Universität Konstanz *WS 10/11*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

ÜBUNGEN ZU **Differential-Algebraische Gleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/dae.html

Blatt 2 **Abgabe: 19.11.2010**

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Vorgelegt sei das Problem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \eta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \eta t \\ 0 & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

wobei f und g C^2-Funktionen sind und $\eta \in \mathbb{R}$ ist.

1. Zeigen Sie: Das System hat für alle Werte von η den Differentiationsindex 2.
2. Geben Sie die zugehörige unterliegende Differentialgleichung explizit an.
3. Bestimmen Sie die exakte Lösung.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Die Bewegung eines kleinen Balls der Masse 1, der an einem masselosen Faden aufgehängt ist, kann durch die kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) des Balles ausgedrückt werden. Mit dem Bewegungsgesetz von Newton gilt:

$$\ddot{x}_1 = -2\lambda x_1 \,, \tag{1}$$
$$\ddot{x}_2 = -2\lambda x_2 + g \,, \tag{2}$$

wobei $\lambda(t)$ einen hinreichend glatten Lagrange-Multiplikator und g die skalierte Gravitationskraft bezeichnet. Besitzt der Faden die Länge 1, so erhalten wir die zusätzliche Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \,. \tag{3}$$

Bestimmen Sie den Index und die zugehörige unterliegende Differentialgleichung des Problems (1)-(3). Welche Bedingungsgleichungen müssen konsistente Anfangswerte

$$(x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \lambda(t_0))$$

erfüllen?

<u>Aufgabe 3</u> (6 Punkte)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$u' = f(u,v)\,, \qquad u(t_0) = u_0\,, \tag{4}$$

$$0 = g(u)\,, \qquad v(t_0) = v_0\,, \tag{5}$$

$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^l$ glatt. Ferner besitze die Matrix $Dg(u)\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \in \mathbb{R}^{l,l}$ in der Umgebung der Lösung $(\overline{u}(t), \overline{v}(t))$, $t \in [t_0, t_e]$ eine normbeschränkte Inverse. Zeigen Sie, dass das System (4)-(5) den Störungsindex $i_S = 2$ besitzt.

<u>Hinweis:</u> Man betrachte ein geeignetes Index 1 System und benutze Satz 6, §2 aus der Vorlesung.