Voll nichtlineare Partielle Differentialgleichungen

Oliver C. Schnürer

Freie Universität Berlin, Arnimallee 2-6, 14195 Berlin, Germany
E-mail address: `Oliver.Schnuerer@math.fu-berlin.de`

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35-02, 35J25, 35J60, 35K20, 35K55, 53A07, 53A10, 53C42, 53C44

Key words and phrases. Voll nichtlinear, partielle Differentialgleichung, Monge-Amère, Gaußkrümmung, Schoutentensor, Dirichletproblem, Neumannrandbedingung, Krylov-Safonov

Zusammenfassung. Bei diesem Manuskript handelt es sich um Notizen zu einer zweistündigen Vorlesung an der Freien Universität Berlin im Wintersemester 2005/6. Wir danken Herrn Felix Schulze für ein kritisches Kontrolllesen während der Vorlesung.

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Dirichletproblem für Monge-Ampère Gleichungen

KAPITEL 1

Geometrische Motivation

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Mannigfaltigkeit, lokal dargestellt als Graph einer C^2-Funktion u.
Wir wollen die Gaußkrümmung von M mit Hilfe von u bestimmen.

1. Differentialgeometrie

Die induzierte Metrik von graph u ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g_{ij} =& \delta_{ij} + u_i u_j, \quad 1 \le i, j \le n, \\ u_i =& \frac{\partial u}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Die zweite Fundamentalform von graph u ist

$$\begin{aligned} h_{ij} =& \frac{u_{ij}}{v}, \\ v =& \sqrt{1 + |Du|^2}, \\ u_{ij} =& \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}. \end{aligned}$$

Die Hauptkrümmungen von graph u sind die Eigenwerte von h_{ij} bezüglich g_{ij}, d. h. λ ist Hauptkrümmung, falls für ein $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

$$h_{ij}\xi^j = \lambda g_{ij}\xi^j$$

unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention gilt. Die Gaußkrümmung $K[u]$ ist das Produkt der Hauptkrümmungen. Es gilt

$$g^{ki} h_{ij}\xi^j = \lambda \xi^k,$$

wobei $\left(g^{ij}\right)$ die Inverse der Metrik (g_{ij}) ist. Somit folgt

$$\begin{aligned} K[u] =& \det\left(g^{ki} h_{ij}\right) \\ =& \det\left(g^{ij}\right) \cdot \det(h_{ij}) \\ =& \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} \\ =& \frac{\det D^2 u}{\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}, \end{aligned}$$

da $\det(g_{ij}) = 1 + |Du|^2$. Es gilt also

$$K[u] = \frac{\det D^2 u}{\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

KAPITEL 2

Dirichletproblem für Monge-Ampère Gleichungen

1. Problemstellung

DEFINITION 1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Eine C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt lokal konvex, falls $D^2u \geq 0$, d. h. falls die Hessische ist positive semidefinit ist. Ist $D^2u > 0$, so heißt u lokal strikt konvex.

Eine C^1-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls ihr Graph oberhalb der Tangentialebene an den Graphen in einem beliebigen Punkt liegt.

BEMERKUNG 1.2. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Die folgende Charakterisierung von Konvexität ist im Falle $u \in C^1$ äquivalent zur obigen Definition: Für $x, y \in \Omega$, $\tau \in (0, 1)$, so dass $\tau x + (1 - \tau y) \in \Omega$ ist, gilt

$$u(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau u(x) + (1 - \tau)u(y).$$

Ist Ω konvex, d. h. falls mit $x, y \in \Omega$ und $\tau \in (0, 1)$ auch $\tau x + (1 - \tau)y \in \Omega$ ist, stimmen die Definitionen für lokal konvexe und konvexe Funktionen überein, falls $u \in C^2$.

Ist Ω nicht konvex, so braucht eine lokal konvexe Funktion nicht konvex zu sein.

Konvexe Funktionen sind lokal Lipschitzstetig und damit fast überall differenzierbar. Sei u konvex und in $x \in \Omega$ diffbar, so gilt

$$u(y) \geq u(x) + \langle \nabla u(x), y - x \rangle$$

für beliebiges $y \in \Omega$.

DEFINITION 1.3. Eine elliptische Differentialgleichung $F\left(x, u, Du, D^2u\right) = 0$ heißt voll nichtlinear, wenn die Eigenwerte von

$$a^{ij} \equiv \left. \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \right|_{(x,z,p,r)=(x,u,Du,D^2u)}$$

von D^2u abhängen.

THEOREM 1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offes beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $\partial\Omega \subset C^\infty$. Sei $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$ positiv. Sei $\underline{u} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ lokal strikt konvex und gelte*

$$\det D^2\underline{u} \geq f(\cdot, \underline{u}, D\underline{u}) \quad \text{in } \Omega.$$

Dann gibt es eine lokal strikt konvexe Funktion $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, die das Dirichletproblem

$$\begin{cases} \det D^2u = f(\cdot, u, Du) & \text{in } \Omega, \\ u = \underline{u} & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

löst.

BEMERKUNG 1.5.

- Einen solchen Existenzsatz bekommt man auch für weniger reguläre Daten, etwa $C^{5,\alpha}$-Daten.
- Neuere Ergebinisse von Neil Trudinger and Xu-Jia Wang erlauben es sogar, lediglich Hölder-stetige rechte Seiten und Randwerte der Klasse C^3 zu betrachten [**29**].
- Wir finden sogar eine Lösung u mit $u \ge \underline{u}$.

Literatur: [**3, 4, 9, 10, 22, 25, 30**].
Der Beweis von Theorem 1.4 erstreckt sich auf den Rest dieses Kapitels.

2. C^0-Abschätzungen

Nehme für den Beweis der a priori Abschätzungen stets an, dass u eine Lösung von (1.1) mit $u \ge \underline{u}$ in Ω ist.

Die Funktion u is lokal strikt konvex. Daher nimmt u in Ω kein lokales inneres Maximum an. Es folgt

$$u \le \sup_{\partial\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} \underline{u}.$$

Nach Annahme gilt

$$u \ge \underline{u} \ge \inf_{\Omega} \underline{u}.$$

Daher gilt

$$\|u\|_{C^0} \le c$$

für eine universelle Konstante.

3. C^1-Abschätzungen

3.1. Normalabschätzungen auf $\partial\Omega$. Sei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$. Wegen $u \ge \underline{u}$ mit Gleichheit auf $\partial\Omega$ folgt

$$u_\nu \equiv u_i \nu^i \equiv \langle Du, \nu\rangle \le \langle D\underline{u}, \nu\rangle \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Fixiere $x_0 \in \partial\Omega$. Sei $\lambda > 0$ so gewählt, dass

$$x_0 - \lambda\mu(x_0) \in \partial\Omega$$

und

$$x_0 - \tau\nu(x_0) \in \Omega$$

für $0 < \tau < \lambda$. Benutze, dass

$$[0,\lambda] \ni \tau \mapsto u(x_0 - \tau\nu(x_0))$$

eine konvexe Funktion ist. Für eine konvexe Funktion u gilt stets

$$\langle Du(x), y - x\rangle + u(x) \le u(y).$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} u(x_0 - \tau\nu(x_0))\Big|_{\tau=0} (\lambda - 0) + u(x_0) \le& u(x_0 - \lambda\nu(x_0)) \\ =& \underline{u}(x_0 - \lambda\nu(x_0)), \quad \text{da } x_0 - \lambda\nu(x_0) \in \partial\Omega \\ \le& \sup_{\partial\Omega} \underline{u}. \end{aligned}$$

Damit schließen wir nun

$$\begin{aligned}\langle Du(x_0), -\nu(x_0)\rangle\lambda &\le \sup_{\partial\Omega} \underline{u} - u(x_0)\\ &\le \sup_{\partial\Omega} \underline{u} - \inf_{\partial\Omega} \underline{u}.\end{aligned}$$

Da $\partial\Omega \in C^2$ ist, ist λ auf $\partial\Omega$ unabhängig von der speziellen Wahl von x_0 gleichmäßig nach unten durch eine positive Konstante beschränkt. Daher gilt

$$|u_\nu| \le c \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

3.2. Tangentialabschätzungen auf $\partial\Omega$. Stelle $\partial\Omega$ lokal als Graphen über einer offenen Menge in $\mathbb{R}^{n-1}$ dar:

$$\begin{aligned}\partial\Omega =& \operatorname{graph}\omega \quad \text{(lokal)},\\ \omega :& \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$(u - \underline{u})(\hat{x}, \omega(\hat{x})) = 0 \quad \text{für } \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Sei $r < n$. Dann folgt

$$(u - \underline{u})_r + (u - \underline{u})_n \omega_r = 0.$$

Für einen festen Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ kann man das Koordinatensystem so wählen, dass $(0, \omega(0)) = x_0$ und $D\omega(0) = 0$ gelten. Dort folgt $(u - \underline{u})_r = 0$ und somit $|u_\tau| \le c$.

Wir haben somit gezeigt, dass

$$|Du| \le c \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

3.3. Innere Abschätzungen.

Der Betrag des Gradienten einer lokal konvexen Funktion auf einem beschränkten Gebiet nimmt sein Maximum am Rand an:

Sei u lokal strikt konvex (addiere sonst gegebenenfallss $\varepsilon|x|^2$) und betrachte

$$w = \tfrac{1}{2}|Du|^2.$$

In einem inneren Extremum von w gilt

$$0 = w_i \equiv \frac{\partial w}{\partial x^i} = u^k u_{ki}.$$

Wir multiplizieren mit u^i und wenden die Einsteinsche Summenkonvention an. Somit erhalten wir

$$0 = u_{ki} u^k u^i.$$

Da u lokal strikt konvex ist, folgt $|Du| = 0$ im Extremum. Also wird das Extremum am Rand angenommen,

$$\sup_{\Omega} |Du| \le \sup_{\partial\Omega} |Du| \le c.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\|u\|_{C^1} \le c.$$

4. C^2-Abschätzungen

4.1. Randabschätzungen – doppelt tangentiale Ableitungen: Stelle $\partial\Omega$ wieder lokal als graph ω dar und nehme an, dass für einen festen Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned} x =&(0, \omega(0)), \\ D\omega(0) =&0. \end{aligned}$$

Die Randbedingung liefert

$$(u - \underline{u})(\hat{x}, \omega(\hat{x})) = 0.$$

Seien r, $s < n$. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} (u-\underline{u})_r + (u-\underline{u})_n\omega_r =&0, \\ (u-\underline{u})_{rs} + (u-\underline{u})_{rn}\omega_s + (u-\underline{u})_{ns}\omega_r + (u-\underline{u})_{nn}\omega_r\omega_s + (u-\underline{u})_n\omega_{rs} =&0. \end{aligned}$$

Im Ursprung folgt

$$(u-\underline{u})_{rs} + (u-\underline{u})_n\omega_{rs} = 0,$$

wobei ω_{rs} hier auch gerade die zweite Fundamentalform des Randes ist. Es gilt daher für beliebige Tangentialvektoren τ, σ auf $\partial\Omega$

$$\left|u_{ij}\tau^i\sigma^j\right| \equiv |u_{\tau\sigma}| \le c.$$

4.2. Gemischt tangential-normale C^2-Abschätzungen am Rand. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Wähle ein Koordinatensystem, so dass $x_0 = (0, \omega(0))$, $D\omega(0) = 0$ und lokal nahe x_0

$$\Omega = \{(\hat{x}, x^n) : x^n > \omega(\hat{x})\}.$$

Sei $\Omega_\delta := \Omega \cap B_\delta(x_0)$. Schreibe das Dirichletproblem um als

$$\begin{cases} \log\det D^2u = \log f \equiv \hat{f} & \text{in } \Omega, \\ u = \underline{u} & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Differenzieren ergibt für $k \le n$, $t < n$

$$u^{ij}u_{ijk} = \hat{f}_k + \hat{f}_z u_k + \hat{f}_{p_i}u_{ik} \quad \text{in } \Omega,$$

wobei u^{ij} die Inverse von u_{ij} ist und

$$(u-\underline{u})_t(\hat{x}, \omega(\hat{x})) + (u-\underline{u})_n(\hat{x}, \omega(\hat{x}))\omega_t = 0$$

nahe $\hat{x} = 0$. Fixiere $t < n$ und definiere die Differentialoperatoren

$$Tw := w_t + w_n\omega_t,$$

wobei ω an der Projektion von x auf die ersten $n-1$ Komponenten ausgewertet wird, und

$$Lw := u^{ij}w_{ij} - \hat{f}_{p_i}w_i.$$

Nach Definition gilt

$$T(u-\underline{u}) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

also auch aufgrund der C^1-Abschätzungen

$$|T(u-\underline{u})| \le c(\delta)\cdot|x-x_0|^2 \quad \text{auf } \partial\Omega_\delta.$$

L und T sind so definiert, dass sich auch $LT(u-\underline{u})$ gut abschätzen lässt. In der folgenden Rechnung wird $u-\underline{u}$ natürlich wieder an der Stelle x und nicht in $(\hat{x}, \omega(\hat{x}))$

ausgewertet. Weiterhin verschwinden alle Ableitungen von ω in Richtung e_n. Wir erhalten

$$\begin{aligned}LT(u-\underline{u}) =&L((u-\underline{u})_t+(u-\underline{u})_n\omega_t)\\ =&u^{ij}u_{tij}-u^{ij}\underline{u}_{tij}+u^{ij}u_{nij}\omega_t-u^{ij}\underline{u}_{nij}\omega_t\\ &+u^{ij}(u_{ni}\omega_{tj}+u_{nj}\omega_{ti}+u_n\omega_{tij})-u^{ij}(\underline{u}_{ni}\omega_{tj}+\underline{u}_{nj}\omega_{ti}+\underline{u}_n\omega_{tij})\\ &-\hat{f}_{p_i}(u_{ti}-\underline{u}_{ti}+u_{ni}\omega_t-\underline{u}_{ni}\omega_t+u_n\omega_{ti}-\underline{u}_n\omega_{ti}).\end{aligned}$$

Aufgrund der differenzierten Gleichung sind

$$u^{ij}u_{tij}-\hat{f}_{p_i}u_{ti}$$

und

$$\left(u^{ij}u_{nij}-\hat{f}_{p_i}u_{ni}\right)\omega_t$$

betragsmäßig durch eine Konstante beschränkt. Dies benutzt auch die C^1-Abschätzungen für u zum Beschränken der Terme mit Du und von $\hat{f}$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}|LT(u-\underline{u})| \le& c+u^{ij}(u_{ni}\omega_{tj}+u_{nj}\omega_{ti}+u_n\omega_{tij})-\hat{f}_{p_i}u_n\omega_{ti}\\ &-u^{ij}\underline{u}_{tij}-u^{ij}\underline{u}_{nij}\omega_t-u^{ij}(\underline{u}_{ni}\omega_{tj}+\underline{u}_{nj}\omega_{ti}+\underline{u}_n\omega_{tij})\\ &-\hat{f}_{p_i}(-\underline{u}_{ti}-\underline{u}_{ni}\omega_t-\underline{u}_n\omega_{ti}).\end{aligned}$$

Wir wollen die folgende Ungleichung nachweisen:

$$|LT(u-\underline{u})|\le c\cdot\left(1+\operatorname{tr}u^{ij}\right).$$

Es gilt aufgrund der Inversenbeziehung

$$u^{ij}(u_{ni}\omega_{tj}+u_{nj}\omega_{ti})=\delta^j_n\omega_{tj}+\delta^i_n\omega_{ti}=2\omega_{ti}$$

und dieser Ausdruck ist somit beschränkt. Offensichtlicherweise sind außerdem die folgenden Terme beschränkt

$$-\hat{f}_{p_i}u_n\omega_{ti}-\hat{f}_{p_i}(-\underline{u}_{ti}+\underline{u}_{ni}\omega_t-\underline{u}_n\omega_{ti}).$$

Die noch übrigen Terme beschränkt man wie folgt.

Lemma 4.1. *Sei U^{ij} positiv semidefinit, symmetrisch, A_{ij} beschränkt, so gilt*

$$\left|U^{ij}A_{ij}\right|\le c(A)\cdot\operatorname{tr}U^{ij}.$$

Proof. Es gilt nämlich für eine orthogonale Matrix O

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(UO^{\mathrm{tr}}\right)=&\operatorname{tr}\left(UO^{\mathrm{tr}}O\right)=\operatorname{tr}U,\\ U^{ij}A_{ij}=&\operatorname{tr}\left(OUO^{\mathrm{tr}}OAO^{\mathrm{tr}}\right).\end{aligned}$$

Wählt man O so, dass OUO^{tr} diagonal ist, so gilt

$$U^{ij}A_{ij}=\sum_i\left(OUO^{\mathrm{tr}}\right)^{ii}\left(OAO^{\mathrm{tr}}\right)_{ii}$$

und

$$\begin{aligned}\left|U^{ij}A_{ij}\right|\le&\operatorname{tr}U\cdot\sum_i\left|\left(OAO^{\mathrm{tr}}\right)_{ii}\right|\\ \le& c(A)\cdot\operatorname{tr}U,\end{aligned}$$

da sich alle Terme in der letzten Summe mit Hilfe von Testvektoren der Länge 1 darstellen lassen und daher unabhängig von O gleichmäßig beschänkt sind. $\square$

Damit beschränkt man nun

$$u^{ij}(u_n\omega_{tij} - \underline{u}_{tij} - \underline{u}_{nij}\omega_t - \underline{u}_{ni}\omega_{tj} - \underline{u}_{nj}\omega_{ti} - \underline{u}_n\omega_{tij})$$

und somit folgt

$$|LT(u-\underline{u})| \le c\cdot\left(1+\operatorname{tr}u^{ij}\right).$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned}|LT(u-\underline{u})| \le& c\cdot\left(1+\operatorname{tr}u^{ij}\right) \quad \text{in } \Omega_\delta,\\ |T(u-\underline{u})| \le& c(\delta)\cdot|x-x_0|^2 \text{auf } \partial\Omega_\delta\\ \text{mit } T(u-\underline{u}) =& 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ nahe } x_0.\end{aligned}$$

4.2.1. *Barrierenkonstruktion.* Definiere für noch zu wählende Konstanten

$$\vartheta := (u-\underline{u}) + \alpha d - \mu d^2,$$

wobei $1 \gg \alpha > 0$ und $\mu \gg 1$ sind. d ist die Distanzfunktion zu $\partial\Omega$. Nimm an, dass δ so klein ist, dass d glatt und

$$\|d\|_{C^2}$$

beschränkt ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\vartheta_i =& u_i - \underline{u}_i + \alpha d_i - 2\mu d d_i,\\ \vartheta_{ij} =& u_{ij} - \underline{u}_{ij} + \alpha d_{ij} - 2\mu d d_{ij} - 2\mu d_i d_j,\\ L\vartheta =& u^{ij}(u_{ij} - \underline{u}_{ij} + \alpha d_{ij} - 2\mu d d_{ij} - 2\mu d_i d_j)\\ &- \hat{f}_{p_i}(u_i - \underline{u}_i + \alpha d_i - 2\mu d d_i)\\ \le& n - u^{ij}\underline{u}_{ij} + c\cdot\alpha\cdot\operatorname{tr}u^{ij} + c\cdot(\mu\delta)\cdot\operatorname{tr}u^{ij} - 2\mu u^{ij}d_i d_j + c + c\cdot(\mu\delta).\end{aligned}$$

Da $\underline{u}$ strikt konvex ist, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\underline{u}_{ij} \ge 4\varepsilon\delta_{ij}$$

im Sinne von Matrizen gilt. Fixiere $\alpha > 0$ genügend klein, so dass

$$c\alpha\operatorname{tr}u^{ij} \le \varepsilon\operatorname{tr}u^{ij}.$$

Es gilt

$$L\vartheta \le c(1+\mu\delta) - 3\varepsilon\operatorname{tr}u^{ij} + c(\mu\delta)\operatorname{tr}u^{ij} - 2\mu u^{ij}d_i d_j.$$

LEMMA 4.2. *Wählt man $\mu \gg 1$ genügend groß, so gilt*

$$2c - \varepsilon\operatorname{tr}u^{ij} - 2\mu u^{ij}d_i d_j \le 0.$$

PROOF. Es gilt stets $|Dd| = 1$. Betrachte diesen Ausdruck in einem Koordinatensystem, das so gedreht ist, dass $Dd = e_n$ gilt und $\left(u^{kl}\right)_{1\le k,\, l<n}$ diagonal ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned}2c - \varepsilon\operatorname{tr}u^{ij} - 2\mu u^{ij}d_i d_j =& 2c - \varepsilon\left(u^{11} + \cdots + u^{nn}\right) - 2\mu u^{nn}\\ \le& 2c - \varepsilon u^{11} - \varepsilon u^{22} - \cdots - \varepsilon u^{n-1\,n-1} - 2\mu u^{nn}.\end{aligned}$$

Die geometrisch-arithmetische Ungleichung besagt für $a_1, \ldots, a_n \ge 0$, das

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \ge \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}$$

gilt. Daher folgt

$$\begin{aligned}2c-\varepsilon\operatorname{tr}u^{ij}-2\mu u^{ij}d_id_j\le&2c-\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}\varepsilon n u^{ii}\right)\cdot 2\mu n u^{nn}\right)^{1/n}\\ \le&2c-\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}\cdot\mu^{1/n}\cdot\left(\prod u^{ii}\right)^{1/n}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung läßt sich $\prod\limits_i u^{ii}$ nach unten durch eine positive Konstante abschätzen: Nach Wahl des Koordinatensystems gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}=&\frac{1}{\det D^2u}\\ =&\det u^{ij}\\ =&\det\begin{pmatrix}u^{11}&0&\dots&0&u^{1n}\\ 0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0&u^{n-2\,n}\\ 0&\dots&0&u^{n-1\,n-1}&u^{n-1\,n}\\ u^{1n}&\dots&u^{n-2\,n}&u^{n-1\,n}&u^{nn}\end{pmatrix}\\ =&\prod_{i=1}^n u^{ii}-\sum_{i<n}\left|u^{in}\right|^2\cdot\prod_{\substack{j\ne i\\ j<n}}u^{jj}\\ \le&\prod_{i=1}^n u^{ii}.\end{aligned}$$

Aufgrund der C^1-Abschätzungen ist f beschränkt. Fixiert man also $\mu\gg 1$ groß genug, so folgt

$$2c-\varepsilon\operatorname{tr}u^{ij}-2\mu u^{ij}d_id_j\le 0$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Wähle nun $\delta>0$ so klein, dass

$$\mu\delta\le 1$$

und

$$c\mu\delta\le\varepsilon$$

gelten. Es folgt

$$L\vartheta\le-\varepsilon\operatorname{tr}u^{ij}\quad\text{in }\Omega_\delta.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\vartheta=&(u-\underline{u})+\alpha d-\mu d^2\\ \ge&(\alpha-\mu d).\end{aligned}$$

Fixiere nun $\delta>0$ so klein, dass $\alpha-\mu\delta\ge 0$ gilt und somit

$$\vartheta\ge 0\quad\text{in }\Omega_\delta.$$

Definiere nun die eigentliche Barriere

$$\Theta^\pm:=A\vartheta+B|x-x_0|^2\pm T(u-\underline{u})$$

für noch zu wählende Konstanten $1 \ll B \ll A$. Fixiert man $B \gg 1$ hinreichend groß, so gilt

$$B|x - x_0|^2 \pm T(u - \underline{u}) \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_\delta$$

mit Gleichheit in $x = x_0$ und somit

$$\Theta^\pm \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_\delta,$$

wiederum mit Gleichheit in $x = x_0$. Da $|x - x_0|^2 \in C^2$ ist, folgt

$$\left|L|x - x_0|^2\right| \leq c \cdot \left(1 + \operatorname{tr} u^{ij}\right).$$

Somit gilt

$$L\Theta^\pm \leq -A\varepsilon \operatorname{tr} u^{ij} + c\left(1 + \operatorname{tr} u^{ij}\right),$$

wobei c nun auch von B abhängt, was aber nun fixiert ist. Genau wie oben erhält man aus der geometrisch-arithmetischen Ungleichung, dass

$$\operatorname{tr} u^{ij} \geq \frac{1}{c} > 0.$$

Somit kann man $A \gg 1$ fixieren, so dass

$$L\Theta^\pm \leq 0 \quad \text{in } \Omega_\delta$$

gilt. Da $\Theta^\pm \geq 0$ auf $\partial\Omega_\delta$, liefert das Maximumprinzip

$$\Theta^\pm \geq 0 \quad \text{in } \Omega_\delta.$$

Da $\Theta^\pm(x_0) = 0$ gilt, folgt

$$\left\langle D\Theta^\pm(x_0), \nu\right\rangle (x_0) \leq 0,$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$ ist. Somit gilt in x_0

$$\langle AD\vartheta, \nu\rangle + 2B\langle x - x_0, \nu\rangle \pm \langle DT(u - \underline{u}), \nu\rangle \leq 0.$$

Aufgrund der C^1-Abschätzungen ist die erste Ableitung von $\vartheta = (u - \underline{u}) + \alpha d - \mu d^2$ beschränkt. Der zweite Term verschwindet. Nach Wahl des Koordinatensystems folgt also

$$|(T(u - \underline{u}))_n| \leq c.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^n} T(u - \underline{u}) =& \frac{\partial}{\partial x^n}(u_t + u_n\omega_t - \underline{u}_t - \underline{u}_n\omega_t)\\ =& u_{tn} + u_{nn}\omega_t + u_n\omega_{tn} - \underline{u}_{tn} - \underline{u}_{nn}\omega_t - \underline{u}_n\omega_{tn}.\end{aligned}$$

Da $D\omega = 0$ für $\hat{x} = 0$, folgt in x_0

$$|u_{tn}| \leq c.$$

4.3. Doppelt normale C^2-Abschätzungen am Rand. Ziel ist es, eine positive untere Schranke für die doppelt tangentialen Ableitungen am Rand zu bewiesen. Dann kann man die Differentialgleichung für eine obere Schranke an die doppelt normalen zweiten Ableitungen von u am Rand benützen. (Eine untere Schranke folgt aus der Konvexität von u.)

Betrachte

$$\partial\Omega \ni x \mapsto \inf_{\substack{\xi \in T_x\partial\Omega \\ |\xi| = 1}} u_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Aufgrund der Kompaktheit nimmt diese Funktion ihr Minimum in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ an. Wähle ein Koordinatensystem, so dass $(\hat{x}, x^n) = (0, 0) = x_0$. Lokal gelte $\partial\Omega = \operatorname{graph}\omega$, wobei $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ und weiterhin sei $w(0) = 0$, $D\omega(0) = 0$. Sei das Koordinatensystem so gedreht, dass

$$u_{11} = \inf_{x\in\partial\Omega} \inf_{\substack{\xi\in T_x\partial\Omega \\ |\xi|=1}} u_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Definiere eine Vektorfeld $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nahe 0 durch

$$\xi := \frac{e_1 - \langle e_1, \nu\rangle\nu}{|e_1 - \langle e_1, \nu\rangle\nu|},$$

wobei

$$\nu\left(\hat{x}, x^n\right) = \frac{(D\omega(\hat{x}), -1)}{\sqrt{1 + |D\omega|^2}}.$$

Da $|\xi| = 1$ und da ξ auf $\partial\Omega$ tangential ist, folgt

$$u_{ij}\xi^i\xi^j(x) \geq \inf_{\substack{\zeta\in T_x\partial\Omega \\ |\zeta|=1}} u_{ij}\zeta^i\zeta^j(x)$$

für $x \in \partial\Omega$ mit Gleichheit in $x = x_0 = 0$.

4.3.1. *Konvexitätsbedingung an den Rand.* Auf $\partial\Omega$ gilt $u = \underline{u}$ und ξ ist tangential. Also folge auf $\partial\Omega$

$$0 = (u - \underline{u})_i\xi^i$$

und

$$0 = \left((u - \underline{u})_i\xi^i\right)_j \xi^j.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\xi =& \frac{(1,\, 0,\, \ldots,\, 0) - \frac{\omega_1(D\omega,-1)}{1+|D\omega|^2}}{\left|(1,\, 0,\, \ldots,\, 0) - \frac{\omega_1(D\omega,-1)}{1+|D\omega|^2}\right|}\\ =& \frac{\left(1 + |D\omega|^2 - \omega_1^2,\, -\omega_1\omega_2,\, \ldots,\, -\omega_1\omega_{n-1},\, \omega_1\right)}{\left|(1 + |D\omega|^2 - \omega_1^2,\, -\omega_1\omega_2,\, \ldots,\, -\omega_1\omega_{n-1},\, \omega_1)\right|}.\end{aligned}$$

Daher ergibt sich im Punkt x_0

$$\xi_1^n \equiv \frac{\partial\xi^n}{\partial x^1} = \omega_{11}.$$

Benutze nun, dass sich die Identität als Summe von Tensorprodukten einer Orthonormalbasis darstellen läßt. Da die Tangentialableitungen von $u - \underline{u}$ am Rand verschwinden, folgt

$$0 = (u - \underline{u})_{ij}\xi^i\xi^j + (u - \underline{u})_k\nu^k \cdot \nu_i\xi_j^i\xi^j,$$

wobei ν_i keine Ableitung ist. Im Punkt x_0 vereinfacht sich dies zu

$$0 = (u - \underline{u})_{ij}\xi^i\xi^j + (u - \underline{u})_n\omega_{11}.$$

Da die Sublösung strikt konvex ist, gibt es $c_{\underline{u}} > 0$, so dass

$$\underline{u}_{11} \geq \frac{1}{c_{\underline{u}}} > 0,$$

insbesondere in x_0. Nehme weiterhin an, dass in x_0

$$0 < u_{11} \leq \tfrac{1}{2}\underline{u}_{11}$$

gilt. Falls $u_{11}(x_0) \geq \frac{1}{2}\underline{u}_{11}(x_0)$ gilt, sind tangentiale zweite Ableitungen gleichmäßig durch eine positive Konstante nach unten beschränkt und die nächsten Schritte sind nicht nötig.

Es folgt in x_0

$$\begin{aligned}(u-\underline{u})_n\omega_{11} =&(\underline{u}-u)_{11}\\ &\ge\tfrac12\underline{u}_{11}\ge\tfrac12\frac{1}{c_{\underline{u}}}>0.\end{aligned}$$

Da $u\ge\underline{u}$ mit Gleichheit auf $\partial\Omega$ gilt, folgt

$$(u-\underline{u})_n(x_0)\ge 0.$$

Daher ist $\omega_{11}(x_0)$ (eigentlich im Punkte 0 ausgewertet) durch eine positive Konstante nach unten abgeschätzt. Dies gilt auch für $\hat{x}$ nahe 0. Ebenso ist $\nu_i\xi^i_j\xi^j$ für $\hat{x}$ nach 0 nach oben durch eine negative Konstante gleichmäßig abgeschätzt.

Definiere $\tilde{\omega}_{11}(x):=-\nu_i\xi^i_j\xi^j>0$. Es gilt

$$u_{ij}\xi^i\xi^j=\underline{u}_{ij}\xi^i\xi^j+(u-\underline{u})_k\nu^k\cdot\tilde{\omega}_{11}.$$

Aufgrund der Extremalbedingung für $u_{ij}\xi^i\xi^j$ auf $\partial\Omega$ folgt dort

$$\begin{aligned}u_{ij}\xi^i\xi^j(x_0)\le&u_{ij}\xi^i\xi^j(x)\\ =&\underline{u}_{ij}\xi^i\xi^j(x)+(u-\underline{u})_k\nu^k(x)\cdot\tilde{\omega}_{11}(x).\end{aligned}$$

Umordnen ergibt

$$\begin{aligned}(\underline{u}-u)_\nu(x)\le&\tilde{\omega}_{11}^{-1}(x)\left[\underline{u}_{ij}\xi^i\xi^j(x)-u_{ij}\xi^i\xi^j(x_0)\right]\\ \equiv&\Psi(x).\end{aligned}$$

Nach Definition ist Ψ nahe x_0 von der Klasse C^2 mit entsprechenden a priori Abschätzungen. Es gilt

$$\Psi-\underline{u}_\nu+u_\nu\ge 0\quad\text{auf }\partial\Omega$$

mit Gleichheit in $x=x_0$. Da $\Psi-\underline{u}_\nu+u_\nu$ nahe x_0 beschränkt ist, gibt es für genügend kleines $\delta>0$ ein $B\gg 1$, so dass

$$B|x-x_0|^2+\Psi-\underline{u}_\nu+u_\nu\ge 0\quad\text{auf }\partial\Omega_\delta.$$

Ist $\delta>0$ klein genug, so existiert $A\gg 1$, so dass

$$\Theta:=A\vartheta+B|x-x_0|^2+\Psi-\underline{u}_\nu+u_\nu$$

die Differentialungleichung

$$\begin{cases}L\Theta\le 0 & \text{in }\Omega_\delta,\\ \Theta\ge 0 & \text{auf }\partial\Omega_\delta\end{cases}$$

erfüllt. Dazu benutzt man, dass

$$\begin{aligned}L(u_k\nu^k)\le&\left(u^{ij}u_{ijk}-\hat{f}_{p_i}u_{ik}\right)\nu^k+2u^{ij}u_{ki}\nu^k_j+u^{ij}u_k\nu^k_{ij}+c\\ \le&c\left(1+\operatorname{tr}u^{ij}\right)\end{aligned}$$

und somit auch

$$L\Theta\le-\varepsilon A\operatorname{tr}u^{ij}+c(B+1)\left(1+\operatorname{tr}u^{ij}\right)$$

folgt. Nach Maximumprinzip gilt somit

$$\Theta\ge 0\quad\text{in }\Omega_\delta$$

mit Gleichheit in $x=x_0$. Damit folgt $\Theta_\nu\le 0$ und somit

$$u_{\nu\nu}(x_0)\le c.$$

4.3.2. *Untere Schranke an doppelt tangentiale Ableitungen in x_0.* Wähle ein Koordinatensystem, so dass in x_0 für die äußere Normale $\nu = -e_n$ gilt und so dass $(u_{ij})_{1\le i,\, j\le n-1}$ in x_0 diagonal ist.

Aufgrund der C^1-Abschätzungen ist $\det D^2u$ beiderseitig durch positive Konstanten a priori beschränkt. Es gilt in x_0

$$\begin{aligned}\det D^2u &= \det \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 & u_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-2\,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{n-1\,n-1} & u_{n-1\,n} \\ u_{1n} & \dots & u_{n-2\,n} & u_{n-1\,n} & u_{nn} \end{pmatrix} \\ &\le \prod_{i=1}^{n} u_{ii}\end{aligned}$$

Somit gilt sogar

$$\prod_{i=1}^{n} u_{ii} \ge c_1.$$

Da alle Faktoren u_{ii} nach oben beschränkt und positiv sind, ist auch $u_{11}(x_0)$ nach unten durch eine positive Konstante beschränkt.

Nach Wahl von x_0 ist $u_{11}(x_0)$ die kleinste doppelt tangentiale Ableitung überhaupt. Somit sind alle doppelt tangentialen Ableitungen nach unten durch eine positive Konstante beschränkt.

4.3.3. *Obere Schranke an doppelt normale Ableitungen am Rand.* Wähle in einem beliebigen Randpunkt ein Koordinatensystem wie im letzten Abschnitt. Dort gilt

$$c_2 \ge \prod_{i=1}^{n} u_{ii} - \sum_{j=1}^{n-1} u_{jn}^2 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\ne j}}^{n-1} u_{ii}.$$

Da alle zweiten Ableitungen im zweiten Term a priori beschränkt sind, ist $\prod\limits_{i=1}^{n} u_{ii}$ nach oben gleichmäßig beschränkt. Aufgrund des letzten Abschnittes sind die Faktoren u_{ii}, $1 \le i \le n-1$, gleichmäßig durch positive Konstanten nach unten beschränkt. Damit ist auch u_{nn} a priori beschränkt und es gilt somit

$$|D^2u| \le C \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

4.4. Innere C^2-Abschätzungen. Betrachte für $\beta \gg 1$ die Abbildung $\tilde{w}$:

$$\Omega \times \mathbb{S}^{n-1} \ni (x,\xi) \mapsto \tfrac{1}{2}\beta|Du|^2 + \log u_{\xi\xi}.$$

Es genügt zu zeigen, dass $\tilde{w}$ in einem inneren lokalen Maximum beschränkt ist.

Nehme also $\tilde{w}$ in $x_0 \in \Omega$ ein lokales inneres Maximum an. Nach Rotation des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $\xi = e_1$. Dann nimmt die Funktion

$$\begin{aligned} w : \Omega &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \tfrac{1}{2}\beta|Du|^2 + \log u_{11} \end{aligned}$$

in x_0 ein lokales inneres Maximum an. Somit gilt dort

$$\begin{aligned}0 =&w_i = \beta u^k u_{ki} + \frac{1}{u_{11}} u_{11i},\\ 0 \ge&w_{ij} = \beta u^k u_{kij} + \beta u^k_j u_{ki} + \frac{1}{u_{11}} u_{11ij} - \frac{1}{u_{11}^2} u_{11i} u_{11j}.\end{aligned}$$

Da u^{ij} positiv definit ist, gilt in diesem Punkt

$$\begin{aligned}0 \ge&\beta u^k u^{ij} u_{ijk} + \beta u^{ij} u^k_j u_{ki} + \frac{1}{u_{11}} u^{ij} u_{ij11} - \frac{1}{u_{11}^2} u^{ij} u_{11i} u_{11j}\\ =&\beta u^k u^{ij} u_{ijk} + \beta \Delta u + \frac{1}{u_{11}} u^{ij} u_{ij11} - \frac{1}{u_{11}^2} u^{ij} u_{11i} u_{11j}.\end{aligned}$$

Differenziere die Gleichung

$$\begin{aligned}\log\det D^2 u =&\hat{f}(x,u,Du)\\ =&\log f(x,u,Du)\end{aligned}$$

und erhalte

$$\begin{aligned}u^{ij} u_{ijk} =&\hat{f}_k + \hat{f}_k u_k + \hat{f}_{p_i} u_{ik},\\ u^{ij} u_{ij11} - u^{ik} u^{jl} u_{ij1} u_{kl1} =&\hat{f}_{11} + 2\hat{f}_{1z} u_1 + 2\hat{f}_{1p_i} u_{i1} + \hat{f}_{zz} u_1 u_1\\ &+ 2\hat{f}_{zp_i} u_1 u_{i1} + \hat{f}_z u_{11} + \hat{f}_{p_i p_j} u_{i1} u_{j1} + \hat{f}_{p_i} u_{i11}.\end{aligned}$$

Aufgrund der C^1-Abschätzungen gilt im Falle $u_{11} \ge 1$, was wir ohne Einschränkung annehmen dürfen,

$$\frac{1}{u_{11}} u^{ij} u_{ij11} \ge \frac{1}{u_{11}} u^{ik} u^{jl} u_{ij1} u_{kl1} + \frac{1}{u_{11}} \hat{f}_{p_i p_j} u_{i1} u_{j1} + \frac{1}{u_{11}} \hat{f}_{p_i} u_{i11} - c.$$

Oben eingesetzt ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}0 \ge&\beta u^k u^{ij} u_{ijk} + \beta \Delta u\\ &+ \frac{1}{u_{11}} \left(u^{ik} u^{jl} u_{ij1} u_{kl1} - \frac{1}{u_{11}} u^{ij} u_{11i} u_{11j} \right)\\ &+ \frac{1}{u_{11}} \hat{f}_{p_i p_j} u_{i1} u_{j1} + \frac{1}{u_{11}} \hat{f}_{p_i} u_{i11} - c.\end{aligned}$$

Wir dürfen annehmen, dass u_{ij} diagonal ist. Es folgt

$$\begin{aligned}u^{ik} u^{jl} u_{ij1} u_{kl1} \ge&u^{ik} u^{11} u_{i11} u_{k11}\\ =&u^{ik} \frac{1}{u_{11}} u_{i11} u_{k11}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$0 \ge \beta u^k u^{ij} u_{ijk} + \beta \Delta u + \frac{1}{u_{11}} \hat{f}_{p_i p_j} u_{i1} u_{j1} + \frac{1}{u_{11}} \hat{f}_{p_i} u_{i11} - c.$$

Benutze für den ersten Term die differenzierte Gleichung und die Extremalitätsbedingung für den letzten Term

$$\begin{aligned}0 \ge&\beta u^k (\hat{f}_k + \hat{f}_z u_k + \hat{f}_{p_i} u_{ik}) + \beta \Delta u - \beta \hat{f}_{p_i} u^k u_{ki} - c\left(1 + \left|D^2 u\right|\right)\\ \ge&(\beta - c)\Delta u - c(1+\beta),\end{aligned}$$

wobei sich zwei Terme gerade gegenseitig wegheben. Für hinreichend großes $\beta \gg 1$ ist daher $\Delta u(x_0) \ge u_{11}(x_0)$ nach oben a priori beschränkt. Wie man durch Testen von u_{ij} mit Vektoren der Form $(1,1)$ und $(1,-1)$, geeignet mit Nullen aufgefüllt, sieht, sind damit alle Komponenten von $u_{ij}(x_0)$ aufgrund der positiven Definitheit von D^2u a priori beschränkt. Es folgt

$$\sup_{\Omega} \left|D^2u\right| \le c + \sup_{\partial\Omega} \left|D^2u\right|.$$

Zusammen mit den vorherigen Abschätzungen folgt demnach

$$\|u\|_{C^2\left(\overline{\Omega}\right)} \le c.$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung sehen wir, dass die Eigenwerte von D^2u auch nach unten durch eine positive Konstante a priori beschränkt sind.

5. Weitere a priori Abschätzungen und Existenz

5.1. $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen. Da

$$D^2u \mapsto \log\det D^2u,$$

aufgrund der a priori Abschätzungen, ein gleichmäßig strikt konkaver, gleichmäßig elliptischer Operator ist, sind die Abschätzungen von Krylov und Safonov [**9, 15, 16, 27**] anwendbar. Wir erhalten

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \le c.$$

5.2. C^k-Abschätzungen. Nun wissen wir, dass "$a^{ij} = u^{ij}$" in der einmal differenzierten Gleichung Hölder-stetig ist. Daher liefert die Schaudertheorie, iterativ angewandt auf die mehrfach differenzierte Gleichung, C^k-Abschätzungen für beliebiges k.

5.3. Existenz. Aufgrund der a priori Abschätzungen liefert nun die Stetigkeitsmethode (im Falle geeigneter Monotonie in u) oder eine Abbildungsgradmethode wie in [**10**] die Existenz einer Lösung.

ANHANG A

Etwas elementare Algebra

1. Differenzieren der Determinante

Lemma 1.1. *Es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(a_{kl}) = \det(a_{kl})a^{ji},$$

falls a_{ij} invertierbar ist und a^{ij} die Inverse ist, d. h. wenn $a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k$ gilt.

Proof. Es genügt, diese Gleichung nach Multiplikation mit a_{ik} und Summation über i nachzurechnen. Zeige also, dass

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(a_{kl})a_{ik} = \det(a_{kl})\delta^j_k$$

gilt. Wir erhalten unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(a_{kl}) = \det\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n}\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(a_{kl})\cdot a_{ik} &= \det\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1\,k} & 0 & \dots & 0\\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,j-1} & 0 & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2\,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}\\
&\quad+\det\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n}\\ 0 & \dots & 0 & a_{2\,k} & 0 & \dots & 0\\ a_{3\,1} & \dots & a_{3\,j-1} & 0 & a_{3\,j+1} & \dots & a_{3\,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}\\
&\quad+\dots\\
&=\det\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,k} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n}\\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,j-1} & 0 & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2\,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\det\begin{pmatrix}
a_{1\,1} & \dots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n}\\
a_{2\,1} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{1\,k} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2\,n}\\
a_{3\,1} & \dots & a_{3\,j-1} & 0 & a_{3\,j+1} & \dots & a_{3\,n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n}
\end{pmatrix}\\
&+\dots\\
=&\det\begin{pmatrix}
a_{1\,1} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,k} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,k} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n}
\end{pmatrix}\\
=&\delta^j_k \det(a_{rs}).
\end{aligned}
$$

□

2. Differenzieren der Inversen

Lemma 2.1. *Sei $a_{ij}(t)$ differenzierbar von t abhängig mit Inverser $a^{ij}(t)$. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}a^{ij} = -a^{ik}a^{lj}\frac{d}{dt}a_{kl}.$$

Proof. Es gilt

$$a^{ik}a_{kj} = \delta^i_j.$$

Nehme an, es gibt $\tilde{a}^{ij}$ mit

$$a_{ik}\tilde{a}^{kj} = \delta^j_i.$$

Dann gilt $a^{ij} = \tilde{a}^{ij}$, da

$$
\begin{aligned}
a^{ij} =& a^{ik}\delta^j_k = a^{ik}\left(a_{kl}\tilde{a}^{lj}\right)\\
=& \left(a^{ik}a_{kl}\right)\tilde{a}^{lj} = \tilde{a}^{ij}.
\end{aligned}
$$

Differenzieren liefert

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{d}{dt}\delta^i_j = \frac{d}{dt}\left(a^{ik}a_{kj}\right)\\
=& \frac{d}{dt}a^{ik}a_{kj} + a^{ik}\frac{d}{dt}a_{kj}
\end{aligned}
$$

und somit folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a^{il} =& \frac{d}{dt}a^{ik}\delta^l_k\\
=& \frac{d}{dt}a^{ik}a_{kj}a^{jl}\\
=& -a^{ik}\frac{d}{dt}a_{kj}a^{jl}.
\end{aligned}
$$

□

Teil 2

Schoutentensorgleichungen

KAPITEL 4

Grundlagen

Wir möchten innere a priori Abschätzungen beweisen. Diese finden sich in [**11**] und in überarbeiteter Version in [**26**].

1. Zulässige Kegel

DEFINITION 1.1. Sei $\sigma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le n$, die k-te elementarsymmetrische Funktion, $\sigma_0 \equiv 1$. $\sigma_k = 1$ für $k < 0$ und $\sigma_k = 0$ für $k > n$. Für $1 \le k \le n$ gilt

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

Definiere

$$\Gamma_k := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_l(\lambda) > 0 \text{ für alle } 0 \le l \le k\}$$

und

$$\sigma_{k;i}(\lambda) := \sigma_k(\lambda)|_{\lambda_i = 0}.$$

LEMMA 1.2. *Sei $\lambda \in \Gamma_k$, $1 \le k \le n$, und sei $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n$. Dann gilt*

(i) $$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \sigma_{k-1;i}(\lambda),$$

(ii) $$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_i}(\lambda) > 0,$$

(iii) $$\lambda_k \ge 0,$$

(iv) $$\sigma_k(\lambda) = \sigma_{k;i}(\lambda) + \lambda_i \sigma_{k-1;i}(\lambda),$$

(v) $$\sum_{i=1}^n \sigma_{k-1;i}(\lambda) = (n-k+1)\sigma_{k-1}(\lambda),$$

(vi) $$\sigma_{k-1;n}(\lambda) \ge \ldots \ge \sigma_{k-1;1}(\lambda) > 0,$$

(vii) $$\sigma_{k-1;k}(\lambda) \ge c_{n,k} \sum_{i=1}^n \sigma_{k-1;i}(\lambda), \quad c_{n,k} > 0,$$

(viii) $$\sigma_{k-1}(\lambda) \ge \frac{k}{n-k+1} \binom{n}{k}^{1/k} (\sigma_k(\lambda))^{\frac{k-1}{k}}.$$

Weiterhin ist $(\sigma_k(\lambda))^{1/k}$ in Γ_k konkav. Überdies ist σ_k konkav, wenn man es als Funktion einer symmetrischen Matrix betrachtet.

BEWEISSKIZZE. (i) ist elementar.

(ii) folgt aus [**2**] und [**7**].

(iii) folgt durch wiederholte Anwendung von [**13**, Lemma 2.4], das besagt, dass $\lambda \in \Gamma_k$ auch impliziert, dass $\sigma_{h;i}(\lambda) > 0$ ist für $0 \le h \le k-1$ und beliebiges i. Die Behauptung folgt dann aus $\lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n > 0$.

(iv) folgt direkt nach Definition, siehe auch [**18**].

(v) folgt auch direkt nach Definition, siehe aber auch [**13, 18**].

(vi) findet sich in [**6**], dort aber auch ohne Beweis. Die Behauptung folgt aber aus

$$\sigma_{k-1}(\lambda) = \lambda_i\lambda_j\sigma_{k-3;ij}(\lambda) + \lambda_i\sigma_{k-2;ij} + \lambda_j\sigma_{k-2;ij} + \sigma_{k-1;ij},$$

da [**13**, Lemma 2.4] die Ungleichung $\sigma_{k-2;ij} > 0$ liefert. Setze nun $\lambda_i = 0$. Falls $k = 2$ ist, ersetze $\sigma_{k-3;ij}$ in der obigen Formel durch 0. Für $k = 1$ ist die Behauptung offensichtlich und die obige Formel wird überhaupt nicht benötigt.

(vii) folgt aus (v) und [**18**].

(viii) folgt aus der MacLaurinschen Ungleichung [**14, 21**]

$$\left(\frac{1}{\binom{n}{k}}\sigma_k(\lambda)\right)^{1/k} \le \left(\frac{1}{\binom{n}{l}}\sigma_l(\lambda)\right)^{1/l}$$

for $\lambda \in \Gamma_k$ and $k \ge l \ge 1$, hier angewandt für $l = k - 1$.

Die Konkavität folgt aus [**2**] und [**7**] und [**14**] sowie [**1, 8**]

$$F^{ij,kl}\eta_{ij}\eta_{kl} = \sum_{i,j}\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\eta_{ii}\eta_{jj} + \sum_{i\ne j}\frac{\frac{\partial F}{\partial\lambda_i} - \frac{\partial F}{\partial\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j}(\eta_{ij})^2.$$

□

2. Geometrie

Definition 2.1. Der Schoutentensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit der Dimension $n \ge 3$ ist definiert als

$$S_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\right).$$

Bemerkung 2.2. Der Riemannsche Krümmungstensor ist die Summe des konform invarianten Weyltensors (mit einem gehobenen Index) und des Kulkarni-Nomizu-Produktes der Metrik mit dem Schoutentensor. Also beinhaltet der Schoutentensor die geometrisch interessante Information bei konformen Deformationen der Metrik.

Lemma 2.3. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $v \in C^2(M)$. Dann ist der Schoutentensor $\tilde{S}_{ij}$ der konform äquivalenten Mannigfaltigkeit $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right) = \left(M, e^{-2v}g\right)$ gegeben durch*

$$\tilde{S}_{ij} = v_{ij} + v_iv_j - \tfrac{1}{2}|\nabla v|^2 g_{ij} + S_{ij},$$

wobei wir Indices für kovariante Ableitungen schreiben.

Proof. Durch direktes Einsetzen in die Definitionen erhält man nacheinander Ausdrücke für $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$, $\tilde{R}^i{}_{jkl}$, $\tilde{R}_{ij}$, $\tilde{R}$ und $\tilde{S}_{ij}$. □

Man verwendet unterschiedliche Schreibweisen für den konformen Faktor. Wir benötigen noch das folgende

Lemma 2.4. *Die Mannigfaltigkeit $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right) = \left(M, u^{-2}g\right)$, $u \in C^2(M, \mathbb{R}_{>0})$ besitzt den Schoutentensor $\tilde{S}_{ij}$ gegeben durch*

$$u\tilde{S}_{ij} = u_{ij} - \tfrac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} + uS_{ij}.$$

PROOF. Es gilt $e^{-2v} = u^{-2}$ mit v wie in Lemma 2.3. Wir erhalten

$$\begin{aligned} v =& \log u, \\ v_i =& \frac{1}{u} u_i, \\ v_{ij} =& \frac{1}{u} u_{ij} - \frac{1}{u^2} u_i u_j. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ij} =& v_{ij} + v_i v_j - \tfrac{1}{2} |\nabla v|^2 g_{ij} + S_{ij} \\ =& \frac{1}{u} u_{ij} - \frac{1}{u^2} u_i u_j + \frac{1}{u^2} u_i u_j - \frac{1}{2u^2} |\nabla u|^2 g_{ij} + S_{ij}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

LEMMA 2.5. *Die k-te elementarsymmetrische Funktion der Eigenwerte des Schoutentensors bezüglich der Metrik ist f, falls*

$$\sigma_k \left(\lambda \left(u \tilde{S}_{il} g^{lj} \right) \right) = u^{-k} f$$

gilt, wobei $\lambda \left(u \tilde{S}_{il} g^{lj} \right)$ die Eigenwerte von $u \tilde{S}_{il} g^{lj}$ bezeichnet.

PROOF. Es gilt

$$\begin{aligned} f =& \sigma_k \left(\lambda \left(\tilde{S}_{il} \tilde{g}^{lj} \right) \right) \\ =& \sigma_k \left(u \lambda \left(\tilde{S}_{il} \frac{1}{u} u^2 g^{lj} \right) \right) \\ =& u^k \sigma_k \left(\lambda \left(u \tilde{S}_{il} g^{lj} \right) \right). \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 2.6. Wir schreiben auch

$$\sigma_k \left(u_{ij} - \frac{1}{2u} |\nabla u|^2 g_{ij} + u S_{ij} \right) = u^{-k} f,$$

falls die Hintergrundmetrik g_{ij} fixiert ist.

DEFINITION 2.7. Eine konforme Deformation (oder die zugehörige Funktion, die diese Deformation induziert) heisst (für festes k) zulässig, falls die Eigenwerte des Schoutentensors der konform deformierten Metrik in Γ_k liegen.

KAPITEL 5

Lokale a priori Abschätzungen

1. Lokale C^1-Abschätzungen

Für die C^1-Abschätzungen, die der kompliziertere Teil der inneren a priori Abschätzungen sind, erhalten wir [**11, 26**].

Theorem 1.1. *Sei $1 \le k < n$, $0 < p \in \mathbb{R}$. Die Funktion u sei eine zulässige C^3-Lösung von*

$$\sigma_k \left(u_{ij} - \frac{1}{2u} |\nabla u|^2 g_{ij} + u S_{ij} \right) = f(x) u^{-p}$$

in einem geodätischen Ball $B_r(x_0)$, x_0 ein beliebiger Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Sei $u \in C^3\left(\overline{B_r(x_0)}\right)$ positiv und zulässig, $S_{ij} \in C^1\left(\overline{B_r(x_0)}\right)$ und $0 < f(x) \in C^1\left(\overline{B_r(x_0)}\right)$. Dann gilt

$$\frac{|\nabla u|}{u}(x_0) \le c\left(n, k, p, r, \inf_{B_r(x_0)} u, \|f\|_{C^1(B_r(x_0))}, \inf_{B_r(x_0)} f, \|S_{ij}\|_{C^1}\right).$$

Bemerkung 1.2. Auch für allgemeinere rechte Seiten $f(x, u)$ gilt eine solche Abschätzung, die dann aber auch von $\sup u$ abhängt.

Die Abschätzungen vereinfachen sich, wenn man statt $\frac{1}{u^2}$ in der Testfunktion $\left(\frac{1}{u-\delta}\right)^2$, $\delta = \frac{1}{2} \inf u$ verwendet. Die Abschätzung hängt dann allerdings auch von $\sup u$ ab. (Habe diese Behauptung nicht überprüft.)

Siehe dazu [**26**].

Der Beweis dort scheint im Falle $k = n$ nicht zu funktionieren. Das Resultat ist aber trotzdem richtig. Wir werden es im Anschluß separat beweisen. Neil Trudinger verweist auf [**5**] für eine schöne Darstellung, die in allen Fällen funktioniert.

Proof of Theorem 1.1. Schreibe die Differentialgleichung in der Form

$$F[u] = f(x) u^{-p}.$$

Definiere

$$z := \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \rho^2,$$

wobei

$$\rho(x) := \left(1 - \frac{(\operatorname{dist}(x, x_0))^2}{r^2}\right)^+$$

eine Abschneidefunktion ist.

Die Behauptung folgt, falls z in einem Maximum durch eine Konstante wie in der Behauptung nach oben abgeschätzt ist.

Nehme daher an, dass z in $x_1 \in B_r(x_0)$ maximal sei. Fixiere ein Riemannsches Normalkoordinatensystem, so dass $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g_{ij,k} = 0$, $\Gamma^k_{ij} = 0$ in x_1 gilt. Nehme an, dass

$$|\nabla u| = u_1 > 0$$

im Punkt x_1 gilt.

Differenzieren der betrachteten Testfunktion liefert

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\log z =& \tfrac{1}{2}\log|\nabla u|^2 - \log u + \log\rho,\\
0 =& \left(\tfrac{1}{2}\log z\right)_i\\
=& \frac{u^k u_{ki}}{|\nabla u|^2} - \frac{u_i}{u} + \frac{\rho_i}{\rho},\\
0 \ge& \left(\tfrac{1}{2}\log z\right)_{ij}\\
=& \frac{u^k u_{kij} + u^k_j u_{ki}}{|\nabla u|^2} - 2\frac{u^k u_{ki} u^l u_{lj}}{|\nabla u|^4} - \frac{u_{ij}}{u} + \frac{u_i u_j}{u^2} + \frac{\rho_{ij}}{\rho} - \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass in x_1 die erste Ableitung von $\log z$ verschwindet. Somit stimmen in diesem Punkt kovariante zweite Ableitungen und partielle zweite Ableitungen überein und es folgt die angegebene Semidefinitheit.

Im Punkt x_1 vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{u_{1i}}{u_1} - \frac{u_i}{u} + \frac{\rho_i}{\rho},\\
0 \ge& \frac{u_{1ij}}{u_1} + \frac{u^k_j u_{ki}}{u_1^2} - 2\frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2} - \frac{u_{ij}}{u} + \frac{u_i u_j}{u^2} + \frac{\rho_{ij}}{\rho} - \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^2}\\
=& \frac{u_{1ij}}{u_1} + \sum_{\alpha>1}\frac{u_{\alpha j}u_{\alpha i}}{u_1^2} - \frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2} - \frac{u_{ij}}{u} + \frac{u_i u_j}{u^2} + \frac{\rho_{ij}}{\rho} - \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Betrachte F als Funktion von

$$\left(r_{ij} = u_{ij} - \frac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} + uS_{ij}, g_{ij}\right)$$

und setze

$$F^{ij} = \frac{\partial}{\partial r_{ij}}\sigma_k(\lambda(r)).$$

Differenzieren der Gleichung $F[u] = f(x)u^{-p}$ liefert

$$F^{ij}\left(u_{ij1} + \left(\frac{|\nabla u|^2 u_1}{2u^2} - \frac{u^k u_{k1}}{u}\right)g_{ij} + (uS_{ij})_1\right) = \left(f(x)u^{-p}\right)_1.$$

Dies vereinfacht sich im Punkt x_1 zu

$$F^{ij}\left(u_{ij1} + \left(\frac{u_1^3}{2u^2} - \frac{u_1 u_{11}}{u}\right)g_{ij}\right) = \left(f(x)u^{-p}\right)_1 - F^{ij}(uS_{ij})_1.$$

Dritte Ableitungen lassen sich wie folgt vertauschen

$$u_{ij1} = u_{1ij} + R^l{}_{ij1}u_l.$$

Wir erhalten somit in x_1 mit $F^{ij}g_{ij} = \operatorname{tr} F^{ij}$

$$\begin{aligned}
0 \geq & F^{ij}\left(\tfrac{1}{2}\log z\right)_{ij} \\
= & \frac{1}{u_1}F^{ij}\left(u_{ij1} - R^l{}_{ij1}u_l\right) + \sum_{\alpha>1} F^{ij}\frac{u_{\alpha j}u_{\alpha i}}{u_1^2} - F^{ij}\frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2} \\
& - F^{ij}\frac{u_{ij}}{u} + F^{ij}\frac{u_iu_j}{u^2} + F^{ij}\left(\frac{\rho_{ij}}{\rho} - \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^2}\right) \\
\geq & \frac{1}{u_1}\left(\left(fu^{-p}\right)_1 - F^{ij}(uS_{ij})_1 - \left(\frac{u_1^3}{2u^2} - \frac{u_1u_{11}}{u}\right)\operatorname{tr} F^{ij}\right) \\
& - c\operatorname{tr} F^{ij} + \sum_{\alpha>1} F^{ij}\frac{u_{\alpha j}u_{\alpha i}}{u_1^2} - F^{ij}\frac{u_{1i}u_{1j}}{u_1^2} \\
& - F^{ij}\frac{u_{ij}}{u} + F^{11}\frac{u_1^2}{u^2} + F^{ij}\left(\frac{\rho_{ij}}{\rho} - \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Eulerschen Homogenitätsrelation erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{u}F^{ij}u_{ij} = & -\frac{1}{u}F^{ij}\left(u_{ij} - \frac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} + uS_{ij}\right) \\
& - \frac{1}{2u^2}|\nabla u|^2\operatorname{tr} F^{ij} + F^{ij}S_{ij} \\
= & -\frac{1}{u}kF - \frac{1}{2u^2}|\nabla u|^2\operatorname{tr} F^{ij} + F^{ij}S_{ij} \\
\geq & -\frac{1}{u}kfu^{-p} - \frac{u_1^2}{2u^2}\operatorname{tr} F^{ij} - c\operatorname{tr} F^{ij} \\
\geq & -\frac{c}{u^{p+1}} - \frac{u_1^2}{2u^2}\operatorname{tr} F^{ij} - c\operatorname{tr} F^{ij}.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt die folgende einfache Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{u_1}\left(\left(fu^{-p}\right)_1 - F^{ij}(uS_{ij})_1\right) \\
\geq & -c\frac{u^{-p}}{u_1} - cu^{-p-1} - c\operatorname{tr} F^{ij} - c\frac{u}{u_1}\operatorname{tr} F^{ij} \\
\geq & -c\left(u^{-p-1} + \frac{u^{-p}}{u_1}\right) - c\left(1 + \frac{u}{u_1}\right)\operatorname{tr} F^{ij}.
\end{aligned}$$

Nun gilt mit $d = \operatorname{dist}(x, x_0)$ in $B_r(x_0)$

$$\begin{aligned}
\rho_i = & -\frac{2dd_i}{r^2}, \\
\rho_{ij} = & -\frac{2dd_{ij} + 2d_id_j}{r^2}, \\
F^{ij}\left(\frac{\rho_{ij}}{\rho} - \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^2}\right) = & -\frac{2}{\rho r^2}F^{ij}(dd_{ij} + d_id_j) - \frac{4d^2}{r^4\rho^2}F^{ij}d_id_j \\
\geq & -\frac{c}{\rho r^2}\operatorname{tr} F^{ij} - \frac{4}{r^2\rho^2}\operatorname{tr} F^{ij} \\
\geq & -c\frac{1}{r^2\rho^2}\operatorname{tr} F^{ij},
\end{aligned}$$

da $d \le r$, $|\nabla d| \le 1$ fast überall und $0 \le \rho \le 1$. Diese Abschätzung gilt zunächst nur für $x \neq x_0$, da d in x_0 nicht differenzierbar ist.

Da $\rho \in C^2(B_r(x_0))$ folgt die Abschätzung dann aus Stetigkeitsgründen aber auch in ganz $B_r(x_0)$.

Oben eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}0 \ge \sum_{\alpha>1} F^{ij} \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_1^2} - F^{ij} \frac{u_{1i} u_{1j}}{u_1^2}\\ - \frac{c}{u^{p+1}} - \frac{u_1^2}{2u^2} \operatorname{tr} F^{ij} - c \operatorname{tr} F^{ij} + F^{11} \frac{u_1^2}{u^2} - \frac{c}{r^2\rho^2} \operatorname{tr} F^{ij}\\ - \frac{c}{u_1 u^p} - c\left(1 + \frac{u}{u_1}\right) \operatorname{tr} F^{ij} - \frac{u_1^2}{2u^2} \operatorname{tr} F^{ij} + \frac{u_{11}}{u} \operatorname{tr} F^{ij}.\end{aligned}$$

Hier heben sich drei Terme gegenseitig weg.

Benutze nun

$$\frac{|\nabla \rho|}{\rho} \le \frac{c}{r\rho}$$

und die Extremalbedingung in x_1

$$\begin{aligned}&\frac{u_{11}}{u_1} \frac{u_1}{u} \operatorname{tr} F^{ij} - F^{ij} \frac{u_{1i} u_{1j}}{u_1^2}\\ =&\frac{u_1}{u}\left(\frac{u_1}{u} - \frac{\rho_1}{\rho}\right) \operatorname{tr} F^{ij} - F^{ij}\left(\frac{u_i}{u} - \frac{\rho_i}{\rho}\right)\left(\frac{u_j}{u} - \frac{\rho_j}{\rho}\right)\\ =&\frac{u_1^2}{u} \operatorname{tr} F^{ij} - c\frac{u_1}{u}\frac{1}{r\rho} \operatorname{tr} F^{ij} - F^{ij} \frac{u_i u_j}{u^2} + 2F^{ij} \frac{u_i}{u}\frac{\rho_j}{\rho} - F^{ij} \frac{\rho_i \rho_j}{\rho^2}\\ \ge& - c\frac{u_1}{u}\frac{1}{r\rho} \operatorname{tr} F^{ij} - \frac{c}{r^2\rho^2} \operatorname{tr} F^{ij}.\end{aligned}$$

Ist $\frac{u_1}{u} \le 1$, so ist die Behauptung trivial, da z gleichmäßig nach oben beschränkt ist. Sonst folgt in x_1

$$0 \ge \sum_{\alpha_1} F^{ij} \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_1^2} - c\left(\frac{1}{r^2\rho^2} + \frac{u_1}{u}\frac{1}{r\rho} + 1\right) \operatorname{tr} F^{ij} - \frac{c}{u_1 u^p} - \frac{c}{u^{p+1}}.$$

Nehme zunächst an, dass es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\sum_{\alpha>1} u_{\alpha i} u_{\alpha j} \ge \varepsilon \frac{|\nabla u|^4}{u^2} \operatorname{tr} F^{ij} - cu^2 \operatorname{tr} F^{ij}$$

gilt, was wir im nächsten Lemma beweisen wollen.

Nach Lemma 1.2 (i), (v) und (viii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} F^{ij} =& \sum_i \frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_i}\\ =& \sum_i \sigma_{k-1;i}(\lambda)\\ =&(n-k+1)\sigma_{k-1}(\lambda)\\ \ge& k\binom{n}{k}^{1/k} (\sigma_k(\lambda))^{\frac{k-1}{k}}\\ =& k\binom{n}{k}^{1/k} (f(x))^{\frac{k-1}{k}} u^{-p\frac{k-1}{k}}\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{c} k \binom{n}{k}^{1/k} \frac{1}{u^p},$$

wobei c insbesondere von $\inf f$ und $\inf u$ abhängt.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \operatorname{tr} F^{ij} + \frac{\varepsilon}{2c} \frac{1}{u^p} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \\ \leq &c \left(\frac{u^2}{u_1^2} + \frac{1}{r^2 \rho^2} + \frac{u_1}{u} u \frac{1}{r\rho} + 1 \right) \operatorname{tr} F^{ij} + \left(\frac{c}{u_1 u^p} + \frac{c}{u^{p+1}} \right). \end{aligned}$$

Nehme zunächst an, dass der Term mit der Spur der größte der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite ist. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \leq &c \left(\frac{u^2}{u_1^2} + \frac{1}{r^2 \rho^2} + \frac{u_1}{u} \frac{1}{r\rho} + 1 \right) \\ \leq &\frac{1}{2} \frac{u_1^2}{u^2} + c \left(1 + \frac{1}{r^2 \rho^2} \right) \end{aligned}$$

aufgrund der Cauchyschen Ungleichung und da $\frac{u_1}{u} \geq 1$. Wir multiplizieren mit ρ^2 un benutzen, dass $0 \leq \rho \leq 1$

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}(x_0) = \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \rho^2(x_0) \leq \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \rho^2(x_1) \leq c \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \leq c.$$

Damit folgt die Behauptung in diesem Fall.

Sonst erhalten wir in x_1

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} \leq c \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u} \right) \leq c \left(\frac{u}{u_1} + 1 \right) \frac{1}{u} \leq c,$$

da die Konstante von $\inf u$ abhängen darf. Der Rest des Argumentes folgt nun wie oben.

Somit bleibt noch das angekündigte Lemma zu beweisen. □

Lemma 1.3. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 1.1 und den ohne Einschränkungen gemachten Annahmen gibt es $\varepsilon > 0$, das von denselben Größen wie c im Theorem abhängt, so dass in einem Normalkoordinatensystem wie im Theorem*

$$\sum_{\alpha > 1} F^{ij} u_{\alpha i} u_{\alpha j} \geq \varepsilon \frac{|\nabla u|^4}{4u^2} \operatorname{tr} F^{ij} - c u^2 \operatorname{tr} F^{ij}$$

gilt oder es gilt die Behauptung von Theorem 1.1.

Proof. (Erst hier ist das modifizierte Argument in [**26**] deutlich kürzer.)

Definiere $b := \frac{1}{2u} |\nabla u|^2$ und $\tilde{u}_{ij} = u_{ij} + u S_{ij}$.

Es genügt, die folgende Ungleichung nachzuweisen

$$A := \sum_{\alpha > 1} F^{ij} \tilde{u}_{\alpha i} \tilde{u}_{\alpha j} \geq \varepsilon b^2 \operatorname{tr} F^{ij}.$$

Der allgemeine Fall folgt dann direkt durch Einsetzen der Definition von $\tilde{u}_{ij}$ aus der Cauchyschen Ungleichung.

Nach Rotation des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, dass $\tilde{u}_{ij}$ in einem festen Punkt diagonal ist. Dann ist auch F^{kl} in diesem Punkt diagonal. (Dies sieht man direkt, wenn man σ_k durch Unterdeterminanten ausdrückt.) Dann sind die Eigenwerte von

$$\tilde{u}_{ij} - \tfrac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} = u_{ij} - \tfrac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} + uS_{ij}$$

gegeben durch

$$\lambda_1 = \tilde{u}_{11} - b, \ldots, \lambda_n = \tilde{u}_{nn} - b.$$

Sei ξ ein Einheitsvektor, der so gewählt ist, dass $u_\xi = |\nabla u|$ im betrachteten Punkt gilt. Nehme weiterhin an, dass nach einer weiteren Rotation des Koordinatensystems zusätzlich noch $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ gilt.

In diesen neuen Koordinaten gilt

$$A = \sum_i \left(F^{ii}\tilde{u}_{ii}^2 - F^{ii}\tilde{u}_{\xi i}^2 \right).$$

Nehme zunächst an, dass es ein kleines, noch zu fixierendes, δ_0 gibt, so dass für alle Einheitsvektoren e_i die Ungleichung $\langle e_i, \xi\rangle \leq 1 - \delta_0$ gilt. Dann folgt mit $a_{ij} = F^{kl}\tilde{u}_{ki}\tilde{u}_{lj}$

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tr} a_{ij} - \sum_{i,j} a_{ij}\langle \xi, e_i\rangle\langle \xi, e_j\rangle \\ &= \sum_i a_{ii} - \sum_i a_{ii}\langle \xi, e_i\rangle^2 \\ &\geq \sum_i a_{ii}\left(1 - (1-\delta)^2\right) \\ &= \left(2\delta_0 - \delta_0^2\right)\operatorname{tr} a_{ij} \\ &\geq \delta_0 \operatorname{tr} a_{ij}. \end{aligned}$$

Da $\lambda \in \Gamma_k$ folgt insbesondere $\lambda_k > 0$ oder äquivalent $\tilde{u}_{kk} > b$. Wir benutzen Lemma 1.2 (i), (vii)

$$A \geq \delta_0 b^2 F^{kk} \geq \delta_1 b^2 \operatorname{tr} F^{ij}$$

für ein δ_1 mit $\delta_0 > \delta_1 > 0$ und beschränktem Quotienten δ_0/δ_1. In diesem Fall folgt also die Behauptung des Lemmas.

Betrachte nun den Fall, dass ein i^* existiert, so dass $\langle e_{i^*}, \xi\rangle > 1-\delta_0$ gilt. Nehme an, dass $\delta_0 < \frac{1}{4}$ gilt. Wir erhalten für $i \neq i^*$

$$\langle e_i, \xi\rangle^2 \leq \sum_{j\neq i^*}\langle e_j, \xi\rangle^2 + \langle e_{i^*}, \xi\rangle^2 - \langle e_{i^*}, \xi\rangle^2 \leq 1 - (1-\delta_0)^2 = (2-\delta_0)\delta_0 < 2\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Es folgt

$$A \geq \tfrac{1}{2}\sum_{i\neq i^*} F^{ii}\tilde{u}_{ii}^2. \tag{1.1}$$

Nehme an, dass es $j \geq k$, $j \neq i^*$, gibt, so dass $\tilde{u}_{jj} \geq \alpha b$ für eine nach unten kontrollierte Konstante $\alpha > 0$. Dann erhalten wir mit Lemma 1.2 (i), (vi) und (vii)

$$A \geq \tfrac{1}{2}F^{jj}\tilde{u}_{jj}^2 \geq \tfrac{1}{2}F^{kk}(\alpha b)^2 \geq \delta_2 b^2 \operatorname{tr} F^{ij}$$

für eine Konstante δ_2 mit $\delta_0 > \delta_2 > 0$ und kontrolliertem Quotienten δ_0/δ_2. Falls dies nicht erfüllt ist, muss dies an der Bedingung an j liegen, da stets $\tilde{u}_{kk} = \lambda_k + b \geq b$ gilt. Daher gilt in diesem Fall $i^* = k$.

Nehme also im Folgenden an, dass $i^* = k$ gilt mit $\langle e_{i^*}, \xi\rangle > 1 - \delta_0$ und dass es kein j wie oben beschrieben gibt.

Wir unterscheinen zwei Fälle:

1. Fall: Gelte zunächst $k \le n-2$. Aus dem Beweis von Lemma 1.2 (iii) erhalten wir $\lambda_k + \cdots + \lambda_n \ge 0$, also auch $\lambda_k \ge -(\lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_n)$. Nach Annahme gilt für alle $j \ge k+1$ die Ungleichung $\tilde{u}_{jj} \le \alpha b$ und somit nach Definition von λ auch $\lambda_j \le -(1-\alpha)b$. Somit folgt

$$\lambda_k \ge (n-k)(1-\alpha)b \ge 2(1-\alpha)b,$$

da wir $k \le n-2$ angenommen hatten.

Andererseits dürfen wir annehmen, dass

$$\left|\frac{\rho_\xi}{\rho}\right| \le \alpha \frac{u_\xi}{u}$$

gilt. Sonst erhalten wir mit einer Abschätzung für $\nabla\rho$ wie im Beweis von Theorem 1.1

$$\alpha \frac{u_\xi}{u} \le \left|\frac{\rho_\xi}{\rho}\right| \le \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right| \le \frac{c}{r\rho} \tag{1.2}$$

und Theorem 1.1 folgt direkt aus dieser Ungleichung. Weiterhin dürfen wir annehmen, dass auch $1+|S_{\xi\xi}| \le \varepsilon\frac{|\nabla u|}{u}$ für eine kleine Konstante $\varepsilon > 0$ gilt, da auch sonst das Theorem direkt folgt. Somit erhalten wir mit Hilfe der Extremalitätsbedingung in der Testfunktion in Theorem 1.1, wobei hier e_1 dem Vektor ξ entspricht

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{\xi\xi} =& u_{\xi\xi} + uS_{\xi\xi}\\
\le& u_\xi \frac{u_{\xi\xi}}{u_\xi} + \varepsilon|\nabla u|\\
\le& |\nabla u|\left(\frac{u_\xi}{u} - \frac{\rho_\xi}{\rho}\right) + \varepsilon\frac{|\nabla u|^2}{u}\\
\le& |\nabla u|(1+\alpha)\frac{|\nabla u|}{u} + \varepsilon\frac{|\nabla u|^2}{u}\\
=& (2+2\alpha+2\varepsilon)\, b\\
\equiv& (2+\tilde{\alpha})b.
\end{aligned}$$

Hier haben wir zum Schluss $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ hinreichend klein fixiert. Somit kann $\tilde{\alpha}$ klein gewählt werden. Im Falle $\tilde{u}_{nn} \ge 0$ gilt

$$\tilde{u}_{\xi\xi} = \sum_i \xi_i^2 \tilde{u}_{ii} \ge \xi_k^2 \tilde{u}_{kk}.$$

Sonst argumentieren wir wie folgt. Aufgrund der Zulässigkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_k + \ldots + \lambda_n \ge& 0,\\
\tilde{u}_{kk} + \ldots + \tilde{u}_{nn} - b(n-k+1) \ge& 0.
\end{aligned}$$

Wähle l, $k < l \le n+1$, so dass

$$\tilde{u}_{kk} \ge \ldots \ge \tilde{u}_{l-1\,l-1} \ge 0 > \tilde{u}_{ll} \ge \ldots \ge \tilde{u}_{nn}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{kk} + \ldots + \tilde{u}_{kk} + \tilde{u}_{ll} + \ldots + \tilde{u}_{nn} \ge& 0,\\
\xi_l^2 \tilde{u}_{ll} + \ldots + \xi_n^2 \tilde{u}_{nn} \ge& (\tilde{u}_{ll} + \ldots + \tilde{u}_{nn}) \cdot \max_{i \ne k} |\xi_i|^2\\
\ge& -n\tilde{u}_{kk} \cdot \max_{i \ne k} |\xi_i|^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_{\xi\xi} &= \sum_i \xi_i^2 \tilde{u}_{ii} \\
&\geq \xi_k^2 \tilde{u}_{kk} - n\tilde{u}_{kk} \cdot \max_{i\neq k} |\xi_i|^2 \\
&\geq \left(\xi_k^2 - \hat{\alpha}(\delta_0)\right) \tilde{u}_{kk}
\end{aligned}
$$

für eine $\hat{\alpha}(\delta_0) > 0$ mit $\hat{\alpha}(\delta_0) \to 0$ für $\delta_0 \to 0$. Benutze, dass $i^* = k$ gilt und $u_{\xi\xi} \leq (2+\tilde{\alpha})b$

$$
\begin{aligned}
(1-\delta_0)^2 \hat{u}_{kk} &\leq \xi_k^2 \tilde{u}_{kk} \\
&\leq \frac{\xi_k^2}{\xi_k^2 - \hat{\alpha}(\delta_0)} \tilde{u}_{\xi\xi} \\
&\leq (2+\tilde{\alpha}) \frac{\xi_k^2}{\xi_k^2 - \hat{\alpha}(\delta_0)} b.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$
\lambda_k = \tilde{u}_{kk} - b \leq \left(\frac{2+\tilde{\alpha}}{(1-\delta_0)^2} \frac{\xi_k^2}{\xi_k^2 - \hat{\alpha}(\delta_0)} - 1 \right) b \approx b
$$

und aufgrund des letzten Abschnittes

$$
\lambda_k \geq 2(1-\alpha)b \approx 2b.
$$

Für hinreichend klein gewählte Konstanten δ_0, α und $\tilde{\alpha}$ gelten die „$\approx$"-Zeichen näherungsweise und wir erhalten demnach einen Widerspruch.

2. Fall: Sei nun $k = n-1$. Indem man nach Termen mit λ_{k-1} und nach solchen ohne sortiert, erhält man

$$
\frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_{k-1}} \lambda_{k-1} = \sigma_k(\lambda) - \frac{\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n}{\lambda_{k-1}} \geq - \frac{\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n}{\lambda_{k-1}}. \tag{1.3}
$$

Da wir angenommen haben, dass kein j wie oben beschrieben existiert, gilt $\tilde{u}_{nn} \leq \alpha b$ und somit ergibt sich

$$
\lambda_n = \tilde{u}_{nn} - b \leq -(1-\alpha)b.
$$

Durch direktes Differenzieren und wie im Beweis von Lemma 1.2 (iii) erhalten wir

$$
\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \lambda_{n-2}} \sigma_k(\lambda) = \lambda_{n-1} + \lambda_n \geq 0.
$$

Hieraus folgt insbesondere auch, dass die λ's nicht nur nach ihrer Größe, sondern auch betragsmässig nach ihrer Größe geordnet sind. Wir kombinieren die letzten beiden Ungleichungen und erhalten $\lambda_{n-1} \geq (1-\alpha)b$. Somit gilt $\lambda_i \geq (1-\alpha)b$ für alle i mit $1 \leq i \leq n-1$. Wir erhalten mit (1.3) und den obigen Abschätzungen für λ_{n-1} und λ_n

$$
\frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_{k-1}} \lambda_{k-1} \geq -\lambda_1 \cdots \lambda_{n-3} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \geq (1-\alpha)^2 b^2 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-3}.
$$

Aus (1.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} A \geq& \tfrac{1}{2} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_{k-1}} \tilde{u}_{k-1\,k-1}^2 \\ \geq& \tfrac{1}{2} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \lambda_{k-1}} \lambda_{k-1}^2 \quad \text{nach Definition von } \lambda_{k-1} \\ \geq& \tfrac{1}{2} (1-\alpha)^2 b^2 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \\ \geq& \tfrac{1}{c} b^2 \operatorname{tr} F^{ij}, \end{aligned}$$

da $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-2} > 0$ ist und es sich um den größten einzelnen Summanden im Ausdruck für die Spur handelt. Beachte auch, dass die λ's betragsmäßig angeordnet sind.

Somit folgt das Lemma. □

Das folgende Theorem behandelt den noch ausstehenden Fall $k = n$. Es ist etwas spezieller, p tritt nicht auf. Wir folgen dabei [**11**].

THEOREM 1.4. *Die Funktion u sei eine zulässige C^3-Lösung von*

$$\frac{\det w_{ij}}{\det(g_{ij} e^{-2u})} \equiv \frac{\det \left(u_{ij} + u_i u_j - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g_{ij} + S_{ij} \right)}{e^{-2nu} \det g_{ij}} = f(x)$$

in einem geodätischen Ball $B_r(x_0)$, x_0 ein beliebiger Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Sei $u \in C^3 \left(\overline{B_r(x_0)} \right)$ positiv und zulässig, $S_{ij} \in C^1 \left(\overline{B_r(x_0)} \right)$ und $0 < f(x) \in C^1 \left(\overline{B_r(x_0)} \right)$. Dann gilt

$$|\nabla u|(x_0) \leq c \left(n, r, \inf_{B_r(x_0)} u, \|f\|_{C^1(B_r(x_0))}, \inf_{B_r(x_0)} f, \|S_{ij}\|_{C^1} \right).$$

PROOF. Wir betrachten die Funktion $H := \rho |\nabla u|^2$, wobei ρ eine C^2-Abschneidefunktion ist mit $\rho(x_0) = 1$, $\rho(x) = 0$ für $x \notin B_r(x_0)$, $0 \leq \rho \leq 1$. Sei $b \geq 1$ so gewählt, dass $|\nabla \rho|^2 \leq b\rho$ und $|\nabla^2 \rho| \leq b$. Sei x_1 in $B_r(x_0)$ so gewählt, dass $H(x_1) \geq H(x)$ für alle x. Wähle in x_1 Normalkoordinaten, so dass $w_{ij}(x_1)$ diagonal ist.

Im Maximum erhalten wir aufgrund der Extremalität

$$0 = H_i = \rho_i |\nabla u|^2 + 2\rho u^k u_{ki}$$

und

$$\begin{aligned} 0 \geq H_{ij} =& \rho_{ij} |\nabla u|^2 + 2\rho u^k u_{kij} \\ &+ 2\rho_i u^k u_{kj} + 2\rho_j u^k u_{ki} + 2\rho g^{kl} u_{ki} u_{lj} \\ =& \left(\rho_{ij} - 2 \frac{\rho_i \rho_j}{\rho} \right) |\nabla u|^2 + 2\rho u^k u_{kij} + 2\rho g^{kl} u_{ki} u_{lj}. \end{aligned}$$

Somit gilt in diesem Punkt

$$0 \geq w^{ij} H_{ij} = w^{ij} \left(\rho_{ij} - 2 \frac{\rho_i \rho_j}{\rho} \right) |\nabla u|^2 + 2\rho u^k w^{ij} u_{kij} + 2\rho w^{ij} g^{kl} u_{ki} u_{lj}. \tag{1.4}$$

Wir behandeln jeden der hier auftretenden Terme separat.

Zunächst gilt

$$w^{ij} \left(\rho_{ij} - 2 \frac{\rho_i \rho_j}{\rho} \right) |\nabla u|^2 \geq -c(b) \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^2.$$

Für den zweiten Term dürfen wir annehmen, dass

$$H(x_1) \geq A^2 b^2$$

für eine Konstante $A \gg 1$ gilt. Wir schließen, dass

$$\rho^{-1/2} \leq \frac{|\nabla u|}{Ab}.$$

Nehme für später weiterhin an, dass $|\nabla u| \geq 1$ im Extremum gilt. Die Extremalbedingung liefert

$$u^k u_{ki} = -\frac{\rho_i}{2\rho}|\nabla u|^2.$$

Wir erhalten aufgrund der Annahmen an ρ die folgende Abschätzung

$$\left|u^k u_{ki}\right| = \frac{|\nabla \rho|}{2\rho}|\nabla u|^2 \leq \tfrac{1}{2}\rho^{-1/2}|\nabla u|^2\sqrt{b} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{A\sqrt{b}}|\nabla u|^3 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{A}|\nabla u|^3$$

für jedes $1 \leq i \leq n$.

Im zweiten Term auf der rechten Seite von (1.4) vertauschen wir kovariante Ableitungen mit Hilfe der Formel

$$u_{kij} = u_{ijk} - R_{mijk} g^{ml} u_l$$

und benutzen die differenzierte Gleichung

$$\log \frac{\det w_{ij}}{\det g_{ij}} = \log f(x) - 2nu,$$

$$w^{ij} w_{ij;k} = \frac{1}{f} f_k - 2n u_k$$

sowie die Definition von w_{ij}

$$\begin{aligned}
2\rho u^k w^{ij} u_{kij} =& 2\rho u^k w^{ij} \left(u_{ijk} - R_{mijk} g^{ml} u_l\right) \\
\geq& 2\rho u^k w^{ij} u_{ijk} - c\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^2 \\
=& 2\rho u^k w^{ij} w_{ij;k} - 2\rho u^k w^{ij} \left(u_i u_j - \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 g_{ij} + S_{ij}\right)_k - c\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^2 \\
\geq& 2\rho u^k \left(\frac{1}{f} f_k - 2n u_k\right) - 4\rho u^k w^{ij} u_{ik} u_j + 2\rho u^k w^{ij} u^l u_{lk} g_{ij} \\
&- c\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^2 \\
\geq& - c\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u| \sum_i \left|u^k u_{ki}\right| - c\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^2 \\
\geq& - \frac{c}{A}\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^4 - c\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^2 \\
\geq& - \frac{c}{A}\rho \operatorname{tr} w^{ij} |\nabla u|^4,
\end{aligned}$$

wenn wir ohne Einschränkung $\frac{|\nabla u|}{A} \geq 1$ annehmen. Hier haben wir auch benutzt, dass die untere Schranke an u aufgrund der Gleichung eine obere Schranke an das Produkt der Eigenwerte von w_{ij} bezüglich g_{ij} impliziert. Daraus leiten wir eine untere Schranke an das Produkt der Eigenwerte von w^{ij} her. Mit Hilfe der geometrisch-arithmetischen Ungleichung folgt daraus eine positive untere Schranke für $\operatorname{tr} w^{ij}$, was wir oben bereits benutzt haben.

Wir wollen noch den dritten „guten“ Term in (1.4) ausnutzen

$$\begin{aligned}
&w^{ij}g^{kl}u_{ki}u_{lj} = \\
=&w^{ij}g^{kl}\left(w_{kj}-u_ku_j+\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2g_{kj}-S_{kj}\right)\left(w_{li}-u_lu_i+\tfrac{1}{2}|\nabla u|^2g_{li}-S_{li}\right)\\
=&w^{ij}w_{kj}w_{li}g^{kl}+w^{ij}u_iu_j|\nabla u|^2+\tfrac{1}{4}|\nabla u|^4\operatorname{tr}w^{ij}+w^{ij}S_{kj}S_{li}g^{kl}-2\delta^i_ku_lu_ig^{kl}\\
&+\delta^i_k|\nabla u|^2\delta^k_i-2\delta^i_kS_{li}g^{kl}-w^{ij}|\nabla u|^2u_ku_j\delta^k_i+2w^{ij}u_ku_jS_{li}g^{kl}\\
&-w^{ij}|\nabla u|^2g_{kj}S_{li}g^{kl}\\
\ge&w_{ij}g^{ij}+\tfrac{1}{4}|\nabla u|^4\operatorname{tr}w^{ij}-c\operatorname{tr}w^{ij}-c|\nabla u|^2-c-c\operatorname{tr}w^{ij}|\nabla u|^2\\
\ge&\tfrac{1}{8}|\nabla u|^4\operatorname{tr}w^{ij}.
\end{aligned}$$

In dieser Rechnung tauchte ein Term mit unterschiedlichen Vorzeichen zweimal auf; er fällt daher weg.

Somit folgt aus (1.4) unter Benutzung der unteren Schranke an $H(x_1)$ und b

$$\begin{aligned}
0\ge&-c(b)\operatorname{tr}w^{ij}|\nabla u|^2-\frac{c}{A}\rho\operatorname{tr}w^{ij}|\nabla u|^4+\tfrac{1}{4}\rho|\nabla u|^4\operatorname{tr}w^{ij}\\
\ge&-\left(\frac{c(b)}{A^2}+\frac{c}{A}\right)\rho\operatorname{tr}w^{ij}|\nabla u|^4+\tfrac{1}{4}\rho|\nabla u|^4\operatorname{tr}w^{ij}.
\end{aligned}$$

Wählen wir $A\gg 1$ genügend groß, so erhalten wir einen Widerspruch. Folglich war eine unserer ohne Einschränkung gemachten Annahmen falsch. Dies beschränkt dann aber H wie gewünscht und das Lemma folgt. □

Zu den lokalen C^1-Abschätzungen, Theorem 1.1, erhalten wir das folgende

Korollar 1.5. *Sei $1\le k\le n$, $0<p\in\mathbb{R}$. Die Funktion u sei eine zulässige C^3-Lösung von*

$$\sigma_k\left(u_{ij}-\frac{1}{2u}|\nabla u|^2g_{ij}+uS_{ij}\right)=f(x)u^{-p}$$

in einem geodätischen Ball $B_{2r}(x_0)$, x_0 ein beliebiger Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Sei $u\in C^3\left(\overline{B_{2r}(x_0)}\right)$ positiv und zulässig, $S_{ij}\in C^1\left(\overline{B_{2r}(x_0)}\right)$ und $0<f(x)\in C^1\left(\overline{B_{2r}(x_0)}\right)$. Dann gilt

$$\sup_{B_r(x_0)}u\le c\left(n,k,p,r,\inf_{B_r(x_0)}u,\|f\|_{C^1(B_r(x_0))},\inf_{B_r(x_0)}f,\|S_{ij}\|_{C^1}\right).$$

Proof. Wähle x_1 und x_2 in $B_r(x_0)$, so dass

$$u(x_1)\le 2\inf_{B_r}u\quad\text{und}\quad u(x_2)\ge\tfrac{1}{2}\sup_{B_r}u$$

und eine differenzierbare Kurve $\gamma:[0,1]\to B_r(x_0)$ der Länge $L(\gamma)\le 3r$ mit $\gamma(0)=x_1$ und $\gamma(1)=x_2$. Nach Theorem 1.1 gibt es eine Konstante $c_1>0$, so dass

$$\frac{|\nabla u|}{u}\le c_1\quad\text{in }B_r(x_0).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\log u(x_2) &= \log u(x_1) + \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} \log u(\gamma(\tau)) d\tau \\ &= \log u(x_1) + \int\limits_0^1 \frac{\langle \nabla u(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)\rangle}{u(\gamma(\tau))} d\tau \\ &\le \log u(x_1) + \int\limits_0^1 \frac{|\nabla u|}{u} \cdot |\gamma'| d\tau \\ &\le \log u(x_1) + c_1 \cdot 3r.\end{aligned}$$

und wir erhalten eine obere Schranke für $u(x_2)$ und damit auch für $\sup\limits_{B_r(x_0)} u$. □

Bemerkung 1.6. Durch genauere Analyse der Abhängigkeiten der Konstanten erhält man für solche Gleichungen ein Bernsteintheorem, siehe [**26**].

2. Lokale C^2-Abschätzungen

Bemerkung 2.1. Im Zusammenhang von Reflektorgleichungen treten solche lokalen Abschätzungen auch schon bei [**12**] auf. Sie betrachten nur den Fall $k = n$. Dort darf die rechte Seite f auch von Du abhängen. Dann maximiert man allerdings eine Größe, die die Summe der Eigenwerte enthält. Selbst wenn man im hier betrachteten Fall ein Maximumprinzip für eine entsprechende Größe aufstellen könnte, würde dies noch keine C^2-Schranken liefern.

Im Fall $k = n$ darf f auch von Du abhängen. Hiervon überzeugt man sich leicht anhand der Modellgleichung

$$\log\det\left(u_{ij} - \tfrac{1}{2}|Du|^2\delta_{ij}\right) = f(Du) \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Hierzu maximiert man die Größe

$$\begin{aligned}W &= \log w_{11} + 2\log\rho \\ &\equiv \log\left(u_{11} - \tfrac{1}{2}|Du|^2\delta_{11}\right) + 2\log\rho.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der üblichen Änderungen erhält man ein analoges Resultat auch für

$$\log\det\left(u_{ij} - \tfrac{1}{2u}|Du|^2 g_{ij} + uS_{ij}\right) = f(x,u,Du)$$

in Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Beachte insbesondere, dass $\operatorname{tr} F^{ij} \to \infty$, falls $k = n$ ist und falls eine Eigenwert unbeschränkt wird, das Produkt aber beschränkt bleibt. Dies braucht für $k < n$ nicht zu gelten (Gegenbeispiel: σ_1. Die Spur ist konstant.) und man bekommt dann Probleme beim Term

$$\operatorname{tr} F^{ij} u_1^k u_{k1} + f_{p_i p_j} u_{i1} u_{j1}.$$

Die Wahl der Abschneidefunktion ρ ist für die inneren C^2-Abschätzungen nicht wesentlich. Dieselben Abschätzungen erhält man, falls man $\log\varphi$ mit $\varphi \in C^2$ und $0 \le \varphi \le 1$ verwendet.

Die für innere Abschätzungen nötigen Strukturbedingungen werden in [**5**] noch genauer untersucht.

Es gelten die folgenden lokalen inneren Abschätzungen für zweite kovariante Ableitungen von u.

THEOREM 2.2. *Sei* $1 < k \le n$. *Sei* $u \in C^4\left(\overline{B_r(x_0)}\right)$ *eine zulässige Lösung von*

$$F[u] \equiv \left(\sigma_k\left(\lambda\left(u_{ij} - \frac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} + uS_{ij}\right)\right)\right)^{1/k} = f(x,u)$$

in einem geodätischen Ball $B_r(x_0)$, x_0 *ein beliebiger Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Seien* $S_{ij} \in C^2\left(\overline{B_r(x_0)}\right)$ *und* $0 < f \in C^2\left(\overline{B_r(x_0)}\right)$. *Dann gilt*

$$|u_{ij}|(x_0) \le (n, k, r, \|u\|_{C^1}, \inf u, \inf f, \|f\|_{C^2}, \|S_{ij}\|_{C^2}).$$

PROOF. Setze $U_{ij} := u_{ij} - \frac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} + uS_{ij}$. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} F^{ij}U_{ij;k} =& \nabla_k f, \\ F^{ij}U_{ij;11} + F^{ij,kl}U_{ij;1}U_{kl;1} =& \nabla_1\nabla_1 f, \end{aligned}$$

wobei wir zur Verdeutlichung „;" und „∇"für kovariante Ableitungen verwenden. Da $U_{ij} \mapsto (\sigma_k(U_{ij}))^{1/k} \equiv (\sigma_k(\lambda(U_{ij})))^{1/k}$ eine konkave Funktion ist, folgt

$$F^{ij}U_{ij;11} \ge \nabla_1\nabla_1 f.$$

Sei wieder $\tilde{u}_{ij} = u_{ij} + uS_{ij}$. Betrachte für $\eta \ne 0$ die Funktion

$$TM \supset \pi^{-1}(B_r(x_0)) \ni (x, \eta) \mapsto W = \log\frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j} + 2\log\rho,$$

wobei wiederum

$$\rho = \left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right)^+ \equiv \left(1 - \frac{(\operatorname{dist}(\cdot, x_0))^2}{r^2}\right)^+.$$

Dann gibt es $x_1 \in B_r(x_0)$ und einen Einheitstangentialvektor $\eta_1 \in T_xM$, so dass W in (x_1, η_1) maximal wird.

Wir bemerken, dass die betrachtete Funktion nur wohldefiniert ist, wenn

$$\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j > 0$$

ist. Da aber sogar

$$U_{ij} = \tilde{u}_{ij} - \frac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij}$$

zulässig ist und somit mindestens einen positiven Eigenwert besitzt, ist dies auch für U_{ij} der Fall und die betrachtete Größe ist für jedes x und einen geeigneten Vektor η wohldefiniert.

Wähle Normalkoordinaten um x_1 und nehme an, dass in diesen Koordinaten $\eta_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ gilt. Setze $\eta = \eta_1$ in diesen Koordinaten konstant fort. Wir behaupten (vgl. [**8**]), dass

$$\frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j} \quad \text{und} \quad \tilde{u}_{11}$$

im Punkt x_0 dieselben kovarianten Ableitungen (bis zur zweiten Ordnung) haben. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j}\right)_{;k} =& \frac{\tilde{u}_{ij;k}\eta^i\eta^j + 2\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j_{;k}}{g_{ij}\eta^i\eta^j} - \frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j \cdot 2g_{ij}\eta^i\eta^j_{;k}}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2}, \\ \eta^j_{;k} =& \eta^j_{,k} + \Gamma^j_{kr}\eta^r, \end{aligned}$$

wobei wir hier zur Verdeutlichung „;“ für kovariante Ableitungen und „,“ für partielle Ableitungen schreiben. In Normalkoordinaten gilt damit in x_1

$$\left(\frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j}\right)_{;k} = \tilde{u}_{11;k}.$$

Weiterhin gilt in x_1

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j}\right)_{;kl} =& \frac{\tilde{u}_{ij;kl}\eta^i\eta^j + 2\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j_{;kl}}{g_{ij}\eta^i\eta^j} - \frac{\tilde{u}_{ij}\eta^i\eta^j \cdot 2g_{ij}\eta^i\eta^j_{;kl}}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2}\\ =&\tilde{u}_{11;kl} + 2\tilde{u}_{1j}\eta^j_{;kl} - 2\tilde{u}_{11}g_{ij}\eta^i\eta^j_{;kl}\\ =&\tilde{u}_{11;kl}.\end{aligned}$$

Hier geht dann auch ein, dass wir im Extremalpunkt $\tilde{u}_{ij}$ als diagonal annehmen dürfen.

Daher dürfen wir im Folgenden

$$W = \log \tilde{u}_{11} + 2\log\rho$$

annehmen. Aufgrund der Extremalität ergibt sich in x_1

$$\begin{aligned}0 =&W_i = \frac{\tilde{u}_{11;i}}{\tilde{u}_{11}} + 2\frac{\rho_{;i}}{\rho},\\ 0 \geq&\frac{\tilde{u}_{11;ij}}{\tilde{u}_{11}} - \frac{\tilde{u}_{11;i}\tilde{u}_{11;j}}{\tilde{u}_{11}} + 2\left(\frac{\rho_{;ij}}{\rho} - \frac{\rho_{;i}\rho_{;j}}{\rho^2}\right)\\ =&\frac{\tilde{u}_{11;ij}}{\tilde{u}_{11}} + 2\frac{\rho_{;ij}}{\rho} - 6\frac{\rho_{;i}\rho_{;j}}{\rho^2}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$0 \geq \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}\tilde{u}_{11;ij} + \frac{2}{\rho}F^{ij}\rho_{;ij} - \frac{6}{\rho^2}F^{ij}\rho_{;i}\rho_{;j}.$$

Für den Term mit vierten Ableitungen von u berechnen wir

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{11} =&u_{11} + uS_{11},\\ \tilde{u}_{11;i} =&u_{11i} + u_iS_{11} + uS_{11;i},\\ \tilde{u}_{11;ij} =&u_{11ij} + u_{ij}S_{11} + u_iS_{11;j} + u_jS_{11;i} + uS_{11;ij}\\ \geq&u_{11ij} - cu_{11} - c\\ \geq&u_{11ij} - cu_{11},\end{aligned}$$

wobei wir ohne Einschränkung angenommen haben, dass $\tilde{u}_{11}$ groß ist und dass $\tilde{u}_{ij}$ diagonal ist. Damit werden u_{11} und $\tilde{u}_{11}$ vergleichbar. Falls dies im Maximum nicht der Fall ist, bekommen wir eine globale Schranke an W und das Theorem folgt direkt.

Wir benutzen die folgenden Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned}u_{ijk} =&u_{kij} + u_ag^{ab}R_{bijk},\\ u_{iklj} =&u_{ikjl} + u_{ka}g^{ab}R_{bilj} + u_{ia}g^{ab}R_{bklj}\end{aligned}$$

und erhalten im nichttrivialen Fall

$$\tilde{u}_{11ij} \geq u_{ij11} - cu_{11}.$$

Differenzieren der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} F^{ij}U_{ij;11} \geq & \nabla_1\nabla_1 f(x,u) \\ \geq & -cu_{11}. \end{aligned}$$

Setze $\operatorname{tr} F^{ij} = F^{ij}g_{ij}$. Somit ergibt sich aufgrund der unteren Schranke $\operatorname{tr} F^{ij} \geq c > 0$ aus Lemma 1.2 (v), da $\rho \leq 1$

$$\begin{aligned} 0 \geq & \frac{1}{\tilde{u}_{11}}\left(F^{ij}u_{ij11} - cu_{11}\operatorname{tr} F^{ij} - F^{ij}U_{ij;11}\right) + \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}U_{ij;11} - c\frac{1}{\rho^2}\operatorname{tr} F^{ij} \\ \geq & \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}\left(\frac{1}{2u}|\nabla u|^2 g_{ij} - uS_{ij}\right)_{11} - c\frac{1}{\rho^2}\operatorname{tr} F^{ij} \\ = & \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}\left(-\frac{1}{2u^2}u_1|\nabla u|^2 g_{ij} + \frac{1}{u}u^k u_{k1}g_{ij} - u_1 S_{ij} - uS_{ij;1}\right)_1 - c\frac{1}{\rho^2}\operatorname{tr} F^{ij} \\ = & \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}\left(\frac{1}{u^3}u_1^2|\nabla u|^2 g_{ij} - \frac{1}{2u^2}u_{11}|\nabla u|^2 g_{ij} - \frac{1}{u^2}u_1 u^k u_{k1}g_{ij}\right) \\ & + \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}\left(-\frac{1}{u^2}u_1 u^k u_{k1}g_{ij} + \frac{1}{u}u^k{}_1 u_{k1}g_{ij} + \frac{1}{u}u^k u_{k11}g_{ij}\right) \\ & + \frac{1}{\tilde{u}_{11}}F^{ij}\left(-u_{11}S_{ij} - 2u_1 S_{ij;1} - uS_{ij;11}\right) \\ & - c\frac{1}{\rho^2}\operatorname{tr} F^{ij} \\ \geq & \left(\frac{1}{u}\tilde{u}_{11} + \frac{1}{u}\frac{1}{\tilde{u}_{11}}u^k u_{k11} - \frac{c}{\rho^2}\right)\operatorname{tr} F^{ij} \end{aligned}$$

Hier haben wir wieder häufiger u_{11} und $\tilde{u}_{11}$ verglichen. Benutzen wir nochmals die Extremalbedingung, so ergibt sich

$$\tilde{u}_{11}\rho^2 \leq c$$

und das Maximum ist kontrolliert.

Dies kontrolliert den größten Eigenwert λ_1. Da aufgrund der Zulässigkeit $\lambda_k + \ldots + \lambda_n > 0$ gilt und $\lambda_1 \geq \lambda_k$ ist, sind alle Eigenwerte kontrolliert und die C^2-Abschätzungen folgen. $\square$

Bemerkung 2.3. In [**26**] werden auch Gegenbeispiele zur inneren Regularität für solche Gleichungen behandelt, wenn sich das Vorzeichen der Gradiententerme aufgrund einer anderen Form der Zulässigkeit von Lösungen umdreht.

Teil 3

Neumannproblem für Monge-Ampère-Gleichungen

KAPITEL 6

Problemstellung und erste Abschätzungen

1. Existenzsatz

Dieses Kapitel ist teilweise ziemlich knapp geschrieben und sollte erst nach Lektüre des Kapitels über das Dirichletproblem gelesen werden.

Wir folgen hier [**20**], benutzen jedoch die C^1-Abschätzungen von [**24**, Theorem 3.1] und benutzen für die C^2-Abschätzungen [**23**, Lemma 4.1].

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Theorems.

THEOREM 1.1. *Sei $\Omega \subset R^n$ strikt konvex. Die Funktion $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei positiv und erfülle $f_z \geq 0$. Sei weiterhin $\varphi : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_z \leq 0$ gegeben.*

Dann gibt es unter den zusätzlichen Voraussetzungen aus Kapitel 2, die nur für die C^0-Abschätzungen nötig sind, eine glatte strikt konvexe Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die das folgende Randwertproblem löst.

$$\begin{cases} \det D^2 u = f(\cdot, u, Du) & \text{in } \Omega, \\ u_\nu = \langle Du, \nu\rangle = \varphi(\cdot, u) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Die in der Originalversion vorausgesetzte strikte Monotonie an φ, $\varphi_z \leq \frac{1}{c} < 0$, benötigt man nicht; man nutzt stattdessen die strikte Konvexität des Randes $\partial\Omega$ aus.

2. C^0-Abschätzungen

Die C^0-Abschätzungen benötigen einige technische Voraussetzungen, die im Rest des Beweises nicht mehr benötigt werden.

Wir betrachten eine glatte strikt konvexe Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ von (1.1).

Nehme an, dass es positive Funktionen $g \in L^1(\Omega)$ und $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass

$$f(x, z, p) \leq \frac{g(x)}{h(p)}$$

für alle $x \in \Omega$, $z \leq N$ und $p \in \mathbb{R}^n$ für eine Konstante N gilt. Nehme weiterhin an, dass

$$\int\limits_\Omega g < \int\limits_{\mathbb{R}^n} h$$

gilt. Gelte für eine Konstante N_1

$$\varphi(x, z) < 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega,\ z > N_1$$

und auf dem Rand konvergiere

$$\varphi(x, z) \to \infty \quad \text{gleichmäßig für } z \to -\infty.$$

Dann gilt das folgende Theorem, das mit demselben Beweis auch für oblique Randbedingungen gilt.

THEOREM 2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei u eine Lösung von* (1.1). *Dann ist u in Abhängigkeit von den Daten in C^0 a priori beschränkt.*

PROOF. Aufgrund der Konvexität von u tritt das Maximum von u am Rand auf. Dort gilt $u_\nu \geq 0$. Somit kann dieses Maximum nicht größer als N_1 sein und die obere Schranke folgt.

Für die untere Schranke wählen wir $R_0 > 0$, so dass

$$\int\limits_{\Omega} g = \int\limits_{|x| \leq R_0} h$$

gilt. Definiere die Menge

$$\Omega_N := \{x \in \Omega : u(x) < N\}.$$

Aufgrund der Integraltransformationsformel erhalten wir für $R > R_0$

$$\int\limits_{Du(\Omega_N)} h(y)dy = \int\limits_{\Omega_N} h(Du(x)) \det D^2u(x)dx \leq \int\limits_{\Omega_N} g \leq \int\limits_{\Omega} g < \int\limits_{|x|<R} h.$$

Daher gibt es einen Vektor $p \in B_R(0) \setminus Du(\Omega_N)$. Sei w eine affine Funktion, so dass $w \leq u$ in Ω, $Dw = p$ und $w(x_0) = u(x_0)$ in einen Punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$ gelten. Nach Wahl von p gilt $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_N$.

Sei zunächst $x_0 \in \Omega \setminus \Omega_N$. Dann gilt $u(x_0) \geq N$. Da $|Dw| \leq R$ nach Wahl von p ist, folgt $u \geq N - R \operatorname{diam} \Omega$.

Betrachte nun den Fall $x_0 \in \partial\Omega$. Im Punkte x_0 gilt dann

$$\varphi(x_0, u) = \langle Du, \nu \rangle \leq \langle Dw, \nu \rangle \leq R.$$

Da am Rand φ unendlich wird, wenn $z \to -\infty$ konvergiert, erhalten wir hieraus eine untere Schranke an $u(x_0)$. In diesem Falle folgt dann die untere Schranke analog zu oben, da $u(x_0)$ nach unten beschränkt ist und der Graph von u über dem Graphen der affin linearen Funktion w, die einen beschränkten Gradienten hat, liegt. □

3. C^1-Abschätzungen (Eistütenabschätzung)

Im folgenden geben wir einen Beweis für C^1-Abschätzungen, bei dem die Abschätzung im Gegensatz zu [**20**] nicht von der Oszillation der Lösung abhängt. Dies ist zwar hier nicht nötig, dieser Beweis ist aber weiter anwendbar als die ursprünglichen C^1-Abschätzungen in [**20**].

Hier ist der Fall für oblique Randbedingungen etwas komplizierter als der Fall für Neumannrandbedingungen und kann nicht direkt aus diesem abgeleitet werden. Daher führen wir hier den Beweis für oblique Randbedingungen.

THEOREM 3.1 (Eistütenabschätzung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ glatt und beschränkt, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine glatte strikt konvexe Funktion, für die $|u_\beta|$ auf $\partial\Omega$ gleichmäßig beschränkt ist, wobei β ein auf Länge eins normiertes Vektorfeld auf $\partial\Omega$ ist, so dass $\langle \beta, \nu \rangle \geq \tilde{c}_\beta$ für eine positive Konstante $\tilde{c}_\beta > 0$ gilt. Dann ist* $\sup |Du|$ *gleichmäßig beschränkt. Die Schranke hängt insbesondere nicht von der Oszillation von u ab.*

PROOF. Der Name des Satzes stammt von der Art und Weise, wie wir Bälle in Kegeln platzieren. Dies erinnert an eine Eistüte mit einer Kugel Eis darin.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Nehme an, dass es einen Punkt x_0 gibt, in dem $|Du|$ ein großes Maximum der Größe M annimmt. Falls M größer als eine geeignet gewählte Konstante M_0 ist, können wir einen Widerspruch herleiten. Da u strikt konvex ist, gilt automatisch $x_0 \in \partial\Omega$. Im Punkte x_0 wählen wir eine Tangentialrichtung ξ_0 (wobei „Richtung“ für einen Vektor der Länge eins steht) so dass $\langle Du(x_0), \xi_0\rangle$ größer ist, als wenn wir irgendeine andere Tangentialrichtung einsetzen.

Wir wollen zunächst eine untere Abschätzung für $\langle Du(x_0), \xi_0\rangle$ im Verhältnis zu M beweisen.

Sei ξ_1 eine Richtung mit $\langle Du(x_0), \xi_1\rangle = M$. Wie in [**31**] zerlegen wir eine Richtung ξ mit Hilfe von β und einem Tangentialvektor $\tau(\xi)$ in

$$\xi = \tau(\xi) + \frac{\langle \nu, \xi\rangle}{\langle \beta, \nu\rangle}\beta, \tag{3.1}$$

wobei

$$\tau(\xi) = \xi - \langle \nu, \xi\rangle\nu - \frac{\langle \nu, \xi\rangle}{\langle \beta, \nu\rangle}\beta^T, \quad \beta^T = \beta - \langle \beta, \nu\rangle\nu.$$

Beachte, dass $|\tau(\xi)|$ nach Annahme an β beschränkt ist. Zerlegen wir nun ξ_1 entsprechend, so erhalten wir

$$\begin{aligned} M =& \langle Du, \xi_1\rangle = \langle Du, \tau(\xi_1)\rangle + \frac{\langle \nu, \xi_1\rangle}{\langle \beta, \nu\rangle}\langle Du, \beta\rangle \\ \le& |\tau(\xi_1)| \cdot \max_{\substack{\tau\in T_{x_0}\partial\Omega \\ |\tau|=1}} \langle Du, \tau\rangle + c \\ =& |\tau(\xi_1)| \cdot \langle Du(x_0), \xi_0\rangle + c. \end{aligned}$$

Somit schließen wir, dass $\langle Du(x_0), \xi_0\rangle \ge \frac{M}{c}$, gilt, falls $M \ge M_0$ ist und wir M_0 groß genug gewählt haben. Für eine Richtung ξ in der Nähe von ξ_0, genauer, für $|\xi - \xi_0| < \varepsilon = \frac{1}{2c} < 1$, erhalten wir

$$\langle Du(x_0), \xi\rangle = \langle Du, \xi_0\rangle + \langle Du, \xi - \xi_0\rangle \ge \tfrac{M}{c} - M|\xi - \xi_0| \ge \varepsilon M. \tag{3.2}$$

Aufgrund der Konvexität von u schließen wir, dass $\langle Du(y), \xi\rangle \ge \varepsilon M$ für alle Punkte $y \in \overline{\Omega}$ der Form $y = x_0 + \lambda \cdot \xi$ gilt. Hier sind $\lambda > 0$ und ξ so zu wählen, dass $|\xi - \xi_0| \le \varepsilon$ und $x_0 + t \cdot \lambda \cdot \xi \in \overline{\Omega}$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt.

Aufgrund der gleichmäßigen Schranke an die Hauptkrümmungen von $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sehen wir, dass es ein $R > 0$ und ein $x_1 \in \partial\Omega$ gibt, so dass $|x_0 - x_1| > 2R$ und so, dass weiterhin jedes $x \in B_R(x_1) \cap \partial\Omega$ sich in der Form $x_0 + \lambda \cdot \xi$ wie oben beschrieben darstellen lässt. Demnach gilt aufgrund von (3.2) in $\partial\Omega \cap B_R(x_1)$ die Ungleichung $|Du| \ge \varepsilon M$. Nach Konstruktion gilt

$$\inf_{x\in B_R(x_1)\cap\partial\Omega} u(x) > u(x_0).$$

Betrachten wir den von den beschriebenen Richtungen ξ erzeugten Kegel und die gerade darin gefundene Kugel, so erklärt sich der Name des Satzes.

Nun gehen wir induktiv vor. Beachte dabei, dass R und ε als von x_0 unabhängige Konstanten gewählt werden können. Solange noch $|Du(x_i)| \ge M\varepsilon^i \ge M_0$ gilt können wir einen weiteren Punkt x_{i+1} von x_i ausgehend in genau derselben Weise finden, wie wir von x_0 ausgehend den Punkt x_1 gefunden haben. Daher können wir, falls nur $M = \sup |Du|$ genügend groß ist, eine Folge von Punkten $\{x_i\}_{i=0,\dots,N}$ beliebiger Länge N konstruieren, so dass für alle $i \ge 1$

$$|Du| \ge M\varepsilon^i \quad \text{auf } \partial\Omega \cap B_R(x_i)$$

und

$$\inf_{x \in B_R(x_i) \cap \partial\Omega} u(x) > u(x_{i-1})$$

gelten.

Da $\partial\Omega$ aber endliches Maß und beschränkte Hauptkrümmungen hat, gibt es eine obere Schranke $N_0(\rho)$ an die Anzahl Kugeln der Gestalt $B_\rho(y_j)$ für $y_j \in \partial\Omega$, deren Schnitt in $\partial\Omega$ paarweise disjunkt ist, wenn wir $\rho > 0$ fixieren.

Gilt also $M = \sup |Du| > M_0 \varepsilon^{-N_0\left(\frac{R}{2}\right)}$, so finden wir zwei Punkte x_{i_0} und x_{j_0} mit $i_0 > j_0 > 0$, so dass

$$B_{\frac{R}{2}}(x_{i_0}) \cap B_{\frac{R}{2}}(x_{j_0}) \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Andererseits liefert $x_{j_0} \in B_R(x_{i_0})$ aber

$$u(x_{j_0}) < u(x_{j_0+1}) < \ldots < u(x_{i_0-1}) < \inf_{x \in B_R(x_{i_0}) \cap \partial\Omega} u(x) \leq u(x_{j_0})$$

und wir erhalten einen Widerspruch. Somit folgt das Theorem. $\square$

KAPITEL 7

C^2-Abschätzungen

1. Gemischt tangential-normale Abschätzungen

Die im folgenden behandelten Abschätzungen erhält man analog zu den doppelt tangentialen Abschätzungen beim Dirichletproblem.

Sei der Rand wie dort als Graph dargestellt. Dann läßt sich die Randbedingung lokal als

$$\nu^i(\hat{x})u_i(\hat{x},\omega(\hat{x})) = \varphi((\hat{x},\omega(\hat{x})),u(\hat{x},\omega(\hat{x})))$$

schreiben. Wir differenzieren dies in eine Richtung $r < n$ und erhalten

$$\nu^i_r u_i + \nu^i u_{ir} + \nu^i u_{in}\omega_r = \varphi_r + \varphi_n\omega_r + \varphi_z u_r + \varphi_z u_n\omega_r.$$

In einem Punkt mit $D\omega = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$\nu^i_r u_i + \nu^i u_{ir} = \varphi_r + \varphi_z u_r.$$

Damit ist $\nu^i u_{ir}$ und damit auch $u_{\nu\tau}$ beschränkt.

2. Doppelt normale Abschätzungen

Diese doppelt normalen Abschätzungen beim Neumannrandwertproblem entsprechen den gemischt tangential-normalen Abschätzungen beim Dirichletproblem.

Die differenzierte Gleichung lautet mit $\hat{f} = \log f$

$$u^{ij}u_{ijk} = \hat{f}_k + \hat{f}_z u_k + \hat{f}_{p_i}u_{ik}.$$

Wir definieren den Operator

$$Lw := u^{ij}w_{ij} - \hat{f}_{p_i}w_i.$$

Wie beim Dirichletproblem rechnet man direkt nach, dass für

$$\vartheta := d - \mu d^2$$

bei hinreichend groß gewählter Konstante $\mu \gg 1$ in einem Gebiet Ω_δ mit $0 < \delta$ hinreichend klein

$$\begin{aligned} L\vartheta &\le -\varepsilon \operatorname{tr} u^{ij} && \text{in } \Omega_\delta, \\ \vartheta &\ge 0 && \text{auf } \partial\Omega_\delta \end{aligned}$$

gilt. Beachte, dass hier die Konstante ε aufgrund der strikten Konvexität des Gebietes Ω positiv gewählt werden kann.

Wir setzen φ und ν glatt ins Innere von Ω fort und erhalten

$$L(\nu^i u_i - \varphi) \le c \operatorname{tr} u^{ij}.$$

Somit können wir mit Hilfe einer Testfunktion der Form

$$\Theta := A\vartheta + B|x - x_0|^2 \pm (\nu^i u_i - \varphi)$$

analog zum Dirichletproblem schließen, dass die Normalenableitung von $(\nu^i u_i - \varphi)$ a priori beschränkt ist. Dies liefert eine Schranke an $u_{\nu\nu}$ in jedem Randpunkt. Eine untere Schranke war allerdings bereits aufgrund der Konvexität von u bekannt.

3. Doppelt tangentiale C^2-Abschätzungen

Hier können wir nicht sofort die allgemeine Gleichung (1.1) behandeln. Wir beschränken und daher zunächst auf den Fall, dass $f = f(x)$ gilt.

Man überzeugt sich direkt, dass auch in diesem Fall die bisherigen a priori Abschätzungen gültig bleiben. Insbesondere kann man für die C^0-Abschätzungen die Funktionen $g = f$ und $h \equiv 1$ wählen.

Wir definieren für einen Vektor $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$v := u_{\xi\xi} - v'(x, \xi) + K|x|^2$$

mit

$$v' := 2\langle \xi, \nu\rangle \xi'^i (\varphi_i + \varphi_z u_i - \nu_i^k u_k)$$

und dem tangential projizierten Vektor

$$\xi' := \xi - \langle \xi, \nu\rangle \nu.$$

Beachte dabei, dass aufgrund der differenzierten Randbedingung am Rand

$$v' = 2\langle \xi, \nu\rangle \xi'^i u_{ik} \nu^k$$

gilt.

Wir wollen nun nachweisen, dass v a priori beschränkt ist. Dazu maximieren wir die Funktion über alle $(x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{S}^{n-1}$ und fixieren ξ entsprechend für den Rest des Beweises. Werde also das Maximum in einem Punkt (x_0, ξ) angenommen.

3.1. Maximum im Inneren. Nehme dazu zunächst an, dass v im Inneren maximal wird. Die Funktion v' hat die Gestalt $v' = -a^k u_k - b$, wobei a^k und b C^2-Funktionen sind. Setze wieder $\hat{f} = \log f$. Nach Drehung des Koordinatensystems können wir annehmen, dass $\xi = e_1$ gilt. Wir erhalten somit im Maximum die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
u^{ij} u_{ijk} =& \hat{f}_k, \\
u^{ij} u_{ij11} - u^{ik} u^{jl} u_{ij1} u_{kl1} =& \hat{f}_{11}, \\
0 = v_i =& u_{11i} + a_i^k u_k + a^k u_{ki} + b_i + 2K x_i, \\
0 \ge v_{ij} =& u_{11ij} + a_{ij}^k u_k + a_i^k u_{kj} + a_j^k u_{ki} + a^k u_{kij} + b_{ij} + 2K \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten dort unter Benutzung der Inversenbeziehung

$$\begin{aligned}
0 \ge& u^{ij} v_{ij} \\
\ge& u^{ij} u_{ij11} - c \operatorname{tr} u^{ij} - c + a^k u^{ij} u_{kij} + 2K \operatorname{tr} u^{ij} \\
=& u^{ik} u^{jl} u_{ij1} u_{kl1} + \hat{f}_{11} - c \operatorname{tr} u^{ij} + a^k \hat{f}_k + 2K \operatorname{tr} u^{ij} \\
\ge& - c \operatorname{tr} u^{ij} + 2K \operatorname{tr} u^{ij}.
\end{aligned}$$

Somit kann das Maximum von v (bei geeignet fixiertem ξ) nicht im Inneren angenommen werden, falls K groß genug gewählt worden ist. Wir wollen dies im Folgenden annehmen.

3.2. Maximum am Rand. Wir unterscheiden nun drei Fälle.

3.2.1. ξ *tangential.* Nehme zunächst einmal an, dass ξ im Maximum ein Tangentialvektor ist. Dann gilt aufgrund der Extremalität von v

$$\begin{aligned}0 \le& \nu^i v_i\\ \le& u_{\xi\xi\nu} + a^k u_{k\nu} + c\\ \le& u_{\xi\xi\nu} + c.\end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir durch doppeltes Differenzieren der Randbedingung, indem wir die bereits in Richtung $r < n$ differenzierte Randbedingung noch einmal in Richtung $s < n$ differenzieren (Zur Vereinfachung betrachten wir nur einen Punkt mit $D\omega = 0$.)

$$\begin{aligned}\nu^i_{rs} u_i + \nu^i_r u_{is} + \nu^i_s u_{ir} + \nu^i u_{irs} + \nu^i u_{in}\omega_{rs} =& \varphi_{rs} + \varphi_{rz} u_s + \varphi_n \omega_{rs} + \varphi_{zs} u_r\\ &+ \varphi_{zz} u_r u_s + \varphi_z u_{rs} + \varphi_z u_n \omega_{rs}.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren dies nun mit $\xi^r \xi^s$ und erhalten

$$2\nu^i_\xi u_{i\xi} + u_{\nu\xi\xi} - \varphi_z u_{\xi\xi} \le c$$

aufgrund der bereits bewiesenen a priori Abschätzungen. Da φ monoton ist, können wir den letzten Term auf der linken Seite weglassen und erhalten

$$\nu^i_\xi u_{i\xi} \le c.$$

Beachte, dass wir nach Wahl der Testfunktion $D^2u|_{T_{x_0}\partial\Omega \times T_{x_0}\partial\Omega}$ als diagonal annehmen dürfen und dass ξ einer Koordinatenrichtung entspricht. Daher ist

$$\nu^\xi_\xi u_{\xi\xi} \le c.$$

Somit folgt aufgrund der strikten Konvexität von $\partial\Omega$ eine obere Schranke an $u_{\xi\xi}$.

3.2.2. ξ *normal.* Ist ξ normal, so ist nichts mehr zu beweisen, da wir bereits a priori Abschätzungen für $u_{\nu\nu}$ bewiesen haben.

3.2.3. ξ *weder tangential noch normal.* Sei nun ξ weder tangential noch normal. Dies ist der Fall, der die recht komplizierte Testfunktion mit v und v' erfordert. Wir stellen ξ mit Hilfe von einer Tangentialrichtung τ sowie α und β dar, wobei $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gilt

$$\xi = \alpha\tau + \beta\nu.$$

Es ist $\alpha = \langle \xi, \tau\rangle \ne 0$ und $\beta = \langle \xi, \nu\rangle \ne 0$. Nach Definition von v' und der direkt darauf folgenden Bemerkung gilt

$$\begin{aligned}u_{\xi\xi} =& \alpha^2 u_{\tau\tau} + \beta^2 u_{\nu\nu} + 2\alpha\beta u_{\tau\nu}\\ =& \alpha^2 u_{\tau\tau} + \beta^2 u_{\nu\nu} + v'(x,\xi).\end{aligned}$$

Da $v'(\cdot,\xi)$ sowohl für tangentiale Vektoren ξ als auch für normale Vektoren ξ verschwindet, wegen der obigen Rechnung und aufgrund der Extremalbedingung erhalten wir

$$\begin{aligned}v(x_0,\xi) =& \alpha^2 v(x_0,\tau) + \beta^2 v(x_0,\nu)\\ \le& \alpha^2 v(x_0,\xi) + \beta^2 v(x_0,\nu).\end{aligned}$$

Umordnen der Terme ergibt wegen $\beta \ne 0$

$$v(x_0,\xi) \le v(x_0,\nu).$$

Nach Definition von v gilt also

$$u_{\xi\xi}(x_0) \le u_{\nu\nu}(x_0) + c.$$

Damit haben wir auch in diesen Fall C^2-Abschätzungen und für diesen Modellfall erhalten wir globale C^2-Schranken.

4. Existenz (im Modellfall)

Die Abschätzungen von Krylov-Safonov in der Form für oblique Randbedingungen liefern $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen für die Funktion u [**17, 19, 28**]. Abschätzungen für höhere Ableitungen folgen nun mit Hilfe der Schaudertheorie. Dies genügt, um Existenz zu zeigen.

5. C^2-Abschätzungen für allgemeines f

5.1. Eine Matrixungleichung. Für die noch folgenden C^2-Abschätzungen beweisen wir zunächst das folgende Lemma aus [**23**]. (Dies vereinfacht doch weniger als zunächst gedacht. Nützlich wird das folgende Lemma insbesondere, wenn man solche Abschätzungen außerhalb von Extremalpunkten benötigt.)

Lemma 5.1. *Seien $\left(a^{ij}\right)$ und (A_{ij}) symmetrische $n \times n$-Matrizen. Nehme an, dass (A_{ij}) positive semidefinit ist und dass $\left(a^{ij}\right)$ positiv definit ist. Die Inverse von $\left(a^{ij}\right)$ wollen wir mit $(\tilde{a}_{ij})$ bezeichnen. Dann gilt die Ungleichung*

$$-a^{ij}A_{ij} + \frac{1}{\tilde{a}_{11}}A_{11} \le 0.$$

Proof. Seien $\left(b^{ij}\right)_{1\le i,\,j\le n}$ und $(c_{ij})_{1\le i,\,j\le n}$ positiv semidefinite symmetrische Matrizen. Dann können wir eine orthogonale Basistransformation vornehmen, so dass eine der beiden Matrizen zusätzlich noch diagonal ist und erhalten $b^{ij}c_{ij} \ge 0$. Diese Ungleichung gilt natürlich auch in der ursprünglichen Basis. Somit genügt es, nachzuweisen, dass

$$a^{ij} - \delta^i_1\delta^j_1\frac{1}{\tilde{a}_{11}} =: d^{ij}$$

positiv semidefinit ist. Nach einem Basiswechsel mit Hilfe einer Blockdiagonalmatrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, wobei T eine orthogonale $(n-1)\times(n-1)$-Matrix ist, dürfen wir also annehmen, dass $(d^{rs})_{2\le r,\,s\le n}$ und $(a^{rs})_{2\le r,\,s\le n}$ diagonal sind. Beachte hierbei, dass die Matrix $\left(d^{ij}\right)$ in einer unter dieser Transformation invarianten Art und Weise definiert ist.

Für Matrizen dieser Form haben wir die Ungleichung

$$\det\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & \cdots & a^{1n} \\ a^{12} & a^{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a^{1n} & 0 & \cdots & 0 & a^{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a^{ii} - \sum_{i>1}\left|a^{1i}\right|^2 \cdot \prod_{\substack{j\ne i\\ j>1}} a^{jj}. \tag{5.1}$$

Wir berechnen für $\tilde{a}_{11}$

$$\tilde{a}_{11} = \frac{\det\left(a^{rs}\right)_{2\le r,\,s\le n}}{\det\left(a^{ij}\right)_{1\le i,\,j\le n}} = \frac{\prod\limits_{i=2}^n a^{ii}}{\prod\limits_{i=1}^n a^{ii} - \sum\limits_{i>1}|a^{1i}|^2 \cdot \prod\limits_{\substack{j\ne i\\ j>1}} a^{jj}},$$

und erhalten somit

$$d^{11} = a^{11} - \frac{1}{\tilde{a}_{11}} = \frac{\sum\limits_{i>1} \left|a^{1i}\right|^2 \cdot \prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j>1}} a^{jj}}{\prod\limits_{i=2}^{n} a^{ii}}.$$

Wir sollten nun nachweisen, dass $\left(d^{ij}\right)$ positiv semidefinit ist. Es genügt aber auch, hierfür nachzuweisen, dass für $\varepsilon > 0$ die wie folgt definierte Matrix $\left(\tilde{d}^{ij}\right)$ positiv semidefinit ist

$$\tilde{d}^{ij} = \begin{cases} d^{ij}, & i+j > 2, \\ d^{11} + \varepsilon, & i = j = 1, \end{cases} .$$

Die ursprüngliche Behauptung folgt dann vermöge $\varepsilon \downarrow 0$. Für den Nachweis der positiven Definitheit von $\left(\tilde{d}^{ij}\right)$ zeigen wir, dass die Unterdeterminanten

$$\det \left(\tilde{d}^{ij}\right)_{k \leq i,\, j \leq n}$$

für $1 \leq k \leq n$ positiv definit sind. Für $k > 1$ ist dies offensichtlich. Im Falle $k = 1$ benutzen wir wiederum die Formel (5.1) und erhalten

$$\det \tilde{d}^{ij} = \sum_{i>1} \left|a^{1i}\right|^2 \cdot \prod_{\substack{j \neq i \\ j>1}} a^{jj} + \varepsilon \cdot \prod_{i=2}^{n} a^{ii} - \sum_{i>1} \left|a^{1i}\right|^2 \cdot \prod_{\substack{j \neq i \\ j>1}} a^{jj} > 0.$$

Somit folgt die Behauptung des Lemmas. □

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $0 \in \Omega$ gilt. Dann ist $\langle x, \nu \rangle$ auf $\partial\Omega$ gleichmäßig durch eine positive Konstante nach unten abgeschätzt.

Aufgrund der C^1-Abschätzungen gibt es eine positive Konstante μ_0, so dass $f(x, u, Du) \geq \mu_0 > 0$ gilt. Um den allgemeinen Fall behandeln zu können, lösen wir zunächst das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \det D^2\psi &= \tfrac{1}{2}\mu_0 && \text{in } \Omega, \\ \psi_\nu &= \varphi\left(x, \psi + \rho|x|^2\right) - 2\rho\langle x, \nu \rangle && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aufgrund der bisherigen Abschätzungen existiert eine Lösung $\psi = \psi_\rho$ mit von $\rho \in (0, 1)$ unabhängigen a priori Abschätzungen. Da $\mu_0 > 0$ gilt, finden wir eine von ρ unabhängige Konstante $\lambda > 0$, so dass

$$D^2\psi_\rho \geq \lambda\, \mathrm{Id}.$$

Definiere nun $\overline{\psi} := \psi + \rho|x|^2$. Wählen wir nun $\rho > 0$ hinreichend klein, so können wir

$$\det D^2\overline{\psi} < \mu_0 \quad \text{in } \Omega$$

annehmen. Fixiere ρ entsprechend und unterdrücke den Index ρ ab jetzt wieder.

Aufgrund des Mittelwertsatzes finden wir $a^{ij} > 0$, so dass $a^{ij}(u_{ij} - \overline{\psi}_{ij}) \geq 0$ gilt. Wiederum aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es eine Funktion $\gamma \leq 0$, so dass

$$(u - \overline{\psi})_\nu = \gamma(u - \overline{\psi})$$

gilt. Daher folgt aufgrund des Maximumprinzips $u - \overline{\psi} \leq 0$ in Ω. Aufgrund der Randbedingung folgt daher $(u - \overline{\psi})_\nu \geq 0$ auf $\partial\Omega$. Wir erhalten somit auf dem Rand

$$(\psi - u)_\nu \leq -2\rho\langle x, \nu \rangle \leq -2\rho\delta_0 \tag{5.2}$$

für eine positive abgeschätzte Konstante δ_0.

Wir definieren nun eine neue Testfunktion w durch

$$w := \log v + \beta\left(|Du|^2 + M(\psi - u)\right).$$

Hier ist v fast wie oben, wir addieren lediglich eine positive Konstante, so dass die Terme bis zu erster Ordnung positiv werden, $\beta \gg 1$ ist eine noch zu wählende positive Konstante und $M \gg 1$ ist so gewählt, dass

$$\left|u^k u_{k\nu}\right| \le \rho\delta_0 M \tag{5.3}$$

auf dem Rand gilt. Solch eine Konstante M existiert aufgrund der obigen a priori Abschätzungen.

5.2. Maximum im Inneren. Nehme zunächst an, dass die Funktion w ihr Maximum im Inneren annimmt.

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass im Maximum $v \gg 1$ und $u_{\xi\xi} \gg 1$ (für geeignet fixiertes ξ) gelten und damit w in einer Umgebung des Maximums wohldefiniert ist.

Die Extremalbedingung impliziert nun

$$\begin{aligned} 0 = w_i =& \frac{v_i}{v} + 2\beta u^k u_{ki} + M\beta(\psi - u)_i, \\ 0 \ge v w_{ij} =& v_{ij} - \frac{v_i v_j}{v} + 2\beta v u^k u_{kij} + 2\beta v u^k_i u_{kj} + M\beta v(\psi - u)_{ij}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$0 \ge u^{ij} v_{ij} - \frac{1}{v} u^{ij} v_i v_j + 2\beta v u^k u^{ij} u_{ijk} + 2\beta v \Delta u + M\beta v\left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - n\right).$$

Wir differenzieren die Gleichung

$$\begin{aligned} \log\det D^2 u =& \log f(x,u,Du) \equiv \hat f(x,u,Du), \\ u^{ij} u_{ijk} =& \hat f_k + \hat f_z u_k + \hat f_{p_i} u_{ik}, \\ u^{ij} u_{ij\xi\xi} =& u^{ik} u^{jl} u_{ij\xi} u_{kl\xi} + \hat f_{\xi\xi} + 2\hat f_{\xi z} u_\xi + 2\hat f_{\xi p_i} u_{i\xi} + \hat f_z u_{\xi\xi} + \hat f_{zz} u_\xi u_\xi \\ &+ 2\hat f_{zp_i} u_\xi u_{i\xi} + \hat f_{p_i p_j} u_{i\xi} u_{j\xi} + \hat f_{p_i} u_{i\xi\xi}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} v =& u_{\xi\xi} + a^k u_k + b + K|x|^2, \\ v_i =& u_{\xi\xi i} + a^k_i u_k + a^k u_{ki} + b_i + 2Kx_i, \\ v_{ij} =& u_{\xi\xi ij} + a^k_{ij} u_k + a^k_i u_{kj} + a^k_j u_{ki} + a^k u_{kij} + b_{ij} + 2K\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Es folgt mit Hilfe von Lemma 5.1 für ein noch zu fixierendes $\varepsilon > 0$ unter der Annahme, dass $u_{\xi\xi} \gg 1$ ist,

$$\begin{aligned} 0 \ge& u^{ij} u_{ij\xi\xi} - c \operatorname{tr} u^{ij} + a^k u^{ij} u_{ijk} + 2K \operatorname{tr} u^{ij} \\ &- \frac{1}{v} u^{ij} v_i v_j + 2\beta v u^k u^{ij} u_{kij} + 2\beta v \Delta u + M\beta v\left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - n\right) \\ \ge& u^{ik} u^{jl} u_{ij\xi} u_{kl\xi} - \frac{1}{u_{\xi\xi}} u^{ij} v_i v_j - c \operatorname{tr} u^{ij} - c u^2_{\xi\xi} + \hat f_{p_i} u_{i\xi\xi} + 2K \operatorname{tr} u^{ij} \\ &+ 2\beta v\left(-c + u^k \hat f_{p_i} u_{ik}\right) + 2\beta v \Delta u + M\beta v\left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\geq & u^{ik}u^{jl}u_{ij\xi}u_{kl\xi} - \frac{1}{u_{\xi\xi}}u^{ij}\left(u_{\xi\xi i} + c_i + a^k u_{ki}\right)\left(u_{\xi\xi j} + c_j + a^l u_{lj}\right) \\
& - c \operatorname{tr} u^{ij} - c u_{\xi\xi}^2 + \hat{f}_{p_i} u_{i\xi\xi} + 2K \operatorname{tr} u^{ij} \\
& + 2\beta v \left(-c + u^k \hat{f}_{p_i} u_{ik}\right) + 2\beta v \Delta u + M\beta v \left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - n\right) \\
\geq & - \frac{1}{u_{\xi\xi}} \varepsilon u^{ij} u_{\xi\xi i} u_{\xi\xi j} - \frac{c}{\varepsilon}\frac{1}{u_{\xi\xi}}\left(\operatorname{tr} u^{ij} + u_{\xi\xi}\right) \\
& - c \operatorname{tr} u^{ij} - c u_{\xi\xi}^2 + \hat{f}_{p_i}\left(-\left(a^k u_k\right)_i - b_i - 2Kx_i - 2\beta v u^k u_{ki} - M\beta v(\psi - u)_i\right) \\
& + 2K \operatorname{tr} u^{ij} + 2\beta v \left(-c + u^k \hat{f}_{p_i} u_{ik}\right) + 2\beta v \Delta u + M\beta v \left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - n\right) \\
\geq & - \frac{1}{u_{\xi\xi}} \varepsilon u^{ij}\left(c_i - a^k u_{ki} - 2\beta v u^k u_{ki} - M\beta v(\psi - u)_i\right) \cdot \\
& \cdot \left(c_j - a^l u_{lj} - 2\beta v u^l u_{lj} - M\beta v(\psi - u)_j\right) \\
& - \frac{c}{\varepsilon}\frac{1}{u_{\xi\xi}}\left(\operatorname{tr} u^{ij} + u_{\xi\xi}\right) - c \operatorname{tr} u^{ij} - c u_{\xi\xi}^2 + 2\beta v \Delta u + M\beta v \left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - c\right) \\
\geq & - c(M)\varepsilon\beta^2 v \left(1 + \operatorname{tr} u^{ij} + u_{\xi\xi}\right) \\
& - \frac{c}{\varepsilon}\frac{1}{u_{\xi\xi}}\left(\operatorname{tr} u^{ij} + u_{\xi\xi}\right) - c \operatorname{tr} u^{ij} - c u_{\xi\xi}^2 + 2\beta v \Delta u + M\beta v \left(\lambda \operatorname{tr} u^{ij} - c\right).
\end{aligned}$$

Nehme ohne Einschränkung an, dass $u_{\xi\xi}$ und $\operatorname{tr} u^{ij}$ groß sind. Wir wollen zunächst den ersten Term schlucken. Dazu setzen wir zunächst $\varepsilon\beta^2 = 1$ und wählen dann $\beta \gg 1$. Damit lassen sich alle negativen Terme leicht schlucken. Somit erhalten wir einen Widerspruch, falls $\left|D^2 u\right|$ nicht beschränkt ist. Innere C^2-Abschätzungen folgen.

5.3. Maximum am Rand. Da die Zusatzterme in w gegenüber den Rechnungen im Modellfall beschränkt sind, genügt es, den Fall zu betrachten, wenn ξ ein Tangentialvektor ist. Die anderen Fälle funktionieren analog zu Kapitel 3.2.

Im noch ausstehenden Fall gilt aufgrund der Extremalität

$$\begin{aligned}
0 \leq & \nu^i w_i \\
= & \nu^i v_i \frac{1}{v} + \beta\left(2u^k u_{ki}\nu^i + M(\psi - u)_i \nu^i\right) \\
\leq & \nu^i v_i \frac{1}{v} + \beta\left(2\rho\delta_0 M - 2\rho\delta_0 M\right) \qquad \text{nach (5.2) und (5.3)} \\
\leq & \nu^i v_i \frac{1}{v}.
\end{aligned}$$

Der Rest der Argumentation folgt dann wieder genau dem entsprechenden Argument aus Kapitel 3.2.

Globale C^2-Abschätzungen folgen.

5.4. Existenz. Abschätungen höherer Ordnung und Existenz folgen auch in diesem Fall wie im Modellfall.

Das Theorem folgt.

Literaturverzeichnis

[1] Ben Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 2, 151–171.

[2] Luis A. Caffarelli, Louis Nirenberg, and Joel Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155** (1985), no. 3-4, 261–301.

[3] Luis A. Caffarelli, Louis Nirenberg, and Joel Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), no. 3, 369–402.

[4] Luis A. Caffarelli, Louis Nirenberg, and Joel Spruck, *Correction to: "The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation" [Comm. Pure Appl. Math.* ***37*** *(1984), no. 3, 369–402; MR 87f:35096]*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), no. 5, 659–662.

[5] Sophie Chen, *Local Estimates for Some Fully Nonlinear Elliptic Equations*, `arXiv:math.AP/0510652`.

[6] Kai-Seng Chou and Xu-Jia Wang, *A variational theory of the Hessian equation*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 9, 1029–1064.

[7] Lars Gårding, *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8** (1959), 957–965.

[8] Claus Gerhardt, *Closed Weingarten hypersurfaces in Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 3, 612–641.

[9] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[10] Bo Guan, *The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 12, 4955–4971.

[11] Pengfei Guan and Guofang Wang, *Local estimates for a class of fully nonlinear equations arising from conformal geometry*, Internat. Math. Res. Notices (2003), no. 26, 1413–1432.

[12] Pengfei Guan and Xu-Jia Wang, *On a Monge-Ampère equation arising in geometric optics*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 2, 205–223.

[13] Gerhard Huisken and Carlo Sinestrari, *Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces*, Acta Math. **183** (1999), no. 1, 45–70.

[14] Nina M. Ivochkina, *Description of cones of stability generated by differential operators of Monge-Ampère type*, Mat. Sb. (N.S.) **122 (164)** (1983), no. 2, 265–275.

[15] Nicolai V. Krylov, *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 7, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[16] Gary M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.

[17] Gary M. Lieberman and Neil S. Trudinger, *Nonlinear oblique boundary value problems for nonlinear elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), no. 2, 509–546.

[18] Mi Lin and Neil S. Trudinger, *On some inequalities for elementary symmetric functions*, Bull. Austral. Math. Soc. **50** (1994), no. 2, 317–326.

[19] Pierre-Louis Lions and Neil S. Trudinger, *Linear oblique derivative problems for the uniformly elliptic Hamilton-Jacobi-Bellman equation*, Math. Z. **191** (1986), no. 1, 1–15.

[20] Pierre-Louis Lions, Neil S. Trudinger, and John I. E. Urbas, *The Neumann problem for equations of Monge-Ampère type*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 4, 539–563.

[21] Dragoslav S. Mitrinović, *Analytic inequalities*, In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wisenschaften, Band 1965, Springer-Verlag, New York, 1970.

[22] Oliver C. Schnürer, *The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces in Lorentz manifolds*, Math. Z. **242** (2002), no. 1, 159–181.

[23] Oliver C. Schnürer, *Translating solutions to the second boundary value problem for curvature flows*, Manuscripta Math. **108** (2002), no. 3, 319–347.

[24] Oliver C. Schnürer and Hartmut R. Schwetlick, *Translating solutions for Gauß curvature flows with Neumann boundary conditions*, Pacific J. Math. **213** (2004), no. 1, 89–109, `arXiv:math.AP/0302345`.

[25] Oliver C. Schnürer, *Schouten tensor equations in conformal geometry with prescribed boundary metric*, Electron. J. Differential Equations (2005), No. 81, 1–17 (electronic).

[26] Weimin Sheng, Neil S. Trudinger, and Xu-Jia Wang, *The Yamabe problem for higher order curvatures*.

[27] Michael E. Taylor, *Partial differential equations. III*, Applied Mathematical Sciences, vol. 117, Springer-Verlag, New York, 1997, Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original.

[28] Neil S. Trudinger, *Boundary value problems for fully nonlinear elliptic equations*, Miniconference on nonlinear analysis (Canberra, 1984), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 8, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1984, pp. 65–83.

[29] Neil S. Trudinger and Xu-Jia Wang, *Boundary regularity for the Monge-Ampere and affine maximal surface equations*, `arXiv:math.DG/0509342`.

[30] Neil S. Trudinger, *On the Dirichlet problem for Hessian equations*, Acta Math. **175** (1995), no. 2, 151–164.

[31] John Urbas, *Oblique boundary value problems for equations of Monge-Ampère type*, Calc. Var. Partial Differential Equations **7** (1998), no. 1, 19–39.