Universität Konstanz *WS 10/11*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

ÜBUNGEN ZU **Differential-Algebraische Gleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/dae.html

Blatt 1 **Abgabe: 5.11.2010**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ und $\| \cdot \|$ die dadurch induzierte Norm. Vorgelegt sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$, $f \in C(I \times D, \mathbb{R}^N)$, $D \subset \mathbb{R}^N$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. f erfülle die einseitige Lipschitzbedingung

$$\langle f(t,u) - f(t,v), u - v \rangle \quad \leq \quad l \|u - v\|^2, \quad u, v \in D,\ t \in I.$$

Ferner seien y, $z : I \to D$ Lösungen der Differentialgleichung mit $y(t_0) = y_0$ und $z(t_0) = z_0$. Zeigen Sie:

$$\|y(t) - z(t)\| \quad \leq \quad \exp(l(t - t_0))\, \|y_0 - z_0\|, \quad t \in I.$$

b) Es sei $f(y) = -y^3$ und $D = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f die einseitige Lipschitzkonstante $l = 0$ besitzt, aber nicht klassisch zweiseitig Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wie in Aufgabe 1 sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^N$ und $\| \cdot \|$ die dadurch induzierte Norm.

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{N,N}$, und es sei

$$\mu(A) \quad := \quad \lim_{t \to 0} \frac{\|I + tA\| - 1}{t}$$

die logarithmische Norm von A. Zeigen Sie:

$$\mu(A) \quad = \quad \sup \left\{ \frac{\langle A\xi, \xi \rangle}{\|\xi\|^2};\ \xi \neq 0 \right\}.$$

Hinweis: Es gilt

$$\frac{||I + tA|| - 1}{t} = \sup \left\{ \frac{||\xi + tA\xi|| - ||\xi||}{t||\xi||}; \xi \neq 0 \right\}.$$

b) Es sei jetzt $\langle x, y \rangle = x^T y$ und $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie:

$$\mu_2(A) \quad = \quad \lambda_{max} \left[\frac{A + A^T}{2} \right].$$

Dabei bezeichnet $\lambda_{max}[B]$ den größten Eigenwert der symmetrischen Matrix B.

c) Vorgelegt sei das Differentialgleichungssystem $y' = -A_{\Delta x} y$ mit

$$A_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1,N-1}, \quad N\Delta x = 1.$$

$y' = -A_{\Delta x} y$ ist das Liniensystem für die Gleichung $u_t = u_{xx}$, $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$ mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t \ge 0$. Berechnen Sie die einseitige und die zweiseitige Lipschitzkonstante l bzw. L von $f(y) = -A_{\Delta x} y$ bezgl. $\|\cdot\|_2$ und analysieren Sie das Verhalten von l und L für $\Delta x \to 0$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass $A_{\Delta x}$ die Eigenwerte

$$\lambda_i \quad = \quad \frac{2}{\Delta x^2} \left(1 - \cos \frac{i\pi}{N} \right), \quad i = 1, \ldots N-1$$

besitzt.

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Das Pendel mit einer masselosen Feder und der Hookeschen Konstante $\frac{1}{\varepsilon^2}$ lautet

$$\begin{aligned} p' &= u \\ q' &= v \\ u' &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{p}{r} (r-1) \\ v' &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{q}{r} (r-1) - 1 \end{aligned}$$

mit $r = \sqrt{p^2 + q^2}$. Lösen Sie das System mit der `Matlab` -Routine `ode15s` für die Anfangswerte $(p(0), q(0), u(0), v(0)) = (1, 0, 0, 0)$ sowie $(p(0), q(0), u(0), v(0)) = (0.85, 0, 0, 0)$ auf dem Zeitintervall $[0, 10]$ mit $\varepsilon = 10^{-2}$. Setzen Sie `RelTol = AbsTol = 1e-4` in `ode15s`. Zeichnen Sie die Komponente $p(t)$.

Hinweise für die praktische Aufgabe:

- Die Programmieraufgabe ist in Zweiergruppen zu bearbeiten.
- In den Programmen muss jeder Schritt angemessen kommentiert sein: Was beschreibt die Variable? Worüber läuft die Schleife?...
- Jede Gruppe präsentiert in den Übungen die Programmieraufgabe.
- Die Abgabe erfolgt per Email an `gilbert.koch@uni-konstanz.de`.