Universität Konstanz *WS 10/11*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp, G. Koch

ÜBUNGEN ZU **Differential-Algebraische Gleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/dae.html

Blatt 3 **Abgabe: 03.12.2010**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(i) Vorgelegt sei die DAE

$$Au' + Bu = q(t) \tag{1}$$

mit regulärem Matrixbüschel $\lambda A + B$ und q hinreichend glatt. Es sei i_K der Kroneckerindex des Matrixbüschels und i_D der Differentiationsindex von (1). Zeigen sie: $i_D = i_K$.

(ii) Wir betrachten das Index-2 Problem

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z) \\ 0 &= g(y) \end{aligned}$$

welches mit $z = u'$, $v = (y, u)^T$ die folgende Form erhält:

$$F(v', v) = \begin{pmatrix} y' - f(y, u') \\ g(y) \end{pmatrix} = 0\,.$$

Beweisen Sie, dass das Matrixbüschel $\lambda \frac{\partial F}{\partial v'} + \frac{\partial F}{\partial v}$ immer den Index 1 besitzt, falls $Dg \frac{\partial f}{\partial z}$ invertierbar ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Definition: Wir definieren den Index einer Matrix $C \in \mathbb{R}^{N,N}$, bezeichnet durch $Ind(C)$, als die kleinste nicht-negative ganze Zahl m mit

$$Ker(C^m) = Ker(C^{m+1}),$$

wobei wir $C^0 := I$ setzen.

Sei $\lambda A + B$, $A, B \in \mathbb{R}^{N,N}$, ein reguläres Matrixbüschel, und sei λ ein Wert, so dass $(\lambda A + B)^{-1}$ existiert. Wir definieren dann die Matrizen

$$\begin{aligned} \hat{A}_\lambda &:= (\lambda A + B)^{-1} A\,, \\ \hat{B}_\lambda &:= (\lambda A + B)^{-1} B\,. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie: $\hat{B}_\lambda = I_N - \lambda \hat{A}_\lambda$ und $\hat{A}_\lambda \hat{B}_\lambda = \hat{B}_\lambda \hat{A}_\lambda$.

(ii) Sei μ ein weiterer Wert, so dass $(\mu A+B)^{-1}$ existiert und seien $\hat{A}_\mu$ und $\hat{B}_\mu$ wie oben definiert. Zeigen Sie zunächst

$$\hat{A}_\lambda = (\lambda\hat{A}_\mu + \hat{B}_\mu)^{-1}\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu(\lambda\hat{A}_\mu + \hat{B}_\mu)^{-1}$$

und folgern Sie dann $Ind(\hat{A}_\lambda) = Ind(\hat{A}_\mu)$.

Aussage (ii) rechtfertigt die Definition des Indexes für reguläre Matrixbüschel $\lambda A + B$:

$$Ind(A,B) := Ind(\hat{A}_\lambda)\,.$$

(iii) Weisen Sie nach, dass für eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{R}^{N,N}$ gilt:

$$\begin{aligned} Ind(A,B) &= Ind(TA,TB)\,,\\ Ind(A,B) &= Ind(AT,BT)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie für die zweite Gleichung zunächst $Ind(C) = Ind(T^{-1}CT)$, $C \in \mathbb{R}^{N,N}$.

(iv) Zeigen Sie, dass obige Definition des Indexes eines regulären Matrixbüschels mit der Definition des Kroneckerindexes der Vorlesung für Matrixbüschel in Kronecker-Normalform übereinstimmt. Folgern Sie insgesamt die Wohldefiniertheit der Definition der Vorlesung.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differential-Algebraischen Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -5\\ 0 & -3 & -4 & 7\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u' + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & -10\\ 0 & -5 & -9 & 13\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} -17\\ 22\\ -3\\ -3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die `Matlab` Befehle `eig` und \ dürfen benutzt werden.