi(y_0)| \\
&= |(\psi(x_0) - \varphi(x_0)) + (\varphi(x_0) - \varphi(y_0)) + (\varphi(y_0) - \psi(y_0))| \\
&\geq |\varphi(x_0) - \varphi(y_0)| - |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| - |\varphi(y_0) - \psi(y_0)| \\
&\geq \zeta - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, so erhalten wir einen Widerspruch. □

Bemerkung 3.26. Approximieren wir den Rand in C^2, so erhalten wir für die zugehörigen Diffeomorphismen $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ in C^1. Sei x aus $\partial\Omega$ beliebig und $y = x - t\nu(x)$ für ein kleines t. Dann ist $x = \pi_1 \Psi^{-1}(y)$ und wir erhalten

$$\nabla d(y) = \nabla d(x - t\nu(x)) = \nu(x) = \nu\left(\pi_1 \Psi^{-1}(y)\right).$$

Die Rechnung

$$\begin{aligned}
&|\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)| \\
\leq &|\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi_\varepsilon(x)| + |\varphi \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)| \\
\leq &\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{C^0} + |\varphi \circ \psi_\varepsilon(x) - \varphi \circ \psi(x)|
\end{aligned}$$

zeigt, dass $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ und $\psi_\varepsilon \to \psi$ in C^0 auch $\varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon \to \varphi \circ \psi$ impliziert. Auf Kompakta ist das Stetigkeitsmodul von φ (die Wahl von δ in Abhängigkeit von ε in der üblichen Stetigkeitsdefinition) gleichmäßig beschränkt. Daher konvergiert der zweite Term auch lokal gleichmäßig in x gegen Null. Analog zeigt man, dass auch C^1-Konvergenz unter Verkettungen erhalten ist, wobei man noch die Stetigkeit der Multiplikation benötigt.

Wegen $\Psi_\varepsilon \to \Psi$ in C^1 folgt $\pi_2 \circ \Psi_\varepsilon^{-1} = d_\varepsilon \to d$ in C^1. Wir gehen nun analog zum Beweis von Lemma 3.19 vor. Aus

$$\nabla d_\varepsilon = \nu_\varepsilon \circ \pi_1 \circ \Psi_\varepsilon^{-1} \to \nu \circ \pi_1 \circ \Psi^{-1} = \nabla d \quad \text{in } C^1$$

erhalten wir lokal auch $d_\varepsilon \to d$ in C^2.

Korollar 3.27. *Gelte Bemerkung 3.18. Dann gilt für y in einer Tubenumgebung $(\partial\Omega)_\varepsilon \cap \Omega$*

$$-\Delta d(y) \geq H(\pi(y)),$$

wobei $\pi\colon (\partial\Omega)_\varepsilon \to \partial\Omega$ die Projektion auf den nächsten Randpunkt ist.

Beweis. Die Aussage gilt für $y \in \partial\Omega$ mit Gleichheit und folgt allgemein aus

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_i(\pi(y))}{1 - t\lambda_i(\pi(y))}\right) \geq 0. \qquad \square$$

Wir werden die Distanzfunktion insbesondere in Ω betrachten.

3.4. **Barrieren.** Wir benutzen nun Barrieren um $\mathcal{F}$ auf nichtkonvexen Gebieten Ω minimieren zu können.

Definition 3.28. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und d die Distanzfunktion zu $\partial\Omega$. Sei $t > 0$. Definiere

$$\Sigma_t := \{x \in \Omega \colon d(x) < t\},$$

und

$$\Gamma_t := \{x \in \Omega \colon d(x) = t\}.$$

Definition 3.29 (Barrieren)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $U\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig und ohne Einschränkung auf Ω fortgesetzt. Sei $t > 0$.

(a) Eine Lipschitz stetige Funktion $v^+\colon \overline{\Sigma_t} \to \mathbb{R}$ heißt obere Barriere (für ein Funktional $\mathcal{F}$), falls
   (i) $v^+ = U$ auf $\partial\Omega$ gilt,
   (ii) v^+ in Σ_t ein Super-Minimum ist und
   (iii) $v^+ \geq \sup\limits_\Omega U$ auf Γ_t gilt.

(b) Eine Lipschitz stetige Funktion $v^-\colon \overline{\Sigma_t} \to \mathbb{R}$ heißt untere Barriere (für ein Funktional $\mathcal{F}$), falls
   (i) $v^- = U$ auf $\partial\Omega$ gilt,
   (ii) v^- in Σ_t ein Sub-Minimum ist und
   (iii) $v^- \leq \inf\limits_\Omega U$ auf Γ_t gilt.

Bemerkung 3.30. Häufig genügt es, obere Barrieren zu finden. Ist nämlich v^+ eine obere Barriere für $-U$, so ist $-v^+$ häufig eine untere Barriere für U.

In Theorem 3.17 konnten wir die Existenz eines Minimierers zeigen, falls BSB erfüllt ist. Ein entsprechendes Resultat bekommen wir, falls Barrieren existieren.

Theorem 3.31. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Definiere $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$. Sei $U\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig. Nehme an, dass es eine obere Barriere v^+ und eine untere Barriere v^- in Σ_t gibt. Dann besitzt $\mathcal{F}$ ein Minimum in* $\mathrm{Lip}(\Omega, U)$.

Die strikte Konvexität von F ist hier wie in Lemma 3.9 als strikte Ungleichung in der definierenden Gleichung für Konvexität zu verstehen.

Beweis. Definiere Funktionen w^+, $w^- : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ durch

$$w^+(x) := \begin{cases} \min\left\{v^+(x), \sup\limits_{\partial\Omega} U\right\} & \text{für } x \in \overline{\Sigma}_t, \\ \sup\limits_{\partial\Omega} U & \text{für } x \in \Omega \setminus \overline{\Sigma}_t \end{cases}$$

sowie

$$w^-(x) := \begin{cases} \max\left\{v^-(x), \inf\limits_{\partial\Omega} U\right\} & \text{für } x \in \overline{\Sigma}_t, \\ \inf\limits_{\partial\Omega} U & \text{für } x \in \Omega \setminus \overline{\Sigma}_t. \end{cases}$$

Die Funktionen $w^\pm$ sind in $\overline{\Omega}$ Lipschitzstetig. Sei Q eine obere Schranke für beide Lipschitzkonstanten.

Sei $k > Q$. Dann ist $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U) \neq \emptyset$. Somit besitzt $\mathcal{F}$ nach Proposition 3.5 einen Minimierer u in $\operatorname{Lip}_k(\Omega, U)$. Nach Lemma 3.10 gilt für $x \in \Omega$

$$\inf_{\partial\Omega} U \le u(x) \le \sup_{\partial\Omega} U.$$

Damit ist $v^- \le u \le v^+$ auf $\partial\Sigma_t$. Nach Lemma 3.9 folgt

$$w^- \le u \le w^+ \quad \text{in } \Omega.$$

Auf dem Rand gilt $w^- = u = w^+$. Daher ist $[u]_{C^{0,1}} \le Q$. Die Behauptung folgt nun mit Proposition 3.7. □

Bemerkung 3.32.

(i) Aus dem Beweis folgt, dass w^+ ein Super-Minimum und w^- ein Sub-Minimum ist. Somit ist es eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimierers in $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$ eines Funktionals $\mathcal{F}$ zu einer strikt konvexen Funktion F, dass es ein Super-Minimum und ein Sub-Minimum gibt, die jeweils die Randwerte annehmen.

Die noch nicht gezeigte Richtung folgt, da ein Minimierer auch ein Super- bzw. Sub-Minimierer ist.

(ii) Theorem 3.31 verallgemeinert Theorem 3.17, da

$$\psi^+(x) := \inf_{x_0 \in \partial\Omega} w^+_{x_0}(x) \quad \text{und} \quad \psi^-(x) := \sup_{x_0 \in \partial\Omega} w^-_{x_0}(x)$$

Super- bzw. Sub-Minima sind. Beachte dazu, dass $\Gamma_t = \emptyset$ für große $t > 0$ gilt.

Lemma 3.33. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex. Definiere $\mathcal{F}(u, \Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$. Sei $\Sigma \subset \Omega$ offen. Sei $v \in C^2\left(\overline{\Sigma}\right)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) v ist ein Super-Minimum in Σ.

(ii) Es gilt

$$\mathcal{L}(v) := F_{p_i p_j}(Dv) \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} \le 0 \quad \text{in } \Sigma.$$

(Ein v mit $\mathcal{L}(v) \le 0$ heißt auch eine Super-Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{L}(w) = 0$.)

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei v ein Super-Minimum. Sei $0 \le \eta \in C^\infty_c(\Sigma)$. Dann besitzt

$$g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},$$
$$g(t) := \mathcal{F}(v + t\eta, \Sigma)$$

ein Minimum für $t = 0$. Somit gilt $g'(0) \geq 0$. Wir differenzieren unter dem Integral und erhalten nach partieller Integration

$$0 \leq g'(0) = \int\limits_{\Sigma} F_{p_j}(Dv)\eta_j = -\int\limits_{\Sigma} F_{p_ip_j}(Dv)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i x^j}\eta.$$

Da dies für beliebige nichtnegative Testfunktionen gilt, folgt die Behauptung.

„$\Longleftarrow$“: Analog zum Beweis der ersten Implikation folgt $g'(0) \geq 0$. Da $t \mapsto g(t)$ konvex ist, folgt damit $g(1) \geq g(0)$. Somit erfüllt v die Ungleichung für ein Super-Minimum, wenn die hinzuaddierte Funktion η in C_c^∞ ist.

Ist $\partial\Sigma$ Lipschitz stetig, so können wir $u_\varepsilon \to u$ in $W^{1,2}$ mit $0 \leq u_\varepsilon - v \in C_c^\infty(\Sigma)$ approximieren. Daraus folgt $\mathcal{F}(u_\varepsilon) \geq \mathcal{F}(v)$. Da $Du_\varepsilon \to Du$ ohne Einschränkung fast überall punktweise gilt, folgt ebenso fast überall punktweise $F(Du_\varepsilon) \to F(Du)$. Da die Ableitungen beschränkt sind, konvergiert $\mathcal{F}(v) \leq \mathcal{F}(u_\varepsilon) \to \mathcal{F}(u)$.

Ist schließlich Σ nicht regulär, so stellen wir zunächst $u = v$ in einer Umgebung von $\partial\Sigma$ vermöge $\max\{u - \varepsilon, v\} \to u$ her. Für $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir $W^{1,2}$-Konvergenz □

Bemerkung 3.34. Somit genügt es, v mit $\mathcal{L}(v) \leq 0$ und den Randbedingungen für eine obere Barriere auf $\partial\Sigma_t$ für ein $t > 0$ zu finden.

Notation 3.35. Setze $A^{ij}(p) := F_{p_ip_j}(p)$. Da F konvex ist, ist A^{ij} positiv semidefinit. Wir wollen nun annehmen, dass F in dem Sinne strikt konvex ist, dass Funktionen $\lambda, \Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(p) > 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und

$$\lambda(p)|\xi|^2 \leq A^{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(p)|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ existieren.

Wir definieren die Bernsteinfunktion

$$\mathcal{E}(p) := A^{ij}(p)p_ip_j$$

und erhalten insbesondere $\lambda(p)|p|^2 \leq \mathcal{E}(p) \leq \Lambda(p)|p|^2$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Wir wollen nun mit Hilfe der Distanzfunktion Barrieren konstruieren.

Sei $U \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Wir suchen Barrieren mit einem Ansatz der Form

$$v(x) = U(x) + \psi(d(x))$$

für eine C^2-Funktion ψ mit $\psi(0) = 0$, $\psi'(t) > 0$ und $\psi''(t) < 0$ für alle $0 < t$ für die ψ definiert ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
v_i &= U_i + \psi' d_i,\\
v_{ij} &= U_{ij} + \psi' d_{ij} + \psi'' d_i d_j,\\
\mathcal{L}(v) &= A^{ij}(Dv)v_{ij} = A^{ij}U_{ij} + \psi' A^{ij} d_{ij} + \frac{\psi''}{(\psi')^2} A^{ij}(\psi')^2 d_i d_j\\
&= A^{ij}U_{ij} + \psi' A^{ij} d_{ij} + \frac{\psi''}{(\psi')^2} A^{ij}(v_i - U_i)(v_j - U_j)\\
&= A^{ij}U_{ij} + \psi' A^{ij} d_{ij} + \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\big(- \underbrace{A^{ij}v_iv_j}_{=\mathcal{E}} + 2A^{ij}v_iU_j - A^{ij}U_iU_j\big).
\end{aligned}$$

Hier haben wir den Faktor -1 wegen $\psi'' < 0$ nach vorne gezogen. Da $U \in C^2$ ist, erhalten wir nach Definition der Elliptizitätskonstanten Λ die Abschätzungen $A^{ij}U_{ij} \leq c\Lambda(Dv)$ und $A^{ij}U_iU_j \leq c\Lambda(Dv)$. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\left|2A^{ij}v_iU_j\right| \leq 2\sqrt{A^{ij}v_iv_j}\sqrt{A^{ij}U_iU_j} \leq \frac{1}{2}A^{ij}v_iv_j + 2A^{ij}U_iU_j,$$

und somit wegen $\psi'' < 0$

$$\frac{-\psi''}{(\psi')^2}2A^{ij}v_iU_j \le \frac{-\psi''}{(\psi')^2}2\left|A^{ij}v_iU_j\right| \le \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\left(\frac{1}{2}A^{ij}v_iv_j + 2A^{ij}U_iU_j\right).$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(v) &\le c\Lambda + \psi' A^{ij}d_{ij} + \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\left(-\frac{1}{2}A^{ij}v_iv_j + A^{ij}U_iU_j\right)\\ &\le c\Lambda + \psi' A^{ij}d_{ij} + \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{E} + c\Lambda\right).\end{aligned}$$

Für die weiteren Überlegungen unterscheiden wir zwei Fälle:

(i) Ω ist konvex. Wir benötigen in diesem Fall eine Zusatzannahme an Λ und $\mathcal{E}$ und damit an F.
(ii) Sonst werden wir eine restriktivere Zusatzannahme machen.

(i) **Sei Ω konvex:** Dann ist (d_{ij}) in einer Tubenumgebung des Randes negativ semidefinit. Also gilt $A^{ij}d_{ij} \le 0$. Somit ist

$$\mathcal{L}(v) \le c\Lambda + \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{E} + c\Lambda\right).$$

Wir nehmen an, dass

$$\lim_{|p|\to\infty}\frac{\Lambda(p)}{\mathcal{E}(p)} = 0 \tag{3.2}$$

gilt. Es gilt $|Dv| \ge \psi' - \sup\limits_{\Omega}|DU|$, da wir $\psi' > 0$ angenommen haben. Nach Annahme (3.2) erhalten wir $c\Lambda < \frac{1}{4}\mathcal{E}$ falls $\psi' \ge L$ für ein genügend großes $L \ge 1$ ist, wobei wir Λ und $\mathcal{E}$ an der Stelle Dv auswerten. Dies wenden wir nun doppelt in unserer Abschätzung für $\mathcal{L}(v)$ an und erhalten

$$\mathcal{L}(v) \le \frac{1}{4}\mathcal{E}\left\{\frac{\psi''}{(\psi')^2} + 1\right\}.$$

Seien σ, $t_0 > 0$ noch zu fixierende Konstanten. In Σ_{t_0} machen wir den Ansatz

$$\psi(d) = \log(1 + \sigma d)$$

für die obere Barriere. Dabei wollen wir annehmen, dass t_0 so klein ist, dass Σ_{t_0} in einer Tubenumgebung enthalten ist, in der d differenzierbar ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{\sigma}{1+\sigma d} \ge \frac{\sigma}{1+\sigma t_0} \overset{!}{\ge} L,\\ \psi'' &= -\frac{\sigma^2}{(1+\sigma d)^2} = -(\psi')^2.\end{aligned}$$

Gilt $\psi' \ge L$, so folgt $\mathcal{L}(v) \le 0$. Damit ist $v = U + \psi(d)$ in Σ_{t_0} eine Superlösung. Für den Nachweis, dass es sich auch um eine obere Barriere handelt, betrachten wir die Randwerte auf dem „inneren Rand" von Σ_{t_0}. Dort gilt

$$\psi(t_0) = \log(1 + \sigma t_0) \overset{!}{\ge} \sup_{\Omega} U - \inf_{\Omega} U.$$

Beide geforderten Ungleichungen können wir erfüllen, indem wir $t_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ fixieren und dann $\sigma \to \infty$ betrachten. Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}\log(1+\sigma t_0) &= \log\left(1+\sqrt{\sigma}\right) \to \infty,\\ \frac{\sigma}{1+\sigma t_0} &= \frac{\sigma}{1+\sqrt{\sigma}} \to \infty \qquad \text{für } \sigma \to \infty.\end{aligned}$$

Damit haben wir das folgende Resultat gezeigt:

Theorem 3.36. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, von der Klasse C^2 und konvex. Sei $F \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ konvex, so dass (3.2) erfüllt ist. Definiere $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$. Sei $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt $\mathcal{F}(\cdot,\Omega)$ ein Minimum in* $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.

(ii) **Nichtkonvexes Ω:** Wir starten hier ebenfalls bei der Abschätzung

$$\mathcal{L}(v) \le c\Lambda + \psi' A^{ij} d_{ij} + \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{E} + c\Lambda\right).$$

Benutzen wir $v_i = U_i + \psi' d_i$ und dass die Ableitungen von U beschränkt sind, so können wir damit ψ' nach oben mit Hilfe von $|Dv|$ abschätzen. Weiterhin benutzen wir die Beschränktheit der zweiten Ableitungen von d und erhalten zunächst

$$\psi' A^{ij} d_{ij} \le c(1 + |Dv|)\Lambda$$

und daraus

$$\mathcal{L}(v) \le c(1+|Dv|)\Lambda + \frac{-\psi''}{(\psi')^2}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{E} + c\Lambda\right).$$

Da wir nun nicht mehr nur konvexe Gebiete Ω zulassen, machen wir eine stärkere Annahme als (3.2), nämlich

$$\limsup_{|p|\to\infty} \frac{|p|\Lambda(p)}{\mathcal{E}(p)} < +\infty. \tag{3.3}$$

Wir wählen nun eine Testfunktion ψ mit sehr großem ψ'. Dann folgt $|Dv| \gg 1$ und somit ist $|p| \gg 1$ in der Wachstumsbedingung. Wir erhalten mit (3.3)

$$c\Lambda \le \frac{1}{4}\mathcal{E} \quad \text{sowie} \quad (1+|Dv|)\Lambda \le \frac{1}{4}c\mathcal{E}.$$

Damit folgt

$$\mathcal{L}(v) \le \frac{1}{4}\mathcal{E}\left\{\frac{\psi''}{(\psi')^2} + c\right\}.$$

Wir wählen nun

$$\psi(d) := \frac{1}{c}\log(1+\sigma d)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{1}{c}\frac{\sigma}{1+\sigma d},\\ \psi'' &= -\frac{1}{c}\frac{\sigma^2}{(1+\sigma d)^2} = -c\frac{1}{c^2}\frac{\sigma^2}{(1+\sigma d)^2} = -c(\psi')^2.\end{aligned}$$

Aus $\frac{\psi''}{(\psi')^2} = -c$ erhalten wir $\mathcal{L}(v) \le 0$.

Wiederum müssen wir durch die Wahl von σ und t_0 sicherstellen, dass ψ' groß genug ist und dass die Randwerte auf dem inneren Rand von Σ_{t_0} groß genug sind. Wir wählen dazu wieder $t_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ und erhalten für $\sigma \to \infty$

$$\begin{aligned}\psi' &\ge \frac{1}{c}\frac{\sigma}{1+\sigma t_0} = \frac{1}{c}\frac{\sigma}{1+\sqrt{\sigma}} \to \infty,\\ \psi(t_0) &= \frac{1}{c}\log(1+\sigma t_0) = \frac{1}{c}\log\left(1+\sqrt{\sigma}\right) \to \infty \quad \text{für } \sigma \to \infty.\end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes Resultat für nicht notwendigerweise konvexe Gebiete Ω gezeigt:

Theorem 3.37. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und von der Klasse C^2. Sei $F \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ konvex, so dass (3.3) erfüllt ist. Definiere $\mathcal{F}(u,\Omega) := \int\limits_\Omega F(Du)$. Sei $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt $\mathcal{F}(\cdot,\Omega)$ ein Minimum in* $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.

Beispiele 3.38.

(i) Sei F in dem Sinne gleichmäßig elliptisch, dass es ein $\nu > 0$ mit $\lambda(p) \ge \nu \cdot \Lambda(p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ gibt. Dann folgt
$$\frac{|p|\Lambda(p)}{\mathcal{E}(p)} \le \frac{|p|\frac{1}{\nu}\lambda(p)}{A^{ij}(p)p_ip_j} \le \frac{|p|\frac{1}{\nu}\lambda(p)}{|p|^2\lambda(p)} = \frac{1}{\nu|p|} \to 0 \quad \text{für } |p| \to \infty.$$
Dies sichert, dass die Wachstumsbedingung (3.3) erfüllt ist.

(ii) Sei $r > 1$ und $F(p) = |p|^r$. Dann erhalten wir
$$\begin{aligned} F_{p_i} &= r|p|^{r-1}\frac{p^i}{|p|}, \\ F_{p_ip_j} &= r(r-1)|p|^{r-2}\frac{p^i}{|p|}\frac{p^j}{|p|} + r|p|^{r-1}\frac{1}{|p|}\left(\delta^{ij} - \frac{p^ip^j}{|p|^2}\right). \end{aligned}$$
Ist $r > 1$, so erhalten wir die gleichmäßige Elliptizität im oben angegebenen Sinne. Für $r = 1$ wäre $\lambda = 0$ und für $r < 1$ wäre sogar $\lambda < 0$.

(iii) Sei wiederum $r > 1$. Definiere
$$F(p) := \left(1 + |p|^2\right)^{r/2}.$$
Dann folgt
$$\begin{aligned} F_{p_i} &= \frac{r}{2}\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-1} \cdot 2p^i = r\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-1} \cdot p^i, \\ F_{p_ip_j} &= r\left(\tfrac{r}{2}-1\right)\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-2} \cdot 2p^ip^j + r\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-1}\delta^{ij} \\ &= r(r-2)\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-2} p^ip^j + r\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-1}\delta^{ij}. \end{aligned}$$
Die Eigenwerte von $F_{p_ip_j}$ bezüglich δ^{ij} sind bis auf einen überall auftretenden Faktor $r\left(1+|p|^2\right)^{\frac{r}{2}-2}$ durch $(r-2)|p|^2 + \left(1+|p|^2\right)$ und $(n-1)$-mal $1+|p|^2$ gegeben.

Für $r > 1$ erhalten wir im obigen Sinne gleichmäßige Elliptizität. Für $r = 1$ gilt bis auf diese Konstanten $\Lambda = 1 + |p|^2$ und $\mathcal{E} = |p|^2$. Somit ist weder (3.3) noch (3.2) erfüllt. Für $r < 1$ ist ein Eigenwert für große Werte von $|p|$ negativ.

3.5. **Das Oberflächenfunktional und Minimalflächen.** In diesem Kapitel betrachten wir ausschließlich das Oberflächenfunktional
$$\mathcal{A}(u,\Omega) := \int\limits_\Omega F(Du) = \int\limits_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}$$
mit $F(p) = \sqrt{1+|p|^2}$. Wie wir bereits in den Beispielen 3.38 gesehen haben, ist keine der Wachstumsbedingungen (3.3) oder (3.2) erfüllt.

Wir machen wieder den speziellen Ansatz $v(x) = U(x) + \psi(d(x))$ mit $\psi(0) = 0$, $\psi'(t) > 0$ und $\psi''(t) < 0$ für alle $t \ge 0$. Es folgt
$$\begin{aligned} v_i &= U_i + \psi' d_i, \\ v_{ij} &= U_{ij} + \psi' d_{ij} + \psi'' d_i d_j, \\ \mathcal{L}(v) &= A^{ij} v_{ij} \equiv A^{ij}(Dv) v_{ij} \\ &= A^{ij}(U_{ij} + \psi' d_{ij}) + \psi'' A^{ij} d_i d_j. \end{aligned}$$
Wir nehmen nun an, dass es ein $c > 0$ mit
$$A^{ij} d_{ij} \le c \cdot (1 + |Dv|) \cdot \lambda \tag{3.4}$$

gibt. Es gilt $A^{ij}d_id_j \ge \lambda|Dd|^2 = \lambda$. Somit erhalten wir

$$\mathcal{L}(v) \le c \cdot \Lambda + \lambda \cdot \{c \cdot \psi' \cdot (1 + |Dv|) + \psi''\}.$$

Wir benutzen $|Dv| \le c + \psi'$ und erhalten daraus

$$\mathcal{L}(v) \le \lambda \cdot \left\{\psi'' + c \cdot \psi' \cdot (1 + \psi') + c\frac{\Lambda}{\lambda}\right\}.$$

Aus den Rechnungen in den Beispielen 3.38 erhalten wir im Fall $r = 1$ bis auf irrelevante Vorfaktoren $\lambda = 1$ und $\Lambda = 1 + |p|^2$. Daher ist

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = 1 + |Dv|^2 \le 1 + (c + \psi')^2 \le c + \psi'^2 \le c\psi'^2,$$

wobei wir $\psi' \ge 1$ angenommen haben. Es folgt

$$\mathcal{L}(v) \le \lambda \cdot \left\{\psi'' + c\psi'^2\right\}.$$

Wie bereits im letzten Abschnitt können wir mit $\psi(d) = \frac{1}{c}\log(1+\sigma d)$, $t_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ und $\sigma \to \infty$ die Differentialungleichung $\mathcal{L}(v) \le 0$ und die gewünschte Randbedingung auf dem inneren Rand von Σ_{t_0} bekommen.

Wir wollen nun noch die Bedingung (3.4) geometrisch interpretieren. Es gilt aufgrund der Rechnung in den Beispielen 3.38

$$\begin{aligned} A^{ij}d_{ij} &= F_{p_ip_j}d_{ij} = \left(1 + |Dv|^2\right)^{-3/2}\left(\left(1 + |Dv|^2\right)\delta^{ij} - v^iv^j\right)d_{ij} \\ &= \lambda(Dv) \cdot \left\{\left(1 + |Dv|^2\right)\Delta d - v^iv^jd_{ij}\right\} \\ &= \lambda \cdot \left\{\left(1 + |Dv|^2\right)\Delta d - \left(U^i + \psi'd^i\right)\left(U^j + \psi'd^j\right)d_{ij}\right\} \\ &= \lambda \cdot \left\{\left(1 + |Dv|^2\right)\Delta d - U^iU^jd_{ij}\right\}, \quad \text{da } d_{ij}d^j = 0, \\ &\le \lambda \cdot \left\{\left(1 + |Dv|^2\right)\Delta d + c\right\} \\ &\overset{!}{\le} c(1 + |Dv|) \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt sicherlich, wenn $\Delta d \le 0$ in der Nähe des Randes gilt. Nach Korollar 3.27 ist dies erfüllt, falls die mittlere Krümmung H des Randes überall (auf $\partial\Omega$) $H \ge 0$ erfüllt. Dies ist für $n \ge 3$ eine schwächere Bedingung als die Konvexität des Randes.

Damit folgt

Theorem 3.39. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, von der Klasse C^2 und gelte $H(\partial\Omega) \ge 0$. Sei $U \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das Funktional*

$$\mathcal{A}(u, \Omega) := \int\limits_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}$$

ein eindeutig bestimmtes Minimum in $\operatorname{Lip}(\Omega, U)$.

Die Eindeutigkeit folgt aus der strikten Konvexität von $p \mapsto \sqrt{1 + |p|^2}$.

4. Unterhalbstetigkeit in Sobolevräumen

Wir folgen [5].

4.1. Unterhalbstetigkeit. Wir möchten zeigen, dass Funktionale der Form

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u, \Omega) = \int\limits_\Omega F(x, u, Du)\,dx$$

in $W^{1,p}$ unterhalbstetig sind.

Definition 4.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $\mathcal{F}\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt unterhalbstetig, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge
$$\mathcal{F}_t = \{x \in X \colon \mathcal{F}(x) > t\}$$
offen ist.

Bemerkung 4.2.

(i) Die Forderung in der Definition der Unterhalbstetigkeit ist äquivalent zur Abgeschlossenheit der Mengen $\mathcal{G}_t = \{x \in X \colon F(x) \leq t\}$.

(ii) Wir erlauben Werte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wollen aber den trivialen Fall $\mathcal{F} \equiv \infty$ stets ausschließen.

(iii) $\mathcal{F}$ ist genau dann unterhalbstetig, wenn der Epigraph
$$\Sigma(\mathcal{F}) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \colon \mathcal{F}(x) \leq t\}$$
abgeschlossen ist: Das Komplement von $\Sigma(\mathcal{F})$ in $X \times \mathbb{R}$ ist nämlich
$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{F}_t \times (-\infty, t),$$
das nach Definition der Unterhalbstetigkeit offen ist.

(iv) Ist umgekehrt $\Sigma(\mathcal{F})$ abgeschlossen, so ist wegen $\mathcal{G}_t \times \{t\} = \Sigma(\mathcal{F}) \cap (X \times \{t\})$ auch $\mathcal{G}_t$ abgeschlossen.

Definition 4.3. Sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $\mathcal{F}\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt (folgen-)unterhalbstetig, wenn für jede Folge $(v_k)_k \in X$ mit $v_k \to v \in X$
$$\mathcal{F}(v) \leq \liminf_{k \to \infty} \mathcal{F}(v_k)$$
gilt.

Bemerkung 4.4. Unterhalbstetigkeit impliziert Folgenunterhalbstetigkeit. Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom (jeder Punkt besitzt eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis), so sind Unterhalbstetigkeit und Folgenunterhalbstetigkeit äquivalent. Dies gilt insbesondere in metrischen Räumen.

Lemma 4.5. *Seien $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in I$, unterhalbstetige Funktionen. Dann ist*
$$\mathcal{F}(x) := \sup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(x)$$
ebenfalls unterhalbstetig.

Beweis. Dies folgt aus
$$\mathcal{F}_t = \{x \in X \colon \mathcal{F}(x) > t\} = \bigcup_{\alpha \in I} (\mathcal{F}_\alpha)_t = \bigcup_{\alpha \in I} \{x \in X \colon \mathcal{F}_\alpha(x) > t\}.$$
Für Folgenunterhalbstetigkeit folgt dies auch aus
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) = \sup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(x) &\leq \sup_{\alpha \in I} \liminf_{k \to \infty} \mathcal{F}_\alpha(x_k) \\ &\leq \liminf_{k \to \infty} \sup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(x_k) = \liminf_{k \to \infty} \mathcal{F}(x_k).\end{aligned}$$
□

Definition 4.6. Sei X ein topologischer Raum, $V \subset X$. Dann heißt eine Folge $(x_k)_k \subset V$ Minimalfolge in V, falls
$$\lim_{k \to \infty} \mathcal{F}(x_k) = \inf_V \mathcal{F}$$
gilt.

Theorem 4.7. *Sei X ein topologischer Raum, $V \subset X$. Sei $\mathcal{F}\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unterhalbstetig. Sei $(x_k)_k \subset V$ eine Minimalfolge mit $x_k \to x_0 \in V$. Dann ist $\mathcal{F}(x_0) = \inf\limits_V \mathcal{F}$.*

Beweis. Es gilt

$$\inf_V \mathcal{F} \le \mathcal{F}(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(x_k) = \inf_V \mathcal{F}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

4.2. **Carathéodory Funktionen.** Carathéodory Funktionen sichern, dass die Verkettung einer Funktion mit einer messbaren Funktion wieder messbar ist.

Definition 4.8. Eine Funktion $F\colon \Omega\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ heißt Carathéodory Funktion, falls

(i) $F(\cdot, y)$ für jedes $y \in \mathbb{R}^s$ messbar und
(ii) $F(x, \cdot)$ für fast jedes $x \in \Omega$ stetig ist.

Lemma 4.9. *Sei $F\colon \Omega\times\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ eine Carathéodory Funktion. Sei $y\colon \Omega \to \mathbb{R}^s$ messbar. Dann ist $g\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit*

$$g(x) := F(x, y(x))$$

ebenfalls messbar.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass y eine Treppenfunktion ist, d. h. es gilt

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \chi_i(x)$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{R}^s$ und $\chi_i \equiv \chi_{E_i}$ sind charakteristische Funktionen messbarer Mengen E_i. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass die Mengen E_i disjunkt sind und dass $\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i = \Omega$ gilt. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\{x \in \Omega\colon g(x) > t\} = \bigcup_{i=1}^{N} \{x \in E_i\colon F(x, \lambda_i) > t\}.$$

Da F eine Carathéodory Funktion ist, sind alle Mengen auf der rechten Seite dieser Gleichung messbar. Somit sind Urbilder offener Mengen messbar und damit ist g messbar.

Sei nun y eine beliebige messbare Funktion. Dann gibt es Treppenfunktionen $y_k\colon \Omega \to \mathbb{R}^s \cup \{\infty\}$ mit $y_k(x) \to y(x)$ für $k \to \infty$ und jedes $x \in \Omega$. Da F eine Carathéodory Funktion ist, folgt

$$F(x, y(x)) = \lim_{k\to\infty} F(x, y_k(x)) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen ist $x \mapsto F(x, y(x))$ selbst wieder messbar. □

Theorem 4.10. *Sei $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{\infty\}$ eine Carathéodory Funktion. Seien $y_k, y \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^s)$ und gelte $y_k \to y$ in L^1. Dann folgt*

$$\int_\Omega F(x, y(x))\, dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x, y_k(x))\, dx.$$

Beweis. Nach Auswahl einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass der Limes inferior auf der rechten Seite ein Limes ist. Nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge dürfen wir zusätzlich ohne Einschränkung annehmen, dass $y_k(x) \to y(x)$ für $k \to \infty$ und fast alle $x \in \Omega$ gilt. Da F eine Carathéodory Funktion ist, folgt auch $F(x, y_k(x)) \to F(x, y(x))$ für $k \to \infty$ und fast alle $x \in \Omega$. Somit erhalten wir die Behauptung aus dem Lemma von Fatou. □

Theorem 4.11. *Sei $F\colon \Omega \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ eine Carathéodory Funktion. Angenommen, $F(x,\cdot)$ ist für fast alle $x \in \Omega$ konvex. Dann ist*

$$\mathcal{F}(y,\Omega) = \int\limits_\Omega F(x,y(x))\,dx$$

in der schwachen Topologie auf $L^1(\Omega,\mathbb{R}^s)$ unterhalbstetig.

Beweis. In Theorem 4.10 haben wir gesehen, dass $\mathcal{F}$ in L^1 (mit der starken Topologie) unterhalbstetig ist. Somit ist der Epigraph $\Sigma(\mathcal{F}) = \{(y,t) \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}\colon \mathcal{F}(x,y) \leq t\}$ nach Bemerkung 4.2 abgeschlossen. Da $F(x,\cdot)$ für fast alle $x \in \Omega$ konvex ist, ist $\mathcal{F}(\cdot,\Omega)\colon L^1(\Omega,\mathbb{R}^s) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Daher ist $\Sigma(\mathcal{F})$ konvex. Somit ist $\Sigma(\mathcal{F})$ der Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen. Diese sind auch schwach abgeschlossen. Somit ist $\Sigma(\mathcal{F})$ schwach abgeschlossen. Daher ist $\mathcal{F}$ bezüglich der schwachen Topologie auf L^1 unterhalbstetig. □

Dies liefert die gewünschte Unterhalbstetigkeit, wenn $F(x,z,p)$ in (z,p) konvex ist. Ohne die Konvexität in p können wir kein solches Resultat erwarten, die Konvexität in (z,p) ist jedoch zu einschränkend. Da schwache Konvergenz in $W^{1,1}$ aber Konvergenz in L^1 impliziert, kann man dieses Resultat mit deutlich größerem Aufwand auch für solche Funktionen F zeigen, die nur bezüglich p konvex sind.

4.3. **Halbstetigkeit.**

Bemerkung 4.12.

(i) Sei $F\colon \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen ist. Definiere

$$L^1(\Omega,M) := \left\{u \in L^1\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right) : u(x) \in M \quad \text{für fast alle } x \in \Omega\right\}.$$

Sei $(u_k)_k \subset L^1(\Omega,M)$ und gelte $u_k \to u$ in $L^1_{loc}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ für $k \to \infty$ mit $u \in L^1\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$. Dann gilt für eine umbenannte Teilfolge $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Somit ist $u \in L^1(\Omega,M)$.

(ii) Wir weisen auf die notationstechnische Überlappung zwischen $p \in L^1$ und $p \mapsto F(x,z,p)$ für p hin und hoffen, dass dies keine Verwirrung stiftet.

Theorem 4.13. *Sei $F\colon \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F \geq 0$. Sei $p \mapsto F(x,z,p)$ in C^1_{loc}. Sei $p \mapsto F(x,z,p)$ konvex. Seien $u_k, u \in L^1(\Omega,M)$, $p_k, p \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$. Gelte $u_k \to u$ in $L^1_{loc}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ sowie $p_k \rightharpoonup p$ in $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^\nu)$. Dann folgt*

$$\mathcal{F}(u,p) \equiv \int\limits_\Omega F(x,u,p)\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_k,p_k).$$

Beweis. Sei $D \Subset \Omega$. Wir dürfen annehmen, dass $u_k \to u$ punktweise fast überall konvergiert. Nach Egoroff gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine messbare Teilmenge E von D mit $|D \setminus E| < \varepsilon$, auf der $u_k \rightrightarrows u$ gilt. Nach Lusin gibt es stetige Funktionen, die mit u bzw. p außerhalb einer Menge von kleinem Maß übereinstimmen. Den Schnitt dieser Mengen können wir von innen durch kompakte Mengen approximieren.

Also finden wir zu $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset D$ mit $|D \setminus K| < \varepsilon$, so dass

(i) $u_k \rightrightarrows u$ in K,
(ii) u und p sind in K stetig und
(iii) $\int\limits_K F(x,u,p)\,dx \geq \int\limits_D F(x,u,p)\,dx - \varepsilon$ bzw.
(iv) $\int\limits_D F(x,u,p)\,dx > \frac{1}{\varepsilon}$, falls $\int\limits_K F(x,u,p)\,dx = \infty$ gilt. (Dies ist möglich: Schneide dazu auf Höhe H ab, so dass $\int\limits_\Omega \max F, H > \frac{2}{\varepsilon}$ gilt. Benutze dann die übliche Absolutstetigkeit und lasse am Ende wieder $H \to \infty$.)

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_K F(x,u_k,p_k)\,dx &= \int_K F(x,u_k,p) + (F(x,u_k,p_k) - F(x,u_k,p))\,dx \\
&\geq \int_K F(x,u_k,p)\,dx + \int_K \langle F_p(x,u_k,p), p_k - p\rangle\,dx \\
&= \int_K F(x,u_k,p)\,dx + \int_K \langle F_p(x,u,p), p_k - p\rangle\,dx \\
&\quad + \int_K \langle F_p(x,u_k,p) - F_p(x,u,p), p_k - p\rangle\,dx.
\end{aligned}$$

Lasse nun $k \to \infty$. Da F stetig ist, p in K stetig ist und $u_k \rightrightarrows u$ gilt, erhalten wir für das erste Integral auf der rechten Seite

$$\int_K F(x,u_k,p)\,dx \to \int_K F(x,u,p)\,dx.$$

Für das zweite Integral benutzen wir die Stetigkeit von $F_p(x,u,p)$ und die schwache Konvergenz $p_k \rightharpoonup p$ in L^1_{loc}. Dieses Integral konvergiert gegen Null. Das dritte Integral schätzen wir durch

$$\|p_k - p\|_{L^1(K,\mathbb{R}^\nu)} \cdot \sup_K |F_p(\cdot,u_k,p) - F_p(\cdot,u,p)|$$

nach oben ab. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $u_k \rightrightarrows u$ und der Stetigkeit von F_p konvergiert dies ebenfalls gegen Null. Insgesamt erhalten wir also

$$\liminf_{k\to\infty} \int_K F(x,u_k,p_k)\,dx \geq \int_K F(x,u,p)\,dx \geq \int_D F(x,u,z)\,dx - \varepsilon.$$

Den Fall $\int_K F(x,u,p)\,dx = \infty$ behandelt man analog.

Da $F \geq 0$ ist und $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega F(x,u_k,p_k)\,dx \geq \int_D F(x,u,p)\,dx.$$

Wir gehen nun auf der rechten Seite zum Supremum über alle $D \Subset \Omega$ über und erhalten die Behauptung. $\square$

Wir möchten nun die Stetigkeitsannahmen an F und F_p wieder loswerden. Dazu schreiben wir

$$\int_\Omega F(x,u_k,p_k)\,dx = \int_\Omega F(x,u,p_k)\,dx + \int_\Omega (F(x,u_k,p_k) - F(x,u,p_k))\,dx.$$

Die Messbarkeit des ersten Integranden folgt, wenn wir F als Carathéodory Funktion bezüglich x und (z,p) voraussetzen. Nach Theorem 4.11 ist das erste Integral unterhalbstetig. Wir wollen daher noch nachweisen, dass der Limes inferior des zweiten Integranden nichtnegativ ist.

Lemma 4.14. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ offen, $|\Sigma| < \infty$. Gelte $p_k \rightharpoonup p$ in $L^q(\Sigma)$ für $q \geq 1$. Definiere für $L > 0$*

$$p^L := \begin{cases} p & \text{für } |p| \leq L, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gibt zu jedem $L \in \mathbb{N}$ eine (nicht umbenannte) Teilfolge und ein $v^L \in L^2(\Sigma)$ mit $p_k^L \rightharpoonup v^L$ in $L^2(\Sigma)$. Es gilt $v^L \to p$ in L^1 für $L \to \infty$.

Eine vektorwertige Variante diese Lemmas gilt auch.

Beweis für $q > 1$. Wegen $|p_k^L| \le L$ und $|\Sigma| < \infty$ ist p_k^L in $L^2(\Sigma)$ beschränkt. Somit gibt es eine (nicht umbenannte) Teilfolge mit $p_k^L \rightharpoonup v^L$ in $L^2(\Sigma)$ für ein $v^L \in L^2(\Sigma)$. (Wir behaupten nicht, dass $v^L = p^L$ gilt.)

Sei nun $\varphi \in L^\infty(\Sigma)$. Definiere $\Sigma_{k,L} := \{x \in \Sigma\colon |p_k(x)| > L\}$. Dann folgt

$$\int\limits_\Sigma \left(p_k - p_k^L\right) \varphi \, dx = \int\limits_{\Sigma_{k,L}} p_k \varphi \, dx \le \sup |\varphi| \cdot \int\limits_{\Sigma_{k,L}} |p_k| \, dx. \tag{4.1}$$

Nun ist nach Voraussetzung $p_k \in L^q$ mit $q > 1$. Daher erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int\limits_{\Sigma_{k,L}} |p_k| \, dx \le |\Sigma_{k,L}|^{1-\frac{1}{q}} \cdot \|p_k\|_{L^q(\Sigma)}.$$

Da in $\Sigma_{k,L}$ die Ungleichung $|p_k| > L$ gilt, erhalten wir für das Maß dieser Menge aus

$$L^q \cdot |\Sigma_{k,L}| = \int\limits_{\Sigma_{k,L}} L^q \le \int\limits_\Sigma |p_k|^q$$

und damit

$$|\Sigma_{k,L}| \le \frac{\|p_k\|^q_{L^q(\Sigma)}}{L^q} \le c \cdot L^{-q}.$$

Wir erhalten also zusammengenommen

$$\int\limits_{\Sigma_{k,L}} |p_k| \, dx \le c \cdot L^{-q\left(1-\frac{1}{q}\right)} \to 0 \quad \text{für } L \to \infty,$$

gleichmäßig in k. Wir gehen nun in (4.1) zum Grenzwert $k \to \infty$ für festes $L \in \mathbb{N}$ über. Da $p_k \rightharpoonup p$ und $\varphi \in L^\infty \subset L^{q^*}$ ist, konvergiert der erste Summand. Analog konvergiert der zweite Summand. Wir erhalten

$$\int\limits_\Sigma \left(p - v^L\right) \varphi \, dx \le c \cdot \sup |\varphi| \cdot L^{-q\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Wähle nun

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \left(p - v^L\right)(x) > 0, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt

$$\int\limits_\Sigma \left|p - v^L\right| \le c \cdot L^{-q\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Dies liefert die Behauptung. □

Den Beweis im Fall $q = 1$ erhalten wir als einfache Variation des Beweises für $q > 1$ unter Benutzung des folgenden Lemmas für die Abschätzung von $\int\limits_{\Sigma_{k,L}} |p_k| \, dx$.

Lemma 4.15. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Gelte $f_k \rightharpoonup f$ in $L^1(\Sigma)$. Dann gelten:*

(i) $\|f_k\|_{L^1}$ ist gleichmäßig in k beschränkt.

(ii) Die Funktionen $A \mapsto \int\limits_A |f_k|$ sind gleichmäßig in k absolutstetig, d. h. für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle messbaren Mengen $B \subset \Sigma$ mit $|B| < \delta$ auch $\int\limits_B |f_k| < \varepsilon$ für alle k folgt.

Beweis.

(i) Aus der Funktionalanalysis bekannt.
(ii) Dies folgt aus dem nachfolgend angegebenen Satz von Vitali-Hahn-Sachs, Theorem 4.17. □

Bemerkung 4.16. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist die Menge aller messbaren Teilmengen von Ω mit

$$d(E,F) := \arctan \int\limits_\Omega |\chi_E - \chi_F|$$

ein vollständiger metrischer Raum.

Übung; benutze die Vollständigkeit von L^1 und dass L^1-konvergente Folgen fast überall punktweise konvergente Teilfolgen besitzen.

Das nachfolgende Theorem zeigen wir nur für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und das Lebesguemaß, siehe [3, Theorem III.7.2, S. 158] für die allgemeine Formulierung.

Theorem 4.17 (Vitali-Hahn-Sachs)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Seien $f_i, f \in L^1(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$. Gilt $f_i \rightharpoonup f$ in $L^1(\Omega)$, dann sind die Funktionen f_i gleichmäßig absolutstetig, d. h. es gilt*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sup_{|E|<\delta} \sup_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_E |f_i| = 0,$$

wobei wir das Supremum über alle messbaren Teilmengen $E \subset \Omega$ genommen haben.

Beweis. Betrachte den Raum der messbaren Teilmengen Σ von Ω mit der Metrik aus Bemerkung 4.16. Für $\varepsilon > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\Sigma_{n,m} := \left\{ E \in \Sigma\colon \left| \int\limits_E f_n - f_m \right| \le \varepsilon \right\}.$$

Wegen $f_i \in L^1$ ist dies eine abgeschlossene Teilmenge von Σ. Definiere weiterhin für $p \in \mathbb{N}$ die abgeschlossenen Teilmengen

$$\Sigma_p = \bigcap_{n,m\ge p} \Sigma_{n,m}.$$

Für eine beliebige fixierte Menge E existiert $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_E f_i$. Daher folgt $\Sigma = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \Sigma_p$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz existiert daher eine Menge Σ_q mit einem inneren Punkt $A \subset \Omega$. Daher gibt es ein $r > 0$, so dass aus $|A \triangle E| < r$, $E \subset \Omega$ messbar,

$$\left| \int\limits_E f_n - f_m \right| \le \varepsilon \quad \text{für } n, m \ge q$$

folgt. Wähle $0 < \delta < r$, so dass

$$\left| \int\limits_B f_n \right| < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\le q}$ und alle messbaren Mengen $B \subset \Omega$ mit $|B| < \delta$ folgt. Aus $|B| < \delta$ folgen $|(A \cup B) \triangle A| < \delta < r$ sowie $|(A \setminus B) \triangle A| < \delta < r$. Wir erhalten nun für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_B f_n = \int\limits_B f_q + \left(\int\limits_B f_n - f_q \right)$$

$$= \int_B f_q + \left(\int_{A \cup B} f_n - f_q \right) - \left(\int_{A \setminus B} f_n - f_q \right).$$

Damit folgt $\left| \int_B f_n \right| < 3\varepsilon$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und durch Aufteilung von B je nach Vorzeichen von f_n auch $\int_B |f_n| < 6\varepsilon$ wie behauptet. □

Lemma 4.18. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Sei $F\colon K \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ. Sei $p \mapsto F(x, z, p)$ für alle $(x, z) \in K \times M$ konvex. Nehme an, dass $u_h \to u$ in $L^\infty(K, M)$ und $p_h \rightharpoonup p$ in $L^q(K, \mathbb{R}^\nu)$ für ein $q \geq 1$ konvergieren. Dann gilt*

$$\int_K F(x, u, p)\, dx \leq \liminf_{h \to \infty} \int_K F(x, u_h, p_h)\, dx.$$

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass der Limes inferior auf der rechten Seite ein Limes ist. Sei $R \geq \sup_h \|u_h\|_{L^\infty(K, \mathbb{R}^N)}$. Definiere $M_R := M \cap \overline{B_R(0)}$. Definiere weiterhin

$$T := \sup_{(x,z) \in K \times M_R} F(x, z, 0) \quad \text{und} \quad \Lambda := \sup_h \|p_h\|_{L^q(K, \mathbb{R}^\nu)}.$$

Wir setzen $K_{h,L} := \{x \in K \colon |p_h(x)| > L\}$. Dann folgt aus

$$\Lambda^q \geq \int_{K_{h,L}} |p_h|^q \geq \int_{K_{h,L}} L^q = |K_{h,L}| \cdot L^q$$

die Abschätzung $|K_{h,L}| \leq \left(\frac{\Lambda}{L}\right)^q$. Seien p_h^L, v^L wie in Lemma 4.14. Dann folgt aus Lemma 4.14 $v^L \to p$ in L^1. Nach Theorem 4.10 oder Theorem 4.11 erhalten wir somit

$$\int_K F(x, u, p)\, dx \leq \liminf_{L \to \infty} \int_K F(x, u, v^L)\, dx. \tag{4.2}$$

Lemma 4.14 liefert ebenso $p_h^L \rightharpoonup v^L$ in $L^2(K)$ für $h \to \infty$ und wir erhalten wieder mit Theorem 4.11

$$\int_K F\left(x, u, v^L\right)\, dx \leq \liminf_{h \to \infty} \int_K F\left(x, u, p_h^L\right)\, dx. \tag{4.3}$$

Andererseits ist $F \geq 0$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_K F\left(x, u, p_h^L\right)\, dx &= \int_K F\left(x, u_h, p_h^L\right)\, dx + \int_K \left[F\left(x, u, p_h^L\right) - F\left(x, u_h p_h^L\right)\right]\, dx \\
&\leq \int_K F(x, u_h, p_h)\, dx + \int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0)\, dx \qquad (4.4) \\
&\quad + \int_K \left[F\left(x, u, p_h^L\right) - F\left(x, u_h, p_h^L\right)\right]\, dx.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der Ungleichung das erste Integral je nachdem aufgespalten, ob $\left|p_h^L\right| > L$ gilt oder nicht. Nach Voraussetzung gilt $u_h \rightrightarrows u$ fast überall. Auf der kompakten Menge $K \times M_R \times \overline{B_L^\nu(0)}$ ist F gleichmäßig stetig. Daher konvergiert der

Integrand im letzten Integral für $h \to \infty$ gleichmäßig gegen Null. Somit konvergiert dieses Integral für $h \to \infty$ gegen Null,

$$\int_K \left[F\left(x, u, p_h^L\right) - F\left(x, u_h, p_h^L\right)\right] dx \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Weiterhin gilt

$$\int_{K_{h,L}} F(x, u_h, 0)\, dx \le |K_{h,L}| \cdot \sup_{K\times M_R} F(\cdot,\cdot,0) \le \left(\frac{\Lambda}{L}\right)^q \cdot T.$$

Somit erhalten wir mit (4.3) und (4.4)

$$\begin{aligned}\int_K F\left(x, u, v^L\right) dx &\le \liminf_{h\to\infty} \int_K F\left(x, u, p_h^L\right) dx \\ &\le \liminf_{h\to\infty} \int_K F(x, u_h, p_h)\, dx + T \cdot \left(\frac{\Lambda}{L}\right)^q\end{aligned}$$

Nach (4.2) folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_K F(x, u, p)\, dx &\le \liminf_{L\to\infty} \int_K F\left(x, u, v^L\right) dx \\ &\le \liminf_{h\to\infty} \int_K F(x, u_h, p_h)\, dx.\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. □

Als Verallgemeinerung des Lemmas von Lusin erhalten wir

Lemma 4.19. *Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $|\Sigma| < \infty$. Sei $S \subset \mathbb{R}^s$. Sei $h\colon \Sigma \times S \to \mathbb{R}$ für jedes $y \in S$ in $x \in \Sigma$ messbar und für fast alle $x \in \Sigma$ in $y \in S$ gleichmäßig stetig.*

Dann gibt es für beliebige $\delta > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subset \Sigma$ mit $|\Sigma \setminus K| < \delta$, so dass $h|_{K\times S}$ stetig ist.

Beweis. Definiere für $i \in \mathbb{N}$

$$\omega_i(x) := \sup\left\{|h(x, y_1) - h(x, y_2)| \colon y_1,\, y_2 \in S, \quad |y_1 - y_2| < \tfrac{1}{i}\right\}.$$

Da $h(x,\cdot)$ für fast alle $x \in \Sigma$ gleichmäßig stetig ist, folgt $\omega_i \to 0$ fast überall in Σ. (Die Messbarkeit von ω_i folgt, da wir das Supremum für fast alle $x \in \Sigma$ als Supremum über eine abzählbare dichte Teilmenge bekommen und somit als Limes superior schreiben können.) Nach Egoroff gibt es eine messbare Menge in Σ, deren Maß nur geringfügig kleiner als das von Σ ist, in der die Funktionen ω_i gleichmäßig konvergieren. Somit gibt es eine kompakte Menge $K_1 \subset \Sigma$ mit $|\Sigma \setminus K_1| < \frac{\delta}{2}$, auf der $\omega_i \rightrightarrows 0$ gilt. Dies bedeutet, dass $h(x,\cdot)$, $x \in K_1$, eine (gleichmäßig) gleichgradig stetige Familie von Funktionen ist.

Sei nun $\tilde{S} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots\}$ eine abzählbar dichte Teilmenge von S und seien $\delta_j > 0$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \delta_j < \frac{\delta}{2}$. Nach dem Satz von Lusin gibt es kompakte Mengen $\tilde{K}_j \subset \Sigma$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mit $\left|\Sigma \setminus \tilde{K}_j\right| < \delta_j$ so dass $h(\cdot, \tilde{y}_j)$ in $\tilde{K}_j$ stetig ist.

Definiere $K_2 := \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{K}_j$. Dann ist $K_2 \subset \Sigma$ kompakt, es gilt $|\Sigma \setminus K_2| < \frac{\delta}{2}$ und die Funktionen $h(\cdot, \tilde{y}_j)$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sind in K_2 stetig.

Setze $K := K_1 \cap K_2$. Wir wollen nun nachweisen, dass h auf $K \times S$ stetig ist. Sei dazu $((x_n, y_n))_n \subset K \times S$ eine Folge mit $(x_n, y_n) \to (x, y) \in K \times S$. Dann folgt

$$|h(x_n, y_n) - h(x, y)| \leq \underbrace{|h(x_n, y_n) - h(x_n, y)|}_{\to 0} + |h(x_n, y) - h(x, y)|.$$

Da die Funktionen $h(x, \cdot)$ für beliebiges $x \in K \subset K_1$ (gleichmäßig und damit insbesondere in $y \in S$) gleichgradig stetig sind, konvergiert der erste Term wie angegeben gegen Null. Betrachte nun den zweiten Term. Dazu wählen wir zunächst $\tilde{y} \in \tilde{S}$, so dass

$$|h(x, \tilde{y}) - h(x, y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \in K$ gilt. Dies ist aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit von $h(x, \cdot)$ und der Dichtheit von $\tilde{S}$ in S möglich. Dann folgt

$$\begin{aligned}
|h(x_n, y) - h(x, y)| &\leq |h(x, \tilde{y}) - h(x, y)| + |h(x_n, \tilde{y}) - h(x, \tilde{y})| \\
&\quad + |h(x_n, \tilde{y}) - h(x_n, y)| \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \underbrace{|h(x_n, \tilde{y}) - h(x, \tilde{y})|}_{\to 0} + \tfrac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

wobei wir für den mittleren Term die Stetigkeit von $h(\cdot, \tilde{y})$ für ein beliebiges $\tilde{y} \in \tilde{S}$ benutzt haben. Somit folgt

$$\limsup_{n \to \infty} |h(x_n, y_n) - h(x, y)| < \varepsilon.$$

Wir erhalten die Behauptung. □

Theorem 4.20 (Unterhalbstetigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen. Sei $F\colon \Omega \times M \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften*

(i) $F\colon \Omega \times (M \times \mathbb{R}^\nu) \to \mathbb{R}$ ist eine Carathéodory Funktion, d. h. $x \mapsto F(x, z, p)$ ist für alle $(z, p) \in M \times \mathbb{R}^\nu$ messbar und $(z, p) \mapsto F(x, z, p)$ ist für fast alle $x \in \Omega$ stetig.
(ii) $p \mapsto F(x, z, p)$ ist für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $z \in M$ konvex.
(iii) $F \geq 0$.

Seien u_h, $u \in L^1(\Omega, M)$ und $p_h, p \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$. Nehme an, dass $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega, M)$ und $p_h \rightharpoonup p$ in $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ gelten. Dann folgt

$$\int_\Omega F(x, u, p)\, dx \leq \liminf_{h \to \infty} \int_\Omega F(x, u_h, p_h)\, dx.$$

Beweis. Definiere

$$\mathcal{F}(u, p, A) := \int_A F(x, u, p)\, dx.$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h \to \infty} \mathcal{F}(u_h, p_h, \Omega) =: \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

existiert. Weiterhin dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $u_h \to u$ fast überall in Ω gilt.

Sei $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$. Wir unterscheiden zwei Fälle: Sei $\mathcal{F}(u, p, \tilde{\Omega}) < \infty$. Dann gibt es aufgrund der Absolutstetigkeit des Integrals zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $\Sigma \subset \tilde{\Omega}$ mit $|\Sigma| < \delta$ auch $\mathcal{F}(u, p, \Sigma) < \varepsilon$ folgt.

Ist $\mathcal{F}(u, p, \tilde{\Omega}) = \infty$, so gibt es ebenso zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass aus $\Sigma \subset \tilde{\Omega}$ und $|\Sigma| < \delta$ noch $\mathcal{F}(u, p, \tilde{\Omega} \setminus \Sigma) > \frac{1}{\varepsilon}$ folgt.

Nun gibt es eine kompakte Menge $K \subset \tilde{\Omega}$ mit $|\tilde{\Omega} \setminus K| < \delta$ und ein $R > 0$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $u_h, u \in C^0(K, M)$ (Lusin; betrachte eine Folge kompakter Mengen K_h mit $\left|\tilde{\Omega} \setminus K_h\right| < \tilde{\delta} \cdot 2^{-h}$, $\tilde{\delta} > 0$ geeignet, und dann den Durchschnitt), $\sup\limits_K |u| \le R$ (klar) und $\sup\limits_K |u_h| \le R$ (mit der Konvergenz im nächsten Punkt).

(ii) $u_h \rightrightarrows u$ in K (Egoroff).

(iii) F ist auf $K \times M \times \mathbb{R}^\nu$ stetig (benutze Lemma 4.19; die gleichmäßige Stetigkeit im Argument „(z, p)“ erhalten wir, indem wir zunächst $|z|$, $|p| \le L$ betrachten, aus dem Lemma Mengen $K_L \subset \tilde{\Omega}$ mit $\left|\tilde{\Omega} \setminus K_L\right| \le \tilde{\delta} \cdot 2^{-L}$ erhalten, so dass F auf $K_L \times \left(M \cap \overline{B_L(0)}\right) \times \left(\mathbb{R}^\nu \cap \overline{B_L(0)}\right)$ stetig ist und dann den Schnitt $\bigcap\limits_L K_L =: K$ wählen).

(iv) $p \mapsto F(x, z, p)$ ist für alle $(x, z) \in K \times M$ konvex.

Um alle diese Aussagen gleichzeitig zu bekommen, müssen wir die kompakten Mengen für jede der drei Teilaussagen am Ende noch schneiden. Ist $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\delta) > 0$ klein genug, so ist auch $\left|\tilde{\Omega} \setminus K\right| < \delta$ erfüllt.

Nun erhalten wir aus Lemma 4.18

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u, p, K) \equiv \int\limits_K F(x, u, p)\, dx &\le \liminf_{h \to \infty} \int\limits_K F(x, u_h, p_h)\, dx \\ &\equiv \liminf_{h \to \infty} \mathcal{F}(u_h, p_h, K) \le \lambda.\end{aligned}$$

Also erhalten wir im Falle $\mathcal{F}\big(u, p, \tilde{\Omega}\big) < \infty$

$$\mathcal{F}\big(u, p, \tilde{\Omega}\big) \le \lambda + \varepsilon$$

für alle $\tilde{\Omega} \Subset \Omega$. Daraus folgt die Behauptung.

Ist $\mathcal{F}\big(u, p, \tilde{\Omega}\big) = \infty$, so folgt aus der obigen Ungleichung

$$\tfrac{1}{\varepsilon} \le \mathcal{F}(u, p, K) \le \lambda.$$

Also ist $\lambda = \infty$ und die Behauptung gilt trivialerweise. □

Aufgrund des Rellichschen Einbettungssatzes (wir benötigen keine Voraussetzung an die Randregularität, da es um lokale Konvergenz geht) folgt aus der schwachen Konvergenz in $W^{1,1}_{loc}$ die starke Konvergenz in L^1_{loc} und wir erhalten

Korollar 4.21. *Seien F, Ω und M wie in Theorem 4.20. Dann ist*

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int\limits_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx$$

in der schwachen Topologie auf $W^{1,1}_{loc}(\Omega, M)$ unterhalbstetig.

4.4. **Dualräume von Sobolevräumen.** Als technische Vorbereitung für den folgenden Existenzsatz geben wir eine Beschreibung für $(W^{m,p}(\Omega))^*$.

Bemerkung 4.22. Wir wollen $W^{m,p}(\Omega)$ als abgeschlossenen Teilraum in einem Produktraum von $L^p(\Omega)$ auffassen. Definiere $N := \sum\limits_{0 \le |\alpha| \le m} 1$ als die Anzahl der Multiindices α mit $|\alpha| \le m$. Definiere

$$L^p_N(\Omega) := \prod_{i=1}^N L^p(\Omega)$$

mit der Norm

$$\|u\|_{L^p_N(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\le m} \|v_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{für } 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha|\le m} \|v_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

für $v = (v_\alpha)_\alpha \in L^p_N(\Omega)$. Definieren wir $\iota\colon W^{m,p}(\Omega) \to L^p_N(\Omega)$ durch $u \mapsto (D^\alpha u)_\alpha$, so ist ι linear, injektiv, stetig und normerhaltend. Daher ist das Bild von ι in $L^p_N(\Omega)$ abgeschlossen.

Lemma 4.23. *Seien $(E_i)_{1\le i\le N}$ Banachräume. Dann gilt*

$$\left(\prod_{i=1}^N E_i \right)^* \cong \prod_{i=1}^N E_i^*.$$

Beweis. Zu $T \in (\prod E_i)^*$ definieren wir $(\varphi_i)_{1\le i\le N} \in \prod E_i^*$ durch

$$\varphi_i(x_i) := T(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0).$$

Diese Zuordnung ist linear, injektiv und surjektiv. Die Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{(\sum \|x_i\|^p)^{1/p}=1} \left| \sum_{i=1}^N T(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0) \right| \\ &= \sup_{(\sum \|x_i\|^p)^{1/p}=1} \left| \sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i) \right| \le \sup_{(\sum \|x_i\|^p)^{1/p}=1} \sum_{i=1}^N |\varphi_i(x_i)| \\ &\le \sup_{(\sum \|x_i\|^p)^{1/p}=1} \sum_{i=1}^N \|\varphi_i\| \cdot \|(x_i)\| \\ &\le \sup_{(\sum \|x_i\|^p)^{1/p}=1} \left(\sum_{i=1}^N \|\varphi_i\|^q \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p \right)^{1/p} = \|(\|\varphi_i\|)_i\|_{\ell^q} \end{aligned}$$

für beliebige konjugierte p, q sowie

$$\begin{aligned} \|(\|\varphi_i\|)_i\|_{\ell^\infty} &= \sup_{1\le i\le n} \|\varphi_i\| = \sup_{1\le i\le n} \sup_{\substack{x_i\in E_i\\ \|x_i\|=1}} |\varphi_i(x_i)| \\ &= \sup_{1\le i\le n} \sup_{\substack{x_i\in E_i\\ \|x_i\|=1}} |T(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)| \\ &\le \sup_{1\le i\le n} \sup_{\substack{x_i\in E_i\\ \|x_i\|=1}} \|T\| \cdot \|(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)\| \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Benutze nun, dass beliebige ℓ^p-Normen für endlichdimensionale Vektorräume äquivalent sind. $\square$

Theorem 4.24. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $T \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ mit $1 \le p < \infty$. Sei p' der zu p konjugierte Exponent. Dann gibt es ein $v = (v_\alpha)_\alpha \in L^{p'}_N(\Omega)$ mit*

$$Tu = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega v_\alpha(x) D^\alpha u(x)\,dx \tag{4.5}$$

für alle $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Wir behaupten nicht, dass unterschiedliche Elemente $v \in L^p_N(\Omega)$ vermöge dieser Formel unterschiedlichen Elementen des Dualraums zugeordnet werden.

Beweis. Klar ist, dass durch die rechte Seite von (4.5) für $v \in L^p_N(\Omega)$ ein Element $T \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ mit $\|T\| \le C\|v\|_{L^{p'}_N(\Omega)}$ definiert wird.

Sei ι wie in Bemerkung 4.22. Dann definieren wir auf $\operatorname{im}\iota \subset L^p_N(\Omega)$ zu T einen linearen stetigen Operator durch

$$T^*(\iota u) := Tu \quad \text{für } u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Sei T' eine normerhaltende Fortsetzung von T^* nach $L^p_N(\Omega)$. Nach Lemma 4.23 ist $\left(L^p_N(\Omega)\right)^*$ isomorph zu $L^{p'}_N(\Omega)$. Somit gibt es $v = (v_\alpha)_\alpha \in L^{p'}_N(\Omega)$ mit

$$T'(w) = \sum_{|\alpha|\le m} \int\limits_\Omega v_\alpha(x) w^\alpha(x)\,dx$$

für alle $w = (w^\alpha)_\alpha \in L^p_N(\Omega)$. Sei nun $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann ist $\iota u = (D^\alpha u)_\alpha \in L^p_N(\Omega)$. Somit folgt

$$Tu = T^*(\iota u) = T'(\iota u) = \sum_{|\alpha|\le m} \int\limits_\Omega v_\alpha(x) D^\alpha u(x)\,dx.$$

Die Behauptung folgt. □

4.5. **Ein Existenzsatz.** Wir skizzieren hier, wie man aus Theorem 4.20 einen Existenzsatz bekommt.

Da schwache Konvergenz in $W^{1,q}_{loc}$, $q > 1$, auch schwache Konvergenz in $W^{1,1}_{loc}$ impliziert (vergleiche Kapitel 4.4), genügt es aufgrund der Reflexivität von $W^{1,q}$, eine in $W^{1,q}_{loc}$ beschränkte Minimalfolge zu finden. Eine Teilfolge davon konvergiert dann schwach in $W^{1,q}_{loc}$.

Definition 4.25. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $\mathcal{F}\colon X \to \mathbb{R}$ heißt koerziv, falls

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \mathcal{F}(x) = \infty$$

gilt.

In unserem Fall folgt dies beispielsweise aus

$$F(x,u,p) \ge \nu\left(|u|^q + |p|^q\right)$$

für $\nu > 0$.

Als Alternative können wir Randwerte vorgeben und Funktionale auf schwach abgeschlossenen Teilräumen $V \subset W^{1,q}$ minimieren. Die schwache Abgeschlossenheit sichert, dass auch der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge wieder in V liegt.

Theorem 4.26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen. Sei $\mathcal{F}(u)$ bezüglich der schwachen Topologie von $W^{1,q}_{loc}(\Omega, M)$ unterhalbstetig und $q > 1$. Sei $V \subset W^{1,q}(\Omega, M)$ schwach abgeschlossen. Ist $\mathcal{F}$ in V koerziv, gilt also*

$$\lim_{\substack{\|u\|_{W^{1,p}}\to\infty \\ u\in V}} \mathcal{F}(u) = \infty,$$

so besitzt $\mathcal{F}$ ein Minimum in V.

Beweis. Ergibt sich aus den darüber stehenden Kommentaren und dem letzten Abschnitt. □

Im folgenden Beispiel ist dieses Resultat anwendbar: Sei $U \in W^{1,q}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ und

$$V = \left\{u \in W^{1,q}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) : u - U \in W^{1,q}_0\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)\right\}.$$

Gelte

$$F(x,u,p) \ge |p|^q - b(x)|u|^\delta(x) - a(x)$$

für $0 \le \delta < q$, $a \in L^1(\Omega)$ und $b \in L^{\frac{q}{q-\delta}}$. Gelte weiterhin $|\Omega| < \infty$. Dann folgt

$$|u|^\delta \le c \cdot \left(|U|^\delta + |u-U|^\delta\right)$$

und somit erhalten wir punktweise

$$b|u|^\delta \le cb|U|^\delta + \varepsilon|u-U|^q + c(\varepsilon)b^{\frac{q}{q-\delta}}.$$

Da $u - U \in W_0^{1,q}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ ist und $|\Omega| < \infty$ gilt, haben wir die Poincarésche Ungleichung [1, S. 353]

$$\int_\Omega |u-U|^q\,dx \le c(\Omega,q)\int_\Omega |D(u-U)|^q\,dx.$$

Hieraus erhalten wir für kleine $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &\ge \int_\Omega |Du|^q\,dx - \int_\Omega \left(b|u|^\delta + a\right)\,dx\\ &\ge \int_\Omega |Du|^q\,dx - \varepsilon\cdot c(\Omega,q)\int_\Omega |D(u-U)|^q\,dx - c\\ &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^q\,dx - c.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir nochmals mit der Poincaréschen Ungleichung für $u - U$

$$\|u\|^q_{W^{1,q}} = \int_\Omega |Du|^q + |u|^q\,dx \le c\{\mathcal{F}(u)+1\}.$$

In dieser Situation ist der obige Existenzsatz also anwendbar.

Anhang A. Lipschitz stetige Funktionen

Wir betrachten Fortsetzungseigenschaften und Infima für Lipschitz stetige Funktionen.

Lemma A.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Seien $u_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in I$, Funktionen mit $[u_i]_{C^{0,1}} \le Q$. Sei $x_0 \in \Omega$ mit $\inf\limits_{i\in I} u_i(x_0) > -\infty$. Definiere*

$$u(x) := \inf_{i\in I} u_i(x).$$

Dann ist $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ wieder Lipschitz stetig und erfüllt die Abschätzung

$$[u]_{C^{0,1}} \le Q.$$

Beweis. Die Lipschitz Stetigkeit der Funktionen u_i sichert, dass das Infimum überall endlich ($> -\infty$) ist. Seien x, $y \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es Folgen $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I$ mit

$$\lim_{k\to\infty} u_{i_k}(x) \to \inf_{i\in I} u_i(x) = u(x) \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} u_{j_k}(y) \to \inf_{i\in I} u_i(y) = u(y).$$

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $u_{i_k}(x) \le u_{j_k}(x)$ und $u_{j_k}(y) \le u_{i_k}(y)$ gelten; sonst ersetzen wir i_k durch j_k bzw. j_k durch i_k. Somit gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $t \in [0,1]$ mit $u_{i_k}(tx+(1-t)y) = u_{j_k}(tx+(1-t)y)$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}|u_{i_k}(x) - u_{j_k}(y)| \le{}& |u_{i_k}(x) - u_{i_k}(tx+(1-t)y)|\\ &+ |u_{i_k}(tx+(1-t)y) - u_{j_k}(tx+(1-t)y)|\\ &+ |u_{j_k}(tx+(1-t)y) - u_{j_k}(y)|\\ \le{}& Q\cdot(1-t)\cdot|x-y| + 0 + Q\cdot t\cdot|x-y|\end{aligned}$$

$$= Q \cdot |x - y|.$$

Wir lassen nun $k \to \infty$ und erhalten $|u(x) - u(y)| \le Q \cdot |x - y|$. Die Behauptung folgt. □

Lemma A.2. *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Sei $u\colon S \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion mit $[u]_{C^{0,1}} \le Q$. Dann gibt es eine Lipschitz stetige Fortsetzung $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von u mit $[U]_{C^{0,1}} \le Q$.*

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung $S \neq \emptyset$ annehmen. Für $x_0 \in S$ definieren wir die Funktion $u_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $u_{x_0}(x) := u(x_0) + Q \cdot |x - x_0|$. Wegen $u_{x_0}(x) = \sup\limits_{\substack{p \in \mathbb{R}^n \\ |p|=1}} (u(x_0) + Q \cdot \langle p, x - x_0\rangle)$ folgt $[u_{x_0}]_{C^{0,1}} \le Q$ nach Lemma A.1, was auch für Suprema gilt. Nach Definition gelten $u_{x_0}(x) \ge u(x)$ und $u_{x_0}(x_0) = u(x_0)$ für alle x, $x_0 \in S$. Definiere nun $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$U(x) := \inf_{x_0 \in S} u_{x_0}(x).$$

Es folgt $U = u$ in S und nach Lemma A.1 erhalten wir $[U]_{C^{0,1}} \le Q$. □

Korollar A.3. *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Seien $u_i\colon S \to \mathbb{R}$, $i \in I$, Funktionen mit $[u_i]_{C^{0,1}} \le Q$. Sei $x_0 \in S$ mit $\inf\limits_{i \in I} u_i(x_0) > -\infty$. Definiere*

$$u(x) := \inf_{i \in I} u_i(x).$$

Dann ist $u\colon S \to \mathbb{R}$ wieder Lipschitz stetig und erfüllt die Abschätzung

$$[u]_{C^{0,1}} \le Q.$$

Beweis. Zunächst setzen wir die Funktionen u_i mit Hilfe von Lemma A.2 auf $\mathbb{R}^n$ fort, so dass sich die Lipschitzkonstante nicht vergrößert. Dann benutzen wir Lemma A.1. Somit ist dass Infimum der Fortsetzungen wieder Lipschitz stetig. Dieses Infimum stimmt aber mit dem Infimum der ursprünglichen Funktionen überein. □

Lemma A.2 und Korollar A.3 gelten auch auf metrischen Räumen. Dazu benötigen wir zunächst

Lemma A.4. *Seien a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$|\min\{a, b\} - \min\{c, d\}| \le \max\{|a - c|, |b - d|\}.$$

Somit ist $\min\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der ℓ^∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$ Lipschitz stetig mit Konstante eins.

Beweis. Wir führen einen Beweis mit Fallunterscheidungen:

(i) Ist $a \le b$ und $c \le d$, so ist die Behauptung wegen

$$|a - c| \le \max\{|a - c|, |b - d|\}$$

klar.

(ii) Sei $a \le b$, $d \le c$ und $d \le a$. Dann erhalten wir

$$|a - d| = a - d \le b - d \le |b - d|.$$

(iii) Sei $a \le b$, $d \le c$ und $d \ge a$. Dann folgt

$$|a - d| = d - a \le c - a \le |c - a|.$$

Die restlichen Fälle ergeben sich leicht aus Symmetrieüberlegungen. □

Lemma A.5. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Seien $u_i\colon X\to\mathbb{R}$, $i\in I$, Funktionen mit $[u_i]_{C^{0,1}}\le Q$. Sei $x_0\in X$ mit $\inf\limits_{i\in I}u_i(x_0)>-\infty$. Definiere*

$$u(x):=\inf_{i\in I}u_i(x).$$

Dann ist $u\colon X\to\mathbb{R}$ wieder Lipschitz stetig und erfüllt die Abschätzung

$$[u]_{C^{0,1}}\le Q.$$

Beweis. Nach Lemma A.4 folgt

$$\begin{aligned}&|\min\{u_{i_k}(x),u_{j_k}(x)\}-\min\{u_{i_k}(y),u_{j_k}(y)\}|\\ \le{}&\max\{|u_{i_k}(x)-u_{i_k}(y)|,\,|u_{j_k}(x)-u_{j_k}(y)|\}\le Q\cdot d(x,y).\end{aligned}$$

Argumentiere nun wie im Beweis von Lemma A.1. □

Lemma A.6. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $S\subset X$ beliebig. Sei $u\colon S\to\mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion mit $[u]_{C^{0,1}}\le Q$. Dann gibt es eine Lipschitz stetige Fortsetzung $U\colon X\to\mathbb{R}$ von u mit $[U]_{C^{0,1}}\le Q$.*

Beweis. Argumentiere wie im Beweis von Lemma A.2 und benutze $u_{x_0}(x):=u(x_0)+Q\cdot d(x,x_0)$. Beachte, dass $[d(\cdot,x_0)]_{C^{0,1}}\le 1$ gilt. □

ANHANG B. BOREL MESSBARE FUNKTIONEN

Den folgenden Auswahlsatz habe ich von Ulrich Menne gelernt:

Theorem B.1. *Seien $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}^m$ und sei $f\subset X\times Y$ abgeschlossen mit $\pi_1(f)=X$. Dann gibt es eine Borel Funktion $g\colon X\to Y$ mit $\operatorname{graph} g\subset f$.*

Die Forderung $\pi_1(f)=X$ kann man fallen lassen und erhält dann eine Borel Funktion $g\colon\pi_1(f)\to Y$.

Beweis.

(i) Wir konstruieren zunächst eine Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Familien F_i von abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen von Y mit $\bigcup\limits_{S\in F_i}S=Y$ und $\operatorname{diam}S\le\frac{1}{i}$ für alle $S\in F_i$ und alle $i\in\mathbb{N}$. Der Anschaulichkeit halber wollen wir zusätzlich fordern, dass jedes $S\in F_i$, $i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, ein achsenparalleler Würfel ist.
   (a) Setze $F_0:=\{Y\}$.
   (b) Sei $i=1$: Sei $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abgeschlossenen nichtleeren achsenparallelen Würfeln in Y mit $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}Q_j=Y$ und $\operatorname{diam}Q_j\le 1=\frac{1}{i}$. Setze $F_1:=\{Q_j\colon j\in\mathbb{N}\}$.
   (c) Sei $i\ge 1$: Wir nehmen an, dass F_i bereits konstruiert sei. Unterteile jeden Würfel $Q_j\in F_i$ in endlich viele abgeschlossene nichtleere achsenparallele (nicht disjunkte) Würfel Q_j^k mit $\operatorname{diam}Q_j^k\le\frac{1}{i+1}$. Es folgt $\bigcup\limits_k Q_j^k=Q_j$. Definiere $F_{i+1}:=\{Q_j^k\colon j\in\mathbb{N},k\}$.

(ii) Wir konstruieren nun Partitionen G_i, $i\in\mathbb{N}$, von X aus abzählbar vielen Borel Mengen und Funktionen $\zeta_i\colon G_i\to F_i$. Eine Eigenschaft unserer Konstruktionen werden wir dann im nächsten Abschnitt nachweisen.
   (a) Setze $G_0:=\{X\}$ und $\zeta_0(X):=Y$.
   (b) Sei $i\in\mathbb{N}$. Seien G_i und ζ_i bereits konstruiert. Sei $B\in G_i$. Dann ist $\zeta_i(B)\in F_i$. Somit gibt es nach Konstruktion endlich viele Würfel $Q_j\in F_{i+1}$, $j=1,2,\ldots$, mit $\bigcup\limits_j Q_j=\zeta_i(B)$. Wir definieren

$$C_j:=\left(B\cap f^{-1}[Q_j]\right)\setminus\bigcup_{k=1}^{j-1}\left(B\cap f^{-1}[Q_k]\right),$$

wobei wir $f^{-1}[A] := \{x \in X : \exists\, y \in A : (x,y) \in f\}$ schreiben, also f vermöge $f[A] := \{y \in Y : \exists\, x \in A : (x,y) \in f\}$ als mengenwertige Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in f\}$ betrachten. Wir nehmen an, dass aus $x \in B \in G_i$ folgt, dass $\zeta_i(B) \cap f[\{x\}] \neq \emptyset$ gilt. Daraus folgt $B \subset f^{-1}[\zeta_i(B)] = \bigcup\limits_j f^{-1}[Q_j]$. Somit bilden die Mengen C_j eine Partition von B: $\dot{\bigcup\limits_j} C_j = B$. Nach Konstruktion sind sämtliche Mengen C_j Borel. Wir setzen $\zeta_{i+1}(C_j) := Q_j$. Definiere G_{i+1} als Familie aller diesem Mengen C_j, die wir zu beliebigen $B \in G_i$ bekommen.

(iii) Wir wollen nun induktiv die oben bereits benutzte Aussage

$$x \in B \in G_i \quad \Longrightarrow \quad \zeta_i(B) \cap f[\{x\}] \neq \emptyset$$

zeigen: Für $i = 0$ ist die Aussage wegen $\zeta_0(X) = Y$ erfüllt.

Sei nun $i \geq 1$: Gelte $x \in C_j \in G_{i+1}$. Dann folgen $x \in f^{-1}[Q_j]$ und $\zeta_{i+1}(C_j) = Q_j$ nach Definition von C_j bzw. ζ_{i+1}. Daraus folgt dann $x \in f^{-1}[\zeta_{i+1}(C_j)]$ und somit ist $f[\{x\}] \cap \zeta_{i+1}(C_j) \neq \emptyset$ wie behauptet.

(iv) Zu jedem $Q \in F_i$, $i \in \mathbb{N}$, wählen wir einen Punkt $p_Q \in Q \subset Y$. Wir definieren nun $g_i : X \to Y$ durch $g_i(x) := p_{\zeta_i(B)}$ für $x \in B \in G_i$. g_i ist wohldefiniert, da jedes G_i eine Partition von X ist. Die Funktionen g_i sind Borel messbar, da die Mengen $B \in G_i$ Borel messbar sind. Aus $g_i(x), g_{i+1}(x) \in \zeta_i(B)$ für $x \in B$ folgen $|g_i(x) - g_{i+1}(x)| \leq \frac{1}{i}$ und $\operatorname{dist}(g_i(x), f[\{x\}]) \leq \operatorname{diam}(\zeta_i(B)) \leq \frac{1}{i}$.

(v) Wir definieren nun $g(x) := \lim\limits_{i\to\infty} g_i(x)$. Als Grenzwert Borel messbarer Funktionen ist g selbst wieder Borel messbar und es gilt $\operatorname{graph} g \subset f$. □

Literatur

1. Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer-Lehrbuch Masterclass, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2006.
2. Bernard Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 78, Springer, New York, 2008.
3. Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators. I. General Theory*, With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
4. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
5. Enrico Giusti, *Direct methods in the calculus of variations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003.
6. Stefan Hildebrandt, Helmut Kaul, and Kjell-Ove Widman, *An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Acta Math. **138** (1977), no. 1-2, 1–16.
7. Stefan Müller, *Variational models for microstructure and phase transitions*, Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996), Lecture Notes in Math., vol. 1713, Springer, Berlin, 1999, pp. 85–210.
8. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
9. Stanisław Saks, *Theory of the integral*, Second revised edition. English translation by L. C. Young. With two additional notes by Stefan Banach, Dover Publications Inc., New York, 1964.
10. Guido Sweers, *Notizen zur Vorlesung Variationsrechnung*, 2012.

Oliver C. Schnürer, FB Mathematik und Statistik, Universität Konstanz, Germany
E-mail address: Oliver.Schnuerer@uni-konstanz.de